1771

De promotione navium sine vi venti (Mémoire sur la manière de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux)

Leonhard Euler

E413

AVERTISSEMENT.

En 1762, M. l'Abbé Boſſut remporta le Prix, par ſes *Recherches ſur les altérations que la réſiſtance de l'Ether peut produire dans le mouvement moyen des Planetes*, imprimées à part en 1766; elles ſont jointes à ce Volume.

La Piece de M. Jean-Albert Euler, que l'Académie cita avec éloge, eſt auſſi dans le Volume que nous publions aujourd'hui.

Pour 1763, l'Académie demanda la deſcription des différentes méthodes qu'on emploie pour l'arrimage des vaiſſeaux, & la maniere de les perfectionner; le Prix ne fut point adjugé, il ne l'a été qu'en 1765.

En 1764, le Prix fut remporté par M. de la Grange, ſur la libration de la lune. Cette Piece commencera le neuvieme Volume, que nous eſpérons de publier inceſſamment.

La fondation du Prix de l'Académie, par M. Rouillé de Meslay, eſt une époque intéreſſante dans l'Hiſtoire des Sciences; elle a produit des recherches ineſtimables ſur les plus belles parties de la Phyſique Céleſte & de la Théorie de la Navigation. Nos connoiſſances ſur les effets de l'attraction ſont dûes en grande partie à ce bel établiſſement; & il n'y a gueres de Recueil auſſi intéreſſant que celui que nous continuons de donner au Public. On ſera peut-être ſurpris que l'exemple de M. Rouillé de Meſlay n'ait déterminé perſonne à le ſuivre, & à contribuer, par quelque établiſſement de même genre, au progrès de nos Sciences. Ces études, auſſi difficiles & auſſi rares qu'elles ſont curieuſes & importantes, ont beſoin de l'émulation & des ſecours que procurent de ſemblables inſtitutions. A Paris, le premier Avril 1771.

DE LA LANDE.

MÉMOIRE

MEMOIRE

SUR

LA MANIERE LA PLUS AVANTAGEUSE

DE SUPPLÉER

A L'ACTION DU VENT

SUR LES GRANDS VAISSEAUX.

Préſenté à l'Académie à l'occaſion du Prix de 1763.

Tali remigio navis ſe tarda movebat. Virg. Æneid. Liv. 5.

MÉMOIRE

Sur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du Vent ſur les grands Vaiſſeaux.

DE PROMOTIONE NAVIUM

SINE VI VENTI.

§. I. CUM vento uti non licet ad navem propellandam, aliæ vires non reliquuntur, præter eas, quas homines in nave verſantes præſtare valent. Primum igitur diſpiciendum erit, qua ratione homines ad quodvis opus applicari conveniat, ut maximum effectum producant. Determinari ſcilicet opportet, quanta celeritas actioni hominum tribui debeat, ut ex viribus, quas tum exercent, maximus effectus oriatur. Experientia quidem conſtat, quo majori celeritate homo operetur, eo minorem vim eum exerere, nihilo tamen minus, cum effectus non ſolum ex vi ſed etiam ex celeritate, qua agit, æſtimandus ſit, etiamſi aucta ejus celeritate vis diminuatur, tamen fieri poteſt, ut inde major effectus exſiſtat, qui, quo caſu omnium maximus evadat, hic primum definiendum videtur, quocumque enim modo a viribus hominum naves propelli poſſe deinceps deprehendemus, id ſemper maximo cum lucro efficietur ſi actio hominum adjuſtum celeritatis gradum temperetur.

§. II. Primum autem conſideranda eſt vis, quam homo quietus edere valet; quæ quidem non major eſt capienda, quam ut homo eam aliquamdiù ſine nimia defatigatione ſuſtinere queat; exponatur hæc vis pondere M, ita ut homo huic ponderi ſuſpenſo tenendo par ſit. Hoc pondus ſi ad experientiam ſpectemus 70 circiter librarum conſtitui poteſt, ſeu æquale ponderi unius pedis cubici aquæ.

§. III. Secundo loco ſpectari debet maxima celeritas, qua homo vel currere vel membra ſua vibrare ſive nimia defatigatione valet, tanta enim celeritate, ſi homo actu movetur, nullam omnino vim exerere valebit, cum omnes ejus conatus in proprio motu conſumantur. Sit igitur iſta celeritas $= \sqrt{c}$ ſeu debita altitudini c; cum igitur iſta maxima celeritas cenſeri poſſit ſex pedum uno minuto ſecundo, altitudo huic celeritati debita erit $\frac{576}{1000}$ pedis.

§. IV. Cum igitur homo, in quiete conſtitutus, vi polleat $= M$, motus autem celeritate $= \sqrt{c}$ omni vi deſtituatur, videndum eſt, quanta vis in eo ſit futura, ſi celeritate quacunque minore progrediatur. Exprimat $\sqrt{v}$ celeritatem minorem quam $\sqrt{c}$, ſitque Q vis; qua homo in hoc ſtatu erit præditus, atque manifeſtum eſt Q ejuſmodi eſſe debere functionem ipſius v, ut, poſito $v = o$, fiat $Q = M$: facto autem $v = c$, prodeat $Q = o$; quibus quidem conditionibus infinitis modis ſatis fieri poteſt, veluti ſi ponatur: $Q = M\left(1 - \frac{v^n}{c^n}\right)^m$.

§. V. Ad experientiam autem caſus videtur maxime accomodatus ſi ponatur $n = \frac{1}{2}$ & $m = 2$; ita ut ſit

$$Q = M\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Veritas hujus formulæ ex vi aquæ illuſtrari poteſt, ſi enim aqua celeritate $\sqrt{c}$ in planum $= ff$ directe incurram vim exeret $= ffc$, ſin. autem idem Planum celeritate $= \sqrt{c}$ cum fluvia progrediatur, nullam vim excipiet; celeritate minore $\sqrt{v}$ latum, a fluvio propelletur vi $= ff(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$: jam ffc reſpondet noſtro M, unde ob $ff = \frac{M}{c}$ fit Q ſeu vis celeritati $\sqrt{v}$ reſpondens $= M\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$.

§. VI. Ut hinc actionem hominis maxime lucroſam definiamus, ponamus, hominem ope axis in peritrochio datum pondus P elevare debere; adhunc enim caſum omnes machinas utcunque poſitas reducere licet. Sit ergo ſemidiameter cylindri $= a$, & longitudo Scytalæ cui homo eſt applicatus $= r$; homo autem procedat celeritate $= \sqrt{v}$, erit celeritas, qua pondus P elevatur $= \frac{a}{r}\sqrt{v}$: vis autem hominis hac celeritate operantis eſt $= M\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$; cujus momentum $Mr\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$; æquale eſſe debet momento ponderis P renitentis, quod eſt $= Pa$; ita ut habeamus hanc æquationem

$$Pa = Mr\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2;$$

Qua determinatur ſtatus machinæ.

§. VII. Ex hac æquatione inventa elicimus; $\frac{a}{r} = \frac{M}{P}\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$:

Hinc ergo celeritas, qua pondus P actu elevatur erit:

$$\frac{M}{P}\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{v}.$$

Quam perſpicuum eſt maxime pendere a celeritate $\sqrt{v}$; ſive enim ſit $v = o$, ſive $v = c$, pondus plane non elevatur, quare neceſſe eſt, certum dari valorem pro $\sqrt{v}$, quo pondus citiſſime elevetur, atque hic ipſe eſt gradus ille celeritatis, quo homo operans maximum effectum producere eſt cenſendus. Iſte igitur valor ipſius v per methodum Maximorum & Minimorum determinabitur.

§. VIII. In hunc finem ponamus $\sqrt{v} = z$ & $\sqrt{c} = e$ ita ut maximum reddi debeat $z(1 - \frac{z}{e})^2$; cujus differentiale nihilo æquatum præbet; $dz(1 - \frac{z}{e})^2 - \frac{2zdz}{e}(1 - \frac{z}{e}) = o$; unde elicitur $z = \frac{1}{3}e$ ideoque $\sqrt{v} = \frac{1}{3}\sqrt{c}$: Celeritas ergo hominis maximo effectui conveniens præcisè eſt pars tertia maximæ celeritatis cujus homo eſt capax. Quæ cum æſtimata ſit 6 pedum uno minuto ſecundo, erit celeritas hominis efficaciſſima duorum pedum pro uno minuto ſecundo: ſicque ſive homo celerius ſive tardius vires ſuas impendat, debiliorem ſemper effectum producat.

§. IX. Cum ſit $\sqrt{v} = \frac{1}{3}\sqrt{c}$ erit $v = \frac{1}{9}c$: ideoque Altitudo huic celeritati maximæ lucroſæ debita erit $= \frac{64}{1000}$ ſeu $= \frac{8}{125}$ pedis; vis autem, quam homo, hac celeritate nitens exercebit erit $= \frac{4}{9}M$. Unde ſi M æſtimetur 70 librarum, erit iſta vis $= 33\frac{1}{3}$ libr. ſeu æqualis ponderi $\frac{4}{9}$ pedis cubici aquæ. Hæc igitur determinatio latiſſime patet atque ad omnes caſus, quibus opus, quodcunque viribus humanis perficiendum proponitur, extendi debet. Omnes igitur Machinæ, cujuſcunque ſint generis, ita inſtrui debent ut celeritas hominum agitantium ſingulis minutis ſecundis bines pedes conficiat, ſive ut altitudo huic celeritati debita ſit $= \frac{8}{125}$ pedis.

§. X. Hanc igitur regulam obſervari oportet in iis operationibus quibus navis vi hominum eſt propellenda, quod, quibus modis effici queat, nunc diligentius ſum perſcrutaturus.

§. XI. Quibuſcunque autem viribus homo in nave conſtitutus moliatur, nullam omnino vim ad navem propellendam exeret, niſi in objecta extra navem ſita nitatur, dum autem navis in Alto verſatur, aliud objectum externum, in quo homo vires ſuas conſumat, non occurrit præter ipſam aquam, niſi forte aërem quoque huc numerare velimus.

§. XII. Omnes autem vires, quæ in hunc finem ab aqua peti poſſunt, ad duo genera referri obſervo. In altero ſcilicet genere eas complector vires, quæ à percuſſione aquæ naſcuntur, quorſum pertinent vires à remis oriundæ, ad alterum autem genus refero vires, quas reactio aquæ, dum ex receptaculo quopiam effluit, ſuppeditat. Utrumque ergo genus hic ſeorſim evolvam.

SECTIO PRIMA.

De viribus ex percussione aquæ oriundis.

§. XIII. TAM ex Theoria quam Experientia satis constat: si superficies plana, quæ sit æqualis ff contra aquam directe impingat celeritate altitudini v debita, fore vim aquæ æqualem ponderi massæ aqueæ, cujus volumen sit $= ffv$; hanc ergo vim per ffv exprimam. Perspicuum porro est hanc vim eandem esse futuram; sive planum in aquam, sive aqua in planum pari celeritate incurrat, sive etiam utrumque moveatur, dummodo celeritas relativa fuerit $= \sqrt{v}$.

I.

Primus modus Navem propellendi

TABULA I. Fig. 1. §. XIV. Ex hoc jam principio sequentes modi navem propellendi obtinentur. Primum scilicet ponamus; superficiem vel tabulam planam FF, cujus area $= ff$, in aqua horizontaliter agitari ope vectis inflexi ABG, qui ab hominibus super trochlea C horizontaliter promoveatur; ubi quidem perspicuum est, hunc vectem, si in prora applicetur attrahendo ad navem, sin autem in puppi applicetur à nave repellendo, movere debere. Calculus autem perinde se habebit sive hæc machina in prora, sive in puppi adhibeatur. Notandum autem est, cum iste vectis vel satis fuerit attractus vel protrusus, Tabulam, inclinando vectem, super aquam elevari debere, donec iterum ad novam actionem producendam aquæ immergatur.

§. XV,

§. XV. Quoniam autem hic imprimis ipsius navis motus ratio haberi debet, ponamus navem jam secundum directionem AB moveri celeritate $= \sqrt{c}$: tabulam autem FF cum vecte GBA in navi promoveri celeritate $= \sqrt{v}$, quæ si æqualis esset celeritati navis $\sqrt{c}$, nulla vis inde in navem redundaret, eatenus igitur tantum hinc vis ad navem propellendam orietur, quatenus est $\sqrt{v} > \sqrt{c}$, tum enim Tabula aquam feriet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{c}$.

§. XVI. Altitudo ergo huic celeritati, qua tabula in aquam impingit, debita erit $(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$; ideoque vis, quam ab aqua sustinet erit $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, qua tabula æque ac ipsa navis secundum directionem GH urgebitur; per hypothesin autem hæc directio convenit cum directione navis. Unde, si vis ista æqualis fuerit resistentiæ, quam navis in aqua sustinet, navis suam celeritatem $\sqrt{c}$ conservabit, sin autem illa vis vel major fuerit vel minor quam resistentia motus navis vel accelerabitur vel retardabitur.

§. XVII. Quoniam autem potissimum ad motum uniformem attendi convenit, ponamus, navem jam eum assecutam esse motum, quo ab hac vi impulsa uniformiter progredi valet, ita ut resistentia, quam navis celeritate $\sqrt{c}$ procedens patitur, æqualis sit vi inventæ $ff(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$. Convenientius enim effectus virium determinari non potest, quam si ipsam celeritatem navi inde impressam assignavero.

§. XVIII. Quacunque autem figura navis fuerit prædita, semper exhiberi potest superficies plana, quæ pari celeritate in aquam directe incurrens eandem resistentiam patiatur atque ipsa navis. Si igitur ista superficies pro navi proposita vocetur kk, quoniam navis celeritate $\sqrt{c}$ progreditur, erit resistentia $= kkc$; unde erit $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$.

§. XIX. Hinc ergo celeritas navis determinari poterit, quam vires, quæ ad machinam nostram, celeritate

$\sqrt{v}$ agitandam, requiruntur, navi inducere valent. Extracta enim radice quadrata erit $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$ unde dicitur $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{v}}{k+f}$; unde manifestum est, quod quidem per se est clarum, celeritatem navis $\sqrt{c}$ semper minorem esse celeritate $\sqrt{v}$ & quidem in ratione f ad $k+f$.

§. XX. Videamus nunc, quot hominum vires ad hunc motum requirantur; ponamus igitur n homines adhiberi, qui cum præscripta celeritate agere debeant, quæ fortasse diversa erit à celeritate vectis $\sqrt{v}$; quæ diversitas cum innumeris modis obtineri queat: rem ita consideremus, ac si machina nostra ope vectis OA circa polum O mobilis agitetur, huicque vecti in puncto M vires hominum secundum directionem MN essent applicatæ. Sit igitur $OA = a$ & $OM = x$; erit celeritas vis motricis in M applicatæ $= \frac{x\sqrt{v}}{a}$.

§. XXI. Sit nunc celeritas, qua quisque homo maximo cum successu agere inventus est $= \sqrt{e}$; ita ut sit $e = \frac{8}{125}$ pedis, vis autem singulorum hominum ponatur $= A$, quæ, ut vidimus est $33\frac{1}{3}$ librarum vel $\frac{4}{9}$ pedis cubici aquæ. Oportet igitur sit $\frac{x\sqrt{v}}{a} = \sqrt{e}$ & quia vis omnium hominum in M applicata est $= nA$, vis huic in puncto A æquivalens $= \frac{nAx}{a}$, qua vectis ABG actu retrahitur, quæ propterea æqualis esse debet vi aquæ reluctanti $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ seu vi resistentiæ $= kkc$.

§. XXII. Tres igitur assecuti sumus æquationes:

I. $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$: sive $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$.

II. $\frac{x\sqrt{v}}{a} = \sqrt{e}$.

III. $\frac{nAx}{a} = (ff\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$.

Harum secunda dat $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}}$: qui valor in tertia substitutus præbet: $\frac{nA\sqrt{e}}{\sqrt{v}} = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2 = kkc$: Hinc reperitur: $\sqrt{v} = \frac{nA\sqrt{e}}{kkc}$: & cum sit $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{v}}{k+f}$ erit $c\sqrt{c} = \frac{nAf\sqrt{e}}{kk(k+f)}$; inventa hinc celeritate $\sqrt{c}$ definietur locus applicationis virium M per formulam $\frac{x}{a} = \frac{kkc}{nA}$.

§. XXIII. Ex hac formula patet, si celeritas navis cum numero hominum comparetur, fore cubum celeritatis numero hominum proportionalem. Ut igitur navi celeritas duplo major imprimatur numero hominum octuplo majore erit opus. Unde patet, celeritatem navis non ultra certum terminum augeri posse, cum navis non nisi modici hominum numeri sit capax. Sin autem celeritas navis $\sqrt{c}$ cum quantitate f conferatur, patet si sit $f = o$, celeritatem navis quoque evanescere, crescente autem f, celeritatem quoque crescere, maxima igitur celeritas prodit sit fiat $f = \omega$, quo casu erit: $c\sqrt{} = \frac{nA\sqrt{e}}{kk}$; ideoque $\sqrt{c} = \sqrt[3]{\frac{nA\sqrt{e}}{kk}}$.

§. XXIV. Cum autem tabula major capi nequeat, quam ut ab hominibus regi possit: perspicuum est, quantitatem f non ultra certum limitum augeri posse, qui limes à numero hominum ideoque à quantitate navis plerumque pendebit. Videtur igitur statui posse $f = k$, ita ut sit: $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{e}}{2kk}$; cubus ergo hujus celeritatis semissis est cubi celeritatis maximæ, unde ipsa celeritas tantum parte quinta circiter deficiet à celeritate maxima; quod discrimen non admodum est notabile. Sin autem accipiatur $f = 2k$, celeritas prodibit à celeritate maxima deficiens parte circiter octava. Unde patet opere non esse pretium ut tabula tantopere amplificetur.

§. XXV. Conferamus etiam celeritatem navis $\sqrt{c}$ cum ejus *resistentia absoluta*: (quam area kk mens uremus,) ac manifestum est fore $c\sqrt{c}$ ut $\frac{1}{kk}$, seu cubum celeritatis reciproce esse proportionalem resistentiæ absolutæ. Hinc si resistentia absoluta octies fiat minor, celeritatem tantum duplo fieri majorem: unde patet, diminuendo resistentiam absolutam parum notabile celeritatis incrementum inde resultare.

§. XXVI. Imprimis autem observandum est homines, quos hic sumus contemplati, non continuo vires suas ad navem propellendam impendere: quoniam, ad-

admota tabula ad navem, coguntur eam ex aqua extrahere, ac per aërem vibrando denuo aquæ immergere, quæ operatio duplo diutius durare censenda est quam operatio in navis promotione consumpta, quocirca celeritas navis supra inventa $\sqrt{c}$ non est effectus n hominum sed spectari debet tanquam effectus $3n$ hominum. Dato ergo numero hominum, qui huic operi applicantur, ejus numeri tantum pars tertia nobis valorem litteræ n præbebit.

§. XXVII. Videamus jam, quanta proditura sit navis celeritas in quolibet casu, si homines modo efficacissimo operi admoveantur. Vidimus autem esse $A = \frac{4}{9}$ ped. cub. & $e = \frac{8}{125}$ ped. omnibus igitur reliquis quantitatibus in pedibus expressis, erit $c\sqrt{c} = \frac{4nf\sqrt{\frac{1}{125}}}{9kk(k+f)} = \frac{nf}{9kk(k+f)}$. Unde celeritas maxima, quæ prodit si $f =$ infin. cognoscetur ex formula $c\sqrt{c} = \frac{n}{9kk}$. Sufficiet autem celeritatem maximam assignavisse, cum quolibet casu, quo f finitum obtinet valorem, defectus à maxima celeritate facile æstimari possit.

§. XXVIII. Ponamus igitur pro navi non nimis magna esse resistentiam absolutam $kk = 50$ ped. quad. & numerum hominum operantium esse $= 30$ ita ut sit $n = 10$; hoc ergo casu habebitur $c\sqrt{c} = \frac{1}{45}$ unde altitudo celeritati maximæ debita erit $c = 0,079$ ped. Unde conficiet navis uno minuto secundo spatium $2\frac{1}{2}$ pedum, cui intervallo unius horæ triens feræ milliaris germanici respondet. Ut igitur eadem navis singulis horis milliare germanicum absolvat, viribus 810 hominum utendum esset: vel manente hominum numero triginta, resistentia absoluta kk ad $1\frac{23}{27}$ ped. quad. diminui deberet.

TABULA I. Fig. 2.

§. XXIX. In hoc casu exposito, quo $n = 10$ & $kk = 50$ fiet $\frac{x}{a} = \frac{kkc}{nA} = 0,888 = \frac{8}{9}$. Vires ergo hominum in vectis OA puncto M applicari debent, ita ut sit $AM = \frac{1}{9}\,OM$; & quo pluribus hominibus locus

operandi procuretur vecti in puncto M trabs transversalis NN adjungi poterit, in quam urgendo homines vires suas exerceant, atque hujusmodi machina tam in prora quam in puppi constitui poterit, si quidem circumstantiæ id permittant.

§. XXX. Hoc autem modo ingens se offert incommodum, quando tabula ex aqua extrahi & per aërem retrudi deberet, quoniam ad hanc operationem machina à vecte OA liberari, aliaque virium applicatio institui deberet; huic autem incommodo occurri poterit, si tabula quasi fenestris sit instructa, quæ, dum tabula attrahitur, claudantur & aquæ vim excipiant. Sic enim tabula ope ejusdem vectis OA in aqua removeri poterit, quo motu, cum fenestræ aperiantur, nulla fere resistentia sentietur; quo continuo motu operatio & agitatio machinæ satis commoda reddetur.

II.

Secundus Modus Navem propellendi.

§. XXXI. Huc pertinet quoque vulgaris remorum usus, qui autem, cum jam satis sit pertractatus, tum vero in grandioribus navibus pluribus incommodis est obnoxius, eum hic non attingam; ejus vero loco proponam machinam affinem, qua utrinque ad latera navis tabulæ FF ope axis incurvati $DBCCBD$ in aqua vibrantur, dum vires hominum parti CC applicantur, qui motus, ut sine intermissione reciprocari possit, tabula iterum fenestris instrui poterunt. *TABULA I. Fig. 3.*

§. XXXII. Ponatur utriusque tabulæ junctim sumtæ superficies $= ff$, quarum vis in punctis G excipiatur; sit hujus puncti ab axe rotationis DAB distantia $DG = a$ & axi curvati distantia $BC = x$; progrediatur navis celeritate $= \sqrt{c}$ & tabulæ vibrentur in aqua celeritate $\sqrt{v}$; erit celeritas respectiva, qua tabula aquam percutit

$=\sqrt{v}-\sqrt{c}$. Hoc ſcilicet locum habet, ſi tabula ſitum verticalem tenet, in ſitu enim obliquo vis aliquantum diminuetur, cujus ratio facile haberi poterit, etiamſi in calculo brevitatis gratia negligatur.

§. XXXIII. Erit ergo vis aquæ in utramque tabulam $= ff(\sqrt{v}-\sqrt{c})^2$, quæ ad navem propellendam impenditur, ut ergo navis celeritatem ſuam $\sqrt{c}$ conſervet, neceſſe eſt, hanc vim reſiſtentiæ eſſe æqualem. Poſita igitur reſiſtentia abſoluta $= kk$, oportet ſit $kkc = ff(\sqrt{v}-\sqrt{c})^2$ ſeu $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$. Ejuſdem autem vis momentum reſpectu axis DB eſt $= ffa(\sqrt{v}-\sqrt{c})^2$ ſeu $= kkac$, quæ à viribus hominum ſuſtineri debet.

§. XXXIV. Ponamus igitur n homines trabem CC impellere, & cujuſque hominis celeritate $\sqrt{e}$ agentis vim valere A erit vis omnium hominum $= nA$ cujus momentum $= nAx$, quod ergo æquari debet $kkac$ ita ut ſit: $nAx = kkac$: unde prodit $\frac{a}{x} = \frac{kkc}{nA}$; præterea autem eſſe oportet: $\sqrt{v} : \sqrt{e} = a : x$ ſeu $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}}$.

§. XXXV. Habemus ergo $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}} = \frac{kkc}{nA}$: unde fit $\sqrt{v} = \frac{nA\sqrt{e}}{kkc}$; qui valor in æquatione $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$, ſeu $f\sqrt{v} = (k+f)\sqrt{c}$ ſubſtitutus præbet: $\frac{nAf\sqrt{e}}{kkc} = (k+f)\sqrt{c}$ unde elicitur $c\sqrt{c} = \frac{nAf\sqrt{e}}{kk(k+f)}$. Quæ formula cum à ſuperiori non diſcrepet, patet ſive homines hoc modo applicentur ſive modo præcedente, navem utroque caſu pari velocitate promoveri.

§. XXXVI. Ex reliquis ergo circumſtantiis dijudicari opportebit, utrum hoc modo an præcedente uti expediat; quin etiam nihil impedit, quomius uterque modus ſimul adhibeatur & ex poſteriori plures hujuſmodi machinas in navi ſecundum longitudinem conſtitui poſſent. Quod ſi fiat, notandum eſt in calculo, ſummam omnium tabularum in ff comprehendi debere, parique modo n denotabit numerum omnium hominum, omnes machinas ſimul urgentium.

III.

Tertius Modus Navem propellendi.

§. XXXVII. Si in Machina præcedente Tabula FF circa axem AA omnino in gyrum agantur, feneſtris non erit opus. ac ne, dum tabulæ per aërem vibrantur, vires hominum inutiliter conſumantur, plures hujuſmodi *TABULA I. Fig. 4.* tabulæ circa axem AA diſponi poterunt, ut, dum aliæ ex aqua tolluntur aliæ de novo immergantur. Hoc ergo modo vires hominum ſine intermiſſione ad navem propellendam impenduntur neque tantum tertia pars ut in modis præcedentibus uſu venit, navem actu propellere erit cenſenda.

§. XXXVIII. Neque tamen numerum hujuſmodi radiorum AG nimium augeri convenit, ne machina nimis fiat complicata, aliiſque navis deſtinationibus adverſetur. Ita commodiſſimum videtur, axem utrinque quaternis tantum hujuſmodi alis inſtrui, perpendiculariter inter ſe diſpoſitis. Sic enim ne tormentorum quidem uſus impedietur, cum enim tormenta explodere opus fuerit, dato ſigno, axis AA in eo ſitu poterit detineri, ut binæ alæ in ſitu verticali, alteræ in horizontali ſerventur.

§. XXXIX. Pro hac machina calculus difficilior non evadit quam caſu præcedente: cum enim axis AA ſupra aquam elevatus eſſe debeat, dum una tabula FF in ſitu verticali verſatur, reliquæ tres utrinque ſupra aquam eminebunt, illaque unica vim aquæ eandem quam ſupra definivimus excipiet, quando verum in ſitum ſatis obliquum pervenerit, ejuſque vis proinde debilitata fuerit, tum alia ala aquæ immergetur ſicque jactura illa compenſabitur; ex quo efficitur ut tota vis perpetuo eadem ſit preditura ac ſi ſemper una ala ſitum verticalem teneret.

§. XL. Denotabit ergo ff superficiem duarum tabularum ut ante & a distantiam centri cujusque tabulæ ab axe AA, unde si celeritas navis ponatur æqualis $\surd c$ & celeritas gyratoria punctorum G circa axem $AA = \surd v$ erit vis, quæ perpetuo ab aqua excipietur $= ff(\surd v - \surd c)^2$, quæ resistentiæ navis kkc æqualis posita dabit $kkc = ff(\surd v - \surd c)^2$ seu $(k+f)\surd c = f\surd v$.

§. XLI. Nunc autem machina non amplius ope axis inflexi commode agitari poterit, sed potius conveniet axem AA verticillo D instrui, qui à rota dentata horizontali E convertatur. Ipsa autem rota conjuncta sit cum axe verticali O, qui ope scytalarum OM ab hominibus in gyrum agatur. Quoniam igitur homines hoc pacto semper eandem resistentiam offendunt motu semper æquabili vires suas exercere poterunt, quo ipso non contemnendum virium incrementum impetrabitur, cum contra, quando motus est inæquabilis non exigua pars virium in ipsius machinæ motu tam accelerando quam retardando consumatur, quin etiam homines hujusmodi actione æquabile non tantopere defatigabuntur.

§. XLII. Sit igitur hominum numerus $= n$ qui celeritate $\surd e$ progredientes scytalis OM in distantia $OM = x$ ab axe O sint applicati; singulique vi $= A$ nitantur, deinde sit numerus dentium rotæ $E = \mu$; numerus autem bacillorum verticilli $D = \nu$. Dum igitur rota E semel circumagitur, verticillus D cum axe AA faciet $\frac{\mu}{\nu}$ revolutiones. Unde celeritas punctorum M, quibus homines sunt applicati erit ad celeritatem punctorum G, quæ aquæ vim sustinent ut x ad $\frac{\mu}{\nu}a$, ideoque habebitur $\surd e : \surd v = x : \frac{\mu}{\nu}a$ seu $\frac{\surd v}{\surd e} = \frac{\mu a}{\nu x}$.

§. XLIII. Cum autem porro vires hominum cum vi aquæ in æquilibrio esse debeant ex universali æquilibrii principio, necesse est, ut sit vis hominum, quæ est $= nA$, ad vim aquæ, quæ est $ff(\surd v - \surd c)^2 = kkc$, ut celeritas punctorum G ad celeritatem punctorum M, hoc est ut $\surd v$ ad $\surd e$ unde nanciscimur $kkc\surd v = nA\surd e$: atqui est $f\surd v = (k+f)\surd c$; ergo $\frac{kkc}{f} = \frac{nA\surd e}{(k+f)\surd c}$. Unde elicimus ut ante: $c\surd c = \frac{nAf\surd e}{kk(k+f)}$. Quam celeritatem cum n homines navi imprimant, in præcedentibus autem machinis ad eandem celeritatem $3n$ homines requirantur, patet hoc modo cubum celeritatis navis ter fieri majorem ipsamque adeo celeritatem fere in ratione sesqui altera augeri.

§. XLIV. Perspicitur ergo, hanc machinam, iis, quas ante exposui, atque etiam solitæ remorum actioni longè esse anteferendam, cum à pari hominum numero navi celeritas fere semissi major induci queat, dum scilicet utrinque homines æquali vi operari ponuntur. Hoc autem commodum eo majoris momenti evadet, cum in hac machina homines perpetuo motu æquabili agant easdemque vires exerceant. Unde non contemnendum lucrum in totum effectum redundat.

§. XLV. Quamobrem non dubito istum modum naves propellendi præ hactenus explicatis ad usum practicum commendare. Ac si is nonnullis difficultaribus adhuc obnoxius videatur, eo magis in id erit incumbendum, ut iis difficultatibus, quantum fieri potest occurratur. Equidem non ignoro incommoda, quibus rotæ huic machinæ similes, cujusmodi jam sæpius ad naves propellendas sunt propositæ, laborant: verum hæc incommoda plerumque evanescere confido, cum non totam rotam sed tantum axem; quaternis utrinque radiis instructum, adhiberi velimus, qua ratione nonsolum simplicitati consulitur, sed etiam tempestates ipsiusque navis agitationes usui hujus machinæ vix quicquam nocituræ videntur.

§. XLVI. Imprimis autem in idest incumbendum, ut vires hominum maximo cum lucro applicentur, quæ circumstantia, si negligatur, fieri utique posset, ut hæc machina consuetæ remigationi postponenda videretur. Hunc in finem actionem hominum maxime efficacem ſollicite inveſtigavi, atque hic rotam dentatam in machina introduxi, ut; commodo dentium numero conſtituto, ſcytalis OM ejuſmodi longitudo tribui queat, quæ quamplurimis hominibus excipiendis ſatis ſit idonea. Quin etiam axis verticalis OOO vel in ſuperius vel in inferius pavimentum continuari poteſt, ut homines in duobus pontibus ad eum circumagendum adhiberi queant.

§. XLVII. Cum enim $\sqrt{v} = \frac{nA\sqrt{c}}{kkc}$; erit $\frac{nA}{kkc} = \frac{\mu a}{\nu x}$. Unde determinatio machinæ aptiſſima facile deducitur. Tribuatur enim ſcytalis $OM = x$ tanta longitudo, quantam capacitas navis permittit, eritque $\frac{\mu}{\nu} = \frac{nAx}{kkac}$. Unde ratio rotæ E ad verticillum D cognoſcitur, quæ ſi in praxi obſervetur, vel dummodo non nimium ab ea recedatur, machina erit ita perfecta ut ab iiſdem viribus alio modo applicatis major effectus nullo modo produci queat.

§. XLVIII. Ut rem exemplo illuſtremus, ponamus navis reſiſtentiam abſolutam $kk = 100$ ped. quad. quæ jam in grandiores naves competit, ſitque numerus hominum $n = 100$: ſit porro ſumma tabularum aquam ſimul percutientium $ff = 100$ ped. quad. Hincque cum ſit $A = \frac{4}{9}$ & $e = \frac{8}{125}$, prodibit $c\sqrt{c} = 0,056$ unde reperitur $c = 0,1464$ ped. Cui altitudini reſpondet celeritas, qua ſingulis ſecundis ſpatium 3 pedum, ideoque ſingulis horis fere ſemiſſis milliaris germanici conficietur. Unde facile colligitur, quanta futura ſit navis celeritas ſi vel plures homines operi admoveantur vel reſiſtentia navis abſoluta minor majorve exſiſtat.

§. LXIX. Ponamus porro ſcytalarum longitudinem $x = 10$ pedum & longitudinem $AG = a = 20$ ped. ac prodibit ratio $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1000}{1317}$ cujus valor proxime eſt $= \frac{3}{4}$. Hinc ſi verticillo 10 bacilli tribuantur; rota 15

dentibus inſtructa eſſe debet, ſicque machina ad praxin maxime videtur accommodata.

IV.

Quartus Modus Navem propellendi.

§. L. Ad ſimilitudinem Molarum alatarum, quæ vento impelluntur, ejuſmodi rota navi vel in Prora vel in Puppi applicari poterit, quæ alis oblique poſitis inſtructa & circa axem vibrata ab aqua vim excipiat ad navem propellendam idoneam. Cujuſmodi machina, cum non ſolum ſit nova ſed etiam ſingulari principio innixa, omnino digna videtur, ut effectum, quem præſtare caleat, accuratius inveſtigemus; fortaſſe enim paucioribus difficultatibus erit ſubjecta, ita ut, ſi vires ſufficientes ſuppeditaverit non ſine inſigni commodo in praxi uſurpari queat, quin etiam nihil impediret, quo minus ſimul cum machina ante deſcripta ad uſum adhibeatur.

§. LI. Sit igitur axis AB Proræ horizontaliter incumbens, qui inſtructus ſit quatuor radiis AG, quibus oblique affixæ ſunt tabulæ FF. Quod ſi jam axis AB circumagatur vel una vel duæ tabulæ ſub aqua verſabuntur, quæ aquam oblique percutientes vim quoque obliquam ab aqua excipient quæ reſoluta dabit cum vim navem propellentem tum etiam vim motui alarum reſiſtentem. Sicque à determinatione hujus duplicis vis pendebit machinæ effectus. *Tabula II. Fig. 5.*

§. LII. Teneat unus radius AG ſitum verticalem, ita ut nunc ſolus aquæ ſit immerſus, ac per punctum G, quod ſit quaſi centrum tabulæ, exiſtente diſtantia $AG = a$; & area tabulæ $= ff$, facta concipiatur ſectio horizontalis, in qua ſit ab recta axi AB ſeu navis directioni parallela & Ff repræſentet ſectionem tabulæ, cujus obliquitatis angulus aGF ſeu bGf ponatur $= \varphi$. *Fig. 5 & 6.*

Motus tabulæ circa axem AB ita sit comparatus ut punctum G secundum directionem GL ad ab normalem vibretur celeritate $= \sqrt{\nu}$.

§. LIII. Hinc si navis quiesceret, tabula eandem vim sustineret ac si aquæ celeritate $= \sqrt{\nu}$ in directione LG in tabulam oblique impingeret, verum ponamus navem jam totum acquisivisse motum, quem ab hac machina impetrare potest, esseque ejus celeritatem secundum directionem $G\alpha = \sqrt{c}$. Unde idem resultabit effectus, ac si aqua celeritate $\sqrt{c}$ in directione αG in tabulam impingeret. Capiatur $G\alpha$ ad GL ut $\sqrt{c}$ ad $\sqrt{\nu}$, & completo rectangulo αGLN diagonalis NG repræsentabit & directionem & celeritatem, qua aqua in tabulam impingere est concipienda. Cujus directio, si esset in tabulam perpendicularis, inde oriretur vis $= ff NG^2$; cum autem aqua oblique in tabulam impingat sub angulo incidentiæ FGN vis illa diminui debet secundum rationem duplicatam sinus istius anguli sicque vis aquæ in tabulam erit $= ff NG^2 (\sin. FGN)^2$.

§. LIV. At in triangulo $NG\gamma$ est $NG : N\gamma = \sin. \alpha\gamma G : \sin. FGN$: unde fit $NG \sin. FGN = N\gamma \sin. \alpha\gamma G$; cum autem sit $G\alpha = \sqrt{c}$; $GL = \sqrt{\nu}$; & $FG\alpha = \phi$ erit: $\sin. \alpha\gamma G = \cos. \phi$; $\alpha\gamma = \tang \phi \sqrt{c}$ & $N\gamma = \sqrt{\nu} - \tang \phi \sqrt{c}$; unde fit:
$NG \sin. FGN = (\sqrt{\nu} - \tang \phi\sqrt{c}) \cos. \phi = \cos. \phi\sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c}$: Consequenter vis aquæ in tabulam
$= ff (\cos. \phi \sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c})^2$;
Cujus vis directio est recta GH ad tabulam normalis.

§. LV. Hic obiter notari convenit, hanc expressionem multo facilius erui potuisse, considerando tantum ex utroque aquæ motu eam celeritatem, quæ in tabulam est perpendicularis, & quam propterea celeritatem *Impulsus* vocari liceat. Sic ex motu aquæ αG oritur celeritas impulsus $= \sin. \phi \sqrt{c}$ ac ex motu LG erit celeritas impulsus $= \cos. \phi \sqrt{\nu}$, cui cum præcedens sit contraria erit tota celeritas impulsus $= \cos. \phi \sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c}$.

Unde manifestum est, vim aquæ in tabulam fore $= ff (\cos. \phi \sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c})^2$: ut ante.

§. LVI. Cum nunc hujus vis directio sit recta GH in tabulam normalis, resolvatur ea in duas alias GJ & GK, quarum illa cum directione navis convenit, hæc vero ad illam sit normalis, erit igitur vis

$$GJ = ff \sin. \phi (\cos. \phi \sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c})^2 : \text{ \& vis}$$
$$GK = ff \cos. \phi (\cos. \phi \sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c})^2.$$

Cum nunc illa vis ad navem propellendam impendatur, æqualis sit necesse est resistentiæ navis, quæ cum, posita resistentia absoluta $= kk$, sit $= kkc$: erit

$$ff \sin. \phi (\cos. \phi \sqrt{\nu} - \sin. \phi \sqrt{c})^2 = kkc \text{ seu}$$
$$f \cos. \phi \sqrt{\nu} \sqrt{\sin. \phi} = (k + f \sin. \phi \sqrt{\sin. \phi}) \sqrt{c}.$$

§. LVII. Altera autem vis GK, quæ est $= \frac{kkc}{\tang \phi}$, tota motui machinæ reluctatur, ideoque instar oneris movendi spectari debet. Quare si axi AB verticillus ut ante ν bacillis instructus concipiatur annexus, qui ope rotæ μ dentibus præditæ moveatur. Rotæ autem adjunctus sit axis in peritrochio, qui ab n hominibus singulis ad distantiam $= x$ ab axe applicatis, in gyrum agatur. Unusquisque autem homo vi $= A$ & celeritate $= \sqrt{e}$ operetur, erit celeritas vis moventis ad celeritatem oneris ut x ad $\frac{\mu}{\nu} a$; unde fit: TABULA II. Fig. 5.

$$\sqrt{e} : \sqrt{\nu} = x : \tfrac{\mu}{\nu} a \text{ seu } \tfrac{\mu a}{\nu x} = \tfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{e}}.$$

§. LVIII. Porro cum vis movens, quæ est $= nA$, in æquilibrio esse debeat cum vi renitente $\frac{kk}{\tang \phi}$, hæ vires suis celeritatibus $\sqrt{e}$ & $\sqrt{\nu}$ reciproce sint proportionales necesse est; unde fit $nA : \frac{kkc}{\tang \phi} = \sqrt{\nu} : \sqrt{e}$; ideoque $\sqrt{\nu} = \frac{nA \tang \phi \sqrt{e}}{kkc}$. Qui valor in superiori æquatione (§. LVI.) substitutus dabit

$$\frac{nAf\,\text{fin.}\,\varphi\sqrt{c}\,\text{fin.}\,\varphi}{kkc} = (k + f\,\text{fin.}\,\varphi\sqrt{\text{fin.}\,\varphi})\sqrt{c}.$$

Unde reperitur cubus celeritatis navis

$$c\sqrt{c} = \frac{nAf\,\text{fin.}\,\varphi\sqrt{c}\,\text{fin}\,\varphi}{kk(k + f\,\text{fin.}\,\varphi\sqrt{\text{fin.}\,\varphi})}.$$

§. LIX. Hæc formula fimilis eft illi, quam pro præcedente machinæ elicuimus. Si enim ponamus:

$$f\,\text{fin.}\,\varphi\sqrt{\text{fin.}\,\varphi} = g, \text{ erit } c\sqrt{c} = \frac{nAg\sqrt{c}}{kk(k+g)};$$

ita ut, quod ante erat f, id nobis hic fit $g = f\,\text{fin.}\,\varphi\sqrt{\text{fin.}\,\varphi}$. Ut igitur navi hinc maxima celeritas concilietur, non folum f feu quantitas alarum tanta accipi debet, quam circumftantiæ id permittunt, fed etiam angulum φ quam fiere poteft maximum conftitui oportet, neque tamen hunc angulum ad rectum ufque augere licebit, quia tum celeritas alarum $\sqrt{v}$ deberet effe infinita, quod quidem Theoriæ ob refiftentiam $\frac{kkc}{\text{tang}\,\varphi} = o$ non repugnaret fed tamen in praxi, quia ob alarum craffitiem femper notabilis refiftentia adeft, hic cafus locum habere nequit.

§. LX. Interim tamen funt angulum φ tantum affumere licebit ut non multum à recto deficiat, ita fi ftatuatur $\varphi = 75°$ fiet $g = 0.94932f$. Qui valor parum ab eo deficit, qui prodiret fi poneremus $\varphi = 90°$. Unde dummodo alæ fatis amplæ conficiantur, hac machina navis æque celeriter propelli poterit atque ope machinæ præcedentis, unde ea machina, quæ ad ufum aptior videbitur fine difcrimine uti licebit.

§. LXI. Videamus autem, quomodo hæc machina commodiffime fit inftruenda, quod à valore litterarum μ, ν & x pendet. Cum igitur fit:

$$\sqrt{v} = \frac{nA\,\text{tang}\,\varphi\sqrt{c}}{kkc} \text{ erit } \frac{\mu a}{\nu x} = \frac{nA\,\text{tang}\,\varphi}{kkc}$$

& pofito $\varphi = 75°$ erit $\frac{\mu a}{\nu x} = \frac{375 \cdot \frac{1}{2} nA}{kkc}$.

Quare fi tam numerus hominum n quam diftantiæ a & x eædem ponantu, atque in machina præcedente, ratio μ ad ν fere quadruplo major effe debet, feu rota dentata fere quadruplo plures dentes habere debet, quam ante, manente fcilicet eodem bacillorum numero in verticillo.

§. LXII. De hac Machina autem animadvertendum eft, ab illa præter vim navem propellentem etiam nafci vim, qua navis ad latera pellitur. Vis enim $GK = \frac{kkc}{\text{tang}\,\varphi}$ quoque in navem agit, quæ eo minor evadit, quo angulus φ major affumitur. Neceffe igitur effet, effectum hujus vis lateralis per actionem Gubernaculi deftrui, quod fine detrimento motus navis fieri non poteft. *Tabula II. Fig. 6.*

§. LXIII. Hoc incommodum maximam partem tolli poterit, fi axis GD, circa quem alæ gyrantur, aliquantum ad axem navis AB inclinetur; tum enim directio vis, quam ala Ff excipit fcilicet recta GA parallela reddi poterit motui navis: quod eveniet, fi inclinatio axis GD ad AB fuerit complementum anguli φ, ita, fi angulus φ conftituatur $75°$ oportebit angulum declinationis AEG effe $15°$, hæc obliquitas qua curfus navis directus obtinetur nihil fere immutabit in reliquis determinationibus; quæ ad machinam conftruendam requiruntur. *Fig. 7.*

SECTIO SECUNDA.

De viribus ex reactione aquæ oriundis.

§. LXIV. QUAMDIU aqua in vase quocunque stagnat, vires, quibus latera vasis premuntur se mutuo in æquilibrio servant, neque enim vas inde ad motum sollicitabitur. Statim autem atque aqua in vase movetur, erumpendo per foramen quodpiam, æquilibrium turbatur & vas ad motum sollicitabitur, quæ vis aquæ motæ in vas exercita vocatur *Vis Reactionis*, quæ ideo etiam apta videtur ad naves propellendas.

§. LXV. Quanta autem sit vis ista reactionis in quovis casu, difficilis ad modum est quæstio, ac plerumque per experimenta vel ratiocinia minus directa explicari solet, quam per solida Theoriæ principia. Operam igitur dabo, ut arduam hanc quæstionem ex primis Mechanicæ principiis luculenter evolvam, & quovis casu veram reactionis quantitatem accurate determinem.

§. LXVI. Ad hoc autem sequenti ratiocinio uti conveniet. Primum considerandæ sunt vires quibus aqua actu sollicitatur ad motum, quorsum pertinet gravitas & quævis vires, quibus aqua extrinsecus urgetur, has vires cunctas litera P indicabo, quæ vires procognitis sunt habendæ. Secundo considerandæ sunt vires, quibus vas ab aqua ad motum impellitur, quæ sunt vires quas determinare oportet, easque litera R indicabo. Tertio definiri debent vires, quæ ad motum aquæ producendum requiruntur, quæque ex motu aquæ tanquam jam cognito assumto per regulas mechanicas inveniuntur, has igitur vires litera Q denotabo.

§. LXVII.

§. LXVII. Cum vas ab aqua urgeatur vi R necesse est, ut aqua vicissim à vase urgeatur æquali vi R sed secundum directionem contrariam; unde vis hinc oriunda, qua aqua sollicitatur æstimanda erit $= -R$; sic ergo aqua omnino ad motum impellitur à viribus binis P & $-R$ seu vi $P - R$. Hæc ergo vis æqualis esse debet viribus Q, quæ secundum principia mechanica ad motum aquæ producendum requiruntur, ita ut sit $Q = P - R$.

§. LXVIII. Hinc ergo vis reactionis R, seu ea vis, qua vas ab aqua ad motum sollicitatur, determinari poterit; erit enim $R = P - Q$. Unde cognitis cum viribus P, quibus aqua sollicitatur, tum viribus Q, quæ ad ejus motum producendum requiruntur, facillimè definitur vis reactionis aquæ, quæ alias per principia indirecta ac ratiocinia non parum perplexa determinari solet.

§. LXIX. Quoniam quovis casu vires P sponte patent, quemadmodum vires Q determinari debeant investigabo, quæ quidem ex consideratione motus aquæ deducendæ sunt. Si enim aqua stagnaret, tunc utique esset $Q = o$; foretque ideo $R = P$. Hoc scilicet casu vas easdem vires sustinet, quibus aqua urgetur, & ob gravitatem aquæ deorsum premetur vi ipsi aquæ ponderi æquali, ac si aqua à prætereà quapiam vi premeretur, tunc vas ipsam hanc vim quoque esset experturum, quod quidem per se est perspicuum.

§. LXX. Ut igitur in genere vires Q pro quovis casu determinem, contemplabor tubum figuræ cujuscunque $EEFF$, ex quo aqua effluat per orificium FF, cujus amplitudo $= ff$. Tubum autem in calculo quasi infinite angustum concipio, ita ut aqua per illum moveatur secundum sectiones MN & mn ad tubum perpendiculares; calculo autem expedito patebit amplitudinem tubi penitus egredi, ita ut conclusiones etiam pro tubis utcunque amplis valeant. *TABULA II. Fig. 8.*

§. LXXI. Ponamus autem nunc, aquam per orificium FF erumpere celeritate $= \sqrt{v}$; elapso autem tempusculo dt, celeritatem aquæ esse $\sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$; ita ut $\sqrt{v}$ futura sit functio quæpiam temporis t, cujus etiam functio erit $\frac{dv}{dt}$ seu $\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}$.

§. LXXII. Sit nunc in loco tubi quocunque M cujus amplitudo $= zz = MN$, eritque aquæ celeritas in sectione $MN = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$. Hac celeritate aqua in MN tempusculo dt conficiet spatiolum $Mm = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$. Tum autem ejus celeritas erit $\frac{ff\sqrt{v}}{zz} + d\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$; seu erit $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz} + \frac{zz\sqrt{v}}{ffdv} - \frac{2ffdz\sqrt{v}}{z^3}$. Hæc ergo variatio celeritatis nonsolum pendet à variabilitate celeritatis $\sqrt{v}$, sed etiam à diversitate amplitudinis tubi. Quaternus ergo quælibet particula aquæ in sectione MN contenta vel motu accelerato progreditur seu retardato vel etiam à tramite recto deflectere cogitur, eatenus viribus opus erit ad has mutationes producendas.

§. LXXIII. Referamus hæc ad axem fixum verticalem AB per applicatas horizontales PM & pm, sitque à puncto fixo A, abscissa $AP = x$ & applicata $PM = y$. Concipiatur guttula quæpiam in sectione MN contenta, cujus massa sit dM: Atque ex principiis Mechanicæ constat, si elementum temporis capiatur constans; ad motum hujus guttulæ requiri duas vires $M\mu$ & $M\nu$, illam verticalem, hanc vero horizontalem; ita ut sit:

$$\text{Vis } M\mu = \frac{2dMddx}{dt^2} : \& \text{ Vis } M\nu = \frac{2dMddy}{dt^2}.$$

§. LXXIV. Ponatur elementum $Mm = ds$, quod guttula tempusculo dt absolvit, quod, quia fit celeritate $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, erit $ds = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$. Sit præterea angulus inclinationis $mM\mu = \varphi$, erit $dx = ds\cos\varphi = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}\cos\varphi$ & $dy = ds\sin\varphi = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}\sin\varphi$. Unde fit $\frac{dx}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}\cos\varphi$ & $\frac{dy}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}\sin\varphi$.

§. LXXV. Ex his formulis, denuo differentiatis, eliciemus vires sequenti modo expressas:

$$\text{Vis } M\mu = \frac{2dMddx}{dt^2} = \frac{2ffdM}{dt}$$
$$\left(\frac{dv}{2zz\sqrt{v}}\cos\varphi - \frac{2dz\sqrt{v}}{z^3}\cos\varphi - \frac{d\varphi\sqrt{v}}{zz}\sin\varphi\right) \&$$
$$\text{Vis } M\nu = \frac{2dMddy}{dt^2} = \frac{2ffdM}{dt}$$
$$\left(\frac{dv}{2zz\sqrt{v}}\sin\varphi - \frac{2dz\sqrt{v}}{z^3}\sin\varphi + \frac{d\varphi\sqrt{v}}{zz}\cos\varphi\right)$$

Hic patet massulam dM utrinque multiplicatam esse per quantitatem finitam; nam $\frac{dv}{dt}$, ut vidimus, est functio ipsius t. Sed differentialia dz, & $d\varphi$ immediate cum elemento dt comparari nequeunt; variabilitas enim amplitudinis zz & inclinationis φ non à tempore t, sed à figura tubi pendet, quare hæc differentialia dz & $d\varphi$ cum differentiali ds comparari debebunt.

§. LXXVI. Cum igitur sit: $ds = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$ erit $dt = \frac{zzds}{ff\sqrt{v}}$; qui valor interminis ubi dz & $d\varphi$ occurrunt loco dt substitui debet: Unde vires prodibunt.

$$\text{Vis } M\mu = 2ffdM\left(\frac{dv}{2zzdt\sqrt{v}}\cos\varphi - \frac{2ffvdz}{z^5ds}\cos\varphi - \frac{ffvd\varphi}{z^4ds}\sin\varphi\right) \&$$
$$\text{Vis } M\nu = 2ffdM\left(\frac{dv}{2zzdt\sqrt{v}}\sin\varphi - \frac{2ffvdz}{z^5ds}\sin\varphi + \frac{ffvd\varphi}{z^4ds}\cos\varphi\right)$$

§. LXXVII. His igitur viribus omnes particulas aquæ in spatiolo $MNnm$ contenta sollicitari oportet. Unde ad vires inveniendas quibus tota aquæ massa $MNnm$ sollicitatur, tantum opus est ut pro dM hanc ipsam massam substituamus. Cum igitur hæc massa sit prisma basea $= zz$ & altitudinis $= ds$, erit ejus soliditas $= zzds$, qui ergo valor loco dM substitutus dabit vires massam elementarem $MNnm$ sollicitantes.

$$\text{Vis } M\mu = \frac{ff\sqrt{v}}{dt\,dv}\, ds\, cos.\varphi - 4f^4 v\, \frac{d\zeta\, cos.\varphi}{\zeta^3} - 2f^4 v\, \frac{d\varphi\, fin.\varphi}{\zeta\zeta} \;\&$$

$$\text{Vis } M\nu = \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\, ds\, fin.\varphi - 4f^4 v\, \frac{d\zeta\, fin.\varphi}{\zeta^3} + 2f^4 v\, \frac{d\varphi\, cos.\varphi}{\zeta\zeta}$$

§. LXXVIII. In his formulis duplicis generis quantitates variabiles occurrunt, quarum alteræ à tempore pendent & nonnifi cum tempore mutantur, quæ funt v & $\frac{dv}{dt}$, alteræ pendent à figura tubi, quæ funt s, ζ & φ, quas idcirco follicite à prioribus diftingui oportet.

§. LXXIX. Si ergo velimus vires inveftigare, quæ præfenti momento ad confervationem motus aquæ, in tubo contentæ, requiruntur, formulas differentiales inventas ita integrari oportet, ut quantitates prioris generis v & $\frac{dv}{dt}$ tanquam conftantes confiderentia & tantum variabilitas quantitatum pofterioris generis fpectetur, quoniam vires pro elemento aquæ $MNnm$ per totum tubum fummari debent.

§. LXXX. Cum igitur fit $ds\, cos.\varphi = dx$ & $ds\, fin.\varphi = dy$ erit fumma omnium virium verticalium,

$$\int M\mu = A + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\, x + 2f^4 v\, \frac{cos.\varphi}{\zeta\zeta}$$

& fumma omnium virium horizontalium,

$$\int M\nu = B + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\, y + 2f^4 v\, \frac{fin.\varphi}{\zeta\zeta}.$$

Ad conftantes A & B determinandas confideretur fuprema tubi fectio EE quæ fit $= ee$ & angulus inclinationis φ hic fit $= \epsilon$; & cum axis AB pofitio à lubitu noftro pendeat fiat y hic $= o$ feu fit $AE = o$. Hinc ab initio EE incipiendo fiet:

$$\int M\mu = o = A + 2f^4 v\, \frac{cos.\epsilon}{ee};\ \& \int M\nu = o = B + 2f^4 v\, \frac{fin.\epsilon}{ee}$$

§. LXXXI. Hinc ergo fit $A = -2f^4 v\, \frac{cos.\epsilon}{ee}$ & $B = -f^4 v\, \frac{fin.\epsilon}{ee}$.

Hinc vires ad motum aquæ $EEMN$ requifitæ erunt:

$$\text{Vis verticalis } M\mu = \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\, x + 2f^4 v \left(\frac{cos.\varphi}{\zeta\zeta} - \frac{cos.\epsilon}{ee}\right) \;\&$$

$$\text{Vis horizontalis } M\nu = \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\, y + 2f^4 \left(\frac{fin.\varphi}{\zeta\zeta} - \frac{fin.\varphi}{ee}\right).$$

Extendamus has vires per totum tubum. Ponatur ergo tota altitudo $AB = a$ & horizontalis $BF = = b$ & φ hic abeat in ζ & quia hic $\zeta\zeta$ abit in ff erit

$$\text{Vis verticalis tota } M\mu = \frac{a\,ff\,dv}{dt\sqrt{v}} + 2f^4 v \left(\frac{cos.\zeta}{ff} - \frac{cos.\epsilon}{ee}\right)$$

$$\text{Vis horizontalis tota } M\nu = \frac{b\,ff\,dv}{dt\sqrt{v}} + 2f^4 v \left(\frac{fin.\zeta}{ff} - \frac{fin.\epsilon}{ee}\right)$$

§. LXXXII. Hæ ergo funt vires ad motum aquæ requifitæ, quas fupra in genere littera Q fum complexus. Ita ut Q defignet duas vires, alteram verticalem $M\mu$ & alteram horizontalem $M\nu$, quarum virium quantitatem in paragrapho præcedente determinavi. Circa has vires obfervo; fi motus aquæ per foramen FF fuerit uniformis, qui cafus plerumque in hujus generis machinis locum habere folet, ita ut fit $\frac{dv}{dt} = o$, tum has vires fore:

$$\text{Vis verticalis } M\mu = 2f^4 v \left(\frac{cos.\zeta}{ff} - \frac{cos.\epsilon}{ee}\right) \;\&$$

$$\text{Vis horizontalis } M\nu = 2f^4 v \left(\frac{fin.\zeta}{ff} - \frac{fin.\epsilon}{ee}\right)$$

§. LXXXIII. Præterea notari debet, has vires neque à figura tubi neque ab ejus amplitudine pendere, fed tantum per fectiones extremas EE & FF una cum earum inclinationibus ϵ & ζ determinari. Hinc patet, etiamfi in calculo amplitudinem tubi tanquam infinite parvam fpectaverim, tamen has determinationes ad tubos vel cafa cujus cunque figuræ æque pertinere.

§. LXXXIV. Inventis nunc viribus Q, contemplemur vires P, quibus aqua actu sollicitatur; ac primo quidem occurrit gravitas aquæ cujus pondus littera M indicemus; hinc ergo P in se complectetur vim verticalem M deorsum tendentem. Præterea ponamus, æquam impelli à quadam vi V secundum directionem VT, quæ ad supremam sectionem EE sit normalis, quæ cum ad verticalem inclinetur angulo ϵ, inde orietur vis verticalis secundum $M\mu = V\, cos.\, \epsilon$ & vis horizontalis secundum $M\nu$ $V\, sin.\, \epsilon$. Omnino ergo P continebit vim verticalem secundum $M\mu = V\, cos.\, \epsilon$ & vim horizontalem secundum $M\nu = V\, sin.\, \epsilon$.

§. LXXXV. Hinc ergo vis reactionis aquæ, seu vis, quam vas ab aqua sustinet, definietur; cum enim inventa sit hæc vis $R = P - Q$, hæc vis duas vires in se complectetur alteram verticalem secundum $M\mu$:

$$\text{Quæ erit} = M + V\, cos.\, \epsilon - \frac{a\, ff\, dv}{dt V v} - 2 f^4 v \left(\frac{cos.\, \zeta}{ff} - \frac{cos.\, \epsilon}{ee}\right)$$

Alteram horizontalem secundum $M\nu$,

$$\text{Quæ erit} = V\, sin.\, \epsilon - \frac{b\, ff\, dv}{dt V v} - 2 f^4 v \left(\frac{sin.\, \zeta}{ff} - \frac{sin.\, \epsilon}{ee}\right)$$

§. LXXXVI. Quod si jam hujusmodi vas cum aqua effluente navi adjungatur, ipsa quoque navis has vires sustinebit, ac prior quidem vis verticalis $M\mu$ nihil conferet ad navem movendam, unde tantum vis posterior ad motum navis imponditur, sicque navis propelleretur secundum directionem $M\nu$ vi

$$V\, sin.\, \epsilon - \frac{b\, ff\, dv}{dt V v} - 2 f^4 v \left(\frac{sin.\, \zeta}{ff} - \frac{sin.\, \epsilon}{ee}\right).$$

Verum cum vis V in ipsa navi exerceatur ob renitentiam ipsi æqualem iterum destruitur, unde navis secundum directionem MP propelletur vi

$$\frac{b\, ff\, dv}{dt V v} + 2 f^4 v \left(\frac{sin.\, \zeta}{ff} - \frac{sin.\, \epsilon}{ee}\right).$$

Ac si motus aquæ se jam ad uniformitatem composuerit erit $dv = o$ & vis navem propellens erit $= 2 f^4 v \left(\frac{sin.\, \zeta}{FF} - \frac{sin.\, \epsilon}{ee}\right)$.

§. LXXXVII. Quo nunc hæc vis maxima reddatur, navisque quam fortissime propellatur, angulus ϵ ita constitui debet ut ejus sinus non solum evanescat sed etiam fiat negativus & quidem maximus quam fieri potest, fieri ergo debet angulus $\epsilon = -90°$, deinde manifestum est angulum ζ commodissime statui $= 90°$, ut sit $sin.\, \zeta = +1$ quare vas hujus modi habebit figuram, ut tam supra quam infra desinat in tubum horizontalem utrumque in eandem plagam spectantem, eritque hoc casu vis navem propellens $= 2 f^4 v \left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee}\right)$ TABULA II. Fig. 9.

§. LXXXVIII. Hæc ergo vasis constitutio & aptissima ad propulsionem navis, verum si aqua super ne nulla vi adigatur, suprema superficies ee erit horizontalis ideoque angulus $\epsilon = o$. Unde hoc casu vis navem propellens, si quidem aqua per foramen FF horizontaliter effluat, ut sit $\zeta = 90°$, erit $= 2 f^4 v \frac{1}{ff} = 2 ff v$; quæ ergo vis reactionis æquatur duplo cylindro cujus basis est foramen FF & altitudo æqualis altitudini celeritati debitæ v. Fig. 9.

LXXXIX. Verum hic opus est celeritatem nosse qua aqua quovis casu per foramen FF est eruptura, quæ etsi facile definitur, cum motus ad uniformitatem fuerit perductus & quasi per experientiam constet, tamen, quoniam hic jam præcipua Hydraulicæ fundamenta jeci; non abs re fore arbitror, si etiam modum ipsam celeritatem determinandi ex Theoria proposuero.

§. XC. Ad hoc considerari debet status compressionis aquæ in quovis tubi loco. Quamquam enim aqua in minus spatium se cogi non patitur, tamen comparari potest cum eo statu, quem aqua ad diversas profunditates obtinet; hinc statum compressionis per altitudinem designabo, vel potius profunditatem, ad quam aqua stagnans in pari statu compressionis reperitur.

TABULA II. Fig. 8.

§. XCI. Exponatur ergo status compressionis aquæ in sectione MN per altitudinem p, sive hic aqua in eodem sit statu, ac si columna aquea altitudinis $= p$ immineret. Hinc ergo aqua circa sectionem MN, quam supra posui $= zz$, propelletur vi $= pzz$. Simili autem modo in sectione mn status compressionis erit $p + dp$, unde oritur vis, abs qua aqua anterior $mnFF$ propellitur, posterior vero repellitur.

§. XCII. Elementum igitur aquæ $MNmn$ ad basin MN propellitur vi $= pzz$ ad alteram vero basin mn repellitur vi $= (p + dp)(zz + 2zdz)$. Quæ vires essent in æquilibrio si rationem basium tenerent, hoc est si esset:

$$pzz : (p+dp)(zz + 2zdz) = zz : zz + 2zdz$$

Hoc ergo aquæ elementum esset in æquilibrio si esset $dp = o$. Si ergo dp non est $= o$, hoc aquæ elementum actu repelletur vi $= dp\,(zz + 2zdz) = zzdp$.

§. XCIII. Præterea autem hæc aqua, quia est gravis, deorsum nititur suo pondere $= zzds$; unde ob gravitatem hæc aqua secundum directionem tubi Mm propelletur vi $= zzds\,cos.\,\phi = zzdx$; hinc ergo conjunctim propter gravitatem & statum compressionis elementum aquæ $MNnm$ secundum directionem tubi Mm propelletur vi $= zzdx - zzdp$, hæcque est vera vis, qua motus hujus aquæ acceleratur.

§. XCIV. Supra autem (§. LXXVII) vidimus ad motum elementi aquæ $MNnm$ requiri duas vires $M\mu$ & $M\nu$, ex quibus conficitur vis aquam secundum directionem tubi Mm propellens $=$ vis $M\mu\,cos.\,\phi +$ vis $M\nu\,sin.\,\phi = \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\,ds - \frac{4f^4vdz}{z^5}$. Hæc ergo vis æqualis esse debet vi ante inventæ; unde oritur hæc æquatio

$$zzdx - zzdp = \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\,ds - \frac{4f^4vdz}{z^3}.$$

Ex

Ex qua definiri debet altitudo p statum compressionis exponens, ubi quidem ad huc celeritatem $\sqrt{v}$ tanquam cognitam spectamus.

§. XCV. Hinc ergo nanciscimur istam equationem:

$$dp = dx - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ds}{zz} + \frac{4f^4vdz}{z^5}.$$

Hæc formula iterum ita integrata, ut $\sqrt{v}$ & $\frac{dv}{dt}$ pro constantibus habeantur, quoniam tantum statum compressionis aquæ pro præsenti momento determinare est propositum, prodibit ergo:

$$p = x - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\int\frac{ds}{zz} - \frac{f^4v}{z^4} + C.$$

Hic perspicitur, valorem integralem $\int\frac{ds}{zz}$ à figura tubi ejusque amplitudine pendere, quæ, si fuerit cognita, etiam valor illius formulæ poterit assignari.

§. XCVI. Hic jam primo observandum est in orificio FF nullam compressionem totum habere, si quidem à pressione Atmosphæræ animum abstrahamus; erit ergo hic $p = o$: ponatur ergo integralis $\int\frac{ds}{zz}$ per totam longitudinem tubi sumti valor $= F$; erit $o = a - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}F - v + C$. Unde constans C determinatur; sicque pro loco tubi quodcunque M status compressionis erit:

$$p = x - a + v\left(1 - \frac{f^4}{z^4}\right) + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\left(F - \int\frac{ds}{zz}\right).$$

§. XCVII. Exprimat altitudo C statum compressionis in sectione suprema EE erit: $C = -a + 1\left(-\frac{f^4}{e^4}\right) + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}F$. Tota ergo vis, qua superficies aquæ EE propellitur, erit $= Cee$; quæ ergo vis æqualis esse debet vi supra in calculum inductæ V ita ut sit $C = \frac{V}{ee}$; unde obtinemus hanc æquationem:

$$\frac{V}{cc} + a = v\left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right) + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}F.$$

Ex qua celeritas v poterit determinari ſeu celeritas $\sqrt{v}$ ad quodvis tempus determinari.

§. XCVIII. Integrationi hujus æquationis, quia nihil habet difficultatis, non immoror, ſed tantum obſervo, cum motus perductus fuerit ad uniformitatem, quod plerumque ſatis cito fieri ſolet, celeritatem, ob $dv = o$, hac æquatione determinari: $v = \left(\frac{V}{cc} + a\right) : \left(1 - \frac{f^4}{c^4}\right)$.

§. XCIX. Hinc igitur patet, ſi amplitudo ſuperior EE multo major fuerit quam foramen FF celeritatem aquæ per FF effluentis debitam fore altitudini v, ut ſit $v = a + \frac{V}{cc}$. Ac ſi vas ſupra fuerit apertum, neque ulla vi V urgeatur fore $v = a$, ſcilicet aqua effluet celeritate, quæ erit debita altitudini æquali altitudini aquæ in vaſe ſupra foramen.

I.

Primus Modus Navem propellendi.

Tabula III. Fig. 10. §. C. Conſtituatur in Puppi navis vas ampliſſimum $AEFB$, quod aqua jugiter plenum ſervetur, ex quo aqua horizontaliter effluat per foramen $FF = ff$, ſitque altitudo aquæ ſupra hoc foramen $EF = a$, atque ut vidimus aqua effluet celeritate $\sqrt{v} = \sqrt{a}$. Vis igitur reactionis aquæ ſecundum directionem horizontalem erit $= 2ffv = 2ffa$, uti in §. LXXXVIII eſt oſtenſum.

§. CI. Tanta igitur vi navis actu propelletur, unde ſi navis jam celeritate $= \sqrt{c}$ progrediatur, ejuſque reſiſtentia abſoluta fuerit $= kk$, ita ut reſiſtentia ipſa ſit $= kkc$; neceſſe eſt ut ſit $kkc = 2ffa$, ſi quidem motum navis jam ad uniformitatem perveniſſe ponamus. Hinc ergo ex datis quantitatibus a, ff & kk celeritas

navis ita erit comparata ut ſit $c = \frac{2ffa}{kk}$ ſeu ipſa celeritas erit $\sqrt{c} = \frac{f}{k}\sqrt{2a}$.

§. CII. Cum autem conſtanter tantumdem aquæ ſupernæ in vas affundi debeat, quantum per foramen effluit, videndum eſt, quantum aquæ ſingulis minutis ſecundis per foramen effluat. Ponamus igitur, grave minuto ſecundo cadere per altitudinem l, ac ſi aqua efflueret celeritate $\sqrt{l}$ uno minuto ſecundo prorumperet volumen aquæ $= 2ffl$. Quare cum aqua effluat celeritate $= \sqrt{a}$, quantitas aquæ ſingulis minutis ſecundis elapſæ erit $= 2ff\sqrt{al}$: hinc ſingulis minutis ſecundis perpetuo tantumdem aquæ ſupra in vas infundi debet.

§. CIII. Quæ aquæ, cum ex mari hauriri, atque ad altitudinem tanto majorem, quam eſt altitudo vaſis a elevari debeat, quanto magis ipſum vas ſupra aquam fuerit elevatam hoc ſine diſpendio virium fieri nequit. Sit altitudo vaſis ſupra aquam $FO = i$, atque tantis viribus opus erit, quæ ſufficiant quantitati aquæ $= 2ff\sqrt{al}$ ſingulis minutis ſecundis ad altitudinem $a + i$ elevandæ, altitudo autem $FO = i$ tanto major accipi debet, quo magis navis à fluctibus agitatur, neceſſe enim eſt ut foramen FF ſemper ſupra aquam emineat.

§. CIV. Ponamus igitur ad hoc n homines adhiberi, qui ſinguli celeritate $\sqrt{b}$ agant & vim $= A$ exerceant. Quilibet ergo homo ſingulis minutis ſecundis onus $= A$ promovebit per ſpatium $= 2\sqrt{bl}$. Unde effectus unius hominis uno minuto ſecundo editus æſtimandus eſt $= 2A\sqrt{bl}$ & effectus n hominum $= 2nA\sqrt{bl}$. Qui cum æqualis eſſe debeat effectus eodem tempore præſtando, quo maſſam aquæ $2ff\sqrt{al}$ ad altitudinem $(a + i)$ attolli oportet, ſequentem obtinebimus æquationem.

$$2(a + i)ff\sqrt{al} = 2nA\sqrt{bl},$$

ſeu $(a + i)ff\sqrt{a} = nA\sqrt{b}$.

§. CV. Hinc non determino utrum homines immediate aquam hauriant an ope cujuspiam machinæ, semper enim idem obtinetur effectus, si quidem homines pari celeritate operentur. Machina autem, si qua uti videatur, ita comparata esse debet, ut homines ea celeritate $\sqrt{b}$, quæ supra commodissima est ostensa, agere queant. Quod, quomodo efficiendum sit, ex iis, quæ supra de constitutione machinarum sunt exposita, non difficulter colligere licet.

§. CVI. Ex æquatione igitur inventa nanciscimur amplitudinem foraminis $ff = \frac{nA\sqrt{b}}{(a+i)\sqrt{a}}$; unde altitudo celeritati navis debita reperitur $c = \frac{2nA\sqrt{ab}}{kk(a+i)}$. Hic quantitates n, A, b, kk, & i sunt datæ ac sola altitudo vasis a arbitrio nostro relinquitur; quam ergo definiri convenit, ut navis maximam celeritatem adipiscatur: expressio igitur $\frac{\sqrt{a}}{a+i}$ maxima est reddenda, quod evenit si statuatur $a = i$ unde fit $c = \frac{nA}{kk}\sqrt{\frac{b}{i}}$.

§. CVII. Applicemus hoc ad casum navis supra (§. XLVIII) consideratæ, sitque $kk = 100$, $n = 100$, $A = \frac{4}{9}$ & $b = \frac{8}{125}$, ac tribuamus altitudini i quantitatem 5 pedum, ut sit $i = 5$; hinc ergo eruitur $c = 0,1050183$, cui respondet celeritas fere $1\frac{4}{5}$ pedis in minuto secundo. Machina autem supra adhibita navem ab eadem celeritate fere duplo majori propelli vidimus. Unde hic modus præ superioribus non admodum commendabilis videtur.

§. CVIII. Disparitas hic insignis inter hujus machinæ effectum & superiorum machinarum notanda occurrit, cum enim ibi cubus celeritatis navis numero hominum proportionalis esset inventus, hic tantum quadratum celeritatis numero hominum proportionale est repertum. Ita hic ad duplam navi celeritatem imprimendam, numero hominum quadruplo majori erit opus, cum ante octuplo majori erit opus fuisset. Unde sequitur, si numerus hominum pro lubitu multiplicari posset, hoc modo tandem navi multo majorem celeritatem impressum iri, quam modis præcedentis sectiones, quod tamen minime probabile videtur.

§. CIX. Ratiocinium autem, quo hic usus sum, esset justum, si elevatio aquæ, tam pro casu navis quiescentis, quam motæ eandem vim requireret; verum manifestum est, si navis ipsa progrediatur, aqua antequam elevari queat motum ipsius navis motui æqualem imprimi debere. Quod cum sine vi effici nequeat, eo majori vi opus erit ad aquam elevandam, quo celerius navis progrediatur. Existimare autem licet ad hoc tantam vim requiri, quanta opus est ad aquam ad altitudinem $= c$ elevandam.

§. CX. Quod si ergo superius ratiocinium hinc emendare velimus, aqua non solum ad altitudinem $a + i$ sed potius ad altitudinem $a + i + c$ elevari debere, censenda est. Hinc ergo prodibit ista æquatio $c = \frac{2nA\sqrt{ab}}{kk(a+i+c)}$ ita ut hæc resolvenda sit æquatio quadratica

$$cc + (a+i)c = \frac{2nA\sqrt{ab}}{kk}$$

Ex qua elicitur $c = -\frac{1}{2}(a+i) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}(a+i)^2 + \frac{2nA\sqrt{ab}}{kk}\right)}$ Qui valor jam proxime ad veritatem accedet.

§. CXI. Ut hæc celeritas fiat maxima, non amplius locum habet valor, $a = i$; sed per differentiationem æquationis quadraticæ, posito a variabili, reperitur $c = \frac{na\sqrt{b}}{kk\sqrt{a}}$; ideoque $\sqrt{a} = \frac{na\sqrt{b}}{kkc}$, qui valor substitutus dabit $cc + ic = \frac{nnAAb}{k^4c}$ seu $c^3 + icc = \frac{nnAAb}{k^4}$. A cujus æquationis cubicæ resolutione pendet determinatio celeritatis.

§. CXII. Cum altitudo i tam exigua capiatur quam fieri potest, si esset $i = o$, foret $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{kk}$. Quæ formula similis est illis, quæ pro modis præcedentibus sunt inventæ (§. XXIII). Unde patet hoc casu navi eandem celeritatem impressum iri atque supra. Sed cum c vix unquam exsurgat ad unum pedem, altitudo autem i aliquot pedes superare debeat, certe erit $i > ec$, posito igitur $i = 3c$; erit $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{2kk}$. Quæ expressio convenit prorsus cum ea quæ §. XXIV, tanquam ad praxin idoneam est inventa: ita ut hoc modo parem hominum vim adhibendo, navis æque celeriter propelli possit atque iis modis præcedentibus, quibus nulla inutiliter impenditur.

§. CXIII. Cum hic casus ad praxin satis accommodatus videatur, ponamus $i = 3c$ ut sit $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{2kk}$; erit $c = \sqrt[3]{\frac{nnAAb}{4k^4}}$, qui valor substitutus pro altitudine vasis a dabit $\sqrt{a} = \frac{nA\sqrt{b}}{kk\sqrt[3]{\frac{nnAAb}{4k^4}}} = \sqrt[3]{\frac{4nA\sqrt{b}}{kk}}$ Unde ipsa altitudo colligitur $a = \sqrt[3]{\frac{16nnAAb}{k^4}} = 4c$.

§. CXIV. Consideremus iterum casum ante allatum, quo erat $n = 100$; $kk = 100$; $A = \frac{4}{9}$ & $b = 125$: reperitur $c = \sqrt[3]{\frac{81\cdot 125}{32}}$ ped. $= o,\ 14675$ ped. Unde celeritas nascitur singulis minutis secundis spatium 3 pe-

dum absolvens, erit ergo $i = o,44025$; porro prodit altitudo vasis $a = o,58700$; orificii denique, per quod aqua effluit, amplitudo erit $ff = \frac{kkc}{2a} = 12\frac{1}{2}$ pedum quad.

§. CXV. Arca igitur amplissima ad puppin navis adjungi deberet, cujus altitudo, cum semissem pedis parum superare debeat, foramen per totum latus posterius instar rimæ exscindi deberet, cujus altitudo, si caperetur $\frac{1}{4}$ pedis, latitudo vasis 50 pedum esse deberet, ut hinc amplitudo foraminis prodiret $12\frac{1}{2}$ pedum quadratorum. Quia autem hæc area vix dimidio pede supra aquam prominere deberet, minima agitatio effectum hujus machinæ penitus turbaret. Quin etiam haustus aquæ ad tam parvam altitudinem magnis difficultatibus foret obnoxia.

§. CXVI. Quod incommodum, quo evitetur, altitudini i multo major valor tribui debet; quod si ergo ponamus $i = 15c$, erit $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{4kk}$ a $16c$. Qui casus jam propius ad praxin esset accommodatus, verum hinc celeritas navis multo minor evaderet, ideoque hæc machina præcedentibus merito postponenda videtur, quippe quibus navi ab iisdem viribus major celeritas imprimi potest.

II.

Secundus Modus Navem propellendi.

§. CXVII. Quemadmodum aqua libere effluere est posita, ita nunc ponamus aquam præter gravitatem vi quadam expelli. Jam vero vidimus maximam hinc vim obtineri si canalis tam supra quam infra fuerit horizontaliter reclinatus.

§. CXVIII. Hic autem non sufficit propulsionem aquæ, quacunque vi perficiatur, determinasse, verum imprimis opus eſt, ut modus exponatur, quo aqua continuo elevetur, atque machina ita inſtruatur, ut, vel ſine intermiſſione aquam expellat, vel alternatim aquam cum attrahendo tum ejiciendo effectum ſuum præſtet. Commodiſſima igitur ad hoc inſtitutum videtur machina anticis ordinariis ſimilis, qua aqua motu reciproco attollitur & expellitur.

Tabula III. Fig. 11. §. CXIX. Concipiamus ergo in ſuperiori parte vas inſtructum eſſe tubo horizontali AC, in quo embolus EE ſit agitandus, infra autem deſinat in duplicem ramum, alterum NB, qui aquæ ſit immerſus, alterum autem MF horizontaliter reflexum, per cujus orificium FF aqua in aërem expellatur. Valvulis autem m, n efficiatur, ut, dum embolus extrahitur, valvula m clauſa, altera n aperiatur & aqua ex mari attollatur, contra vero, dum embolus intruditur, occluſa valvula n, aqua per alteram m apertam expelli poſſit; ſicque alterna emboli agitatione machina tam aquam attollat quam iterum ejiciat.

§. CXX. Cauſa autem quæ aquam, dum embolus extrahitur, ſurſum pellit eſt preſſio atmoſphæræ, quæ, uti conſtat, æquipollet columnæ aquæ 32 pedes altæ. Unde altitudo tubi horizontalis AC ſupra aquæ ſuperficiem 32 pedes excedere nequit; ergo altitudo AN aliquot pedibus minor eſſe debet, ita ut nunquam triginta pedes ſuperare poſſit.

§. CXXI. Ponamus igitur vim embolum extrahentem eſſe $= U$ & emboli amplitudinem $EE = ee$: ejus vero altitudinem ſuper aqua $= a$ atque ex hydroſtaticis conſtat vim U æqualem eſſe debere ponderi voluminis aquæ $= eea$. Tanta ergo vi opus erit ad embolum extrahendum ſcilicet erit $U = eea$ & $a < 32$ ped.

§. CXXII. Exponat u altitudinem debitam celeritati, qua embolus extrahitur, eritque $\sqrt{u}$ celeritas aquæ in ſectione EE, amplitudo autem tubi in B ſit æqualis gg,

gg,

eritque celeritas, qua aqua ad B in tubum intrat $= \frac{ee}{gg}\sqrt{u}$. Quæ, quia aqua in tubum ingreditur, comparanda eſt cum $-\sqrt{v}$, quam ſupra adhibuimus, uti etiam gg pro ff ſcribi oportet. Hinc ad motum hujus aquæ requiritur vis horizontalis $= 2eeu$, per §. LXXXVI, ob $\zeta = c$ & $\epsilon = -90°$.

§. CXXIII. Tanta ergo vi quoque navis propelletur, dum embolus extrahitur. Hinc ergo patet iſtum modum præcedenti eſſe anteferendum, quoniam vis aquam elevans quoque aliquid confert ad navem propellendam, cum ſuperiori modo inutiliter impendatur. Quare hinc quoque præcedentem modum perficere liceret, ſi ſcilicet aquam, quæ ibi ſimpliciter hauriri ponebatur, hoc modo ope hujus antliæ elevaretur, verum, quia hæc perfectio jam in hoc modo continetur, eam tantum indicaſſe ſufficiat.

§. CXXIV. Hæc vis etiam ulterius augeri poteſt, ſi ima pars tubi B etiam horizontaliter reflectatur, ut tubo MF fiat parallela; tum enim ob $\sin.\ \zeta = 1$ prodibit vis navem propellens $= 2e^4u\left(\frac{1}{gg} + \frac{1}{ee}\right)$. Quia autem amplitudo gg admodum magna ſaltem in calculo aſſumi debet, quoniam alioquin aqua aſcendens motum emboli non ſequeretur, hoc augmentum parvi erit momenti. Si enim celeritas $\sqrt{u}$ propterea diminueretur, multo majus detrimentum inde vis propellens pateretur.

§. CXXV. Conſideremus nunc etiam alteram partem, qua embolus intruditur & aquam per orificium FF expellit, poſita autem amplitudine orificii $= ff$, celeritate, qua aqua expellitur $= \sqrt{v}$, & vi embolum urgente $= V$. Supra invenimus vim navem propellentem eſſe $= 2f^4v\left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee}\right)$ (§. LXXXVII). Tum vero celeritas aquæ $\sqrt{v}$ ita eſt definita ut ſit:

$v = \frac{\frac{V}{ee} + a}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$; denotante a altitudinem emboli ſupra orificium FF.

§. CXXVI. Valore ergo hoc ſuſtituto, vis navem propellens erit:

$$\frac{2f^4 \left(\frac{V}{ee} + a\right)\left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}} = \frac{2ff(V + aee)}{ee - ff}.$$

Neminem hic offendat, quod caſu $ff = ee$, hæc vis prodeat infinita, hoc enim caſu celeritas nunquam ad uniformitatem, uti aſſumſimus, reducitur, ſed continuo in infinitum uſque augetur; id quod etiam evenit ſi $ee < ff$. Quare, ut mox motus obtineatur uniformis, neceſſe eſt, ut amplitudo ee notabiliter major ſtatuatur quam ff.

§. CXXVII. Cum igitur ſit celeritas aquæ effluentis $\sqrt{v} = e\sqrt{\frac{V + aee}{e^4 - f^4}}$: erit celeritas, qua embolus introducitur $= \frac{ff}{e}\sqrt{\frac{V + aee}{e^4 - f^4}}$. Sic igitur elicuimus tam celeritatem quam vim, qua embolus intruditur, quorſum deinceps vires hominum accommodari oportet.

§. CXXVIII. Ponamus nunc tam extractionem emboli quam ad intruſionem eaſdem vires eademque celeritate adhiberi, quo commodius machina tractari queat. Debet ergo eſſe $V = U = eea$; ubi a aliquantum major eſt quam in formulis præcedentibus, quia hic totam altitudinem ſuper aquæ ſuperficiem denotat, qui exceſſus ſeu elevatio foraminis FF ſuper aquam ſi vocetur $= \alpha$, erit $V = ee(a + \alpha)$. Deinde eſſe debet celeritas, qua embolus extrahitur

$$\sqrt{u} = \frac{ff}{e}\sqrt{\frac{V - aee}{e^4 - f^4}} = ff\sqrt{\frac{2a + \alpha}{e^4 - f^4}}$$

§. CXXIX. Vis ergo, qua navis, dum embolus extrahitur, ad motum incitatur, erit $\frac{2f^4}{gg}(ee + gg)\left(\frac{2aee + \alpha ee}{e^4 - f^4}\right)$. Dum autem embolus intruditur, erit vis navem propellens $= 2eeff\left(\frac{2a + \alpha}{ee - ff}\right)$. Ut igitur navis perpetuo æquali vi propellatur, conveniet duas hujuſmodi machinas in nave conſtitui, quæ ita agitentur, ut, dum in altera embolus extrahitur, in altera intrudatur: ſic vis conſtanter navem propellens erit $=$

$$\frac{2eef^4}{gg}(ee + gg)\left(\frac{2a + \alpha}{e^4 - f^4}\right) + 2eeff\left(\frac{2a + \alpha}{ee - ff}\right).$$

§. CXXX. Ab hujuſmodi igitur machina geminata navis perpetuo æquali vi incitabitur: unde cum motus navis jam ad uniformitatem fuerit perductus, hæc vis reſiſtentiæ debet eſſe æqualis. Quare, poſita celeritate navis $= \sqrt{c}$ & reſiſtentia abſoluta $= kk$ erit

$$kkc = \frac{2eef^4}{gg}(ee + gg)\left(\frac{2a + \alpha}{e^4 - f^4}\right) + 2eeff\left(\frac{2a + \alpha}{ee - ff}\right).$$

§. CXXXI. Ponamus ad utramque machinam agitandam ſimul n homines applicari, ita ut numerus hominum unam moventium ſit $= \frac{1}{2}n$; quilibet autem homo operetur vi $= A$ & celeritate $= \sqrt{b}$. Agitetur autem embolus ope vectis VC circa C mobilis, cui vires hominum applicatæ ſint in puncto P, ac vocetur $CV = x$ & $CP = z$; huc enim omnis generis machinæ, quibus uti viſum fuerit, reduci poſſunt.

§. CXXXII. Cum igitur celeritas hominum ſeu puncti P ſit $= \sqrt{b}$; erit celeritas puncti $V = \frac{x}{z}\sqrt{b}$; quæ æqualis eſſe debet celeritati emboli. Ex quo naſcitur hæc æquatio $\frac{x}{z}\sqrt{b} = ff\sqrt{\frac{2a + \alpha}{e^4 - f^4}}$.

§. CXXXIII. Porro vis uni machinæ in P applicata eſt $= \frac{1}{2}nA$, cujus momentum ergo $\frac{1}{2}nAz$ æquari debet momento vis, ad motum emboli requisitæ Vx. Cum autem sit $V = ee(a+\alpha)$, habebitur ista æquatio, $\frac{1}{2}nAz = ee(a+\alpha)x$. Ex qua elicitur $\frac{x}{z} = \frac{\frac{1}{2}nA}{ee(a+\alpha)}$. Qui valor in præcedente æquatione substitutus præbet: $\frac{nA\sqrt{b}}{2ee(a+\alpha)} = ff\sqrt{\frac{2a+\alpha}{e^4-f^4}}$.

§. CXXXIV. Cum nunc sit $ff = \frac{nee A\sqrt{b}}{\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2+nnAAb)}}$: erit, valorem hunc in prima æquatione substituendo:

$$kkc = \frac{(ee+gg)\,nnAAb}{2ggee\,(a+\alpha)^2}$$
$$+ \frac{2ee(2a+\alpha)nA\sqrt{b}}{\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2+nnAAb)}-nA\sqrt{b}}$$

quæ reducitur ad formam sequentem

$$kkc = \frac{(ee+gg)\,nnAAb}{2ggee\,(a+\alpha)^2}$$
$$+ \frac{nA\sqrt{b}(\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2+nnAAb)}+nA\sqrt{b})}{2ee(a+\alpha)^2}$$

seu $kkc = \frac{nnAAb\,(2+\frac{ee}{gg})}{2ee(a+\alpha)^2}$

$$+ \frac{nA\sqrt{b}\,\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2+nnAAb)}}{2ee(a+\alpha)^2}.$$

§. CXXXV. Quod si brevitatis gratia ponatur $\frac{nA\sqrt{b}}{2ee(a+\alpha)} = \sqrt{p}$, ut sit $nA\sqrt{b} = 2ee(a+\alpha\sqrt{p})$; prodibit facta substitutione: $kkc = 2eep(2+\frac{ee}{gg}) + 2ee\sqrt{p}(2a+\alpha+p)$. Unde fit altitudo celeritati navis debita $c = \frac{2ee}{kk}p(2+\frac{ee}{gg}+\sqrt{(1+\frac{2a+\alpha}{p})})$. Quæ expressio etiam in hanc transformatur $c = \frac{2nAAb}{2kkee(a+\alpha)^2}$ $\left(2+\frac{ee}{gg}+\sqrt{(1+\frac{4(2a+\alpha)e^4(a+\alpha)^2}{nnAAb})}\right)$.

§. CXXXVI. Quoniam autem vidimus ad id, ut motus aquæ erumpentis quavis actione statim ad uniformitatem reducatur, requiri, ut ee multis vicibus excedat foramen ff quia alioquin vis hic per calculum definita vel nunquam vel nimis sero existeret, ponamus $ee = mff$, ut sit m numerus unitate multo major; eritque $\frac{x}{z} = \frac{nA}{2mff(a+\alpha)}$ & tertia æquatio præbet:

$ff = \frac{nA\sqrt{b}(mm-1)}{2m(a+\alpha)\sqrt{(2a+\alpha)}}$; unde conficitur

$\frac{x}{z} = \sqrt{\frac{2a+\alpha}{b(mm-1)}}$.

§. CXXXVII. Posito autem $ee = mff$, ac pro ff substituto valore invento, æquatio prima suppeditat $kkc = \frac{nA\sqrt{b}(2a+\alpha)}{(a+\alpha)\sqrt{(mm-1)}}\,(2+m+\frac{mff}{gg})$. Unde altitudo celeritati navis debita erit $c = \frac{nA\sqrt{b}(2a+\alpha)}{kk(a+\alpha)\sqrt{(mm-1)}}$ $(2+m+\frac{ee}{gg})$. Ubi ratio ee ad gg ita accipi debet, ut in extractione emboli aqua embolum sequatur; sicque conveniet fractioni $\frac{ee}{gg}$ valorem unitate minorem tribui.

§. CXXXVIII. Hic statim ingens se offert discrimen inter effectum hujus machinæ ac præcedentium, cum hic numerus hominum quadrato celeritatis navis, supra autem ejus cubo proportionalis sit inventus, ita ut hanc machinam adhibendo si navis duplo celerius progredi debeat, numerus hominum tantum sit quadruplicandus, cum ante octuplicari debeat. In quo non exigua prærogativa præ machinis præcedentibus est sita.

§ CXXXIX. Ex hac formula quoque apparet expedire, ut altitudines a & α quam minimæ statuantur, quia tum celeritas navis prodit maxima. Si enim a & α evanescerent, celeritas navis revera infinita prodiret, qui autem casus locum habere nequit, cum ipsum foramen FF deberet esse infinitum & ratio x ad z infinite parva. Quam ob causam necesse est ut litteris a & α modici valores tribuantur, quo hypothesis calculi ratione motus uniformis melius obtineatur.

§. CXL. Praeterea vero ipsa navis agitatio requirit, ut altitudo α unum vel aliquot pedes superet. Deinde etiam necesse est, ut altitudo a multis vicibus excedat diametrum foraminis, quia alioquin amplitudinis foraminis ratio ad altitudinem a haberi debuisset in calculo, quae tamen est praetermissa. Oportet ergo esse aa multo majus quam $\frac{n\alpha\sqrt{b}(mm-1)}{2m(a+\alpha)\sqrt{(2a+\alpha)}}$; seu quia m est numerus valde magnus & α tam parvum assumitur quam circumstantiae permittunt, debet esse $a^3\sqrt{a}$ multo majus quam $\frac{nA\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}$.

§. CXLI. Evolvamus igitur cassum supra consideratum (§. CXIV.) quo erat $n=100$; $kk=100$; $A=\frac{4}{9}$ & $b=\frac{8}{125}$. Atque statim reperitur $a^3\sqrt{a}$ multo majusquam 4, seu a^7 multo majus quam 16. Ponamus ergo esse $a=10$ ped. & $\alpha=5$ ped. Praeterea sit $m=5$ & $\frac{cc}{88}=\frac{1}{2}$ unde fit $c=\frac{100.\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{125}}.25.}{100.15.\sqrt{24}.}.7\frac{1}{2}$ sive $c=\frac{2}{9}\sqrt{\frac{1}{15}}=0,0574$ ped. cui altitudini respondet celeritas singulis secundis spatium $1\frac{9}{10}$ pedum absolvens, quae multo minor est quam ea, quae pro eodem casu per modum tertium sectionis superioris est inventa (§. XLVIII.).

§. CXLII. Ponamus autem, quo navi majorem celeritatem conciliemus, altitudinem $a=5$ ped. & $\alpha=2$ ped., reliquis quantitatibus iisdem relictis, prodibitque $c=\frac{4}{21}\sqrt{\frac{1}{5}}=0,0852$ pedis, cui altitudini respondet celeritas $2\frac{1}{3}$ pedum in minuto secundo, quae praecedentem tantum fere dimidio pede superat & adhuc multo minor est quam per machinas praecedentis sectionis navi ab iisdem viribus imprimi potest.

§. CXLIII. Cum igitur hoc modo à 100 hominibus navi minor celeritas imprimatur, quam modis in sectione priori descriptis, multo minorem effectum ab hoc modo expectare licebit, si pauciores homines adhibeantur, quoniam hic celeritas navis secundum rationem subduplicatam, ibi vero secundum rationem subtriplicatam numeri hominum decrescit. Unde si non nimis magno hominum numero uti licet, respectu resistentiae absolutae kk, semper praestabit machinas prioris sectionis usurpare, quam istam hic descriptam.

§. CXLIV. Contra autem si multo plures homines operi admoveri queant, quam hic assumsimus, tum utique effectus hujus postremae machinae praecedentes superare posset. Verum, quia tunc altitudo a major assumi debet ob rationes ante allatas: inde ipsa quoque navis celeritas minor esset proditura, quamobrem etiam hoc casu nullum lucrum impetraretur.

§. CXLV. His perpensis merito concludi posse videtur, machinas hujus sectionis multo debiliores esse censendas quam praecedentes, ideoque à praxi removendas. Quocirca machinas prioris sectionis praecipue ad usum commendandas esse arbitror, ex iisque imprimis modos tertio & quarto loco descriptos, quippe qui navi maximam celeritatem imprimunt, si quidem paribus viribus utamur. Quin etiam isti modi ad praxin magis videntur accommodati, neque adeo difficile videtur obstacula, quae forte occurrere queant, removere.

FINIS.