1771

De ictu glandium contra tabulam explosarum

Leonhard Euler

DE ICTV GLANDIVM CONTRA TABVLAM EXPLOSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Casus primus, quo tabula est immobilis.

I. Assumimus hic primo tabulam esse immobilem, quo Analysis ex principiis motus petenda euadat facilior. Quod nunc ad glandem attinet, duae res potissimum consideranדae veniunt, prima est eius celeritas, qua in tabulam impingit, quam metimur spatio, quod hac celeritate vno minuto secundo percurreretur, sit igitur haec celeritas $= c$, ac denotet g altitudinem ex qua graue libere cadit tempore vnius minuti secundi, ita vt si celeritas glandis tanta fuerit, quanta ex altitudine g acquiritur, tum sit $c = 2g$, sin autem illa celeritas tanta sit, quanta ex altitudine nng acquiritur, tum sit $c = 2ng$, vnde sequitur posito $c = 2ng$ fore $n = \frac{c}{2g}$ ideoque altitudinem ex qua haec celeritas c generatur fore $nng = \frac{cc}{4g}$. Deinde vero in computum venit massa huius glandis, quam littera M designemus, vbi secundum principia Mechanica M mensuratur pondere eiusdem glandis. Quod autem ad figuram glandis attinet, eius ratio hic vix habetur, dummodo eandem figuram retineat.

II.

II. Statim atque glans tabulam ferire incipit, hoc erit initium ictus, a quo tempora computabimus. Ponamus ergo ab hoc initio, iam elapsum esse t minut. secund., quaeriturque quousque nunc glans in tabulam penetrauerit, ponamus ergo glandem ad profunditatem $= x$ penetrasse et quum hoc sit spatium a glande tempore t percursum, erit celeritas glandis hoc momento $\frac{dx}{dt}$ eiusque acceleratio $= \frac{M\,ddx}{2g\,dt^2}$, sumto elemento dt constante, cui vis resistens negatiue sumta debet esse aequalis. Animum autem hic abstrahimus a grauitate glandis, qua eius motus incuruatur, quippe qui effectus in hoc phaenomeno nullius est momenti.

III. Quum nunc glans ad profunditatem $= x$, in tabulam penetrauerit, quam quidem hic minorem ipsa crassitie tabulae assumimus, posita enim crassitie tabulae $= a$, simul ac fit $x = a$, glans per tabulam penitus transiisse censendus est, nunc igitur dum in profunditate $= x$ versatur, certam atque insignem offendet resistentiam, quae eius motui se opponit, et quam litera R denotemus, cuius valorem cum vix vllo casu accurate definire liceat, hic tantum obseruemus eam, cum a magnitudine glandis, tum vero etiam a duritie ipsius tabulae, atque ab ipsa profunditate penetrationis x pendere, quare quum duo priora momenta eadem maneant pro eadem glande et tabula, vis re-

resistentiae spectari poterit tamquam functio ipsius x, quae euanescat tam posito $x = 0$, quam $x = a$, quandoquidem tam ante impulsum, quam post eruptionem, nullam patitur resistentiam.

IV. Constituta igitur hac resistentia R, habebimus statim istam aequationem, $\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{R}{M}$; quae per dx multiplicata et integrata praebet $\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = C - \int\frac{R\,dx}{M}$ vbi integrale $\int\frac{R\,dx}{M}$ ita capi sumamus, vt ipso initio vbi $x = 0$ euanescat. Hinc constantem C ita definiri oportet, vt posito $x = 0$, celeritas glandis quae est $\frac{dx}{dt}$ fiat $= c$, vnde colligitur $C = \frac{cc}{4g}$, ita vt habeamus $\frac{dx^2}{dt^2} = cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M}$; hincque ipsa celeritas glandis $\frac{dx}{dt} = \sqrt{(cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M})}$, vnd porro pro tempore cognoscendo deducitur ista aequatio:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(cc - 4g\int\frac{R\,dx}{M})}}.$$

V. Parum autem solliciti de tempore, ex aequatione pro celeritate inuenta, facile iudicare poterimus, vtrum glans penitus per tabulam perrumpat, an vero in ipsa tabula sit haesurum omni scilicet motu amisso. Hic praecipue ad ipsam resistentiam R indeque formatum integrale $\int R\,dx$ est respiciendum, cuius valor crescente x continuo augetur, ponamus igitur posita $x = a$, fieri $\int\frac{R\,dx}{M} = f$, atque nunc perspicuum est, glande per tabulam perrumpere

non

non posse quamdiu cc minus est quam $4gf$, atque hinc sequentes casus distingui oportet.

1°. Si fuerit celeritas glandis $c < 2\sqrt{gf}$, glans non penitus per tabulam perrumpet, sed alicubi haerebit, vbi scilicet fit $\int \frac{R\,dz}{M} = \frac{cc}{4g}$, vnde profunditas penetrationis intelligi poterit.

2°. Sin autem fuerit celeritas glandis $c > 2\sqrt{gf}$, tum glans non solum penitus per tabulam transuibrabit, sed etiam adhuc celeritatem quandam conseruabit, quae erit $= \sqrt{(cc - 4gf)}$.

Casus Secundus, quo tabula super plano horizontali libere est mobilis.

VI. Manentibus iis quae circa glandem eiusque celeritatem ante sunt constituta, nunc etiam massa tabulae in computum est ducenda, quae sit $= N$, atque ne tabula motum obliquum recipiat, glandis ictum ponamus fieri in ipso tabulae centro inertiae, motumque glandis esse horizontalem. Sit porro adhuc crassities tabulae in loco ictus $= a$.

VII. Elapso tempore $= t$ secund. a primo ictus initio, vbi ipsa tabula erat in quiete, glans vero celeritate $= c$ ferebatur, ponamus tabulam iam esse promotam per spatium $= y$, glandem autem iam in tabulam penetrasse ad profunditatem $= x$, vbi resistentiam offendat $= R$, vti ante

ante posuimus; quum igitur tabula tempore t promota sit per spatium y, erit eius celeritas $= \frac{dy}{dt}$ et acceleratio more superiori sumta $= \frac{N\,ddy}{2g\,dt^2}$, glans autem interea confecit spatium $x + y$, vnde eius celeritas erit $\frac{dx + dy}{dt}$ et acceleratio $= \frac{M(ddx + ddy)}{2g\,dt^2}$, notandum autem est, ipso initio fuisse $x = 0$ et $y = 0$, at vero celeritas primo tabulae $\frac{dy}{dt} = 0$ et glandis $\frac{dx + dy}{dt} = c$, ita vt tum fuerit $\frac{dx}{dt} = c$.

VIII. Quod nunc primum ad motum tabulae attinet, euidens est eum accelerari a vi R, haec enim dum motui glandis se opponit, aequa vi in tabulam reagit, eiusque motum accelerat, vnde haec prima aequatio resultat:

$$\text{I}^{\circ}.\quad \frac{N\,ddy}{2g\,dt^2} = R, \quad \text{siue} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{2gR}{N},$$

deinde vero motus glandis ab eadem vi R retardatur, vnde oritur haec secunda aequatio:

$$\text{II}^{\circ}.\quad \frac{M(ddx + ddy)}{2g\,dt^2} = -R \quad \text{siue} \quad \frac{ddx + ddy}{dt^2} = -\frac{2gR}{M},$$

ex quibus duabus aequationibus vtrumque motum deriuari oportet, scilicet spatia x et y, vbi imprimis notasse iuuabit, quantitatem R, tantum esse functionem ipsius x, ita vt ex priori aequatione sola nihil concludi queat.

XI. Hinc igitur primo ddy eliminemus vnde orietur ista aequatio:

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{2g(M+N)}{MN} . R,$$

quae per dx diuisa et integrata dat:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C - \frac{4g(M+N)}{MN} \int R\,dx,$$

vbi

vbi si $\int R\,dx$ euanescat facto $x = 0$, aequatio nostra ita determinatur, vt sit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - \frac{4g(M+N)}{MN}\int R\,dx.$$

Quodsi ergo vt ante pro tota crassitie tabulae $= a$ statuatur $\int\frac{R\,dx}{M} = f$, perspicuum est vt glans per tabulam penitus perrumpat, necesse est, vt sit $cc > 4fg\frac{(M+N)}{N}$, vnde intelligitur maiori glandis celeritate opus esse si tabula fuerit mobilis, quam si esset immobilis, nisi moles tabulae fuerit maxima respectu glandis, at quo leuior tabula est, manente quidem eadem crassitie et duritie, eo maior glandis celeritas requiritur, vt perrumpat. Cognita autem massa tabulae N, iudicium vtrum glans perrumpat nec ne, perinde instituitur, atque in hypothesi tabulae immotae.

X. Hic autem maxime curiosa est inuestigatio motus quem tabula hinc recipit, ad quem inueniendum, addamus ambas aequationes prius inuentas vt ipsa quantitas R eliminetur sic enim prodit haec aequatio:

$$\frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} + \frac{(M+N)\,ddy}{2g\,dt^2} = 0,$$

quae semel integrata sponte dat:

$$\frac{M\,dx}{dt} + \frac{(M+N)\,dy}{dt} = Mc,$$

quare quum $\frac{dy}{dt}$ celeritatem tabulae exprimat, habebimus:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Mc}{M+N} - \frac{M\,dx}{(M+N)\,dt},$$

ex qua aequatione intelligitur iis casibus, quibus glans non penitus transit per tabulam, sed in certa penetratio-ne arcetur, ibique fit $\frac{dx}{dt} = 0$, tabulam motum esse acceptam cuius celeritas sit $= \frac{Mc}{M+N}$. At si aucta celeritate c glans penitus perrumpat, tum tabula minorem accipiet motum, vti mox patebit, in quo non exiguum paradoxon cernitur.

XI. Quamdiu ergo glans non penitus perrumpit, tabulaeque infixa manet, quod fit vbi $\frac{dx}{dt} = 0$; motus determinatio nulla laborat difficultate, tum enim celeritas tabulae vt modo vidimus erit $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \cdot c$, euoluamus igitur eos casus quibus glans penitus perrumpit, quod euenit quando

$$cc > 4fg \frac{(M+N)}{N} = 4fg(1 + \frac{M}{N});$$

ponamus igitur breuitatis gratia:

$$4gf(1 + \frac{M}{N}) = kk,$$

ita vt k eum celeritatis gradum exhibeat, quo tantum non per tabulam penetrare valet, ac si fuerit $c = k$ ob $\frac{dx}{dt} = 0$, erit tabulae celeritas post ictum $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \cdot k$; glans vero ipsi extremitati tabulae inhaerebit. Nunc autem ponamus $c > k$ et quidem $c = nk$ vt sit $n > 1$, atque post ictum habebimus:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{(nn - 1)},$$

vnde fit celeritas tabulae post ictum:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}(nk - k\sqrt{(nn-1)}) = \frac{M}{M+N} k(n - \sqrt{(nn-1)}).$$

Quare si n paulisper tantum vnitatem excedat, vt sit

$n = 1$

$n = 1 + \alpha$, erit celeritas tabulae post ictum:

$$= \frac{Mk}{M+N}(1 - \sqrt{2\alpha}),$$

spectata scilicet α vt infinite parua, vnde patet celeritatem tabulae minorem esse, quam si esset $n = 1$.

XII. Sit iam n numerus quicunque maior vnitate et quum sit post ictum:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{(nn-1)} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \frac{}{M+N} k(n - \sqrt{(nn-1)}),$$

quae est celeritas tabulae post ictum, erit glandis celeritas post ictum:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{Mnk}{M+N} + \frac{N}{M+N} k\sqrt{(nn-1)},$$

hinc ergo euoluamus aliquot casus praecipuos:

celeritas glandis ante ictum	celeritas tabulae post ictum	celeritas glandis post ictum
I. $c = k$	$\frac{M}{M+N} \cdot k$	$\frac{M}{M+N} k$
II. $c = 2k$	$\frac{M}{M+N} k(2 - \sqrt{3})$	$\frac{k(2M + N\sqrt{3})}{M+N}$
III. $c = 3k$	$\frac{M}{M+N} k(3 - \sqrt{8})$	$\frac{k(3M + N\sqrt{8})}{M+N}$
IV. $c = 4k$	$\frac{M}{M+N} k(4 - \sqrt{15})$	$\frac{k(4M + N\sqrt{15})}{M+N}$
V. $c = 5k$	$\frac{Mk}{M+N}(5 - \sqrt{24})$	$\frac{k(5M + N\sqrt{24})}{M+N}$
VI. $c = 6k$	$\frac{Mk}{M+N}(6 - \sqrt{35})$	$\frac{k(6M + N\sqrt{35})}{M+N}$.

XIII. Quodsi ergo n fuerit numerus mediocriter magnus, vt sit proxime $\sqrt{(nn-1)} = n - \frac{1}{2n}$, tum ergo celeritas glandis ante ictum fuerit $c = nk$, prodibit post ictum celeritas tabulae $\frac{Mk}{2n(M+N)}$; celeritas vero glandis $= nk - \frac{Nk}{2n(M+N)}$,

vnde

vnde manifestum est, quo maior fuerit numerus n seu quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, celeritatem tabulae post ictum eo fore minorem, glandis autem celeritatem eo minus defecturam esse a celeritate ante ictum, siue iacturam celeritatis quam glans patitur eo fore minorem.

Obseruationes in solutiones praecedentes.

XIV. Problemata haec referenda sunt ad doctrinam de collisione corporum, quae non solum in Mathesi, sed etiam in Philosophia tractari est solita. Totum discrimen in hoc tantum consistit, quod hic corpus impingens, in alterum penetret, atque adeo sibi transitum aperiat, dum in vulgari doctrina eiusmodi tantum corpora considerantur, quae in conflictu sibi vel nullam impressionem, vel saltem quam minimam inducunt.

XV. Nostram igitur solutionem ad notiones vulgares reuocaturi, nominemus siue durante conflictu, siue eo iam finito celeritatem glandis $= v$, et celeritatem tabulae $= u$, et quum sit $v = \frac{dx + dy}{dt}$ et $u = \frac{dy}{dt}$, ambae aequationes pro secundo problemate inuentae, quae scilicet facta integratione prodierunt, ita se habebunt:

$$(v - u)^2 = cc - 4g \frac{(M + N)}{MN} \int R dx \text{ et } Mv + Nu = Mc,$$

quarum posterior inuoluit eam notionem, quae vulgo quantitas motus vocari solet, et indicat quantitatem motus, siue pro-

productum ex massa vtriusque corporis in suam celeritatem perpetuo eandem conseruari, quia enim ante conflictum tabula quieuit, tota quantitas motus erat Mc, durante autem conflictu vel finito, quantitas motus est $Mv + Nu$. Ista quantitatis motus conseruatio inuoluit aequabilem progressum communis centri grauitatis.

XVI. Vt vero etiam priorem aequationem ad notiones receptas perducamus, eam per MN multiplicemus, vt habeamus:

$$MN(v-u)^2 = MNv^2 - 2MN\,vu + MN\,uu$$
$$= MN\,cc - 4g(M+N)\int Rdx,$$

ad hanc addamus quadratum posterioris aequationis, quod est:

$$MMv^2 + 2\,MN\,vu + NN\,uu = MM\,cc,$$

prodibitque aggregatum:

$$M(M+N)v^2 + N(M+N)\,uu$$
$$= (M+N)\,cc - 4g(M+N)\int Rdx,$$

quae per $M+N$ diuisa praebet hanc aequationem:

$$Mv^2 + Nuu = Mcc - 4g\int Rdx,$$

quae manifesto continet eas notiones, quae vulgo virium viuarum nomine efferri solent. Est enim Mcc tota vis viua ante conflictum, at Mvv vis viua glandis durante vel finito conflictu, atque Nuu vis viua tabulae.

XVII. Hinc ergo perspicuum est neque durante conflictu neque finito, vim viuam totam eandem manere, sed po-

potius diminui et quidem quantitate $4g\int Rdx$, id quod vulgari principio conseruationis virium viuarum aduersari videtur, verum probe notandum est conseruationem virium viuarum, tum tantum locum habere, quando de viribus nihili perit. Quum autem nostro casu, tabula perforetur, atque ad foramen efficiendum non exigua virium quantitas impendi debeat, mirum non est, quo summa virium viuarum hic decrementum patiatur, quin etiam ex ipsa nostra analysi manifestum est, formulam integralem $\int Rdx$, summam virium in foramen impensarum exprimere.

XVIII. Hic non inutile erit ostendere quomodo immediate ex nostris aequationibus differentialibus secundi gradus, ad vires viuas calculum perducere potuissemus. Aequationum enim §. 8 inuentarum, prior ducatur in dy, altera vero in $dx+dy$, eaeque inuicem additae dabunt istam aequationem.

$$\frac{N\,dy.\,ddy}{2g\,dt^2} + \frac{M(dx+dy)(ddx+ddy)}{2g\,dt^2} = -Rdx,$$

quae integrata producit:

$$\frac{N\,dy^2}{4g\,dt^2} + \frac{M(dx+dy)^2}{4g\,dt^2} = \frac{Mcc}{4g} - \int R\,dx,$$

sicque introductis litteris v et u, statim assecuti sumus hanc aequationem:

$$Nuu + Mvv = Mcc - 4g\int Rdx.$$

XIX. Ex principiis igitur vulgaribus, quae passim in doctrina de collisione corporum exposita reperiuntur solutiotionem problematis nostri deducere potuissemus, dum modo perpendissemus in penetrationem glandis intra tabulam certas vires impendi, easque iunctim sumtas formula $4g\int R\,dx$ comprehendi posse. Tum enim quia tota vis viua ante conflictum erat $= Mcc$, durante autem conflictu, cum penetratio iam facta est ad profunditatem $= x$, summa virium viuarum sit $Mvv + Nuu$, necesse est, ut fiat:

$$Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx,$$

alterum vero principium quantitatis motus siue aequabilis progressus communis centri grauitatis statim suppeditat hanc aequationem $Mv + Nu = Mc$, quae cum illa coniuncta completam problematis nostri solutionem continet.

XX. Hac occasione non abs re erit paucis exponere, quid de notissimis illis notionibus, circa quantitatem motus et vires viuas, quibus Philosophi totam motus theoriam superstruere sunt conati, sit iudicandum et quatenus eae cum veris et vniuersalibus Mechanicae principiis conciliari possint. Ac primo quidem de veris Mechanicae principiis tenendum est, ea ex vnico principio proficisci, quo ratio inter accelerationes et vires sollicitantes continetur et ita latissime patet, vt etiam ad fluida corpora extendatur. At vero hoc principium ita est comparatum, vt semper ad formulas differentiales secundi gradus deducat, de quibus deinceps videndum est, num integrationem admittant?

XXI. Dantur autem infiniti casus, quibus huiusmodi integratio locum habet, hocque modo ad formulas differentiales primi gradus peruenitur, quas per celeritates explicare licet, quemadmodum nostro casu $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ celeritates praebuerunt, atque hae ipsae formulae iam integratae, eas notiones inuoluunt, quae vulgo sub quantitatis motus, vel vis viuae nomine innotuerunt, de quo quidem iam dudum obseruatum est, nomen vis viuae incongrue adhiberi, quum productum ex massa cuiuspiam corporis per quadratum celeritatis, neutiquam ad notionem cuiuspiam vis reduci queat.

XXII. Talia igitur principia, quae vulgo leges motus continere censentur, non aliter spectari possunt nisi tamquam conclusiones ex vnico illo Mechanicae principio deductae, quae quum semper sub certis tantum conditionibus, quatenus scilicet formulas integrales secundi gradus integrare licuit, locum habeant, tantum pro principiis particularibus sunt habendae, quae etiam principia secundaria vel deriuata appellare liceat, dum verum Mechanicae principium est vnicum et maxime vniuersale.

Exa-

Examen accuratius superiorum solutionum.

XXIII. Quoniam vis illa R, quam in solutionem nostram introduximus, nullo modo restringitur aut limitatur, solutio nostra maxime generalis et ad omnes plane casus extendi posset videri, quomodocunque enim perforationis effectus promotioni glandis aduersetur, semper certam vim concipere licet, quae isti resistentiae foret aequalis, et quam adeo sub littera illa R contentam intelligere liceret. Quatenus autem illa quantitas R, vt functio variabilis x, qua profunditas penetrationis designatur, a nobis consideratur, quocunque demum modo, tam ab ipsa glandinis magnitudine et figura, quam ab ipsius tabulae duritie et crassitudine pendeat, siquidem hae res vt quantitates constantes sunt spectandae: eatenus nostra solutio saepius a veritate recedere potest, quum vtique eiusmodi dentur casus vbi vis resistentiae non tantum vnicam illam variabilem x, sed aliam praeterea veluti celeritatem implicare possit, id quod clarius explicari necesse est.

XXIV. Ad hoc ostendendum concipiamus tabulam tamquam proprietate fluidi praeditam esse, atque tum nullum foret dubium, quin omnis resistentia a sola celeritate penderet eiusque quadrato proportionalis esset, huiusmodi igitur casu quantitas illa R non foret functio ipsius x, sed potius celeritatis, qua glans in tabulam penetrat et quam formula $\frac{dx}{dt}$ expressimus. Facile autem intelligitur, si resistentia illa R etiam formulam $\frac{dx}{dt}$ inuoluat rationem integrationis, qua sumus vsi, neutiquam locum habere posse, propterea quod formula $R dx$ tamquam integrabilis est spectata.

XXV. Quodsi ergo tabula naturae fluidi particeps esset, ita vt resistentia partim ex functione ipsius x, vti assumsimus, partim vero etiam ex quadrato celeritatis constaret; solutio nostra nullo modo subsistere posset, vnde maxime necessarium est, in eos casus inquirere quibus talis indoles sese resistentiae tabulae admiscere posset. Verum satis iam est cognitum omnem fluidi resistentiam inde potissimum oriri, quod partes fluidi de loco suo depelli iisque motus imprimi debeat, id quod sine virium dispendio fieri nequit, supra autem littera R tantum eiusmodi vim reluctantem denotauit, quae motum glandis quidem retardaret, ipsa autem in se nullam motus generationem requireret. Duos igitur hos resistentiae casus sollicite a se inuicem distingui oportet.

XXVI. Id resistentiae genus, quod motui corporis directe se opponit et quasi elastrum corpus repellit, vocemus resistentiam absolutam, quorsum pertinet illa ipsa resistentia, quam supra sumus contemplati. Alterum vero resissistentiae genus, quod veluti in fluidis euenit, a generatione noui motus oritur, toto coelo a priori genere discrepat, etiamsi corporis motum quoque retardet, quo discrimine notato, quoniam tabulae nullum foramen induci potest, nisi eius particulae internae non solum a se inuicem diuellantur, sed etiam de loco suo remoueantur, satis perspicuum est resistentiam vtriusque generis hic reuera locum habere debere.

XXVII. Pro nostro ergo casu, veram resistentiam duabus partibus exprimi oportebit, prior scilicet pars continebit resistentiam absolutam et functioni cuipiam ipsius x proportionalem, quam littera R vt supra designabimus, altera vero pars a motus generatione oriunda et quadrato celeritatis proportionalis, hac formula $A. \frac{dx^2}{dt^2}$ exprimatur, vbi $\frac{dx}{dt}$ significat celeritatem, qua glans in tabula vlterius penetrat, A vero est quantitas quaepiam a densitate materiae et magnitudine foraminis pendens. Hoc modo tota resistentia tali formula repraesentari debet:

$$R + A. \frac{dx^2}{dt^2}.$$

XXVIII. Quod autem posterior pars, quadrato celeritatis sit proportionalis, ita plano ratiocinio colligi poterit. Concipiamus massam quampiam $= M$ quiescentem, quae a vi quadam P in motum sollicitetur, elapso tempore $= t$, massa iam sit promota per spatium $= s$, et quum ex principio

cipio motus sit $\frac{M\,dds}{2g\,dt^2} = P$, habebimus integrando $\frac{M\,ds^2}{4g\,dt^2} = Ps$, vbi $\frac{ds}{dt}$ celeritatem massae M impressam denotat. Hinc ergo discimus, vt datae massae quiescenti M dum per spatium s propellitur, data celeritas $\frac{ds}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiri vim sollicitantem, $P = M.\frac{ds^2}{4gs\,dt^2}$, quam formulam applicemus ad nostrum casum, quo glans intra tabulam vlterius penetrat per spatiolum $= dx$, ita vt nobis sit $s = dx$, interea autem necesse est, vt certa portio materiae, quae hoc spatiolum dx occupabat, de loco suo remoueatur cuius ergo massa proportionalis erit partim ipsi spatiolo dx, partim amplitudini glandis nec non densitati materiae qua tabula constat, ex quo massa remouenda ita exprimi poterit, vt sit $= C.dx$, quam loco M scribi conuenit; denique huic massae celeritas imprimi debet, celeritati glandis aequalis, vt scilicet successioni glandis cedat; sicque haec celeritas erit nostro casu $= \frac{dx}{dt}$, loco $\frac{ds}{dt}$ substituenda. Quocirca vt massae $C\,dx$ dum per spatium $s = dx$ promoueatur, celeritas $= \frac{dx}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiritur vis sollicitans $= \frac{C}{4g}.\frac{dx^2}{dt^2}$, quam ergo recte per formulam $A.\frac{dx^2}{dt^2}$ exprimimus, quam formam adeo ipsum principium motus vniuersale suppeditare est censendum.

Tab. VII. Fig. 8. XXIX. Hic quidem assumimus glandem non solum directe per tabulam penetrare, sed etiam perpendiculariter in in eius particulas illidere, verum si oblique illidat? Sit enim recta AB directio motus et DCE anterior corporis moti superficies, quae percurso spatiolo $Cc = dx$, perueniat in situm dce, sitque angulus obliquitatis $DCB = \alpha$, iam ducatur $C\gamma$ ad ambas rectas obliquas normalis, atque manifestum est, vt corpus motum prosequi possit, non opus esse, vt particulae obuiae per spatiolum Cc promoveantur sed tantum per spatium $C\gamma$, quod se habet ad illud vt $\sin.\alpha$ ad 1, ex quo etiam sufficit iis celeritatem imprimi $= \frac{dx}{dt}\sin.\alpha$, sicque pro hoc casu obliquitatis, resistentia putanda erit $= \frac{G}{4g}\cdot\frac{dx^2}{dt^2}\sin.\alpha^2$, scilicet praeterea quadrato sinus obliquitatis proportionalis; quia autem $\sin.\alpha^2$ est quantitas constans, commode simul in littera illa G comprehendi potest, ita vt non opus sit huic casui peculiarem locum in nostra analysi tribuere.

Emendatio solutionis supra datae.

XXX. Vt igitur solutionem supra datam a vitio modo memorato liberemus, tantum opus est, in ambabus aequationibus ibi inuentis loco R scribere $R + \frac{A.\,dx^2}{dt^2}$, quo pacto aequationes illae erunt:

$$\frac{N\,ddy}{2g\,dt^2} = R + \frac{A.\,dx^2}{dt^2}; \quad \frac{M(ddx + ddy)}{2g\,dt^2} = -R - \frac{A.\,dx^2}{dt^2},$$

quae inuicem additae summam praebebunt, vt ante

$$\frac{M\,ddx + (M+N)\,ddy}{2g\,dt^2} = 0,$$

cuius

cuius integrale ergo etiam erit, vt ante

$$\frac{M\,dx}{dt} + (M+N)\frac{dy}{dt} = Mc.$$

Ad alteram autem aequationem integralem inueniendam, ex priore valorem

$$\frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{R}{N} + \frac{A}{N}\,\frac{dx^2}{dt^2},$$

substituamus in posteriore vt prodeat

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{(M+N)}{MN}R - \frac{(M+N)}{MN}A\frac{dx^2}{dt^2} \quad \text{siue}$$

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -4g\frac{(M+N)}{MN}.R - 4gA\frac{(M+N)}{MN}.\frac{dx^2}{dt^2},$$

ponamus nunc breuitatis gratia

$$\frac{4g\,(M+N)\,A}{MN} = 2\alpha,$$

vt habeamus hanc aequationem:

$$\frac{2\,ddx + 2\alpha\,dx^2}{dt^2} = -4g.\frac{(M+N)}{MN}.R;$$

quam videamus quomodo ad integrabilitatem perducere liceat.

XXXI. Ante omnia igitur obseruamus, formulam $ddx + \alpha dx^2$ integrabilem reddi, si multiplicetur per $e^{\alpha x}$, erit enim $e^{\alpha x}(ddx + \alpha dx^2) = d\,.\,e^{\alpha x}dx$, multiplicemus igitur per $e^{\alpha x}$ et nostra aequatio fiet:

$$\frac{2.d\,.\,e^{\alpha x}dx}{dt^2} = -4g\frac{(M+N)}{MN}e^{\alpha x}R,$$

quae vt prorsus integrabilis reddatur multiplicetur per $e^{\alpha x}dx$ eritque integrale:

$$\frac{e^{2\alpha x}dx^2}{dt^2} = C - 4g\frac{(M+N)}{MN}.\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

vbi

vbi si formula integralis ita capiatur, vt euanescat facto $x = 0$, valor constantis C debet esse $= cc$, sicque obtinebimus hanc aequationem integratam:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha x}\left(cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x}.\,R\,dx\right),$$

quae aequatio iam cum ante inuenta:

$$\frac{M\,dx + (M+N)\,dy}{dt} = Mc,$$

coniuncta, veram solutionem nostri secundi problematis suppeditat.

XXXII. Circa hanc solutionem obseruamus, si exponens $2\alpha x$ euanesceret, ita vt esset $e^{2\alpha x} = 1$, tum hanc solutionem cum praecedente perfecte conuenire, eatenus igitur tantum ab ea discrepabit, quatenus $2\alpha x$ non euanescit, quia autem tum formula $e^{2\alpha x}$ eo magis vnitatem superat, quo maior fuerit exponens $2\alpha x$, intelligimus formulam $e^{2\alpha x}\,R\,dx$ maiorem esse, quam casu ante tractato et quidem eo magis, quo maius fuerit spatium penetrationis x, ex quo intelligitur, quo crassior fuerit tabula, praeterquam quod sola formula $\int R\,dx$ fit maior posito scilicet $x = a$, ob factorem $e^{2\alpha x}$ multo magis insuper augeri, quare quum supra pro casibus quibus glans per totam tabulam perrumpit, posuerimus:

$$4g\frac{(M+N)}{MN}\int R\,dx = kk,$$

si nunc etiam ponamus:

$$4g\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x}.\,R\,dx = kk,$$

ista quantitas k maior erit quam casu praecedente, ideoque nunc maior glandis celeritas requiritur, vt ea per totam tabulae crassitiem penetret, et quo crassior fuerit tabula, vt glans penetret, eius celeritas tanto maior debet esse, quam secundum superiorem solutionem.

XXXIII. Cum autem glans per tabulam penitus perruperit, pro eius celeritate in egressu habebimus $\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha a}(cc - kk)$, quae ergo celeritas ob duplicem causam minor erit quam casu praecedente, pro eadem scilicet celeritate c ante collisionem; primo enim quia k maior est quam ante, quantitas $cc - kk$ iam est multo magis minor quam ante, deinde quia ea insuper multiplicatur in $e^{-2\alpha a}$ vel quod perinde est, diuiditur per $e^{+2\alpha a}$, quae formula maior est vnitate, celeritas $\frac{dx}{dt}$ multo magis diminuitur. Quod denique ad ipsum tabulae motum attinet, quia eius celeritas post perforationem inuenta est $\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}(c - \frac{dx}{dt})$, et quia vt modo vidimus $\frac{dx}{dt}$ multo minus est quam casu praecedente, nunc ipsi tabulae multo maior motus imprimetur, quam casu praecedente, atque ob hanc rationem celeritas glandis post ictum, quae est $\frac{dx+dy}{dt}$ hinc aliquantillum augebitur, interim tamen quia ex formula nostra fit:

$$\frac{dx+dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \cdot c + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{dx}{dt},$$

et

et quoniam $\frac{dx}{dt}$ minus est quam casu praecedente, ipsa quoque glandis celeritas minor euadet.

XXXIV. Reducamus nunc etiam has formulas ad notiones communes et pro casibus quibus glans siue penetrat, siue secus, ponatur celeritas glandis post ictum $= v$, celeritas vero tabulae $= u$, et quia est

$$\frac{dy}{dt} = u \text{ et } \frac{dx}{dt} = v - u,$$

nostrae binae aequationes inuentae fient:

$$Mv + Nu = mc \text{ et}$$

$$(v-u)^2 = e^{-2\alpha x} cc - 4g \frac{(M+N)}{MN} e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} . Rdx,$$

quarum prior vti iam monuimus perinde significat conseruationem quantitatis motus, siue aequabilem progressum communis centri grauitatis. Pro viribus viuis autem eliciendis alteram aequationem per MN multiplicatam euolvamus:

$$MNvv - 2MNvu - MNuu$$
$$= MNcce^{-2\alpha x} - 4g(M+N) e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} . Rdx,$$

ad eamque addamus quadratum prioris vt prodeat:

$$M(M+N)vv + N(M+N)uu$$
$$= Mcc(Me^{-2\alpha x} + N) - 4g(M+N) e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} . Rdx,$$

quae aequatio per $M+N$ diuisa praebet:

$$Mvv + Nuu = \frac{Mcc}{M+N}(Me^{-2\alpha x} + N) - 4ge^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} . Rdx,$$

ex qua intelligitur nunc summam virium viuarum post

 ictum

ictum non amplius tam simpliciter se habere ad vim vivam ante conflictum, quae erat Mcc quam in casu praecedente nunc enim erit:

$$Mvv + Nuu = Mcc - \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) - 4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,.\,Rdx,$$

vnde patet vim viuam in conflictu deperditam aestimandam esse:

$$= \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) + 4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,.\,Rdx,$$

quonam autem ratiocinio haec iactura concludi possit, nullo modo perspicitur.

PHY-