1771

Meditationes in quaestionem utrum motus medius planetarum semper maneat aeque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur? & quaenam sit ejus causa? ...

Leonhard Euler

MEDITATIONES

IN QUÆSTIONEM

Utrum motus medius planetarum ſemper maneat æque velox, an ſucceſſu temporis quampiam mutationem patiatur? & quæ ſit ejus cauſa?

I.

PLANETARUM motus medius, utrum perpetuo eandem celeritatem conſervet, an cuipiam variationi labente tempore ſit obnoxius? quæſtio eſt eo magis ardua, quod ei in Aſtronomia ne locus quidem relinqui videtur. Cum enim ab Aſtronomis cujuſque planetæ motus medius ex collatione antiquiſſimarum obſervationum cum noviſſimis definiri ſoleat, dum ſpatium interea confectum in partes tempori proportionales dispertiunt, hoc modo omnis inæqualitas à motu medio excluditur: neque motus medius cujusquam planetæ. Recte assignatus putatur, nisi cum vetustissimis observationibus æque conveniat atque cum iis, qua hodie instituuntur. Hoc quoque modo anni quantitas recte determinari existimatur, si ad tempora Hipparchi remota æquinoctiis ab eo observatis satisfaciat: similisque est ratio reliquorum planetarum, quorum motus medius per cujusque tempus periodicum determinatur.

II.

Ob errores autem observationum Astronomi coacti fuere ad tempora maxime remota confugere, ut errores inde in motum medium redundantes quam minimi redderentur, quod remedium potissimum circa instaurationem Astronomiæ aliquot abhinc seculis necessarium erat. Postquam autem observationes majori cura institui sunt captæ, pari atque meliori successu motus planetarum medios ex comparatione recentissimarum observationum cum aliis non ita pridem institutis definire licuit. Quo in negotio aliquod discrimen à conclusionibus superioribus est animadversum, quod utrum ab erroribus observationum proficatur, an revera cuipiam perturbationi in motu planetarum factæ sit tribuendum? incertum videri debebat antequam Theoria adjuti pleniorem motuum cœlestium cognitionem essemus adepti.

III.

Notabile imprimis est discrimen quod in quantitate anni solaris diversomodo determinata cernitur. Comparatio enim observationum Hipparchi cum Ptolemæi aliquot minutis annum majorem præbet quam si Ptolemæi observationes cum recentioribus comparentur. Quæ differentia sive in observationum errores sit rejicienda, sive inde oriatur quod reductio temporum à Ptolomæo notatorum ad calendarium Julianum minus sit certa, nulla causa satis firma reperitur, cur anni quantitatem perpetuo eandem fuisse statuamus. De Luna quidem vix jam dubitare licet, quin ejus motus medius nunc aliquanto sit incitatior quam olim: tum vero etiam in Saturni & Jovis motu medio quædam mutatio agnosci debet quemadmodum sollertissimus motuum cœlestium scrutator Le Monnier evicit. Ex quo opinio de perpetua horum motuum constantia nunc quidem penitus profligata est censenda.

IV.

Quodsi hæ inæqualitates ob parvitatem à pertinacibus veteris opinionis propugnatoribus adhuc in dubium vocentur iis profecto Cometa initio hujus anni visus omnem defensionem adimere debet. Cum enim hic Cometa idem sit qui A. 1682 apparuit, ejus tempus periodicum, in quo jam insigne discrimen ex præcedentibus apparitionibus erat animadversum, non solum fere ad biennium est protractum, sed etiam hæc retardatio à sagacissimo Viro Clairaut jam ante est prædicta & exacte definita ita ut nullum amplius dubium superesse queat quin hic Cometa idem plane sit, qui jam aliquoties est conspectus etiamsi in temporibus periodicis haud exiguum discrimen esset deprehensum. Cum igitur hic Cometa tantam variationem in motu suo medio sit perpessus, eo minus similem variationem in planetis negare poterimus, quod causæ utrinque similes existunt, quæ hujusmodi effectum producere valeant.

V.

Ac causæ quidem istæ non amplius sunt ignotæ postquam principium gravitationis universalis tot tam feliciter explicatis phænomenis abunde est confirmatum ita ut nunc quidem vix ullum scientiæ naturalis principium ad tantum certitudinis gradum evectum videatur quam omnia corpora cœlestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent in ratione directa massarum & reciproca duplicata distantiarum. Neque adeo ad summam Astronomiæ perfectionem quicquam desideratur, nisi ut motus huic principio consentanei per calculum determinentur, quod opus à sola analysi est expectandum. Quo in genere plurima præclarissima specimina edita sunt ab iis, qui cum in determinatione motuum lunarium, tum perturbationum Jovis ac Saturni, tum vacillationis axis ipsius terræ tum vero nuperrime in retardatione Cometæ operam suam collocarunt.

VI.

Quæ cum ita sint, fontes, unde resolutio quæstionis propositæ est haurienda sunt detecti, totumque negotium huc revocatur, ut ostendatur; utrum ex gravitatione mutua corporum cœlestium ulla mutatio in motu eorum medio nascatur nec ne? Cum autem idea motus medii per se non satis sit fixa, neque etiam tempus periodicum commode ejus loco introduci possit. Quippe quod per inæqualitates periodicas sœpe haud mediocriter turbatur veluti in luna est perspicuum, quæstio nostra optime ad axem transversum cujusque orbitæ adstringi videtur. Quomodo cunque enim motus cujuspiam planeta vel cometa perturbatur, is semper ita concipi potest, quasi in sectione conica fieret, cujus tam positio quam species & quantitas conti-

nuo varietur: motu cæteroquin manente regulis Keplerianis conformi.

VII.

Quare si hoc modo motus cœlestes per sectiones conicas variabiles representenur, hoc negotium nobis erit impositum, ut investigemus utrum axis transversus cujuspiam orbitæ planetariæ vel cometariæ aliquam mutationem patiatur nec ne? ubi quidem notari convenit, si axis transversus post singulas revolutiones ad eandem magnitudinem revertatur quantumvis interea fuerit variatus hinc tamen nullam inæqualitatem in motum medium transferri. At si per plures revolutiones continuo vel crescat vel decrescat, etiamsi forsitan deinceps aliquando in magnitudinem pristinam restituatur: talis variatio in motum medium commode conjicitur. Imprimis autem si axis transversus ab actione cujuspiam cometæ, cujus adventus quasi ex improviso accidit, neque prævideri potest, incrementum vel decrementum patitur, hunc effectum aliter nisi per motus medii retardationem vel accelerationem representare non licet.

VIII.

Quandoquidem perturbationes motus sunt ingentes, quemadmodum fit in luna, præter axem transversum etiam reliquorum elementorum mutationes ad tempus periodicum hincque ad motum medium constituendum concurrunt. Quando autem motus proxime regulas Keplerianas sequitur, uti fit in planetis primariis & cometis mutatio axis transversi, cujus quippe cubo quadratum temporis periodici est proportionale, sola motum medium afficere est censenda. Ita si axis transversus orbita telluris hodie major minorve esset, quam tempore Ptolemæi, motus ejus medius hodie lentior vel incitarior esset statuendus quam illo tempore. Ac si cometa hujus anni, dum haud adeo procul à terra prætervolavit, actione sua axem orbis magni, uti videtur aliquantillum, auxit, in posterum annus solaris major, motusque medius solis tardior esset futurus: cujus effectus quantitatem autem ob massam cometæ incognitam non nisi ex observationibus deinceps instituendis definire licebit.

IX.

Quo igitur quæstioni ab Illustrissima Academia propositæ satisfaciam, quantum motus sive planetæ sive cometæ ab actione alius planetæ sive cometæ, cujus quidem motus ut cognitus spectatur, perturbatur, primum quidem in genere investigabo, tum vero quia omnes inæqualitates neque ad hoc institutum sunt necessariæ, neque quæruntur, ad axis transversi variationes omnem curam intendam; facile autem intelligitur antequam universa mutatio dato tempore in axe transverso producta definiri queat, mutationem ejus momentaneam determinari oportere. Unde hoc commode consequemur, ut si forte non licuerit per integrationes ad scopum pervenire, ex formula differentiali pro partibus temporis satis exiguis mutationes axis seorsim defineantur, tumque in unam summam colligantur. Hæc methodus usum habebit, quando actio notabilis corporis attrahentis non diu durat uti in transitu cometæ fere fit, ac deinceps ob insignem distantiam quasi prorsus in nihilum abit.

X.

Vid. Fig. Sit igitur sol in A, & planeta vel cometa cujus attractione motus alterius perturbatur moveatur in plano tabula repræsentato in quo $E\,Q$ sit ejus orbita AE vero linea recta fixa à qua longitudines computemus. Alter

Alter vero planeta, cujus perturbationes motus investigamus, moveatur in alio plano, quod nunc quidem illud planum secet secundum rectam $A\,☊$, quæ est linea nodorum, sitque FZ ejus orbita ab F in sublime ascendens. Nunc autem ille planeta seu cometa versetur in Q hic vero in Z ductisque rectis QA, ZA & QZ, ex Z in planum tabulæ demittatur perpendiculum ZY tum vero ex Q & Y ad AE normales QP & YX. Porro ex Y quoque ad lineam nodorum $A\,☊$ normaliter ducatur YR ut juncta ZR angulus YRZ exhibeat inclinationem binarum orbitarum. Denique ex R tam ad AE quam XY ducantur perpendiculares RT & RV. Hæcque fere sunt, quibus Geometrica quæstionis continetur.

XI.

Jam faciamus sequentes denominationes sitque

1°. Longitudo lineæ nodorum $EA\,☊ = \psi$;
2°. Inclinatio orbitarum mutua seu $YRZ = \omega$;
3°. Longitudo planetæ Q seu angulus $EAQ = \theta$;
4°. Ejus distantia à sole seu recta $AQ = u$;
5°. Planetæ Z distantia à sole $AZ = v$;
6°. Ejus argumentum latitudinis seu $☊\,AZ = \xi$.

Hinc reliquæ lineæ ita definientur.

$AP = u\,cos.\,\theta$; $AR = v\,cos.\,\xi$; $YR = v\,sin.\,\xi\,cos.\,\omega$;
$PQ = u\,sin.\,\theta$; $ZR = v\,sin.\,\xi$; $YZ = v\,sin.\,\xi\,sin.\,\omega$;

Porro cum angulus RYV æquetur angulo $EA\,☊ = \psi$ erit

$AT = v\,cos.\,\xi\,cos.\,\psi$; $VY\,sin.\,\xi\,cos.\,\omega\,cos.\,\psi$;
$TR = v\,cos.\,\xi\,cos.\,\psi$; $RV\,sin.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,\psi$.

Quare ſi pro puncto ſublimi Z ternas coordinatas vocemus

$$AX = X;\quad XY = Y;\quad \& \quad YZ = Z$$

habebimus

$$X = AT - RV = \nu\, cof.\, \xi\, cof.\, \psi - \nu\, fin.\, \xi\, cof.\, \omega\, fin.\, \psi;$$
$$Y = TR + VY = \nu\, cof.\, \xi\, fin.\, \psi + \nu\, fin.\, \xi\, cof.\, \omega\, cof.\, \psi;$$
$$\&\quad Z = \nu\, fin.\, \xi\, fin.\, \omega.$$

XII.

Ex his denique etiam definitur diſtantia planetarum QZ quæ brevitatis gratia ſtatuatur

$$QZ = \tau.$$

Cum enim ſit

$$PX = AP - AX = u\, cof.\, \theta - X,\ \&$$
$$PQ - XY = u\, fin.\, \theta - Y,\ \text{erit}$$
$$QY^2 = uu - 2u(X\, cof.\, \theta + Y\, fin.\, \theta) + XX + YY;$$

cui quadratum $YZ^2 = Z^2$ additum dabit

$$QZ^2 = \tau^2 = uu - 2u\,(X\, cof.\, \theta + Y\, fin.\, \theta) + XX + YY + ZZ.$$

At eſt $XX + YY + ZZ = \nu\nu$, ideoque

$$\tau^2 = uu - 2u\,(X\, cof.\, \theta + Y\, fin.\, \theta) + \nu\nu.$$

Verum ob $cof.\, \theta\, cof.\, \psi + fin.\, \theta\, fin.\, \psi = cof.\, (\theta - \psi)$, &

$$fin.\, \theta\, cof.\, \psi - cof.\, \theta\, fin.\, \psi = fin.\, (\theta - \psi);$$

ubi notetur $\theta - \psi = EAQ - EA$☊ exprimere angulum ☊AQ, ſeu longitudinem planetæ Q à linea nodorum ſumtam.

erit $X\, cof.\, \theta + Y\, fin.\, \theta = \nu\, cof.\, \xi\, cof.\, (\theta - \psi) + \nu\, fin.\, \xi\, cof.\, \omega\, fin.\, (\theta - \psi)$;

ita ut ſit

$$\tau = \sqrt{\left(uu - 2u\nu\left(cof.\, \xi\, cof.\, (\theta - \psi) + fin.\, \xi\, cof.\, \omega\, fin.\, (\theta - \psi)\right) + \nu\nu\right)};$$

unde perſpicuum eſt formulam $cof.\, \xi\, cof.\, (\theta - \psi) + fin.\, \xi\, cof.\, \omega\, fin.\, (\theta - \psi)$ exprimere coſinum anguli QAZ, qui eſt diſtantia planetarum *e* ſole viſa.

XIII.

Quomodo cunque ab actione planetæ Q planum orbitæ alterius planetæ Z immutatur, ita ut momento temporis tam poſitio lineæ nodorum A☊ quam inclinatio mutua utriuſque orbitæ variationem patiatur, certa quædam relatio inter has variationes intercedat. Si enim puncto temporis planeta ex Z in z ſuccedat, ut angulus elementaris ZAz ſit $= d\varphi$ punctum z æque ad poſitionem orbitæ præcedentem angulis ψ & ω determinatam atque ad poſitionem ſequentem angulis $\psi + d\psi$, & $\omega + d\omega$ contentam referri oportet. Ex quo differentialia dX, dY & dZ eadem prodire debent, ſive anguli ψ & ω conſtantes ſumantur, & pro anguli ☊$AZ = \xi$ differentiali ſcribatur $d\varphi$ quippe qui hoc elemento augetur; ſive iidem anguli ψ & ω etiam pro variabilibus habeantur, anguluſque ξ vero ſuo differentiali $d\xi$ augeri ſtatuatur, quod ob mutationem in linea nodorum & inclinatione factam non amplius angulo elementari $d\varphi$ æquale eſt æſtimandum. Ex hac autem duplici differentiatione gemina relatio inter angulos elementares $d\varphi$, $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ concludetur.

XIV.

Prima differentiatio, qua anguli ψ & ω conſtantes & $d\xi = d\varphi$ ſumuntur præbet:

$$dX = \frac{X\,dv}{v} - v\,d\varphi\,(\sin.\,\xi\cos.\,\psi + \cos.\,\xi\cos.\,\omega\sin.\,\psi);$$

$$dY = \frac{Y\,dv}{v} - v\,d\varphi\,(\sin.\,\xi\sin.\,\psi - \cos.\,\xi\cos.\,\omega\cos.\,\psi);$$

$$dZ = \frac{Z\,dv}{v} + v\,d\varphi\cos.\,\xi\sin.\,\omega.$$

Altera autem differentiatio hos ſuppeditat valores

$$dX = \frac{X\,dv}{v} - v\,d\xi\,(\sin.\,\xi\cos.\,\psi + \cos.\,\xi\cos.\,\omega\sin.\,\psi) - v\,d\psi\,(\cos.\,\xi\sin.\,\psi + \sin.\,\xi\cos.\,\omega\cos.\,\psi) + v\,d\omega\sin.\,\xi\sin.\,\omega\sin.\,\psi;$$

$$dY = \frac{Y\,dv}{v} - v\,d\xi\,(\sin.\,\xi\sin.\,\psi - \cos.\,\xi\cos.\,\omega\cos.\,\psi) - v\,d\psi\,(\cos.\,\xi\cos.\,\psi - \sin.\,\xi\cos.\,\omega\sin.\,\psi) - v\,d\omega\sin.\,\xi\sin.\,\omega\cos.\,\psi;$$

$$dZ = \frac{Z\,dv}{v} + v\,d\xi\cos.\,\xi\sin.\,\omega + v\,d\omega\sin.\,\xi\cos.\,\omega.$$

Hinc æquatis poſtremis formulis pro dZ inventis colligitur.

$$d\varphi = d\xi + \frac{d\omega\sin.\,\xi\cos.\,\omega}{\cos.\,\xi\sin.\,\omega}.$$

XV.

Quo facilius relatio ex prioribus oriunda eliciatur, conſideremus has formulas inde derivatas

Ex priori differentiatione

$$dX\cos.\,\psi + dY\sin.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\cos.\,\psi + Y\sin.\,\psi) - v\,d\varphi\sin\,\xi;$$

$$dX\sin.\,\psi - dY\cos.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\sin.\,\psi - Y\cos.\,\psi) - v\,d\varphi\cos.\,\xi\cos.\,\omega;$$

Ex poſteriori differentiatione

$$dX\cos.\,\psi + dY\sin.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\cos.\,\psi + Y\sin.\,\psi) - v\,d\xi\sin.\,\xi - v\,d\psi\sin.\,\xi\cos.\,\omega;$$

$$dX\sin.\,\psi - dY\cos.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\sin.\,\psi - Y\cos.\,\psi) - v\,d\xi\cos.\,\xi\cos.\,\omega - v\,d\psi\cos.\,\xi + v\,d\omega\sin.\,\xi\sin.\,\omega;$$

quarum æqualitas dat

$$d\varphi = d\xi + d\psi\cos.\,\omega, \ \&$$

$$d\varphi = d\xi + \frac{d\psi}{\cos.\,\omega} - \frac{d\omega\sin.\,\xi\sin.\,\omega}{\cos.\,\xi\cos.\,\omega};$$

ex quibus conjunctis ſequitur

$$d\psi\,\frac{(1-\cos.\,\omega^2)}{\cos.\,\omega} = \frac{d\omega\sin.\,\xi\sin.\,\omega}{\cos.\,\xi\cos.\,\omega}, \text{ ſeu } d\psi = \frac{d\omega\sin.\,\xi}{\cos.\,\xi\sin.\,\omega}.$$

XVI.

Semper ergo variationes in linea nodorum & inclinatione à ſe invicem pendent, ut ſit

$$d\psi = \frac{d\omega\sin.\,\xi}{\cos.\,\xi\sin.\,\omega}, \text{ ſeu } d\omega = \frac{d\psi\cos.\,\xi\sin.\,\omega}{\sin.\,\xi}, \text{ ſeu } \frac{d\varphi}{\text{tang.}\,\xi} = \frac{d\omega}{\sin.\,\omega}.$$

Tum vero angulus elementaris $ZA\zeta = d\varphi$ per quem corpus Z revera progreditur tempusculo infinite parvo dum variationes $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ gignuntur, ita definitur ut sit

$$\text{vel } d\varphi = d\xi + \frac{d\omega \, \text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega}{\text{cof.}\, \xi \, \text{fin.}\, \omega}$$

$$\text{vel } d\varphi = d\xi + d\psi \, \text{cof.}\, \omega;$$

quarum æqualitas jam insuperiori continetur, ita ut hinc duæ tantum relationes inter quaterna elementa $d\varphi$, $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ constituantur, quas in sequentibus, ubi effectus virium sollicitantium sumus investigaturi, probe meminisse juvabit.

XVII.

Antequàm ad partem mechanicam hujus quæstionis progrediar haud abs re erit quasdam relationes observare, quæ in sequentibus insignem usum sunt habituræ. Scilicet cum differentialibus dX, dY & dZ ex priori differentiatione natis uti liceat. Ad quæ quippe altera jam sunt perducta, inde deducimus

$$YdX - XdY = -\nu d\varphi \big(Y (\text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \psi + \text{cof.}\, \omega \, \text{cof.}\, \xi \, \text{fin.}\, \psi) - X (\text{fin.}\, \xi \, \text{fin.}\, \psi - \text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{cof.}\, \psi) \big);$$

seu $$YdX - XdY = -\nu d\varphi \big((Y \text{cof.}\, \psi - X \text{fin.}\, \psi) \, \text{fin.}\, \xi + (Y \text{fin.}\, \psi + X \text{cof.}\, \psi) \, \text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \big).$$

At est

$$Y \text{cof.}\, \psi - X \text{fin.}\, \psi = \nu \, \text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega, \; \&$$

$$Y \text{fin.}\, \psi + X \text{cof.}\, \psi = \nu \, \text{cof.}\, \xi;$$

quibus valoribus substitutis fit

$$YdX - XdY = -\nu \nu d\varphi (\text{fin.}\, \xi^2 \, \text{cof.}\, \omega + \text{cof.}\, \xi^2 \, \text{cof.}\, \omega);$$

ita ut sit

$$YdX - XdY = -\nu \nu d\varphi \, \text{cof.}\, \omega, \text{ seu}$$

$$XdY - YdX = \nu \nu d\varphi \, \text{cof.}\, \omega.$$

XVIII.

Simili modo habebimus

$$XdZ - ZdX = \nu d\varphi \big(X \text{cof.}\, \xi \, \text{fin.}\, \omega + Z (\text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \psi + \text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{fin.}\, \psi) \big);$$

& pro X & Z in membro posteriori substitutis valoribus

$$XdZ - ZdX = \nu \nu d\varphi \, \text{fin.}\, \omega \big(\text{cof.}\, \xi (\text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \psi - \text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{fin.}\, \psi) + \text{fin.}\, \xi (\text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \psi + \text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{fin.}\, \psi) \big);$$

quæ manifesto in hanc simplicem contrahitur,

$$XdZ - ZdX = \nu \nu d\varphi \, \text{fin.}\, \omega \, \text{cof.}\, \psi.$$

Denique eodem vestigio insistentes colligimus:

$$YdZ - ZdY = \nu d\varphi \big(Y \text{cof.}\, \xi \, \text{fin.}\, \omega + Z (\text{fin.}\, \xi \, \text{fin.}\, \psi - \text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{cof.}\, \psi) \big);$$

& pro Y & Z & valoribus substitutis

$$YdZ - ZdY = \nu \nu d\varphi \, \text{fin.}\, \omega \big(\text{cof.}\, \xi (\text{cof.}\, \xi \, \text{fin.}\, \psi + \text{fin.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{cof.}\, \psi) + \text{fin.}\, \xi (\text{fin.}\, \xi \, \text{fin.}\, \psi - \text{cof.}\, \xi \, \text{cof.}\, \omega \, \text{cof.}\, \psi) \big);$$

quæ sponte in hanc simplicem formulam abit:

$$YdZ - ZdY = \nu \nu d\varphi \, \text{fin.}\, \omega \, \text{fin.}\, \psi.$$

XIX.

Denique cum ex elementis dX, dY & dZ fit elementum revera descriptum $Zz = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}$ ob $AZ = \nu$ & $AZ = \nu + d\nu$ si centro A arculus $Z\nu$ describatur erit $z\nu = d\nu$ & cum positus sit angulus elementaris $ZA\zeta = d\varphi$; erit $Z\nu = \nu\, d\varphi$, hincque $Z\zeta^2 = d\nu^2 + \nu\nu\, d\varphi^2$. Ex quibus evidens eſt fore

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\nu^2 + \nu\nu\, d\varphi^2;$$

quam æqualitatem etiam ex formulis pro differentialibus dX, dY & dZ ante inventis, ſed per plures ambages deducere licuiſſet. Atque hæc fere ſunt, quæ Geometria & Analyſis pro ſolutione quæſtionis propoſita ſubminiſtrant, quibus inſtructi facilius partem mechanicam, qua totum negotium continetur, agredi poterimus. Hæc autem ſeorſim exponere viſum eſt, ne relationes circa lineæ nodorum & inclinationis mutationes momentanea principiis mechanicis inniti videantur.

XX.

Sit igitur maſſa Solis $= A$, Planetæ in $Z = B$, & Planetæ Cometæve perturbantis in $Q = C$: ac primo planeta in Z primo ad ſolem urgetur ſecundum ZA vi acceleratrice $= \frac{A}{\nu\nu}$; unde pro directionibus fixis coordinatarum naſcuntur vires

$$\text{ſeu } XA = \frac{(A+B)X}{\nu^3};$$

$$\text{ſeu } YX = \frac{(A+B)Y}{\nu^3};$$

$$\text{ſeu } ZY = \frac{(A+B)Z}{\nu^3}.$$

Deinde verſus Q urgetur ſecundum directionem ZQ vi acceleratrice $= \frac{C}{\tau\tau}$, unde per ſimilem reſolutionem naſcuntur vires hæ

ſeu

$$\text{ſecundum } AX = \frac{C(u\cos.\theta - X)}{\tau^3};$$

$$\text{ſec. } AY = \frac{C(u\sin.\theta - Y)}{\tau^3};$$

$$\text{ſec. } ZY = \frac{CZ}{\tau^3}.$$

Denique cum etiam ſol ad Q ſollicitetur vi acceleratrice $\frac{C}{uu}$ hæc contrarie ſecundum directionem ZS ipſi QA parallelam in planetam Z applicata eſt concipienda, unde oriuntur hæ duæ vires:

$$\text{ſec. } XA = \frac{C\cos.\theta}{uu}, \ \& \text{ ſec. } YX = \frac{C\sin.\theta}{uu}.$$

XXI.

His jam viribus novimus accelerationes corporis in Z ſecundum eaſdem directiones eſſe proportionales: unde ſi elementum temporis ſtatuamus $= dt$ idque conſtans ſumamus, habebimus tres ſequentes æquationes:

$$ddX = -\alpha\, dt^2 \left(\frac{(A+B)X}{\nu^3} - \frac{C(u\cos.\theta - X)}{\tau^3} + \frac{C\cos.\theta}{uu}\right)$$

$$ddY = -\alpha\, dt^2 \left(\frac{(A+B)Y}{\nu^3} - \frac{C(u\sin.\theta - Y)}{\tau^3} + \frac{C\sin.\theta}{uu}\right)$$

$$ddZ = -\alpha\, dt^2 \left(\frac{(A+B)Y}{\nu^3} + \frac{CZ}{\tau^3}\right)$$

ubi α certam conſtantem qua proportionaliter determinatur, deſignat, quam deinceps ex motu quodam cognito veluti motu terræ medio, qui nunc quidem locum habet, definiri conveniet. Quo pacto ſimul loco elementi temporis vagi in ſe dt ſpatium motu terræ medio interea deſcriptum in calculum introducetur.

Ceterum hic notetur, maſſam ſolis A tantopere maſſas planetarum & cometarum excedere, ut pro $A+B$ tuto ſcribere liceat A. quantitaſque $\frac{C}{A+B}$ pro fractione minima haberi poſſit.

XXII.

Omnes nunc vires Analyſeos in hoc intendi oportet, ut iſtas tres æquationes differentio-differentiales reſolvamus, hoc eſt vel integremus, vel ad commodam approximationem perducamus. Ac primo quidem binis conjugendis ſimpliciores formas adipiſcemur

$$X\,ddY - Y\,ddX = \alpha\,dt^2 \left(-\frac{C\,u\,(Y\,cof.\,\theta - X\,fin.\,\theta)}{r^3} + \frac{C\,(Y\,cof.\,\theta - X\,fin.\,\theta)}{uu}\right);$$

ſeu $X\,ddY - Y\,ddX = \alpha\,C\,dt^2\,(X\,fin.\,\theta - Y\,cof.\,\theta)\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$.

Deinde ſimili modo colligimus

$$X\,ddZ - Z\,ddX = \alpha\,dt^2\left(\frac{-C\,Z\,u\,cof.\,\theta}{r^3} + \frac{C\,Z\,cof.\,\theta}{uu}\right)$$
$$= -\alpha\,C\,Z\,dt^2\,cof.\,\theta\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

$$Y\,ddZ - Z\,ddY = \alpha\,dt^2\left(\frac{C\,Z\,u\,fin.\,\theta}{r^3} + \frac{C\,Z\,fin.\,\theta}{uu}\right)$$
$$= -\alpha\,C\,Z\,dt^2\,fin.\,\theta\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

ubi autem manifeſtum eſt harum trium æquationum binas jam tertiam in ſe complecti.

XXIII.

Hic primo obſervetur formulas $X\,ddY - Y\,ddX$, $X\,ddZ - Z\,ddX$, $Y\,ddZ - Z\,ddY$ eſſe differentialia formularum $X\,dY - Y\,dX$, $X\,dZ - Z\,dX$, $Y\,dZ - Z\,dY$, quarum valores ſupra (§. XVII, XVIII) aſſignavimus. Deinde cum ſit $Z = v\,fin.\,\xi\,fin.\,\omega$, &

$X\,fin.\,\theta - Y\,cof.\,\theta = v\,cof.\,\xi\,fin.\,(\theta - \psi) - v\,fin.\,\xi\,cof.\,\omega\,cof.\,(\theta - \psi)$;

ſuperiores tres æquationes has induent formas:

$$d.\,(vv\,d\varphi\,cof.\,\omega) = \alpha\,C\,v\,dt^2\,(cof.\,\xi\,fin.\,(\theta - \psi) - fin.\,\xi\,cof.\,\omega\,cof.\,(\theta - \psi))\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

$$d.\,(vv\,d\varphi\,fin.\,\omega\,fin.\,\psi) = -\alpha\,C\,v\,dt^2\,cof.\,\theta\,fin.\,\xi\,fin.\,\omega\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

$$d.\,(vv\,d\varphi\,fin.\,\omega\,fin.\,\psi) = -\alpha\,C\,v\,dt^2\,fin.\,\theta\,fin.\,\xi\,fin.\,\omega\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quarum binæ etſi jam continent tertiam, tamen quia nulla eſt ratio, cur unam præ reliquis omittamus, conveniet omnes tres retineri, quo inde facilius formulas deinceps uſum habituras, eliciamus.

XXIV.

Cum igitur binæ poſteriores, ſi ex parte evolvantur, præbeant:

$$cos.\,\psi\, d.\,(\nu\nu\, d\phi\, fin.\,\omega) - \nu\nu\, d\phi\, fin.\,\omega.\, d\psi\, fin.\,\psi = - \alpha C \nu\, dt^2\, cos.\,\theta\, fin.\,\xi\, fin.\,\omega \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

$$fin.\,\psi\, d.\,(\nu\nu\, d\phi\, fin.\,\omega) + \nu\nu\, d\phi\, fin.\,\omega.\, d\psi\, cos.\,\psi = - \alpha C \nu\, dt^2\, fin.\,\theta\, fin.\,\xi\, fin.\,\omega \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

illa per *fin.* ψ hæc vero per $-$ *cof.* ψ multiplicata conjuncte producent

$$- \nu\nu\, d\phi\, d\psi\, fin.\,\omega = \alpha C \nu\, dt^2\, fin.\,\xi\, fin.\,\omega\, fin.\,(\theta - \psi) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quæ per $- \nu\, fin.\,\omega$ dat

$$\nu\, d\phi\, d\psi = - \alpha C dt^2\, fin.\,\xi\, fin.\,(\theta - \psi) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

ita ut hinc elementum $d\psi$ pro temporis elemento dt determinetur

$$d\psi = - \frac{\alpha C dt^2\, fin.\,\xi\, fin.\,(\theta - \psi)}{\nu\, d\phi} \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

unde simul colligitur $d\xi = d\phi - d\psi\, cos.\,\omega$, atque

$$d\omega = \frac{d\psi\, cof.\,\xi\, fin.\,\omega}{fin.\,\xi} = - \frac{\alpha C dt^2\, cof.\,\xi\, fin.\,\omega\, fin.\,(\theta - \psi)}{\nu\, d\phi} \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

XXV.

Sin autem earumdem binarum æquationum prior per *cof.* ψ & posterior per *fin.* ψ multiplicetur junctim prodit:

$$d(\nu\nu\, d\phi\, fin.\,\omega) = - \alpha C \nu\, dt^2\, fin.\,\xi\, fin.\,\omega\, cof.\,(\theta - \psi) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right),$$

quæ ex parte evoluta fit

$$fin.\,\omega\, d(\nu\nu\, d\phi) + \nu\nu\, d\phi\, d\omega\, cof.\,\omega = - \alpha C \nu\, dt^2\, fin.\,\xi\, fin.\,\omega\, cof.\,(\theta - \psi) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Prima autem simili modo ex parte evoluta dat

$$cof.\,\omega\, d.\,(\nu\nu\, d\phi) - \nu\nu\, d\phi\, d\omega\, fin.\,\omega = - \alpha C \nu\, dt^2 \left(fin.\,\xi\, cof.\,\omega\, cof.\,(\theta - \psi) - cof.\,\xi\, fin.\,(\theta - \psi)\right) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Nunc igitur illa per *cof.* ω hæc vero per $-$ *fin.* ω multiplicata conjunctim producent:

$$\nu\nu\, d\phi\, d\omega = - \alpha C \nu\, dt^2\, cof.\,\xi\, fin.\,\omega\, fin.\,(\theta - \psi) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right),$$

quæ cum modo ante inventa congruit. Quod eo minus est mirandum, quod uti jam observavimus, nostræ ternæ æquationes nonnisi pro duabus sunt habendæ, neque propterea plures duabus conclusiones suppeditant.

XXVI.

Multiplicemus autem binarum postremarum æquationum illam per *fin.* ω hanc vero per *cof.* ω, atque earum aggregatum præbebit:

$$d(\nu\nu\, d\phi) = - \alpha C \nu\, dt^2 \left(fin.\,\xi\, cof.\,(\theta - \psi) - cof.\,\xi\, cof.\,\omega\, fin.\,(\theta - \psi)\right) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

quæ ad sequentem usum maxime accomodabitur si per $2\nu\nu\, d\phi$ multiplicetur, & integretur. Quia enim elementum dt constans assumitur, integrale hoc modo repræsentabitur:

$$\nu^4\, d\phi^2 = - 2 \alpha C dt^2 \int \nu^3\, d\phi \left(fin.\,\xi\, cof.\,(\theta - \psi) - cof.\,\xi\, cof.\,\omega\, fin.\,(\theta - \psi)\right) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right),$$

ac videbimus totum negotium potiſſimum ad inventionem hujus integralis revocari. Hæ ergo ſunt illæ duæ concluſiones, quas externis noſtris æquationibus derivatis deducere licet, quarum altera valorem ipſius $v^4 d\varphi^2$ altera vero ipſius $d\psi$ vel $d\omega$ oſtendit.

XXVII.

Cum igitur vis noſtrarum trium æquationum principalium (§. XXI) nondum ſit exhauſta ſequenti combinatione novam inde æquationem formemus. Multiplicentur ſcilicet prima per $2\,dX$, ſecunda per $2\,dY$, ac tertia per $2\,dZ$, ut hoc modo ſummæ prius membrum fiat integrabile, & cum ſit $X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = v\,dv$ obtinebimus

$$2\,dX\,ddX + 2\,dY\,ddY + 2\,dZ\,ddZ = -2\alpha\,dt^2 \left(\frac{(A+B)\,dv}{vv} + \frac{C\,v\,dv}{\tau^3} - C(dX\,cos.\,\theta + dY\,sin.\,\theta)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)\right)$$

ex formulis autem differentialibus (§. XIV) colligimus

$$dX\,cos.\,\theta + dY\,sin.\,\theta = \frac{dv}{v}(X\,cos.\,\theta + Y\,sin.\,\theta) - v\,d\varphi \left(sin.\,\xi\,cos.\,(\theta-\psi) - cos.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta-\psi)\right),$$

quæ ob

$$X\,cos.\,\theta + Y\,sin.\,\theta = v\left(cos.\,\xi\,cos.\,(\theta-\psi) + sin.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta-\psi)\right),$$

tandem præbet

$$2\,dX\,ddX + 2\,dY\,ddY + 2\,dZ\,ddZ = -2\alpha\,dt^2 \left(\frac{(A+B)\,dv}{vv} + \frac{C\,v\,dv}{\tau^3}\right)$$
$$+ 2\alpha C\,dt^2\left(dv\,(cos.\,\xi\,cos.\,(\theta-\psi) + sin.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta-\psi))\right.$$
$$\left. - v\,d\varphi\left(sin.\,\xi\,cos.\,(\theta-\psi) - cos.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta-\psi)\right)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

XXVIII.

Jam partis prioris integrale eſt

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2$$

pro parte autem poſteriori ponamus brevitatis gratia

$$cos.\,\xi\,cos.\,(\theta-\psi) + sin.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta-\psi) = cos.\,\rho, \text{ \&}$$
$$sin.\,\xi\,cos.\,(\theta-\psi) - cos.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta-\psi) = sin.\,\sigma,$$

ut ſit $\rho =$ angulo QAZ & propterea

$$\tau = \sqrt{(uu - 2uv\,cos.\,\rho + vv)}.$$

Hincque æquatio noſtra integralis ita ſe habebit

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2\alpha(A+B)\,dt^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f}\right) - 2\alpha C\,dt^2\int\frac{v\,dv}{\tau^3}$$
$$+ 2\alpha C\,dt^2\int(dv\,cos.\,\rho - v\,d\varphi\,sin.\,\sigma)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Tum vero ex ſupra inventis habemus:

$$v^4\,d\varphi^2 = -2\alpha C\,dt^2\int v^3\,d\varphi\,sin.\,\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

quibus duabus æquationibus ſolutio problematis potiſſimum continetur.

XXIX.

Ponamus præterea ad has formulas contrahendas:

$$\int v^3\,d\varphi\,sin.\,\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) = P;$$
$$\int\frac{v\,dv}{\tau^3} = Q;$$
$$\int(dv\,cos.\,\rho - v\,d\varphi\,sin.\,\sigma)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) = R;$$

quas quantitates, quia in terminis valde parvis tantum inſunt, tantiſper tanquam cognitas ſpectemus: & noſtræ æquationes erunt

$$\nu^4\, d\varphi^2 = 2\,\alpha\, dt^2\,((A+B)\,G - CP);$$
$$d\nu^2 + \nu\nu\, d\varphi^2 = 2\,\alpha\, dt^2\,((A+B)(\tfrac{1}{v}-\tfrac{1}{f}) - CQ + CR);$$
ubi ut parvitas massæ C præ $A+B$ clarius in oculos incurrat ponamus $\frac{C}{A+B} = n$, ita ut n sit fractio quam minima: induentque nostræ æquationes has formas:
$$\nu^4\, d\varphi^2 = 2\,\alpha\,(A+B)\, dt^2\,(G - nP);$$
$$d\nu^2 + \nu\nu\, d\varphi = 2\,\alpha\,(A+B)\, dt^2\,(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} - nQ + nR).$$

XXX.

Hinc jam commode exui potest consideratio tempusculi dt, fietque
$$(G - nP)(d\nu^2 + \nu\nu\, d\varphi^2) = \nu^4\, d\varphi^2\,(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} + n(R-Q));$$
unde colligitur
$$d\nu^2\,(G - nP) = \nu^4\, d\varphi^2\,\left(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} + n(R-Q) - \tfrac{(G-nP)}{vv}\right);$$
hincque porro
$$\tfrac{dv}{vv}\sqrt{(G-nP)} = d\varphi\,\sqrt{\left(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} + n(R-Q) - \tfrac{(G-nP)}{vv}\right)};$$
qua æquatione relatio inter differentialia $d\nu$ & $d\varphi$ exprimitur, reliqua autem jam supra ad $d\varphi$ sunt reducta: tum vero nunc etiam tempusculum dt eodem revocatur ope æquationis
$$\nu\nu\, d\varphi = dt\sqrt{2\,\alpha\,(A+B)\,(G - nP)};$$
si fractio n plane evanesceret, hinc cognitæ regulæ Keplerianæ deduci solent.

XXXI.

Quo nunc motus determinationem ad similitudinem regularum Keplerianarum perducamus, distantiæ $AZ = \nu$

$AZ = \nu$ formam similem ei, quæ in sectionibus conicis occurrit, tribuamus, sitque $\nu = \frac{p}{1 + q\, cos.\, x}$, ubi p denotat semiparametrum sectionis conicæ; q excentricitatem, ex x eum angulum qui anomalia vera appellatur. Cum autem vulgo anomalia vera ab aphelio computari soleat, liceat hic mihi ab hoc more recedere, eamque à perihelio computare, quo simul in cometarum orbitis locum inveniri queat. In motu regulari quantitates p & q essent constantes, nunc autem eas ut variabiles tractemus, ut quemadmodum initio observavi, motus perturbatio in variatione elementorum sectionis conicæ comprehendatur. Dum autem semiparameter est $= p$, & excentricitas $= q$ erit semiaxis transversus $= \frac{p}{1 - qq}$, quem vocemus $= r$, in cujus variatione definienda tota quæstio versatur.

XXXII.

Cum igitur hoc modo loco unius variabilis ν tres novæ variabiles p, q, & x in computum ingerantur, binas pro lubitu definire licet, in quo quidem ratio absidum est habenda, qua hæ duæ conditiones præscribuntur, ut casibus quibus fit vel $cos.\, x = 1$, vel $cos.\, x = -1$ differentiale $d\nu$ ideoque & formula irrationalis $\sqrt{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f} + n(R-Q) - \frac{G-nP}{vv}\right)}$ evanescat: fit brevitatis ergo $\frac{1}{f} - n(R-Q) = M$ & $G - nP = N$, ut habetur
$$\tfrac{dv}{vv}\sqrt{N} = d\varphi\sqrt{(-M + \tfrac{2}{v} - \tfrac{N}{vv})};$$
& binæ conditiones præscriptæ præbent:
$$-M + \tfrac{1+q}{q} - \tfrac{N(1+q)^2}{pp} = 0 \;\&\; -M + \tfrac{1-q}{p} - \tfrac{N(1-q)^2}{pp} = 0;$$

quarum differentia dat $\frac{2q}{p} = \frac{4Nq}{pp}$, seu $p = 2N$;
unde fit $M = \frac{1+q}{p} - \frac{(1+q)^2}{2p} = \frac{1-qq}{2p}$;
ideoque $2M = \frac{1}{r}$, ob $r = \frac{p}{1-qq}$;
erit ergo $p = 2(g - nP)$, & $\frac{1}{r} = \frac{2}{f} - 2n(R-Q)$.

XXXIII.

His jam determinationibus pro M & N iventis formula nostra irrationalis fit:

$$\sqrt{\left(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}\right)} = \sqrt{\left(-\frac{(1-qq)}{2p} + \frac{1+q\,\mathrm{cos}\!f.\,x}{p} - \frac{(1+q\,\mathrm{cos}\!f.\,x)^2}{2p}\right)} = \frac{q\,\mathrm{fin}.\,x}{\sqrt{2p}};$$

unde ob $N = \frac{p}{2}$ colligitur

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{\frac{p}{2}} = \frac{q\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x}{\sqrt{2p}},\ \text{feu}\ \frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x}{p}.$$

Cum autem fit $\frac{1}{v} = \frac{1+q\,\mathrm{cof}.\,x}{p}$ erit

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp}(1+q\,\mathrm{cof}.\,x) - \frac{dq\,\mathrm{cof}.\,x}{p} + \frac{q\,dx\,\mathrm{fin}.\,x}{p} = \frac{q\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x}{p},$$

unde fequitur fore pro anomalia vera

$$dx = d\varphi - \frac{dp(1+q\,\mathrm{cof}.\,x)}{pq\,\mathrm{fin}.\,x} + \frac{dq\,\mathrm{cof}.\,x}{q\,\mathrm{fin}.\,x}.$$

At ob $1 - qq = \frac{p}{r}$ eft $q\,dq = \frac{p\,dr - r\,dp}{2rr}$, ficque fit

$$dx = d\varphi - \frac{dp(1+q\,\mathrm{cof}.\,x)}{pq\,\mathrm{fin}.\,x} - \frac{dp\,\mathrm{cof}.\,x}{2qqr\,\mathrm{fin}.\,x} + \frac{p\,dr\,\mathrm{cof}.\,x}{2qqrr\,\mathrm{fin}.\,x},$$

feu $dx = d\varphi - \frac{dp(2q+(1+qq)\,\mathrm{cof}.\,x)}{2pqq\,\mathrm{fin}.\,x} + \frac{dr}{rr}\cdot\frac{p\,\mathrm{cof}.\,x}{2qq\,\mathrm{fin}.\,x}$,

ubi cum fit $dp = -2n\,dP$, & $\frac{dr}{rr} = -2n(dQ - dR)$, erit . . . .

$$dx = d\varphi + \frac{n\,dP(2q+(1+qq)\,\mathrm{cof}.\,x)}{pqq\,\mathrm{fin}.\,x} - \frac{np(dQ - dR)\,\mathrm{cof}.\,x}{qq\,\mathrm{fin}.\,x}.$$

XXXIV.

Jam vero cum fit $dP = v^3\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,\sigma\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$, erit primo variatio in femi-parametro p producta:

$$dp = -2nv^3\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,\sigma\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Deinde ob $dv = \frac{qvv\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x}{p}$,

erit $dQ = \frac{qv^3\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x}{pr^3}$, &

$$dR = \left(\frac{quv\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x\,\mathrm{cof}.\,\rho}{p} - v\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,\sigma\right)\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

unde pro variatione femi-axis tranfverfi r peperitur:

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\varphi\,\mathrm{fin}.\,x}{pr^3} + 2nv\,d\varphi\left(\frac{qv\,\mathrm{fin}.\,x\,\mathrm{cof}.\,\rho}{p} - \mathrm{fin}.\,\sigma\right)\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Tum vero relatio inter $d\varphi$ & dx prodit:

$$dx = d\varphi + \frac{nv^3\,d\varphi(2q+(1+qq)\,\mathrm{cof}.\,x)\,\mathrm{fin}.\,\sigma}{pqq\,\mathrm{fin}.\,x}\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right) - \frac{nv^3\,d\varphi}{qr^3} - \frac{npv\,d\varphi\,\mathrm{cof}.\,x\,\mathrm{fin}.\,\sigma}{qq\,\mathrm{fin}.\,x}\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right) + \frac{nvv\,d\varphi\,\mathrm{cof}.\,x\,\mathrm{cof}.\,\rho}{q}\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

ubi meminiffe oportet effe $v = \frac{p}{1+q\,\mathrm{cof}.\,x}$.

XXXV.

In hac postrema formula termini per $\sin.\sigma$ affecti commode in unum colligi possunt: si enim posterior per $\frac{vv(1+q\cos.x)^2}{pp}=1$ multiplicetur ambo conjunctim erunt

$$+\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin.\sigma}{pqq\,\sin.x}\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right)\left(\begin{array}{l}\cos.x+xq+qq\cos.x\\-\cos.x-2q\cos.x^2-qq\cos.x^3\end{array}\right),$$

qui ergo in hunc evalescunt

$$\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin.x\,\sin.\sigma}{pq}(2+q\cos.x)\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

hincque ergo habebimus

$$dx=d\varphi-\frac{nv^3\,d\varphi}{qr^3}+\frac{nvv\,d\varphi\cos.x\cos.\rho}{q}\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right),$$
$$+\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin.x\,\sin.\sigma}{pq}(2+q\cos.x)\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

quæ forma etiam hoc modo exprimi potest:

$$dx=d\varphi-\frac{nv^3\,d\varphi}{qr^3}+\frac{nvv\,d\varphi}{q}\left(\cos.x\cos.\rho+\frac{2+q\cos.x}{1+q\cos.x}\sin.x\sin.\sigma\right)\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

ubi notandum est $d\varphi-dx$ definire progressionem momentaneam lineæ absidum.

XXXVI.

Consideremus nunc etiam relationem, quæ inter angulum elementarem $d\varphi$ & tempusculum dt intercedit, & cum sit $G-nP=\frac{1}{2}p$, erit $vv\,d\varphi=dt\sqrt{a}\,(A+B)p$. Quod si jam loco tempusculi dt angulum à terra motu medio interea confectum introducere ve-

limus, ut constans vaga a eliminetur, ponamus à terra secundum motum medium, quoquidem nunc gaudet, tempusculo dt absolvi angulum elementarem dT: & formula ista ad motum terræ accommodata, quæ pro motu medio tanquam circulus spectari debet, cujus radius seu distantia media à sole sit $=a$ fiet $v=p=a$ & $d\varphi=dT$, ita ut sit

$$a\,u\,dT=dt\sqrt{a\,(A+B)\,a},\ \text{seu}$$
$$a\,(A+B)\,dt^2=a^3\,dT^2;$$

ubi quidem B massam terræ denotat; sed ob insignem massæ solis magnitudinem pro omnibus planetis quantitas $A+B$ pro eadem haberi potest. Tempusculo ergo, quo terra motu medio angulum dT absolvit erit pro nostro planeta

$$vv\,d\varphi=a\,dT\sqrt{ap}.\ \text{ideoque}\ dT=\frac{vv\,d\varphi}{a\sqrt{ap}}.$$

XXXVII.

Cum nunc sit $a\,dt^2=\frac{v^4\,d\varphi^2}{(A+B)p}$, erit hoc valore in superioribus formulis (§. XXIV) substituto, ob $\frac{C}{A+B}=n$

$$d\psi=-\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin.\xi\,\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

hincque porro pro variatione inclinationis

$$d\omega=-\frac{nv^3\,d\varphi\cos.\xi\,\sin.\omega\,\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

ac pro variatione argumenti latitudinis seu anguli ☊$AZ=\xi$

$$d\xi=d\varphi+\frac{nv^3\,d\varphi\,\sin.\xi\cos.\omega\,\sin.(\theta-\psi)}{p}\left(\frac{u}{r^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

ubi $d\varphi-d\xi$ exprimit promotionem lineæ nodorum in orbita planetæ, quem in Z consideramus. Atque hoc modo omnes mutationes momentaneas ab actione planetæ cometæve in Q versantis profectas per angulum elementarem $d\varphi$ ideoque etiam per angulum motu medio terræ vel solis confectum dt expressas dedimus.

XXXVIII.

Si hæ formulæ integrari possent, non solum quæstioni ab Illustrissima Academia Regia Scient. perfecte satisfieret, sed etiam omnes perturbationes, quas planetæ vel cometæ mutua actione in motu suo patiuntur, ita exacte definiri possent, ut vix quicquam amplius in Theoria Astronomiæ esset desiderandum, quod autem antequam Analysis insignibus incrementis locupletetur, nec sperare quidem licet. Quamdiu autem his subsidiis caremus, tutissima via videtur his ipsis formulis differentialibus ita utendi ut mutationes intervallo singulorum dierum productæ tanquam differentialia spectentur sicque valor ipsius dT statuatur $= 59', 8''$. Tum enim pro singulis temporis intervallis ex ipsis formulis differentialibus valores variationum dp, dr, $d\psi$ & $d\omega$ colligi, indeque pro tempore quantumvis magno eædem mutationes satis exacte æstimari poterunt. Hæc methodus præcipue usum habebit si perturbationes à cometa oriantur cujus effectus cum per modicum tempus duret, non nimis prolixos calculos postulabit. Periculum igitur feci in perturbatione motus terræ à nupero cometa orta æstimanda.

De effectu nuperi Cometæ in motu Telluris perturbando.

XXXIX.

Cum hujus Cometæ nondum ejusmodi observationes ad me pervenerint, ex quibus elementa motus, quem nunc tenuit, definire potuissem, iis usus sum elementis, quæ pro ejus apparatione A. 1682 sunt stabilita; atque quantum ex observationibus crassioribus colligere licuit assumsi hanc cometam ad diem 14 Martii hujus anni per Perihelium transiisse. Quamvis autem verisimile sit elementa motus perinde æc tempus periodicum à precedente apparatione mutationem esse passa, tamen loca cometæ visa satis cum superioribus elementis convenire, sunt deprehensa, ut hinc nullus enormis error sit metuendus. Erat ergo hic cometa terræ proximus circa diem 27 Aprilis, ejusque distantia ad distantiam solis fere se habebat ut 2 ad 17. De massa autem ejus nihil suspicari licet, quam ad massam Solis rationem tenere pono ut n ad 1, ita ut si cometæ massa æquaretur massæ terræ foret prope modum $n = \frac{1}{100000}$. At verum valorem fractionis n nonnisi ex effectu in posterum observando definire licebit.

XL.

Quoniam igitur actio cometæ in terram circa 27 Aprilis erat maxima, pro pluribus diebus ante & post hoc tempus variationes in orbita terræ productas ex formulis; ante datis computavi.

Intervallum temporis Aprilis.	Variatio semi-parametri. $d\,p$	Variatio semi-axis. $d\,r$	Variatio lineæ absidum. $d\varphi - d\pi$	Variatio lineæ nodorum. $d\psi$	Variatio inclinationis. $d\omega$
20—21	$+ 45310\,n$	$+ 44570\,n$	$- 4937560\,n''$	$+ 8903\,n''$	$+ 6717\,n''$
25—26	$+ 155650\,n$	$+ 154346\,n$	$- 19059570\,n$	$+ 112880\,n$	$+ 111364\,n$
26—27	$+ 135314\,n$	$+ 135466\,n$	$- 18445310\,n$	$+ 152436\,n$	$+ 159996\,n$
27—28	$+ 66010\,n$	$+ 67438\,n$	$- 11593600\,n$	$+ 155398\,n$	$+ 173911\,n$
28—29	$- 3262\,n$	$- 1014\,n$	$- 3778470\,n$	$+ 119840\,n$	$+ 143550\,n$
29—30	$- 37860\,n$	$- 35616\,n$	$+ 878107\,n$	$+ 78234\,n$	$+ 100724\,n$
30—1 Maji	$- 46088\,n$	$- 44210\,n$	$+ 1799210\,n$	$+ 48305\,n$	$+ 67183\,n$
1 — 2	$- 43260\,n$	$- 41772\,n$	$+ 2959610\,n$	$+ 29734\,n$	$+ 44933\,n$
6 — 7	$+ 19031\,n$	$- 17736\,n$	$+ 1554230\,n$	$+ 3608\,n$	$+ 9506\,n$

posito semi-axe ab actione cometæ immuni $r = 100000$.

XLI.

Hinc patet 1°. semi-parametrum p ad 28 Aprilis augeri, tum vero iterum minui, ita tamen ut incrementum multum superet decrementum. Totum quidem augmentum exsurgere videtur ad $700000\,n$; ex quo cum ante adventum cometæ semi-parameter esset $= 97144$, is posthac erit $= 97144 + 700000\,n$. Quare si massa cometæ ad massam terræ statuatur ut m ad 1, erit nunc semi-parameter orbitæ terræ $= 97144 + \frac{7}{2}\,m$. 2°. Pares fere mutationes patitur semi-axis transversus r, qui ab actione cometæ augmentum accepisse videtur $= 690000\,n$. unde siquidem nunc erit $= 100000 + \frac{69}{10}\,m$. denotante perpetuo $m : 1$ rationem massæ cometæ ad terræ. 3°. Hinc sequitur, cum excentricitas orbitæ terræ ante adventum cometæ esset $= 0,0169$, eam nunc aliquanto fore minorem $= 0,0169 - 0,000044\,m$. Quando vera elementa motus cometæ fuerint erecta, operæ pretium erit hunc calculum repetere & ad plures dies tam ante quam post perigæum extendere.

XLII.

XLII.

Cum ab actione cometæ axis orbitæ terræ certe sit auctus in posterum quantitatem anni solaris majorem fieri necesse est, idque in ratione 1 ad $(1 + \frac{69\,m}{2000000})^{\frac{3}{2}}$, seu 1 ad $1 + \frac{207\,m}{4000000}$. Quare cum ante adventum cometæ annus solaris fuisset $365^d, 5^h, 49' = 525949'$ incrementum anni in posterum hinc prodit $= 27\,m'$ quod sane admodum est notabile si enim massa cometæ æqualis esset massæ terræ, quantitas anni solaris posthac futura esset $365^d, 6^h, 16'$ unde non exigua mutatio in calendarium inferretur. Imprimis autem tabulæ astronomicæ omnes mediorum motuum, quatenus ad annos referentur; insigni correctione indigerent. Quin etiam si cometa tantum parti $\frac{1}{27}$ terræ æquaretur, incrementum unius minuti primi in annos mox sentiri deberet atque hinc massa cometæ accuratissime cognosci posse videtur.

XLIII.

Quia motus cometæ erat retrogradus, motusque lineæ absidum terræ ad ejus orbitam relatur, signum — quod in columna $d\varphi - d\,x$ prævalet ostendit lineam absidum terræ promotam esse. Idque per spatium, quod haud minus quam $100000000\,n$ æstimari potest. Foret ergo nunc aphelium terræ magis promotum per spatium $500\,m''$ unde si cometa esset terræ æqualis nunc quidem locus aphelii, quem tabulæ ostendunt, augeri deberet $8', 20''$ quod incrementum mox ex accuratissimis observationibus solis post actionem cometæ instituendis percipi deberet. Denique ex binis ultimis columnis patet ambos angulos ψ & ω insigne augmentum capere debere. Quod utrinque haud minus quam $950000\,n''$ vel $47\frac{1}{2}\,m''$ æstimari potest, sunt enim ambo fere æqualia. Cujusmodi autem phœnomena hinc oriantur, opera pretium erit accuratissime definire.

XLIV.

Fig. 2. Sit igitur in cœlo $☊ C$ via cometæ ex sole visa & $☊ ♎ ♋$ eclipticæ situs ante cometæ adventum, erit ex elementis orbitæ cometæ angulus $☊ ♎ C = 17^{\circ}\, 56' = \omega$ & arcus $☊ ♎ = 57^{\circ}, 16'$. Jam per punctum ♎ transeat æquator $Æ ♎ Q$ ut sit angulus $Æ ♎ ♋ = 23^{\circ}, 28\frac{1}{2}'$. At postquam cometæ effectum suum produxit, sit $\varepsilon o \lambda \omega$ ecliptica secans priori in o, erit $☊ \omega = d\psi$, & $C\omega o = \omega + d\omega$. Ducatur arculus ωu ad $☊ o$ normalis, erit $☊ u = d\psi\, cos. \omega$ & $\omega u = d\psi\, sin. \omega$. Hinc ob $d\omega = d\psi$ reperitur arcus $☊ o = 17^{\circ}\, 7'$, & angulus minimus ad $o = 50\, m''$, ob $d\psi = d\omega = 47\frac{1}{2} m''$. Cum ergo sit $♎ o = -34^{\circ}, 9'$ ecliptica motu aggratorio circa punctum o, quod cadit in $♏ 4^{\circ}, 9'$ conversa est angulo $50\, m''$ sicque punctum solstitiale ♋ magis ab æquatore removetur & obliquitas eclipticæ augetur. Ac si obliquitas eclipticæ augetur. Ac si obliquitas eclipticæ pristina ponatur $= \varepsilon$. Presens $= \varepsilon + d\varepsilon$, invenitur $d\varepsilon = 41\, m''$ & cum sit $\mu\lambda = -63\, m''$. Puncta æquinoctialia super ecliptica promota erunt spatio $63\, m''$ super æquatore autem spatio $70''\, m$. In latitudine igitur stellarum fixarum hic effectus potissimum spectabitur, & maxime quidem in iis quarum longitudo est vel $♌ 4^{\circ}, 9'$, vel $♒ 4^{\circ}, 9'$, quarum illæ ad polum eclipticæ borealem accessisse, hæ vero ab eo recessisse videbuntur intervallo $50\, m''$.

Responsio ad Quæstionem.

XLV.

Cum ergo dubitari nequeat, quin axis orbitæ Telluris ab actione nuperi Cometæ augmentum acceperit, nisi forte quis vel sistema gravitationis universalis evertere, vel corpora cometarum omnes materia expertia statuere velit. Quorum alterum gravissimis argumentis, alterum natura corporum adversaretur, omnino agnoscere debemus, quantitatem anni solaris in posterum aliquantum majorem esse futuram, quam adhuc fuerat. etiamsi verum augmentum ob massam cometæ incognitam definire haud liceat. Ex quo necessario sequitur, motum medium solis aliquanto tardiorem fieri oportere. Cujusmodi mutatio cum nunc quidem in terra contigerit, omnino probabile est similem perturbationem jam antehac nonsolum in terra sed etiam in reliquis planetis esse factam, ita ut sine ulla dubitatione asseverare possimus, motus medias planetarum quandoque alterationibus esse obnoxios.

XLVI.

Hujusmodi alteratio toties evenire debet, quoties cometa cuipiam planetæ sit admodum vicinus, quodquin sæpius jam contigerit vix dubitare licet. Utinam Historia Cometarum majori cura ab Astronomiæ peritis omni tempore fuisset consignata! inde enim quinam cometæ ad quempiam planetam satis prope accesserint, cognosci eorumque effectus per similem calculum, quo hic sum usus, determinari posset; sed vetustiores relationes ita plerumque fabulis sunt refertæ. Ut parum fidei mereantur; quantus enim effectus oriri debuisset ab illis cometis quorum magnitudo apparens Lunam superasse perhibetur? Qui quin terræ multo viciniores fuissent quum hic postremus, dubitare non posset, cum tamen observationes astronomicæ, vix ullam alterationem indicare videantur. Merito igitur hujusmodi cometarum, qui adeo in regiones sublunares descendisse ferantur relationes fabulis vulgi annumerantur.

XLVII.

Neque tamen omnino negare possumus, ante hoc tempus ullas hujusmodi perturbationes in motu terræ esse productas, etiamsi fortasse aliquot abhinc seculis, quibus Astronomica majori studio tractare est capta, nihil tale evenerit. Fieri enim posset, ut ob defectum idonearum observationum hujusmodi alteratio non esset animadversa, vel ut motus medius jam ita fuerit constitutus ut etiam cum illis satis prope conveniret. Suspicio hinc saltem nasci posset, quoniam Ptolemæi observationes, cum nostris collocatæ, anni quantitatem aliquanto minorem ostendunt, nisi error reductionis Calendarii Ægyptiaci ad Romanum in causa sit, intervallo temporis ab Hipparcho ad Ptolemæum elapsi cometam quendam annum contraxisse, deinde vero ab alio quopiam cometa annum iterum nonnihil fuisse protractum. Verum de his nihil præter conjecturas proferre licet, sufficiat igitur exemplo nuperi cometæ, ostendisse ab ejus actione utique alterationem in motu medio terræ oriri debuisse.

XLVIII.

At si ab ista cometa non solum terræ motus medius sed etiam positio & species ejus orbitæ quandam variationem est passa, fieri omnino nequit, quin Luna in motu suo multo majores perturbationes sit passa, quas cum per Theoriam definire vix liceat, observationes posthac instituenda declarabant. Ubi quidem non parum esset dolendum, cum jam post tot tantosque labores Theoria Lunæ ad id perfectionis sit perducta ut lunæ loca fere æque exacte ac solis definire valuerimus, si ingens hoc opus posthac nulli usui amplius esset futurum, plures enim anni novæ Theoriæ condendæ vix sufficerent. Hoc autem eo magis est verendum, cum revera mutatio quædam in motu lunæ medio post tempora vetustissimarum observationum facta deprehendatur. Quæ quin effectui cujuspiam cometæ sit tribuenda, nunc quidem extra dubium positum videtur.

XLIX.

Atque hæ causæ perturbationum ab actione cometarum profectæ ita sunt incertæ ut neque quæ antehac evenerunt ob defectum observationum assignari, neque futuræ prædici queant, nisi forte pro iis cometis, quorum reversiones jam satis sunt exploratæ, etiamsi perturbationes, quas ipsi in suo cursu à planetis patiuntur, haud levi sint impedimento. Certiores autem eæ sunt perturbationes, quæ ab actione mutua planetarum oriuntur, & ad quas definiendas supra expositæ formulæ simili modo adhibueri possunt, ita ut pro singulis diebus vel etiam minoribus majoribusve temporis intervallis variationes singulorum elementorum per ipsas formulas differentiales definiantur, ac deinceps in unam summam colligantur. Qui calculus fortasse minori opera expedietur quam si integratio completa harum formularum in nostra esset potestate; integralia enim, siquidem unquam ea eruere licebit, tantopere implicata fore videntur, ut nonnisi prolixissimis ac tædiosissimis calculis evolvi queant.

L.

Cum igitur quæstio propoſita non omnes perturbationes requirat, ſed ad variationem axis tranſverſi ſit adſtricta eam ſequenti formula exprimi ſupra vidimus:

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\varphi\,\text{ſin.}\,x}{p\tau^3} + 2nv\,d\varphi\left(\frac{qv\,\text{ſin.}\,x\,\text{coſ.}\,\rho}{p} - \text{ſin.}\,\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quam aliquanto attentius conſiderari conveniet. Eſt autem n fractio tam parva ut niſi diſtantia τ admodum ſit exigua, hæc expreſſio nullius ſit momenti: tum vero patet eam proxime cubo diſtantiæ $QZ = \tau$ reciproce eſſe proportionalem ita ut dimidia diſtantia effectum octies majorem afferat. Deinde etiam diſtantia $AQ = u$ quando ſit minima, hanc expreſſionem multum augere poteſt, tamen quia tantum ratio inverſa duplicata diſtantiæ adeſt, hic effectus illo longe minor eſt cenſendus, niſi forte ingens cometa in perihelio ſuo ſolem fere attingat, uti A. 1681 eveniſſe conſtat: ſed hæc vicinitas nimis cito tranſit, quam ut effectus inde notabilis oriri poſſe videatur.

LI.

Qui formulam non tam integrare quam ad commodam approximationem perducere voluerit, vehementer vereor ne oleum operamque perdiderit. Primo enim ipſa quantitas τ tali irrationalitate eſt implicata, ut ad hunc uſum vix in ſeriem ſatis convergentem evolvi poſſe videatur: namque ſi caſu quo τ eſt quantitas parva, fuerit convergens, id quod imprimis eſt opus, pro reliquis caſibus plane erit inepta. Deinde tam in ea quam in reliquis formulæ partibus ineſt angulus ρ cum angulo σ, qui ipſi formulis nimis perplexis definiuntur, quam ut ſucceſſum ſperare valeamus. Cujus difficultatis ratio potiſſimum in inclinatione binarum orbitarum ſeu angulo τ eſt ſita, qui cum in cometis quantumvis magnus eſſe poſſit, ne tentare quidem hujuſmodi reductionem volui, præſertim cum omnino minus ſit moleſtum, calculum ex ipſa formula differentiali repetere, quemadmodum pro cometa hujus anni feci, eademque methodo pro omnibus reliquis cometis uti mallem; à quorum actione motus cujuſpiam planetæ turbari videatur.

LII.

Verum pro actione mutua planetarum, quoniam eorum orbitæ parum inter ſe inclinatur, noſtra formula aliquanto ſimplicior reddi poteſt. Si enim inclinatio ω evaneſcat, uti pro planetis aſſumere licet, conſideratio lineæ nodorum penitus exuitur ob $\text{coſ.}\,\omega = 1$, erit $d\xi = d\varphi - d\psi$ & $\xi = \varphi - \psi$ hincque $\text{coſ.}\,\rho = \text{coſ.}\,(\varphi - \theta)$ & $\text{ſin.}\,\sigma = \text{ſin.}\,(\varphi - \theta)$ ita ut litteræ ρ & σ eundem angulum $\varphi - \theta$ qui eſt diſtantia amborum planetarum ex ſole viſa, denotent. Quare hoc caſu erit

$$\tau = \sqrt{(uu - 2uv\,\text{coſ.}\,(\varphi - \theta) + vv)}, \text{ \&}$$

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\varphi\,\text{ſin.}\,x}{p\tau^3} + 2nv\,d\varphi\left(\frac{qv\,\text{coſ.}\,(\varphi-\theta)\,\text{ſin.}\,x}{p} - \text{ſin.}\,(\varphi-\theta)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quæ ob $\frac{p}{v} = 1 + q\,\text{coſ.}\,x$ transformatur in hanc

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\varphi\,\text{ſin.}\,x}{p\tau^3} - \frac{2nvv\,d\varphi}{p}\left(\text{ſin.}\,(\varphi - \theta) + q\,\text{ſin.}\,(\varphi - \theta - x)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

LIII.

In hac formula, quia per fractionem minimam n eſt multiplicata atque omnes perturbationes valde ſunt exiguæ, primo quantitates p & q pro conſtantibus haberi poſſunt. Tum vero ponere licet $dx = d\varphi$ neglecta motu lineæ abſidum. Deinde quo tempore terra motu medio conficit angulum dT eodem erit $d\varphi = \frac{a\,dT\sqrt{ap}}{vv}$, exiſtente $v = \frac{p}{1 + q\, coſ.\, x}$. Ac ſi pro altero planeta perturbante in Q ſit ſemiparameter $= b$, excentricitas $= e$ & anomalia vera à perihelio computata $= y$ erit ſimili modo $u = \frac{b}{1 + e\, coſ.\, y}$ & $d\theta = \frac{a\,dT\sqrt{ab}}{uu} = dy$, unde omnia differentialia ad idem dT reducuntur. Sed maxima difficultas etiamnum in formula irrationali τ reſidet. Quæ quomodo ſuperari queat, ita quidem ut noſtrum inſtitutum poſtulat, nondum perſpicio: immanes enim calculos evitare vellem quia inde parum ſubſidii ſuppetiturum prævideo.

LIV.

Simpliciſſimus eſt caſus, quo ambæ orbitæ ſtatuuntur circulares & excentricitas negligitur. Unde fit $v = p = r$: $u = b$. $d\varphi = \frac{a\,dT\sqrt{ap}}{rr} = \frac{a\sqrt{a}}{r\sqrt{r}}\,dT$, & $d\theta = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}\,d\tau$, tum vero $\tau = \sqrt{(bb + rr - 2br\, coſ.(\varphi - \theta))}$, & variatio quæſita $dr = -2nr^3\, d\varphi\, ſin.\,(\varphi - \theta)$. $\left(\frac{b}{\tau^3} - \frac{1}{bb}\right)$; ubi quidem ipſa quantitas r ob mutabilitatem minimam ut conſtans ſpectari poteſt. Hic igitur obſervo quomodocunque formula $\frac{b}{\tau^3}$ in ſeriem convertatur, in eo tantum anguli $\varphi - \theta$ coſinum cum ſuis poteſtatibus occurrere quæ cum ad coſinus multiplorum ejuſdem anguli reducantur, ſi ponamus brevitatis gratia $\varphi - \theta = \eta$ factor $\frac{b}{\tau^3} - \frac{1}{bb}$ hujuſmodi formam induet $A + B\, coſ.\, \eta + C\, coſ.\, 2\eta + D\, coſ.\, 3\eta$, &c. unde integrale ipſius dr, quia $d\varphi$ ad dy conſtantem habet rationem, ſimili quoque forma exprimetur, ita ut durante qualibet revolutione quantitas r variationes quidem patiatur, ſed poteſt quamlibet iterum eundem quantitatem recuperet: ex quo motus medius nullam alterationem pati cenſebitur.

LV.

Quamdiu ergo ambæ orbitæ excentricitate carent, à planetarum actione mutua nulla alteratio in eorum motu medio efficitur: quas enim mutationes axis tranſverſus per ſingulas revolutiones ſubit, eæ inter inæqualitates motus referri ſolent. Fieri autem poteſt ut ab eadem actione poſt longum demum tempus utrique orbitæ excentricitas quædam inducatur, quod cum evenerit, hæc ratio ceſſat atque in noſtro calculo excentricitatis ratio erit habenda. Tum autem perpendendum eſt, tam formulam $\frac{v^3}{\tau^3}$ quam $vv\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$ in hujuſmodi ſeriem evolvi.

$$A + B\, coſ.\, \eta + C\, coſ.\, x + D\, coſ.\, y + \&c.$$

in qua occurrent coſinus omnium angulorum, qui ex combinatione horum trium oriri η, x & y poſſunt, unde dr æquabitur producto ex elemento $d\varphi$ in ſeriem ſinuum hujuſmodi angulorum

$$A\, ſin.\, \eta + B\, ſin.\, x + C\, ſ(\eta - x) + D\, ſ(\eta + x) + E\, ſ(\eta + y) + F\, ſ(\eta - y)\ \&c.$$

qui ſcilicet oriuntur, ſi illa forma vel per $\mathit{ſin.}\,x$ vel per $\mathit{ſin.}\,\eta$ vel per $\mathit{ſin.}\,(\eta - x)$ multiplicetur.

LVI.

Tum vero ad integrationem abſolvendam notetur eſſe, $d\varphi = dx = dT(\alpha + \beta\, cof.\, x + \gamma\, cof.\, 2x\ \&c.)$, & $d\vartheta = dy = dT(\alpha' + \beta'\, cof.\, y + \gamma'\, cof.\, 2y\ \&c.)$. Unde cum hujuſmodi formulæ integrandæ occurrant $d\varphi\, \mathit{ſin.}\,(\lambda y + \mu x + \nu y)$ tum $d\varphi$ ita repreſentari poteſt, ut ſit $d\varphi = \frac{\alpha(\lambda d\eta + \mu dx + \nu dy)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'} + M\,dt\, cof.\, x + N\,dt\, cof.\, y + \&c.$ cujus ſeriei primum membrum in integratione dat: $\frac{-\alpha\, cof.\,(\lambda\eta + \mu x + \nu y)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'}$; reliqua autem membra, quæ ſunt multo minora, in formula differentiali novos præbent terminos ſimiles integrandos, qui pari modo ſunt tractandi. Sicque cum continuo ad terminos minores perveniatur, tandem hoc modo cujuſque termini integrale ſatis exacte obtinebitur.

LVII.

Cum autem hic non de omnibus inæqualitatibus axis tranſverſi ſit quæſtio, ſed iis tantum quæ per plures revolutiones continuo vel augentur vel diminuuntur: hic imprimis ſpectandi ſunt ii differentialis termini in quibus ſit $\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha' = o$, qui continent ſinum anguli $\eta - x + y$ vel ejus multiplorum. Cum enim ob $\eta = \varphi - \vartheta$ hic angulus ſit $(\varphi - x) - (\vartheta - y)$, ubi $\varphi - x$ longitudinem perihelii planetæ Z & $\vartheta - y$ longitudinem parihelii planetæ Q deſignet, angulus $\eta - x + y$ exprimit diſtantiam utriuſque perihelii, quæ cum conſtans haberi poſſit. Erit partis $d\varphi\, \mathit{ſin.}\,(\eta - x + y)$ integrale $= \varphi\, \mathit{ſin.}\,(\eta - x + y)$, hinc-

que axis tranſverſus continuo vel creſcet vel decreſcet uniformiter, niſi quatenus poſt plurima ſecula diſtantia periheliorum mutatur. Quæ ſi tandem ad eundem valorem redierit iterum axem ad priſtinum quidem ſtatum reducit. Verum cum hoc quaſi nunquam eventurum ſit cenſendum quamdiu quidem Aſtronomia viguit & vigebit, axes tranſverſi orbium planetarum continuo vel augebuntur vel diminuentur.

LVIII.

Evidens quoque eſt coëfficientem termini $\mathit{ſin.}\,(\eta - x + y)$ utramque excentricitatem q & e in ſe compecti; unde ceteris paribus iſta axis tranſverſi mutatio eo major erit, quo majus fuerit productum excentricitatum eq; ac ſi alterutra ſaltem fuerit minima niſi altera ſit maxima, hæc axis tranſverſi ideoque & motus medii variatio vix erit ſenſibilis. Tum vero hæc variatio potiſſimum à diſtantia periheliorum pendet, qua ſi fuerit vel nulla vel ſex ſignorum, nullam etiam variationem in motu medio gignit. Maxima autem evadet hæc variatio, ſi ambo perihelia tribus ſignis à ſe invicem diſtent. Præterea vero hic effectus potiſſimum à magnitudine planeta perturbantis ejuſque vicinitate pendebit.

LIX.

Cum igitur hujuſmodi terminus $d\varphi\, \mathit{ſin.}\,(\eta - x + y)$ certo in variationem axis tranſverſi ingrediatur, jam re perpenſa ad quæſtionem, Illuſtr. Academiæ Regiæ ita reſpondeo, ut dicam, motus medios planetarum non ſolum ab actione cometarum ſatis prope prætereuntium mutationibus eſſe obnoxios, ſed etiam ab actione mutua eorum pro ratione excentricitatis poſitioniſque periheliorum ſeu apheliorum ejuſmodi mutationes pati, ut continuo fere æquabiliter vel accelerentur vel retardentur. Atque ex formulis inventis, ſi analyſis ſufficeret, & quiſpiam laborem ſuſcipere vellet vera adeo quantitas hujus alterationis aſſignari poſſet, quæ cum ab Ill. Academia non expreſſe requiratur quæſtioni equidem ſatisfeciſſe videor; interim quid de ſingulis planetis ſit cenſendum, hic ſubjungam.

LX.

Primo igitur Mercurius, etſi excentricitatem habet maximam ab inſignem reliquorum planetarum diſtantiam præ diſtantia ſolis vix ullam mutationem in motu medio patietur niſi forte à Jove, cujus aphelium ab aphelio Mercurii diſtat 64° effectus quidam exiguus oriatur. In Venere autem ob ejus excentricitatem fere evaneſcentem nulla mutatio producetur. Terræ autem motus medius à Jove imprimis affici debet, cum diſtantia apheliorum ſit 88 quam autem parum ſenſibilem eſſe Obſervationes teſtantur. Mars tam à Jove qua Saturno pati debet, idque multo magis quam terra quia his planetis eſt propior ſimulque majori excentricitate præditus. Saturnus autem & Jupiter uti ſunt à Sole remotiſſimi, & maximas maſſas continent, eo magis in ſe invicem agere debent, quod cum excentricitas in utroque ſatis eſt magna, tum vero eorum aphelia 79° à ſe invicem diſtant; unde in utroque motus medius haud exiguam variationem patitur, quæ adeo jam per obſervationes ſatis videtur confirmata.

FINIS.

De motu medio Planetarum a L. Euler.

Fig. 1.

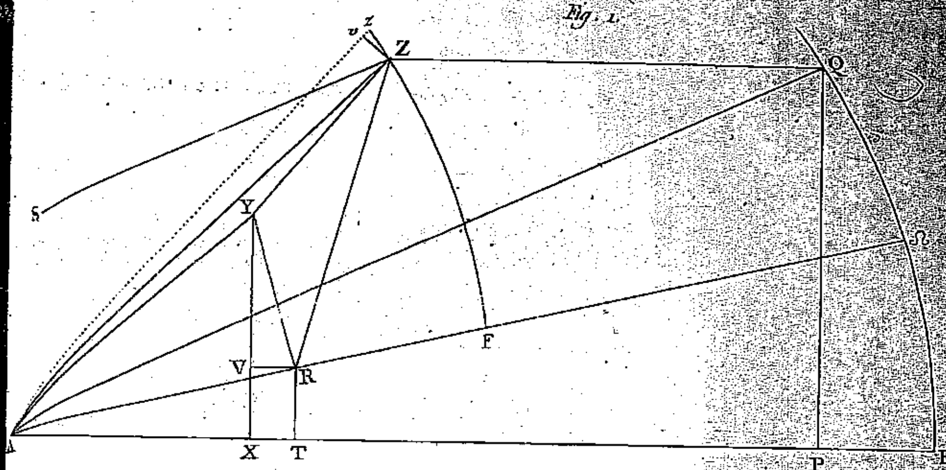

Fig. 2.