1772

De solidis quorum superficiem in planum explicare licet

Leonhard Euler

DE
SOLIDIS QVORVM
SVPERFICIEM IN PLANVM EXPLICARE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Notiſſima eſt proprietas cylindri et coni, qua eorum ſuperficiem in planum explicare licet atque adeo haec proprietas ad omnia corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſes figuram habeant quamcunque; contra vero ſphaera hac proprietate deſtituitur, quum eius ſuperficies nullo modo in planum explicari neque ſuperficie plana obduci queat; ex quo naſcitur quaeſtio aeque curioſa ac notatu digna, vtrum praeter conos et cylindros alia quoque corporum genera exiſtant, quorum ſuperficiem itidem in planum explicare liceat nec ne? quam ob rem in hac diſſertatione ſequens conſiderare conſtitui Problema:

Inuenire aequationem generalem pro omnibus ſolidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, cuius ſolutionem variis modis ſum agreſſurus.

SOLVTIO PRIMA.

ex meris principiis Analyticis petita.

Tab. I. Fig. 1. 2. Sit Z punctum quodcunque in superficie solidi quaesiti, cuius locus more solito per has ternas coordinatas inter se normales $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ exprimatur, ita vt aequatio inter has coordinatas sit inuestiganda, qua problemati satisfiat. Deinde concipiamus superficiem huius solidi, iam in planum esse explicatam eamque in Fig. 2. repraesentari, in qua punctum illud Z incidat in V, cuius locus per binas coordinatas orthogonales ita definiatur vt sit, $OT = t$ et $TV = u$ atque manifestum est, ternas coordinatas priores x, y et z certo quodam modo ab his binis t et u pendere debere, ideoque singulas earum tamquam certas functiones istarum t et u spectari posse.

3. Quo hanc conditionem commodius in calculum introducamus eam in differentialibus consideremus et quoniam tam x, quam y et z sunt functiones binarum variabilium t et u, earum differentialia his formulis definiamus:

$$dx = l\,dt + \lambda\,du;\ dy = m\,dt + \mu\,du \text{ et } dz = n\,dt + \nu\,du$$

vbi quum litterae l, m, n et λ, μ, ν itidem certas functiones binarum variabilium t et u significent, ex natura huiusmodi functionum constat esse debere:

$$\left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right);\ \left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right) \text{ et } \left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right).$$

4. Iam

4. Iam in superficie explanata praeter punctum V duo alia infinite propinqua v et v' contemplemur, pro quorum illo coordinatae sint $OT = t$ et $Tv = u + du$ pro hoc vero $Ot = t + dt$ et $tv' = u$, ita vt puncta V et v communem habeant abscissam $OT = t$, at puncta V et v' communem applicatam $= u$. Hinc iunctis lineolis Vv' et vv' latera trianguli elementaris Vvv' ita determinantur, vt sit $Vv = du$, $Vv' = dt$, et $vv' = \sqrt{(du^2 + dt^2)}$, atque nunc facile intelligitur, hoc idem triangulum in superficie solidi quaesiti reperiri debere. Tab. I. Fig. 2.

5. Sint igitur in superficie solidi puncta z et z', quae punctis v et v' respondeant, atque videamus quo modo pro illis punctis z et z' ternae coordinatae se sint habiturae? Quemadmodum autem ipsum punctum Z per has tres coordinatas primam $= x$ secundam $= y$ et tertiam $= z$ definitur, quae singulae sunt functiones binarum t et u, quoniam pro puncto v abscissa t manet, applicata vero u suo differentiali du augetur, pro puncto solidi z ternae coordinatae ita se habebunt:

$$\mathrm{I}^{ma}\ x + \lambda du \quad \mathrm{II}^{da}\ y + \mu du \quad \text{et} \quad \mathrm{III}^{tia}\ z + \nu du$$

simili modo quia pro puncto v' applicata u manet abscissa vero t suo differentiali dt augetur, pro puncto z' ternae coordinatae erunt:

$$\mathrm{I}^{ma}\ x + l dt \quad \mathrm{II}^{da}\ y + m dt \quad \text{et} \quad \mathrm{III}^{tia}\ z + n dt.$$

6. Constat autem si pro puncto quocunque in superficie solidi coordinatae fuerint x, y et z pro

alio vero puncto proximo x', y', et z', tum eorum punctorum distantiam fore $= \sqrt{((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2)}$; hinc pro triangulo Zzz' habebimus singula eius latera 1°. $Zz = du \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}$; 2°. $Zz' = dt \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}$ et 3^{tio} $zz' = \sqrt{((\lambda du - l dt)^2 + (\mu du - m dt)^2 + (\nu du - n dt)^2)}$ siue $zz' = \sqrt{(dt^2(ll + mm + nn) + du^2(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu) - 2 dt du (l\lambda + m\mu + n\nu))}$.

7. Iam quum superficies solidi prorsus debeat conuenire cum figura plana (Fig. 2.) necesse est, vt triangula Zzz' et Vvv' sint non solum aequalia, sed etiam similia ideoque latera homologa aequalia, scilicet:

$$\text{I}^\circ.\ Zz = Vv,\quad \text{II}^\circ.\ Zz' = Vv' \text{ et } zz' = vv'$$

vnde tres sequentes nanciscimur aequationes

$$\text{I}^\circ.\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1;\quad \text{II}^\circ.\ l^2 + m^2 + n^2 = 1;$$

$$\text{III}^\circ.\ dt^2(l^2 + m^2 + n^2) + du^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2 dt du (l\lambda + m\mu + n\nu) = dt^2 + du^2$$

tertia autem ob binas priores reducitur ad hanc

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

quibus tribus aequationibus solutio problematis nostri continetur, ex quo intelligitur eam reduci ad sequens problema analyticum:

Propositis duabus variabilibus t *et* u *earum sex inuenire functiones* l, m, n *et* λ, μ, ν *ita comparatas, vt sex sequentibus conditionibus satisfiat*

$$\text{I}^\circ.\ \left(\frac{dl}{du}\right) = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right);\quad \text{II}^\circ.\ \left(\frac{dm}{du}\right) = \left(\frac{d\mu}{dt}\right);\quad \text{III}^{tio}\ \left(\frac{dn}{du}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right)$$

$$\text{IV}^\circ.\ ll + mm + nn = 1;\quad \text{V}^\circ.\ \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;$$

$$\text{VI}^\circ.\ l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

quod

quod problema in se consideratum longe videtur difficillimum, cuius tamen solutionem satis concinnam infra exhibere licebit.

SECVNDA SOLVTIO
ex principiis Geometricis petita.

8. Vt hanc solutionem a primis principiis repetamus, consideremus corpora vel prismatica vel pyramidica, quae basibus exceptis charta obducta intelligantur, atque in hac charta plicae rectilineae deprehendentur vel inter se parallelae, vel ad certum punctum verticem scilicet pyramidis conuergentes, quae lineae rectae quotcunque fuerint, litteris Aa, Bb, Cc, Dd etc. designentur. Quodsi ergo charta in planum expandatur, in ea eaedem lineae rectae Aa, Bb, Cc etc. occurrent, eruntque vel inter se parallelae vel ad certum punctum conuergentes. Vnde vicissim si super charta plana huiusmodi lineae rectae ducantur, secundum quas chartam plicare liceat, ea certo corpori vel prismatico vel pyramidico obducendo erit apta.

9. Quin etiam in ista charta plana rectas Aa, Bb, Cc etc. pro lubitu ducere licebit, ita vt neque inter se sint parallelae neque ad certum punctum conuergant, dummodo se mutuo nusquam decussent, quemadmodum (Fig. 3.) declarat quocunque enim modo ista charta secundum has rectas plicetur, semper concipere licebit eiusmodi solidum, cui ista charta plicata adaptari possit. Ex quo patet praeter Tab. I. Fig. 3.

corpora

corpora prismatica et pyramidica, alia quoque dari corporum genera quae hoc modo charta obduci queant, quorumque adeo ſuperficiem in planum explicare liceat.

10. In ſuperficie ergo horum corporum dabuntur etiam quotcunque lineae rectae A*a*, B*b*, C*c*, D*d* etc. quae etiamſi neque inter ſe ſint parallelae, neque ad quodpiam punctum conuergentes, tamen ita erunt comparatae, vt binae quaeque proximae veluti A*a* et B*b*, vel B*b* et C*c*, vel C*c* et D*d* etc. niſi ſint parallelae, productae ſaltem in vno puncto concurrant, niſi enim hoc eueniret, ſpatium inter huiusmodi binas rectas proximas in ſuperficie corporis interceptum non foret planum, neque propterea ipſam ſuperficiem in planum explicare liceret, quamuis in ea darentur quotcunque lineae rectae A*a*, B*b*, C*c* etc. Ex quo concludimus ad corpora ſcopo noſtro ſatisfacientia non ſufficere, vt ſuper iis quotcunque rectas A*a*, B*b*, C*c* ducere liceat, ſed inſuper imprimis requiri vt binae proximae in eodem plano exiſtant, ſpatiumque inter eas interceptum ipſum ſit planum.

11. Nunc iam in infinitum augeamus rectas illas A*a*, B*b*, C*c* etc. vt corpus noſtrum obtineat ſuperficiem vbique incuruatam, quemadmodum Problema noſtrum ob continuitatis legem poſtulat. Atque nunc quidem ſtatim apparet, ſuperficiem huiusmodi corporum ita comparatam eſſe debere, vt ex quolibet in ea ſumto puncto vna ſaltem linea recta

educi

educi possit, quae tota in ipsa superficie sit sita, verum haec conditio sola nondum indolem Problematis nostri exhaurit, sed insuper necesse est, vt quaeuis huiusmodi binae rectae inter se proximae in eodem plano sint constitutae, hoc est vt nisi sint parallelae, eae saltem productae in vno puncto concurrant. Quare si singulae illae rectae hoc modo ad concursum vsque producantur, omnia concursuum puncta in certa quadam linea curua sita reperientur, quae cum tota non sit in eodem plano duplici curuatura erit praedita atque ita comparata, vt singula eius elementa si producantur, ipsas illas rectas $A a$, $B b$, $C c$ supra memoratas in superficie corporis exhibeant.

12. Quemadmodum igitur quoduis corpus nostro Problemati conueniens ad certam quandam lineam curuam duplicis curuaturae deducit; ita vicissim sumta pro lubitu huiusmodi linea curua ex ea corpus determinare poterimus, quod problemati nostro satisfaciet. Talis autem linea curua primo proiiciatur in plano tabulae, sitque eius proiectio $a U u$ Tab. I. Fig. 4. pro qua ponamus abscissam $A T = t$ et applicatam $T U = u$, ita vt aequatio inter t et u tamquam data spectetur, sitque recta $U M$ tangens huius curvae in puncto U, recta vero $u m$ tangens in puncto proximo u; hoc posito sit $b V v$ ipsa curua duplicis curuaturae, cuius applicata ad planum nostrum normalis ponatur $U V = v$, sitque v proximum in eadem curua punctum, atque ex vtroque puncto V, v educantur tangentes quarum illa $V S$ rectae $U M$ in puncto S, haec vero $v s$ rectae $u m$ in

 puncto

puncto s occurrat. Hic quidem ductu tangentium proximarum in punctis u et v carere potuissemus, sed quia in sequentibus iis opus erit, hic eas in Figura indicare visum est.

13. Quum igitur natura curuae bVv duplici aequatione inter ternas coordinatas $AT = t$, $TU = u$ et $UV = v$ exprimatur, tam littera u, quam v vt functio ipsius t spectari poterit, vnde simul definietur positio vtriusque tangentis UM et VS, quocirca vocemus angulos $TUM = \zeta$ et $UVS = \theta$, atque posito elemento $Tt = dt$ erit $du = \frac{dt}{tang.\,\zeta}$, $Uu = \frac{dt}{sin.\,\zeta}$, tum vero $dv = \frac{dt}{sin.\,\zeta\; tang.\,\theta}$ ac denique elementum curuae $Vv = \frac{dt}{sin.\,\zeta\; sin.\,\theta}$. Pro situ autem tangentium habebimus $TM = u\, tang.\,\zeta$; $UM = \frac{u}{cos.\,\zeta}$, at recta $US = v\, tang.\,\theta$ et $VS = v\, sec.\,\theta = \frac{v}{cos.\,\theta}$.

14. Quoniam nunc tota recta VS sita est in superficie corporis quod quaerimus, capiamus in ea punctum quodcunque indefinitum Z, vnde in planum tabulae demisso perpendiculo ZY et ex Y ad axem AT ducta normali YX habebimus pro superficie quaesita ipsas ternas coordinatas, quas supra sumus contemplati, scilicet $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, inter quas ergo debitam aequationem inuestigari oportet, qua huius superficiei natura exprimatur.

15. Hunc in finem vocemus interuallum indefinitum $VZ = s$, quae ergo est quantitas variabilis neutiquam a puncto V pendens, ideoque probe distinguen-

ſtinguenda a variabili t, cuius functiones non ſolum ſunt binae applicatae $TU = u$ et $UV = v$, ſed etiam bini anguli ζ et θ. Hinc autem adipiſcimur $ZY = z = v - s \operatorname{cof.}\theta$ et interuallum $UY = s \operatorname{fin.}\theta$, vnde porro concludimus $XY = y = u - s \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\zeta$ et $XT = s \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\zeta$, ſicque tandem obtinemus abſciſſam $AX = x = t - s \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\zeta$ ita vt per binas variabiles t et s, tres noſtrae coordinatae hoc modo ſuccincte determinentur:

I°. $x = t - s \operatorname{fin.}\theta \operatorname{fin.}\zeta$ II°. $y = u - s \operatorname{fin.}\theta \operatorname{cof.}\zeta$
III. $z = v - s \operatorname{cof.}\theta$.

16. Praeter omnem igitur exſpectationem hic vſu venit, vt formulas adeo algebraicas pro ternis coordinatis x, y, z elicuerimus, ſiquidem pro quantitatibus u et v functiones algebraicae ipſius t accipiantur. Hae enim functiones penitus arbitrio noſtro permittuntur, iis autem aſſumtis, bini anguli ζ et θ ita determinantur, vt ſit $\operatorname{tang.}\zeta = \frac{dt}{du}$ vel $\operatorname{fin.}\zeta = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$ et $\operatorname{cof.}\zeta = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$, tum vero $\operatorname{tang.}\theta = \frac{dt}{dv \cdot \operatorname{fin.}\zeta} = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{dv}$, ideoque $\operatorname{fin.}\theta = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{\sqrt{(dt^2 + du^2 + dv^2)}}$ et $\operatorname{cof.}\theta = \frac{dv}{\sqrt{(dt^2 + du^2 + dv^2)}}$. Quodſi autem viciſſim bini anguli ζ et θ per variabilem t, fuerint dati, ipſae applicatae u et v, per ſequentes formulas integrales reperientur expresſae $u = \int \frac{dt}{\operatorname{tang.}\zeta}$ et $v = \int \frac{dt}{\operatorname{fin.}\zeta \operatorname{tang.}\theta}$.

17. In his ergo formulis omnia plane ſolida, quorum ſuperficiem in planum explicare licet contineri neceſſe eſt. Ante omnia igitur operae pre-

tium erit ostendere quomodo quaeuis corpora conica in iis contineantur, siquidem cylindrica in conicis iam continentur, vertice in infinitum remoto. Sit igitur punctum V vertex coni, qui quum sit fixus coordinatae t, u et v constantes habebunt valores. Quoniam igitur nihil impedit, quo minus hic vertex in ipso puncto fixo A accipiatur, ponere poterimus $t = 0$, $u = 0$ et. $v = 0$, tum autem ob tang. $\zeta = \frac{dt}{du}$ et tang. $\theta = \frac{dt}{dv.\,\text{sin.}\,\zeta} = \frac{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}{dv}$, hi anguli ζ et θ prodeunt indefiniti, ita tamen, vt alter tamquam functio quaedam alterius spectari possit, quandoquidem omnia quae ad positionem rectarum VS pertinent, ad vnicam variabilem sunt referenda.

18. Quum igitur sit $t = 0$, $u = 0$ et $v = 0$ habebimus:

I°. $x = -s$ sin. θ sin. ζ, II°. $y = -s$ sin. θ cos. ζ et III^{tio} $z = -s$ cos. θ,

vnde fit $\frac{x}{y} =$ tang. ζ et $\frac{x}{z} =$ tang. θ sin. ζ, ex illa colligitur sin. $\zeta = \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}$, ideoque ex hac tang. $\theta = \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z}$; quum igitur tang. θ functioni cuicunque ipsius tang. ζ aequetur, habebimus talem aequationem: $\frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z} = \Phi : (\frac{x}{y})$, sicque quantitas $\frac{\sqrt{(xx + yy)}}{z}$ aequabitur functioni homogeneae nullius dimensionis ipsarum x et y hincque porro ipsa quantitas z aequabitur functioni homogeneae vnius dimensionis ipsarum x et y, siue quod eodem redit aequatio inter x, y et z, ita erit comparata, vt in

ea

ea tres variabiles x, y et z vbique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quodsi vna coordinatarum x, y, z in infinitum abeat, aequatio pro solido duas tantum reliquas implicabit coordinatas, quod est criterium corporum cylindricorum.

19. Aliis solidis nostro problemati satisfacientibus hic euoluendis non immoramur; quum infra vbi tertiam Methodum trademus, multo facilius cuncta huiusmodi corporum genera cognoscere queamus. Interea dum ista secunda Methodus, tam facilem nobis suppeditauit solutionem, cum per Methodum priorem vix vllam solutionem sperare licuisset; nunc etiam priorem solutionem vberius euoluere atque adeo formulas illas analyticas primo intuitu summopere arduas, resoluere poterimus vnde in Analysin plurimum lucis inferetur. Ad hoc praestandum tantum opus erit, vt hanc posteriorem solutionem ad elementa prioris sollicite reuocemus.

Applicatio Methodi posterioris ad solutionem priorem.

20. Quoniam in posteriori solutione iam formulas pro ternis coordinatis x, y et z quibus natura solidi continetur, elicuimus, in eo nobis erit elaborandum vt etiam formulas pro figura plana in quam superficies solidi explicatur, inuestigemus. Hic ante omnia curua illa duplicis curuaturae $b\,V\,v$ accuratius est perpendenda, quippe quae per explicationem illius superficiei etiam ad planum perducitur.

tur. Quum autem haec curua per inflexionem infinitis modis ad planum reduci atque adeo in lineam rectam extendi queat, ante omnia inquirendum est, quanam lege hanc reductionem ad planum fieri oporteat. Ex superioribus autem manifestum est, hanc reductionem ita fieri debere, vt binae quaeque tan-
Tab. I. Fig. 4. gentes proximae V S, et $v\,s$ eundem situm inter se conseruent, siue vt angulus inter eas interceptus $S\,V\,s$ maneat idem. Scilicet ipsa linea curua $B\,V\,v$ ita ad planum est redigenda, vt bina eius quaeque elementa proxima eandem inclinationem inter se conseruent.

21. Praecipuum igitur negotium huc redit, vt angulum infinite paruum $S\,V\,s$ inuestigemus, quem in finem ab angulo $M\,U\,m$ est exordiendum. Quum autem sit angulus $T\,U\,M = \zeta$, et angulus $t\,u\,m = \zeta + d\,\zeta$, manifesto sequitur angulus $M\,U\,m = d\,\zeta$, deinde quia supra iam inuenimus $U\,S = v\,\mathrm{tang.}\,\theta$, erit ex natura differentialium $u\,s = v\,\mathrm{tang.}\,\theta + d.(v\,\mathrm{tang.}\,\theta) = v\,\mathrm{tang.}\,\theta + d\,v.\,\mathrm{tang.}\,\theta + \frac{v\,d\,\theta}{\mathrm{cof.}\,\theta^2}$, vbi $d\,v = \frac{d\,t}{\mathrm{fin.}\,\zeta\,\mathrm{tang.}\,\theta}$, quum igitur sit $U\,u = \frac{d\,t}{\mathrm{fin.}\,\zeta}$, erit $U\,s = v\,\mathrm{tang.}\,\theta + d\,v\,\mathrm{tang.}\,\theta + \frac{v\,d\,\theta}{\mathrm{cof.}\,\theta^2} - \frac{d\,t}{\mathrm{fin.}\,\zeta} = v\,\mathrm{tang.}\,\theta + \frac{v\,d\,\theta}{\mathrm{cof.}\,\theta^2}$. Ex S itaque in $U\,s$ ducatur perpendiculum $S\,r$, vt habeatur $r\,s = \frac{v\,d\,\theta}{\mathrm{cof.}\,\theta^2}$, tum vero erit $S\,r = v\,d\,\zeta\,\mathrm{tang.}\,\theta$, vnde etiam elementum $S\,s$ definire liceret, siquidem eo opus haberemus.

22. Nunc ex puncto r in tangentem $v\,s$ quoque perpendiculum ducamus $r\,\varrho$, vt ducta $S\,\varrho$ fiat norma-

normalis in $v s$, vbi notandum triangulum $S r \varrho$ fore rectangulum ad r, quia $S r$ ad ipſum planum $s U V$ eſt normalis. Quia nunc angulus $r s \varrho = 90^\circ - \theta$ erit $r \varrho = s r . \text{ſin.}\, r s \varrho = \frac{v\, d\theta}{\text{coſ.}\,\theta}$, vnde colligitur $S \varrho = \sqrt{(v v d \zeta^2 \text{tang.}\,\theta^2 + \frac{v v d \theta^2}{\text{coſ.}\,\theta^2})} = \frac{v}{\text{coſ.}\,\theta} \sqrt{(d \zeta^2 \text{ſin.}\,\zeta^2 + d\theta^2)}$. Quum igitur ſit $V S = \frac{v}{\text{coſ.}\,\theta}$, hinc concluditur angulus $S V s = \frac{S \varrho}{VS} = \sqrt{(d \zeta^2 \text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2)}$.

23. Sic itaque inuenimus angulum $S V s$, quo bina elementa curuae proxima inter ſe inclinantur ex quo promtiſſime radius oſculi huius curuae in puncto V definiri poteſt, quippe qui eſt $= \frac{V v}{S V s} = \frac{d t}{\text{ſin.}\,\zeta . \text{ſin.}\,\theta \sqrt{(d \zeta^2 . \text{ſin.}\,\theta^2 + d \theta^2)}}$ quod ergo negotium ob duplicem curuaturam non impeditur, quae in tranſitu monuiſſe ſat eſt. Quoniam autem hic cardo rei in hoc angulo elementari $S V s$ verſatur, vocemus hunc angulum $S V s = d\omega$, ita vt ſit $d\omega = \sqrt{(d \zeta^2 \text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2)}$, ſiue $d\omega^2 - d\theta^2 = d\zeta^2 \text{ſin.}\,\theta^2$, vbi quum ambo anguli ζ et θ per variabilem t determinentur, cuius etiam functiones ſunt ambae applicatae u et v, patet quoque angulum ω tamquam functionem eiusdem variabilis t ſpectari debere.

24. Iam ſecundum praecepta ſupra data curva illa duplicis curuaturae $b V v$, in plano ſit deſcripta, ita vt angulus inter tangentes proximas interceptus $S V s$ ſit $= d\omega$, atque hac curua ad axem $O P$ per applicatam $P V$ relata, euidens eſt fore angulum $P V S = \omega$. Statuamus autem has coordinatas $O P = p$ et $P V = q$, atque habebimus $\frac{d p}{d q} = \text{tang.}\,\omega$ Tab. I. Fig. 5.

et

et elementum curuae $Vv = \frac{dp}{\sin. \omega}$ at vero per coordinatas praecedentes t, u et v cum angulis ζ et θ, erat idem elementum $Vv = \frac{dt}{\sin. \zeta \sin. \theta}$, vnde consequimur $dt \sin. \omega = dp \sin \zeta \sin. \theta$, quae cum illa aequatione $\frac{dp}{dq} = \text{tang.}\ \omega$ coniuncta, dabit pro praesentibus coordinatis p et q sequentes valores integrales $p = \int \frac{dt. \sin. \omega}{\sin. \zeta. \sin. \theta}$ et $q = \int \frac{dt. \cos. \omega}{\sin. \zeta. \sin. \theta}$ inuentis his quantitatibus p et q, quae itidem sunt functiones eiusdem variabilis t, capiatur interuallum $VZ = s$, quae est altera variabilis in calculum introducenda atque ex puncto Z ad axem demisso perpendiculo ZT, inuenimus $OT = p - s \sin. \omega$ et $TZ = q - s \cos. \omega$.

25. Quoniam igitur pro puncto Z ad planum reducto determinationem sumus adepti, ponamus eius coordinatas $OT = T$ et $TZ = U$, quae ita per binas variabiles t et s definiuntur, vt sit

$$T = p - s \sin. \omega = \int \frac{dt. \sin. \omega}{\sin. \zeta. \sin. \theta} - s \sin. \omega$$

$$U = q - s \cos. \omega = \int \frac{dt. \cos. \omega}{\sin. \zeta \sin. \theta} - s \cos. \omega$$

vbi notandum angulum ω ita pendere ab angulis ζ et θ, vt sit $d\omega = V(d\zeta^2 \sin. \theta^2 + d\theta^2)$. Sunt vero hae coordinatae T et U eaedem, quas in prima solutione literis t et u designauimus, vnde eadem mutatione ibi facta, formulae pro solido ibi inuentae ad has redeunt

$$dx = l\,dT + \lambda\,dU;\quad dy = m\,dT + \mu\,dU;\quad dz = n\,dT + \nu\,dU$$

manentibus conditionibus quas ibi inuenimus scilicet:

$$ll + mm + nn = 1;\quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1 \quad \text{et} \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

26.

26. Hic autem pro iisdem coordinatis solidi, x, y et z, sequentes inuenimus valores:

$$x=t-s\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\zeta;\ y=u-s\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\zeta \text{ et } z=v-s\,\text{cof.}\,\theta$$

qui ob $du=\frac{dt}{\text{tang.}\,\zeta}$ et $dv=\frac{dt}{\text{fin.}\,\zeta.\,\text{tang.}\,\theta}$, differentiati praebent:

$$dx=dt-ds\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\zeta-s\,d\zeta\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\zeta-s\,d\theta\,\text{fin}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta$$

$$dy=\frac{dt}{\text{tang.}\,\zeta}-ds\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\zeta+s\,d\zeta\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\theta-s\,d\theta\,\text{cof}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta$$

$$dz=\frac{dt}{\text{fin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta}-ds\,\text{cof.}\,\theta+s\,d\theta\,\text{fin.}\,\theta.$$

27. Antequam vlterius progrediamur, haud abs re erit praecipuas harum formularum relationes annotasse, ac primo quidem pro ipsis formulis finitis eliminando s obtinemus has relationes:

$$x\,\text{cof.}\,\zeta-y\,\text{fin.}\,\zeta=t\,\text{cof.}\,\zeta-u\,\text{fin.}\,\zeta;$$

$$x\,\text{fin.}\,\zeta+y\,\text{cof.}\,\zeta=t\,\text{fin.}\,\zeta+u\,\text{cof.}\,\zeta-s\,\text{fin.}\,\theta;$$

$$x\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta+y\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta-z\,\text{fin.}\,\theta=t\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta+u\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta-v\,\text{fin.}\,\theta.$$

Deinde vero pro differentialibus sequentes:

I. $dx\,\text{cof.}\,\zeta-dy\,\text{fin.}\,\zeta=-s\,d\zeta\,\text{fin.}\,\theta$

II. $dx\,\text{fin.}\,\zeta+dy\,\text{cof.}\,\zeta=\frac{dt}{\text{fin.}\,\zeta}-ds\,\text{fin.}\,\theta-s\,d\theta\,\text{cof.}\,\theta$ et

III. $dx\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta+dy\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\theta-dz\,\text{fin.}\,\theta=-s\,d\theta.$

28. Quoniam autem hoc nouo calculo omnia ad binas variabiles t et s reduximus, dum in priori calculo vsi sumus binis variabilibus T et U, videamus quomodo hae per illas exprimantur, atque

ex formulis quidem pro T et U inuentis ſtatim habemus:

$$dT = \frac{dt.\ \text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta} - ds\,\text{ſin.}\,\omega - s\,d\omega.\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et}$$

$$dU = \frac{dt.\ \text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta} - ds\,\text{coſ.}\,\omega + s\,d\omega.\,\text{ſin.}\,\omega$$

quos valores ſi in formulis dx, dy et dz ante inventis ſubſtituamus et binas variabiles t et s probe diſtinguamus; ſequentes nanciſcemur expreſſiones:

$$dx = dt\frac{(l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta} - sd\omega(l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega) - ds(l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega)$$

$$dy = dt\frac{(m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta} - sd\omega(m\,\text{coſ.}\,\omega - \mu\,\text{ſin.}\,\omega) - ds(m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega)$$

$$dz = dt\frac{(n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega)}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta} - s\,d\omega(n\,\text{coſ.}\,\omega - \nu\,\text{ſin.}\,\omega) - ds(n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega)$$

quas cum iis quae per poſteriorem ſolutionem prodierunt comparemus, quae ſunt

$$dx = dt - s\,d\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\zeta - s\,d\theta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - ds\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$$

$$dy = \frac{dt}{\text{tang.}\,\zeta} + s\,d\zeta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta - s\,d\theta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - ds\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$$

$$dz = \frac{dt}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{tang.}\,\theta} + s\,d\theta\,\text{ſin.}\,\theta - ds\,\text{coſ.}\,\theta$$

atque primo membra per ds affecta vtrinque aequalia eſſe debent, vnde obtinemus has aequationes:

I. $l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = \text{ſin.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta$

II. $m\,\text{ſin.}\,\omega + \mu\,\text{coſ.}\,\omega = \text{coſ.}\,\zeta.\ \text{ſin.}\,\theta$

III. $n\,\text{ſin.}\,\omega + \nu\,\text{coſ.}\,\omega = \text{coſ.}\,\theta.$

29 Quodſi iam hi valores in prioribus membris, quae differentiale dt et ab eo pendentia, $d\zeta$ $d\theta$ et $d\omega$ inuoluunt, ſubſtituantur, adipiſcemur ſequentes aequationes:

$$l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{d\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta + d\theta\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta}{d\omega} = \frac{d\,(\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta)}{d\omega}$$

$$m\,\text{coſ.}\,\omega - \mu\,\text{ſin.}\,\omega = -\frac{d\zeta.\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta + d\theta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta}{d\omega} = \frac{d.\,\text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta}{d\omega}$$

$$n\,\text{coſ.}\,\omega - \nu\,\text{ſin.}\,\omega = -\frac{d\theta.\,\text{ſin.}\,\theta}{d\omega} = \frac{d.\,\text{coſ.}\,\theta}{d\omega}.$$

Hic imprimis notari meretur ex his formulis inventis alteram variabilem s prorſus exceſſiſſe, ita vt iam quantitates $l, \lambda, m, \mu, n, \nu$ per vnicam variabilem t determinentur, alteramque s prorſus non inuoluant, dum contra ipſae quantitates T et U ambas variabiles t et s implicant.

30. Nunc pro functionibus l et λ definiendis has duas inuenimus aequationes:

$$l\,\text{ſin.}\,\omega + \lambda\,\text{coſ.}\,\omega = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta$$

$$l\,\text{coſ.}\,\omega - \lambda\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{d.\,(\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta)}{d\omega}$$

Hinc prior in ſin. ω + poſterior in coſ. ω dat:

$$l = \text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega.\,\frac{d.(\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta)}{d\omega}$$

at I. coſ. ω − II. ſin. ω dat.

$$\lambda = \text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\frac{d\,(\text{ſin.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta)}{d\omega}$$

Simili modo reliquae literae reperientur, vt ſequitur

$$m = \text{coſ}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{ſin.}\,\omega + \text{coſ.}\,\omega.\,\frac{d\,(\text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta)}{d\omega}$$

$$\mu = \text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega.\,\frac{d\,(\text{coſ.}\,\zeta.\,\text{ſin.}\,\theta)}{d\omega}$$

$$n = \text{coſ.}\,\theta\,\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{\text{coſ.}\,\omega.\,d.\,\text{coſ.}\,\theta}{d\omega}$$

$$\nu = \text{coſ.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{\text{ſin.}\,\omega.\,d.\,\text{coſ.}\,\theta}{d\omega}.$$

En ergo idoneos valores pro litteris l, λ, m, μ et n, ν, qui ita ſunt comparati, vt tres illas formulas $l\,dT + \lambda\,dU$, $m\,dT + \mu\,dU$ et $n\,dT + \nu\,dU$ fiant integrabiles, atque adeo ipſa integralia facile exhiberi queant, quippe quae ſunt

$$x = t - s\sin.\theta\sin.\zeta;\; y = u - s\sin.\theta\cos.\zeta;\; z = v - s\cos.\theta.$$

31. Quoniam ambae noſtrae ſolutiones penitus inter ſe conuenire debent, nullum eſt dubium, quin etiam reliquae conditiones ſupra memoratae impleantur, ſcilicet certo erit:

$$ll + mm + nn = 1;\; \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;\; l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Ad quod oſtendendum ponamus breuitatis gratia

$\sin.\zeta.\sin.\theta = p$; $\cos.\zeta.\sin.\theta = q$ et $\cos.\theta = r$, ita vt ſit

$pp + qq + rr = 1$, ideoque $p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0$, iam vero quum habeamus

$$l = p\sin.\omega + \frac{dp}{d\omega}.\cos.\omega;\; m = q\sin.\omega + \frac{dq}{d\omega}.\cos.\omega;\; n = r\sin.\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos.\omega$$

$$\lambda = p\cos.\omega - \frac{dp}{d\omega}.\sin.\omega;\; \mu = q\cos.\omega - \frac{dq}{d\omega}.\sin.\omega;\; \nu = r\cos.\omega - \frac{dr}{d\omega}.\sin.\omega$$

hinc inſtituto calculo reperiemus,

$$1°\; ll + mm + nn = (pp + qq + rr)\sin.\omega^2 + \frac{2\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega}(p\,dp + q\,dq + r\,dr) + \frac{\cos.\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2) \text{ ſiue}$$

$$ll + mm + nn = \sin.\omega^2 + \frac{\cos.\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

ſicque tota quaeſtio in valore $dp^2 + dq^2 + dr^2$ inveſtigando verſatur. Quum autem ſit

$$dp = d\zeta\cos.\zeta\sin.\theta + d\theta\sin.\zeta\cos.\theta$$

$$dq = -d\zeta\sin.\zeta\sin.\theta + d\theta\cos.\zeta\cos.\theta \text{ et } dr = -d\theta\sin.\theta;$$

colli-

colligemus

$$dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\zeta^2 \sin.\theta^2 + d\theta^2 = d\omega^2,$$

ita vt iam certum ſit eſſe

$$\frac{dp^2 + dq^2 + dr^2}{d\omega^2} = 1$$

quocirca manifeſtum eſt fore:

$$ll + mm + nn = \sin.\omega^2 + \cos.\omega^2 = 1.$$

32. Simili modo pro litteris Graecis reperiemus:

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = (pp+qq+rr)\cos.\omega^2 - \frac{2\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega}(pdp+qdq+rdr)$$
$$\frac{\sin.\omega^2}{d\omega^2}(dp^2 + dq^2 + dr^2),$$

quae manifeſto praebet vt ante

$$\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = \cos.\omega^2 + \sin.\omega^2 = 1.$$

Supereſt igitur vt tertiam proprietatem examinemus pro qua nanciſcimur:

$$l\lambda = pp\sin.\omega\cos.\omega - \frac{pdp}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{pdp}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dp^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$
$$m\mu = qq\sin.\omega\cos.\omega - \frac{qdq}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{qdq}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dq^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$
$$n\nu = rr\sin.\omega\cos.\omega - \frac{rdr}{d\omega}\sin.\omega^2 + \frac{rdr}{d\omega}\cos.\omega^2 - \frac{dr^2}{d\omega^2}\sin.\omega\cos.\omega$$

quibus in vnam ſummam collectis fiet

$$l\lambda + m\mu + n\nu = \sin.\omega\cos.\omega - \sin.\omega\cos.\omega = 0.$$

Atque hoc modo Problema illud Analyticum ſupra commemoratum (7) feliciſſime ſolutum dedimus, quae ſolutio ita ſuccincte ſe habet.

Problema Analyticum.

33. Propofitis duabus variabilibus T et U earum fex inuenire functiones l, m, n et λ, μ, ν ita comparatas, vt fex fequentibus conditionibus fatisfiat:

I°. $\left(\frac{d\,l}{d\,U}\right)=\left(\frac{d\,\lambda}{d\,T}\right)$; II°. $\left(\frac{d\,m}{d\,U}\right)=\left(\frac{d\,\mu}{d\,T}\right)$; III^{io} $\left(\frac{d\,n}{d\,U}\right)=\left(\frac{d\,\nu}{d\,T}\right)$

IV°. $ll+mm+nn=1$; V°. $\lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu=1$;

VI. $l\lambda+m\mu+n\nu=0$.

Solutio.

Introductis in calculum duabus nouis variabilibus s et t, huius pofterioris t capiantur duae functiones quaecunque ζ et θ, quae fcilicet vt anguli fpectentur, e quibus formetur nouus angulus ω, ita vt fit $d\,\omega=\sqrt{(d\,\zeta^2 \text{ fin. } \theta^2+d\,\theta^2)}$, tum vero hinc binae variabiles T et U, ita determinentur, vt fit

$$T=\int\frac{d\,t \text{ fin. } \omega}{\text{fin. } \zeta \text{ fin. } \theta}-s \text{ fin. } \omega$$

$$U=\int\frac{d\,t \text{ cof. } \omega}{\text{fin. } \zeta \text{ fin. } \theta}-s \text{ cof. } \omega$$

quo facto fex functiones quaefitae ita fe habebunt

$$l=\text{fin.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta \text{ fin.}\,\omega+\frac{\text{cof.}\,\omega}{d\,\omega}d(\text{fin.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta);\quad \lambda=\text{fin.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta \text{ cof.}\,\omega-\frac{\text{fin.}\,\omega}{d\,\omega}d(\text{fin.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta)$$

$$m=\text{cof.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta \text{ fin.}\,\omega+\frac{\text{cof.}\,\omega}{d\,\omega}d(\text{cof.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta);\quad \mu=\text{cof.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta \text{ cof.}\,\omega-\frac{\text{fin.}\,\omega}{d\,\omega}d(\text{cof.}\,\zeta \text{ fin.}\,\theta)$$

$$n=\text{cof.}\,\theta \text{ fin.}\,\omega+\frac{\text{cof.}\,\omega}{d\,\omega}d.\,\text{cof.}\,\theta;\quad \nu=\text{cof.}\,\theta \text{ cof.}\,\omega-\frac{\text{fin}\,\omega}{d\,\omega}d.\,\text{cof.}\,\theta.$$

His autem valoribus, fequentes tres formulae differentiales:

I°. $l\,d\,T+\lambda\,d\,U$; II°. $m\,d\,T+\mu\,d\,U$; III^{io} $n\,d\,T+\nu\,d\,U$

quip-

quippe quibus tres priores conditiones continentur, non ſolum integrabiles redduntur, ſed etiam ipſa integralia ſequenti modo exprimentur:

$$\text{I}^\circ.\ \int (l\,d\text{T} + \lambda\, d\text{U}) = t - s\ \text{ſin.}\ \theta\ \text{ſin.}\ \zeta$$

$$\text{II}^\circ.\ \int (m\,d\text{T} + \mu\, d\text{U}) = \int \frac{dt}{\text{tang.}\zeta} - s\ \text{ſin.}\ \theta\ \text{coſ.}\ \zeta$$

$$\text{III}^\circ.\ \int (n\,d\text{T} + \nu\, d\text{U}) = \int \frac{dt}{\text{ſin.}\zeta\ \text{tang.}\theta} - s\ \text{coſ.}\ \theta,$$

quae ſolutio adeo pro completa haberi debet propterea quod duas functiones arbitrarias complectitur.

34. Haec euolutio ſine dubio maximi eſt momenti atque imprimis meretur, vt omni ſtudio in ſingula eius elementa inquiramus. Ac primo quidem quum introductis litteris p, q et r, ita vt ſit

$$pp + qq + rr = 1 \quad \text{et} \quad dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2$$

inuenerimus

$$l\ \text{ſin.}\ \omega + \lambda\ \text{coſ.}\ \omega = p \quad \text{et} \quad l\ \text{coſ.}\ \omega - \lambda\ \text{ſin.}\ \omega = \frac{dp}{d\omega},$$

ſi illam differentiemus habebimus

$$dl\ \text{ſin.}\ \omega + d\lambda\ \text{coſ.}\ \omega + l\,d\omega\ \text{coſ.}\ \omega - \lambda\, d\omega\ \text{ſin.}\ \omega = dp$$

ideoque

$$dl\ \text{ſin.}\ \omega + d\lambda\ \text{coſ.}\ \omega = 0, \quad \text{ita vt ſit} \quad \frac{d\lambda}{dl} = -\text{tang.}\ \omega.$$

Simili vero modo etiam reperiemus

$$\frac{d\mu}{dm} = -\text{tang.}\ \omega \quad \text{et} \quad \frac{d\nu}{dn} = -\text{tang.}\ \omega.$$

En ergo pulcherrimam proprietatem, quae inter ſex noſtras functiones l, m, n et λ, μ, ν intercedit, quam hoc modo repraeſentare licet, vt ſit

$$dl : d\lambda = dm : d\mu = dn : d\nu = -\text{coſ.}\ \omega : \text{ſin.}\ \omega$$

35.

35. Quod si haec probe perpendamus, vestigia quaedam deprehendimus, quibus insistentes solutionem directam problematis huius difficillimi indagare poterimus. Scilicet constitutis his aequationibus:

$$dx = l\,dT + \lambda\,dU;\ dy = m\,dT + \mu\,dU;\ dz = n\,dT + \nu\,dU$$

primum obseruari conuenit quantitates l, m, n et λ, μ, ν functiones esse debere vnicae nouae variabilis, quae tamen ad binas principes variabiles T et U certam quandam teneat relationem. Sit igitur ω ista noua variabilis, cuius sex nostrae quantitates sint certae quaedam functiones. Atque iam vidimus si litterae p, q et r tales functiones ipsius ω denotent, vt sit

$$pp + qq + rr = 1 \text{ et } dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2;$$

tum statuendo:

$$l = p \operatorname{sin.} \omega + \tfrac{dp}{d\omega} \operatorname{cos.} \omega;\quad m = q \operatorname{sin.} \omega + \tfrac{dq}{d\omega} \operatorname{cos.} \omega;$$
$$n = r \operatorname{sin.} \omega + \tfrac{dr}{d\omega} \operatorname{cos.} \omega$$

$$\lambda = p \operatorname{cos.} \omega - \tfrac{dp}{d\omega} \operatorname{sin.} \omega;\quad \mu = q \operatorname{cos.} \omega - \tfrac{dq}{d\omega} \operatorname{sin.} \omega;$$
$$d\nu = r \operatorname{cos.} \omega - \tfrac{dr}{d\omega} \operatorname{sin.} \omega$$

has tres conditiones iam adimpleri scilicet:

$$ll + mm + nn = 1;\ \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1;\ \text{et } l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

praeterea vero hinc modo deduximus istam insignem proprietatem, vt sit

$$d\lambda = -dl \operatorname{tang.} \omega;\ d\mu = -dm \operatorname{tang.} \omega;\ \text{et } d\nu = -dn \operatorname{tang.} \omega$$

quae nobis insignem praestabit vsum ad reliquas conditiones adimplendas vti mox patebit.

36. Hae scilicet tres conditiones id postulant, vt formulae illae differentiales pro dx, dy et dz exhibitae integrabiles reddantur, quem in finem relationem illam, quae inter binas variabiles T et U et inter ω intercedere debet, inuestigari oportet. Ad hoc praestandum conuertantur illae aequationes differentiales per integrationem in sequentes formas;

$$x = l\mathrm{T} + \lambda\mathrm{U} - \int(\mathrm{T}\,dl + \mathrm{U}\,d\lambda);$$
$$y = m\mathrm{T} + \mu\mathrm{U} - \int(\mathrm{T}\,dm + \mathrm{U}\,d\mu);$$
$$z = n\mathrm{T} + \nu\mathrm{U} - \int(\mathrm{T}\,dn + \mathrm{U}\,d\nu);$$

nunc vero hae tres nouae formulae integrales induent sequentes formas;

$$x = l\mathrm{T} + \lambda\mathrm{U} - \int dl(\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang.}\,\omega);$$
$$y = m\mathrm{T} + \mu\mathrm{U} - \int dm(\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang.}\,\omega);$$
$$z = n\mathrm{T} + \nu\mathrm{U} - \int dn(\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang.}\,\omega).$$

Quum igitur l, m et n sint functiones eiusdem variabilis ω, manifestum est ternas has formulas reuera integrabiles reddi, si modo expressio $\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang.}\,\omega$ fuerit functio quaecunque nouae variabilis ω; quare si talis functio indicetur littera Ω habebimus $\mathrm{T} - \mathrm{U}\,\mathrm{tang.}\,\omega = \Omega$, qua aequatione quaesita illa relatio, quae inter variabiles T, U et ω intercedere debet determinatur.

37. Quare si pro Ω accipiatur pro lubitu functio quaecunque ipsius ω, cuius etiam vt vidimus litterae p, q et r sunt certae functiones, per quas iam litteras l, m, n et λ, μ, ν definiuimus, binae variabiles T et U, ita debent esse comparatae, vt

 fiat

fiat $T = \Omega + U \tang. \omega$, scilicet nunc tantum binas variabiles U et ω in calculo retineamus et loco T istum valorem introducamus, tum igitur ternae nostrae formulae integrales ita repraesentari poterunt:

$$x = l\,\Omega + l\,U \tang.\omega + \lambda\,U - \int \Omega\, dl$$
$$y = m\,\Omega + m\,U \tang.\omega + \mu\,U - \int \Omega\, dm$$
$$z = n\,\Omega + n\,U \tang.\omega + \nu\,U - \int \Omega\, dn$$

quae expressiones facile transformantur in sequentes

$$x = U(l \tang.\omega + \lambda) + \int l\, d\Omega = \frac{Up}{\cos.\omega} + \int p \sin.\omega.\, d\Omega + \int \frac{dp\, d\Omega}{d\omega} \cos.\omega$$
$$y = U(m \tang.\omega + \mu) + \int m\, d\Omega = \frac{Uq}{\cos.\omega} + \int q \sin.\omega.\, d\Omega + \int \frac{dq\, d\Omega}{d\omega} \cos.\omega$$
$$z = U(n \tang.\omega + \nu) + \int n\, d\Omega = \frac{Ur}{\cos.\omega} + \int r \sin.\omega\, d\Omega + \int \frac{dr\, d\Omega}{d\omega} \cos.\omega.$$

TERTIA SOLVTIO

Problematis principalis, ex Theoria Lucis et vmbrae petita.

38. Quae vulgo in Opticis de luce et vmbra tradi solent, plerumque ad casum maxime specialem sunt restricta, quo tam corpori lucido quam opaco a quo vmbra proiicitur, figura sphaerica tribuitur, vnde vmbra oritur vel cylindrica vel conica siue conuergens siue diuergens, prout corpus opacum vel aequale, vel minus vel maius fuerit quam corpus lucidum. Quando autem vel corporis lucidi vel opaci vel adeo

adeo vtriusque figura a ſphaerica recedit, vix quicquam in libris, qui de hac re prodierunt reperimus. in quo acquieſcere queamus; quin etiam ſi hoc argumentum in genere pertractare velimus, vtrique corpori lucido et opaco figuras quascunque tribuentes, quaeſtio exoritur maxime ardua atque adeo in eam partem Analyſeos infinitorum circa functiones binarum, pluriumue variabilium, quae non ita pridem demum excoli eſt coepta, referenda.

39. Quod autem imprimis circa hanc Theoriam ad praeſens noſtrum inſtitutum pertinet, eſt, quod ſemper figurae vmbrarum ita ſint comparatae, vt earum ſuperficiem in planum explicare liceat, ex quo viciſſim intelligitur, ſi pro figura quacunque tam corporis lucidi, quam opaci formam vmbrae determinare poterimus, tum ſimul quoque problema noſtrum perfecte fore ſolutum.

40. Quod autem ſemper figura vmbrae noſtro problemati ſubiiciatur, hoc modo facile oſtendi poteſt. Quoniam vmbra ab extremis corporis lucidi radiis, qui ſimul corpus opacum ſtringunt terminatur, primo patet in ſuperficie vmbrae cuiusque infinitas dari lineas rectas, quandoquidem ſinguli radii ſecundum lineas rectas progrediuntur, praeterea vero etiam omnes hi radii vtrumque corpus tam lucidum quam opacum tangent, uare ſi planum quodcunque concipiatur, quod haec duo corpora ſimul contingat ac punctum contactu quidem in corpore lucido notetur littera M, in opaco vero littera m,

 perſpi-

perſpicuum eſt, lineam rectam $M m$ productam radium lucis exhibere, quo vmbra terminatur, quod etiam intelligendum eſt de aliis radiis proximis, qui ex puncto M ſuper eodem plano tangente educuntur, quippe qui itidem vt tangentes corporis opaci ſpectari poſſunt, ex quo ipſa palmaria proprietas noſtri problematis exſurgit, quod quaeuis binae rectae proximae in ſuperficie ducendae ſimul in eodem plano reperiantur.

41. Verum haec Theoria lucis et vmbrae nimis late patet, quam vt eam hic pro dignitate pertractare locus permittat; tantum igitur inde depromamus, quantum ad praeſens inſtitutum expediendum ſufficit. Sepoſita autem tam corporis lucidi quam opaci figura, hic tantum formam quaſi coni vmbroſi ſpectemus, quem in finem duas eius ſectiones inter ſe parallelas ac dato interuallo diſtantes contemplemur, quibus quum figuras quascunque tribuere liceat, manifeſtum eſt, hanc conſiderationem omnes prorſus vmbrarum figuras in ſe complecti.

Tab. I. Fig. 6. 42. Sint igitur duae hae Sectiones normales in planum tabulae rectaeque $A a$ perpendiculariter inſiſtentes, ac prior quidem ſit curua $B U U'$ cuius natura aequatione quacunque inter coordinatas $A T = T$ et $T U = U$ exprimatur; ſimili modo ſit $b u u'$ altera curua a priore vtcunque diuerſa pro qua data ſit aequatio inter coordinatas $a t = t$, $t u = u$, interuallum autem harum ſectionum ponatur $A a = a$, hic quidem alteram Sectionem $B U U'$ tamquam

diſcum

difcum planum lucidum fpectare licebit, et dum altera $b\,u\,u'$ difcum planum opacum refert, a radiis lucidis ille ipfe conus vmbrofus oritur, quem contemplamur.

43. Puncta autem U et u ita fint fumta, vt recta U u producta referat radium vmbram terminantem, quae cum in plano vtrumque difcum tangente, fita effe debeat, neceffe eft vt ambo elementa, U U′ et $u\,u'$ cum recta U u in eodem plano fint fita ex quo perfpicuum eft haec duo elementa inter fe parallela effe debere, ex quo fequitur inter differentialia eandem rationem fubfiftere debere, ita vt fit $dT : dU :: dt : du$, quare fi ponatur $dU = \Phi dT$ erit etiam $du = \Phi dt$.

44. Spectetur igitur haec quantitas Φ, vt variabilis quantitas principalis, per quam reliquae omnes determinentur fequenti modo. Pro priore curua B U, fit T functio quaecunque ipfius Φ, cuius quippe natura, indoles curuae B U U′ definitur tum vero erit $dU = \Phi dT$ et $U = \int \Phi dT$, euidens autem eft hoc modo curuam quamcunque per variabilem Φ exprimi poffe. Simili autem modo pro altera curua $b\,u\,u'$, abfciffa t certe aequabitur functioni ipfius Φ, ac tum itidem habebitur $du = \Phi dt$ ac $u = \int \Phi dt$, vnde quum ambae curuae penitus arbitrio noftro relinquantur, pro litteris T et t functiones quascunque ipfius Φ affumere licet, quibus conftitutis fimul ambae applicatae U et u determinantur.

45. Sumatur nunc in recta Uu punctum quodcunque Z, quod quum ſitum ſit in ſuperficie quam inueſtigamus, inde ad planum tabulae demittamus perpendiculum ZY in rectam Tt incidens et ex Y ad axem noſtrum Aa agatur normalis YX, vt pro puncto indefinito Z ternas obtineamus coordinatas, quas vocemus:

$$AX = x,\ XY = y,\ \text{et}\ YZ = z$$

atque nunc facile erit aequationem inter has ternas coordinatas, qua natura ſuperficiei quaeſitae exprimatur eruere.

46. Principia ſcilicet Geometriae ſtatim nobis ſuppeditant has analogias:

$$T - t : a :: T - y : x; \quad \text{ſeu} \quad Tx - tx = aT - ay.$$

$$U - u : a :: U - z : x; \quad \text{ſiue} \quad Ux - ux = aU - az,$$

vnde per ambas variabiles ϕ et x, ambas coordinatas y et z definire licebit, ſiquidem habebimus:

$$y = T - \frac{x(T - t)}{a} \quad \text{et} \quad z = U - \frac{x(U - u)}{a};$$

quodſi enim ex his duabus aequationibus variabilis ϕ cum quantitatibus inde pendentibus T, t et U, u eliminentur, reſultabit aequatio naturam noſtrae ſuperficiei exprimens.

47. Tali autem eliminatione neutiquam indigemus, quum natura ſuperficiei multo clarius ex binis aequationibus inuentis perſpici poſſit, quae per ſe iam ita ſunt ſimplices, vt ſolutionem commodiorem deſiderare nefas foret, interim tamen formas harum

harum aequationum aliquantillum immutare haud inutile erit. Generaliori autem modo, valores pro y et z ita repraesentemus $y = P + Qx$ et $z = R + Sx$, vbi iam litterae P, Q, R, S significent functiones alterius varibialis Φ, atque nunc quaestio in hoc versabitur, cuiusmodi hae functiones esse debeant, vt binae aequationes exhibitae superficiem in planum explicabilem definiant.

48. Comparemus ergo has formas assumtas cum iis quas ante inuenimus, ac primo quidem habebimus:

$$P = T \text{ et } R = U, \; Q = \frac{t - T}{a}, \; S = \frac{u - U}{a}$$

vbi quum T et t sint functiones arbitrariae ipsius Φ, euidens est functiones P et Q etiam pro lubitu accipi posse, at quoniam U et u certo modo a T et t pendent, etiam functiones R et S certo modo a binis prioribus P et Q pendere debebunt. Quum autem sit

$$T = P, \; t = P + aQ, \; U = R \text{ et } u = R + aS$$

hos valores substituamus in formulis fundamentalibus

$$dU = \Phi\, dT \text{ et } du = \Phi\, dt$$

et obtinebimus

$$dR = \Phi\, dP \text{ et } dR + a\, dS = \Phi\, dP + a\, \Phi\, dQ$$

seu $dS = \Phi\, dQ$.

49. Nunc igitur quoque ipsam quantitatem Φ ex calculo exturbare poterimus, quum sit vel

$\Phi =$

$\Phi = \frac{dR}{dP}$ vel $\Phi = \frac{dS}{dQ}$ ita vt eius loco altera litterarum R vel S arbitrio nostro permittatur, quare si P, Q et R fuerint functiones quaecunque eiusdem cuiusdam variabilis, tum S talis functio eiusdem variabilis esse debet, vt sit $dS = \frac{dQ\,dR}{dP}$ siue $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$; quin etiam adhuc commodius haec solutio ita adornari poterit, vt dicamus pro litteris P, Q, R S eiusmodi functiones cuiuspiam variabilis assumi debere, vt fiat $\frac{dS}{dR} = \frac{dQ}{dP}$ vel etiam $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$, quod si fuerit praestitum hae duae aequationes

$$y = P + Qx \text{ et } z = R + Sx$$

naturam solidi quaesiti exprimens.

50. Perinde est quacunque littera illa variabilis cuius functiones sunt P, Q, R et S indicetur, quin etiam pro ea vna harum quatuor P, Q, R, S assumi poterit, cuius deinde tres reliquae functiones sunt intelligendae. Hinc quamdiu vna earum valorem constantem retinet, reliquae etiam manebunt constantes, ac tum ex variabilitate ipsius x orientur omnes lineae rectae, quas in superficie ducere licet.

51. Conditioni autem praescriptae $\frac{dS}{dQ} = \frac{dR}{dP}$, manifesto satisfiet sumendo quantitates P et R constantes; vnde solutio particularis problematis nostri sequitur. Ponamus enim esse $P = A$ et $R = B$, ita vt nunc S spectanda sit, vt functio quaecunque ipsius Q. At semper coordinatas ita variare licet vt fiat $A = 0$ et $B = 0$, quo facto ob $Q = \frac{y}{x}$ erit $\frac{z}{x} = S$ functio homogenea nullius dimensionis ipsa-

ipſarum x et y, ſiue z aequabitur functioni homogeneae vnius dimenſionis ipſarum x et y, quod eſt criterium ſuperficierum conicarum.

52. Conditioni etiam ſatisfit ſumendo $Q = o$ et $S = o$, ita vt R maneat functio quaecunque ipſius P, quo caſu pro z prodibit functio quaecunque ipſius y, quae quum duas tantum variabiles involuat y et z erit pro ſolido cylindrico. Idem vſu venit, ſi ſtatuamus vel $P = o$ et $Q = o$ vel $R = o$ et $S = o$, priore enim caſu habetur $y = o$ poſteriore vero $z = o$, vtroque caſu aequatio eſt pro plano.

53. Verum vt etiam alias ſpecies huiusmodi ſolidorum cognoſcamus pro ſimplicioribus accipiamus:

$$P = a\,\Phi^{\alpha},\quad Q = b\,\Phi^{\beta},\quad R = c\,\Phi^{\gamma};\quad S = d\,\Phi^{\delta}$$

atque vt conditioni praeſcriptae ſatisfiat neceſſe eſt ſit $\frac{b\,\beta}{a\,\alpha}\Phi^{\beta-\alpha} = \frac{d\,\delta}{c\,\gamma}\Phi^{\delta-\gamma}$, vnde duplex determinatio oritur, prima ſcilicet exponentium $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ altera vero coefficientium: $\frac{b\,\beta}{a\,\alpha} = \frac{d\,\delta}{c\,\gamma}$, cui vtrique ſatisfiet ſumendo vt ſequitur

$$a = \frac{fg}{\varkappa+\lambda};\ b = \frac{fh}{\varkappa+\mu};\ c = \frac{gk}{\lambda+\nu};\ d = \frac{hk}{\mu+\nu}$$

$$\alpha = \varkappa+\lambda;\ \beta = \varkappa+\mu;\ \gamma = \lambda+\nu;\ \delta = \mu+\nu,$$

tum vero aequationes erunt:

$$y = a\,\Phi^{\alpha} + b\,\Phi^{\beta}\,x;\ z = c\,\Phi^{\gamma} + d\,\Phi^{\delta}\,x.$$

54. In numeris ergo determinatis confideremus hunc cafum:

$$y = 2\Phi + 3\Phi^2 x \text{ et } z = \Phi^3 + 2\Phi^3 x$$

vnde facta eliminatione litterae Φ fequens elicitur aequatio:

$$4y^3x + 72y^2xxz - yy - 18yxz + 27xxzz + 2z = 0$$

quae ergo eft pro folido, cuius fuperficiem in planum explicare licet.

ME-