1771

Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum

Leonhard Euler

GENVINA PRINCIPIA DOCTRINAE

DE STATV AEQVILIBRII ET MOTV CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM ELASTICORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Quae adhuc de figura corporum flexibilium et elasticorum a Geometris in medium sunt allata, non latius quam ad fila simplicia sunt extendenda, in quorum figuram, quam a viribus quibuscunque sollicitata accipiunt est inquisitum, siue ea fila sint perfecte flexibilia, siue rigore quodam seu elasticitate inflexioni resistant. Quae enim passim de curuatura lintei et velorem tradita reperiuntur, eatenus tantum admitti possunt, quatenus has figuras ad curuaturam fili simplicis referre licet. Quin etiam omnia, quae in hoc genere sunt explorata, ad curuas tantum in eodem plano formatas sunt restringenda: quare longissime adhuc sumus remoti a Theoria completa, cuius ope non solum superficierum, sed etiam corporum flexibilium figura definiri queat; atque haec Theoria etiamnunc tantopere abscondita videtur, vt ne prima quidem eius principia adhuc sint euoluta, neque etiam hoc loco meum institutum permittit, vt talem laborem succipiam; sed potius tantum

fila

fila simplicia siue perfecte flexibilia siue elastica, vti quidem adhuc a Geometris sunt tractata accuratius sum contemplaturus. Quum enim pleraeque solutiones, quae passim super hoc argumento reperiuntur, vel ex principiis tantum particularibus vel saltem non satis clarit et perspicuis sint deductae, operam dabo vt vera et generalia principia, quibus determinatio figurae huiusmodi corporum innititur ita dilucide exponam, vt non solum status aequilibrii, sed etiam motus huiusmodi corporum inde inuestigari queat.

Problema generale.

Si filum siue perfecte flexile siue elasticum et in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatum ad statum aequilibrii fuerit perductum; pro singulis eius elementis statum siue tensionis, siue inflexionis inuestigare.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 3. I. Referat hic curua AMB huiusmodi filum a viribus quibuscunque sollicitatum, quod in aequilibrio reperiatur atque fixum sit in terminis A et B, atque manifestum est in singulis huius fili punctis M dari certum tensionis siue inflexionis statum, quem inde intelligere licet, quod si hoc filum alicubi in M resecetur, vtraque portio AM et BM extemplo longe aliam figuram sit acceptura, vnde necessario sequitur in hoc puncto M, quamdiu ambae partes adhuc inter se sunt coniunctae, dari quandam vim, quae illi separationi aduersetur, filumque in hoc ipso statu aequilibrii quem supponimus conseruet.

II. Quo istam vim puncto M quasi inhaerentem exploremus fingamus inferiorem partem AM reuera abscindi et quaeramus eas vires, quas in puncto M applicari oportet, vt pars superior BM in eodem plane statu perseueret; haec enim ipsa vis ante recisionem in puncto M extitisse est intelligenda, atque si hanc vim pro singulis fili punctis determinauerimus, nullum est dubium quin verum statum in quo singula elementa nostri fili versantur, perfecte cognoscamus.

III. Ponamus hanc ipsam vim quam quaerimus, iam esse inuentam et puncto M reuera applicatam, ita vt resecta portione AM, altera portio BM etiamnunc in pristino statu persistat, atque primum obseruo eandem hanc vim ad filum BM in statuo suo retinendum requiri etiamsi in puncto quocunque C, filum ope claui vel vnci figeretur, siquidem haec operatio nihil in eius figura mutet, hocque etiam intelligendum est, si filum simul in pluribus punctis hoc modo figeretur; quare hoc etiam nunc locum habebit, si filum adeo in puncto proximo *m* figatur, nihilo enim minus in puncto M eadem adhuc vi opus erit, ad conseruationem status ac si tota portio BM esset libera atque in solo puncto B fixa.

IV.

IV. At si filum BM in puncto m, vt modo diximus ope vnciulae figatur, ita vt nunc solum elementum Mm liberum relinquatur, ei alias vires applicare non licet, nisi quae id vel ex m auellere vel circa m inflectere conarentur, vnde iam manifestum est, si filum propositum fuerit perfecte flexile, in puncto M nullam vim inflectentem admitti posse, quoniam alioquin e vestigio hoc elementum Mm circa m inflecteretur adeoque non in suo statu conseruaretur. Hoc ergo casu perfectae flexibilitatis, vis illa quam quaerimus in puncto M applicanda necessario secundum ipsam directionem Mm, sollicitare debet, sicque eius directio erit ipsa mMT.

V. At si filum nostrum fuerit elasticitate praeditum, tum sola vis secundum tangentem MT non sufficiet elemento Mm in situ suo retinendo, siquidem in puncto m fuerit incuruatum, et quia incuruatio vim quandam inflectentem postulet, vtrum autem hic incuruatio detur ex tangente proxima mt iudicari debet, idque ex angulo elementari Tmt, quippe cui incuruatio censetur proportionalis, quare, si elasticitas filo insit, vis ea quam quaerimus non solum secundum tangentem MT erit directa, sed etiam vis quaedam obliqua adesse debet, cuius momentum incuruationem in puncto m sustinere valeat.

VI. His perpensis intelligimus puncto M praeter vim

tan-

tangentialem secundum MT, aliam insuper applicatam concipi debere; quae sit VP normalis scilicet ad tangentem MT. Hoc enim menti ita repraesentare licet, quasi elemento mM primo virga rigida mT esset annexa, tum vero illi in puncto V insuper vis normalis VP applicata, ita vt vis illa quam quaerimus manifesto reuocetur ad duas vires, quarum altera agat secundum tangentem MT, altera vero ad hanc sit normalis in certo quodam puncto V.

VII. Vocemus igitur vim illam priorem, quae secundum directionem tangentis agit $=$ T, alteram vero huic normalem VP $=$ V, at pro eius applicatione interuallum MV $= v$, vbi notari oportet, si filum omni elasticitate careat, seu perfecte sit flexile, tum vim normalem V euanescere debere, neque propterea interuallum v in calculum ingredi, at si filum fuerit elasticum, tum curuatura in puncto m, quae ex angulo elementari Tmt aestimatur, certum virium momentum postulabit, ex indole elateris definiendum, cui aequale esse debet momentum vis normalis VP, quod est Vv, quoniam elementum Mm est euanescens, sicque ex natura fili propositi, momentum Vv determinatur.

VIII. Constitutis his duabus viribus T et V cum interuallo v pro puncto M, transferamus ea secundum principia differentialium ad punctum proximum m, vocato elemento $Mm = ds$, atque ducta tangente mt, vis secundum hanc tangentem mt erit $= T + dT$, et vis normalis $vp = V + dV$, tum vero interuallum $mv = v + dv$. Hae ergo vires natura sua ita sunt comparatae, vt facta recisione in puncto m portionem reliquam Bm in eodem statu retineant, perinde ac duae priores vires T et V puncto M applicatae eundem effectum producunt, quem ante recisionem portio AM in punctum M exeruerat.

IX. Quum igitur vires T et V respectu puncti M aequivaleant omnibus viribus, quibus portio AM in punctum M agit, similique modo vires proximae $T + dT$ et $V + dV$, cunctis viribus portionis Am aequiualeant; necesse est vt hae posteriores aequiualeant prioribus vna cum viribus elementaribus ipsi elemento Mm applicatis, quoniam hoc aggregatum complectitur vires portioni fili AM et insuper vires ipsi elemento Mm applicatas, quibus simul sumtis, illae vires suis differentialibus auctae aequiualere debent. Quaecunque autem vires elementum Mm afficiant, eas per resolutionem semper ad duas reuocare licet, quarum altera agat secundum directionem Mm, altera vero huic sit normalis, secundum mr et quia hae vires, caeteris paribus ipsi elemento $Mm = ds$ sunt proportionales, ponamus vim tangentialem secundum $Mm = pds$ et vim normalem secundum $mr = qds$, perinde enim est in quonam huius elementi puncto, siue m siue M haec posterior vis applicetur; quibus positis vires illae T et V vna cum his elementaribus

pds

pds et qds, simul sumtae aequiualere debent viribus sequentibus $T + dT$ et $V + dV$; vnde insignes relationes orientur, quas sollicite inuestigari oportet.

X. In hunc finem ante omnia angulus elementaris Tmt in calculum introduci debet, qui si vocetur $= d\Phi$, et radius osculi curuae in puncto $m = r$, constat esse $d\Phi = \frac{ds}{r}$, ita vt hic angulus ex curuatura innotescat. Nunc consideremus primo vim tangentialem secundum mt quae est $= T + dT$, et resoluta secundum directiones mT et MR, dat pro directione $MT = (T + dT)\cos. d\Phi = T + dT$, et secundum directionem $mR = (T + dT)\sin. d\Phi = Td\Phi + dT\, d\Phi$. Altera autem vis $vp = V + dV$ ad directionem mT applicata, seu puncto applicationis in u translato, manente eadem vi $up = V + dV$, dabit $mu = mv = v + dv$, et haec vis secundum directionem uT et ad eam normalem us resoluta, dat vim secundum $uT = (V + dV)\sin. d\Phi = (V + dV)\, d\Phi$, et vim sec. $us = V + dV$, sicque ambae illae vires $T + dT$ et $V + dV$, nunc reductae sunt ad vires:

I°. vim sec. $MT = T + dT$ et II°. sec. $mR = Td\Phi + dTd\Phi$,
III°. sec. $uT = (V + dV)\, d\Phi$ et IV°. sec. $us = V + dV$.

XI. Hae igitur quatuor vires aequiualere debent, his quatuor viribus iunctim sumtis:

I°. sec. $MT = T$, II°. sec. $VP = V$,
III°. vi elementari sec. $mM = pds$ et IV°. sec. $mr = qds$,

 quare

quare hinc primo tangentiales secundum mT agentes, seor-
sim inter se debent aequari, vnde nascitur haec aequatio:

$$T + dT + V d\Phi + dV \,.\, d\Phi = T + pds,$$

ex qua concluditur

$$dT + V\, d\Phi = p\, ds.$$

Secundo vires normales quatenus in eandem partem ten-
dunt, seorsim debent esse aequales, vnde fit

$$-(T + dT)\, d\Phi + dV = V + qds, \text{ hincque}$$

$$dV - T d\Phi = qds.$$

Tertio vero insuper requiritur, vt etiam momenta virium
normalium, inter se conueniant, sumtis igitur momentis re-
spectu puncti m, prodit haec aequatio:

$$-(T + dT)\, d\Phi \,.\, o + (V + dV)(v + dv) = V(v + ds) + qds \,.\, o,$$

vnde concluditur

$$vdV + Vdv = Vds, \text{ siue } d\,.\,Vv = Vds,$$

atque his tribus aequationibus omnia continentur, quae ad
problematis nostri solutionem pertinent.

XII. Hoc iam problemate resoluto, facile omnes casus
quomodocunque vires sollicitantes fuerint comparatae, dum-
modo in idem planum cadant expedite euolui poterunt,
id quod pro duobus casibus principalibus quorum prior
continet fila perfecte flexibilia, alter vero aequabiliter ela-
stica, distincte explicemus.

Ca-

Casus primus pro filis perfecte flexibilibus.

Iam obseruauimus hoc casu vires normales V euanescere debere, quo pacto tertia aequatio inuenta sponte disparet, duae priores vero nobis suppeditant has aequationes:

$$\text{I}^{\circ}.\quad dT = pds \quad \text{et} \quad \text{II}^{\circ}.\quad -Td\Phi = qds,$$

quibus omnes curuae, quas fila perfecte flexibilia induere possunt a quibuscunque viribus in eodem plano fuerint sollicitata, facili calculo inuestigari possunt; id quod deinceps aliquot exemplis illustrabimus. Ceterum hic obseruasse iuuabit, si tensio eliminetur, ob $T = \int pds$ et $T = -\frac{qds}{d\Phi}$ obtineri hanc aequationem $d\Phi = -\frac{qds}{\int pds}$, quae tantum quantitates cognitas seu datas complectitur, quia vires p et q quouis casu praescribuntur.

Casus Secundus pro filis vniformiter elasticis.

XIII. Assumimus hic filum in singulis punctis pari elasticitatis gradu esse praeditum et in statu naturali situm rectum tenere, siue in lineam rectam esse extensum, vbique igitur ipsa elasticitas, proportionalis erit curuaturae directe siue radio osculi reciproce, ita vt momentum ad angulum $d\Phi$ requisitum, proportionale sit formulae $\frac{d\Phi}{ds}$, quare si hoc momentum per $\frac{d\Phi}{ds}$ exprimamus, ita vt A denotet certam quantitatem constantem, ante omnia debebit esse $Vv = A . \frac{d\Phi}{ds}$, cum qua aequatione insuper tres illas in-

inuentas coniungi oportet, quae sunt:

$$\text{I}^{o}.\ dT + Vd\Phi = pds;\ \ \text{II}^{o}.\ dV - Td\Phi = qds;$$
$$\text{III}^{o}.\ dVv = Vds,$$

ex qua vltima aequatione, statim concluditur:

$$A d\ .\ \frac{d\Phi}{ds} = V ds,$$

vnde si elementum ds constans sumatur, elicitur $V = \frac{Add\Phi}{ds^2}$, hincque porro $v = \frac{dsd\Phi}{dd\Phi}$, qui valores in aequatione I. substituti praebent:

$$dT = p\,ds - \frac{Ad\Phi\, dd\Phi}{ds^2},$$

ideoque integrando

$$T = \int p\,ds - \frac{Ad\Phi^2}{2\,ds^2},$$

aequatio vero II. dat

$$V = \frac{Ad^3\Phi}{d\Phi\, ds^2} - \frac{q\,ds}{d\Phi},$$

qui duo valores inuicem aequati, aequationem suppeditant pro curua quaesita, quae erit:

$$\frac{2Ad^3\Phi + Ad\Phi^3}{ds^2} = 2\,d\Phi \int p\,ds + 2\,q\,ds,$$

vbi notasse iauabit angulum elementarem $d\Phi$, implicare differentialia secundi gradus vnde terminus $d^3\Phi$ ad differentialia quarti gradus assurget.

XIV. His duobus praecipuis casibus expeditis, non difficile erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare, vbi filum vel ob diuersam crassitiem, vel diuersam materiem non vbique est aeque elasticum, vel

etiam

etiam vbi in statu suo naturali non situm rectum tenet, sed secundum curuam quamcunque datam sit formatum; quocirca adhuc duos casus sequentes adiungamus.

Casus Tertius pro filis inaequaliter elasticis.

XV. Talis inaequalitas scilicet locum habere potest, si vel ipsum filum non vbique sit aeque crassum etiamsi ex eadem constet materia, vel si adeo ex diuersis materiis fuerit compositum, hoc igitur casu elasticitas in singulis punctis, non simpliciter formulae $\frac{d\Phi}{ds}$ erit proportionalis, sed praeterea a functione quadam pendebit, ad punctum quoduis M pertinente, vnde manifestum est hanc functionem per ipsam portionem fili $AM = s$, determinari debere, sit igitur S ista functio elasticitatem absolutam definiens, atque loco constantis illius A, casu praecedente hic scribi oportebit S, sicque tota solutio sequenti modo se habebit: Ante omnia debet esse $Vv = \frac{Sd\Phi}{ds}$, cui insuper vt ante aniungi conuenit has tres:

I°. $dT + Vd\Phi = pds$; II°. $dV - Td\Phi = qds$; III°. $dVv = Vds$,

ex vltima aequatione statim concluditur:

$$V = \frac{Sdd\Phi + dSd\Phi}{ds^2},$$

posito elemento ds constante, hincque vicissim:

$$V = \frac{Sd\Phi ds}{Sdd\Phi + dS \cdot d\Phi},$$

qui valores in aequatione I^a. substituti dant:

dT

$$dT = p\,ds - \frac{(sd\phi dd\phi + dsd\phi^2)}{ds^2},$$

quam formulam autem nunc integrare non licet, etiamsi integrale $\int pds$ concederetur. Ex II^a. autem colligimus

$$T = \frac{sd^3\phi + 2dsdd\phi + ddsd\phi}{ds^2 \cdot d\phi} - \frac{qds}{d\phi},$$

nunc igitur huius valoris differentiale priori aequari deberet, vt aequatio inter elementa curuae obtineatur, quem laborem autem hic in genere suscipere superfluum foret.

Casus Quartus pro filis elasticis, quae in statu naturali curuaturam habent datam.

Tab. VII. Fig. 4. XVI. Hactenus assumsimus fila elastica, quorum curvaturam inuestigauimus, statu suo naturali in directum esse extensa, nunc autem eiusmodi fila consideremus, quae iam in statu naturali certam quandam curuam exhibeant. Sit igitur figura 2, curua AMB ea figura, quam filum in statu naturali tenet, quae quum sit cognita, vocetur radius osculi in puncto $M = r$ existente arcu $AM = s$, ita vt r spectari possit tamquam functio ipsius s, cuius quippe natura, figurae naturalis indoles determinatur.

XVII. Quodsi nunc hoc filum a viribus quibuscunque ad figuram (fig. 1.) AMB fuerit perductum, atque in puncto m curuatura ad angulum elementarem $Tmt = d\phi$ fuerit redacta, tum eatenus tantum virium momento opus

erit

erit ad hanc curuaturam producendam, quatenus formula $\frac{d\Phi}{ds}$ discrepat ab $\frac{1}{r}$, quam ob rem solutiones praecedentes ad hunc casum accomodabuntur, si modo in formula momentum elasticitatis exprimente loco $\frac{d\Phi}{ds}$, scribatur $\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}$, sumamus autem hic elasticitatem absolutam per totum filum esse aequabilem ita vt habeamus, hanc formulam: $Vv = A\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)$: cum qua tres reliquas aequationes coniungi oportet.

XVIII. Quoniam igitur $Vv = A\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)$ ex tertia aequatione statim colligimus, sumto elemento ds constante:

$$V = A\left(\frac{dd\Phi}{ds^2} + \frac{dr}{r^2 ds}\right) \text{ et } v = \frac{rds(rd\Phi - ds)}{r^2 dd\Phi - ds \cdot dr}.$$

Inuento autem valore V, I^{ma} aequatio praebet: $dT = pds - Vd\Phi$, secunda vero $T = \frac{dV - qds}{d\Phi}$, ex quorum valorum comparatione, determinatio curuae est petenda.

XIX. Quodsi filum in statu naturali secundum arcum circularem fuerit incuruatum, vt sit r quantitas constans, ponatur $r = a$ atque ex praecedentibus formulis nanciscemur:

$$V = A\frac{dd\Phi}{ds^2}; \quad v = \frac{ad\Phi ds - ds^2}{add\Phi},$$

praeterea vero habebimus:

$$dT = pds - \frac{A d\Phi dd\Phi}{ds^2}, \text{ siue } T = \int pds - \frac{A \cdot d\Phi^2}{2ds^2},$$

at vero est ex II^a:

$$T = \frac{dV - qds}{d\Phi} = \frac{Ad^3\Phi - qds^3}{ds^2 \cdot d\Phi},$$

vnde patet aequationem finalem non inuoluere quantitatem a, eamque demum in integrationibus in calculum introduci debere, quatenus ea scilicet in momento Vv occurrit, quippe quod momentum in extremitatibus fili est spectandum.

Applicatio ad casus particulares.

XX. Vires sollicitantes, quaecunque demum fuerint, hactenus ita sumus contemplati, vt singulis fili elementis $Mm = ds$, duas assignauerimus vires, alteram secundum directionem tangentis $mMT = pds$, alteram vero secundum directionem normalem $mn = qds$, quaecunque enim aliae vires elementares in hoc elementum agant, eas semper ad has duas directiones reuocare licet, quandoquidem hic tantum curuas in eodem plano formatas consideramus, ideoque vires extra hoc planum tendentes excludimus.

XXI. Nunc demum curuas in quarum inuestigatione versamur ad certas coordinatas reuocemus, quae sint $AX = x$ et $XM = y$, earumque differentialia $Xx = Mn = dx$ et et $mn = dy$, ita vt sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Nunc vero etiam perspicuum est, si vocemus angulum $XMT = \phi$, tum prodíturum esse angulum elementarem $Tmt = d\phi$ omnino vti supra assumsimus, hinc ergo erit $\sin.\phi = \frac{dx}{ds}$ et $\cos.\phi = \frac{dy}{ds}$, siue vicissim $dx = ds.\sin.\phi$ et $dy = ds.\cos.\phi$.

XXII.

XXII. Quodsi iam omnes vires, quae in elementum Mm agunt reductae sint secundum directiones fixas coordinatarum, quarum vna sollicitans in directione XA sit $= Pds$, altera vero in directione $MX = Qds$ ex his duabus viribus, nascetur vis tangentialis, secundum directionem MT

$$= (P . \sin. \Phi + Q \cos. \Phi) \, ds = p \, ds,$$

ita vt sit $p = P \sin. \Phi + Q \cos. \Phi$, vis autem normalis inde nata secundum mr

$$= (Q \sin. \Phi - P \cos. \Phi) \, ds = q \, ds,$$

ita vt sit $q = Q \sin. \Phi - P \cos. \Phi$, his igitur notatis exempla quaedam illustriora, nostro methodo euoluamus.

Problema I.

Si filum fuerit perfecte flexile, et per totam longitudinem aequaliter crassum, inuenire curuam, quam hoc filum, ex duobus punctis suspensum et a sola grauitate sollicitatum, formabit, siue inuenire curuam catenariam.

Solutio.

XXIII. Statuatur hic axis AX verticalis sursum directus, vt applicata $XM = y$, fiat horizontalis, hic igitur sola vis P in computum venit, existente $Q = 0$, quae quum sit vis grauitatis et filum vbique sit aequabile, si eius portionis cuius longitudo $= b$, pondus vocetur B, tum portionis seu arcus $AM = s$, pondus erit $\frac{sB}{b}$, ideoque pondus elementi Mm erit $\frac{B ds}{b}$, cui aequari debet vis illa Tab. VII. Fig. 5.

 Pds,

Pds, sit autem breuitatis gratia $\frac{B}{b} = \beta$, vt fiat $P = \beta$, atque ob $q = 0$ habebimus $p = \beta \sin. \Phi$, $q = -\beta \cos. \Phi$ ideoque $pds = \beta dx$ et $qds = -\beta dy$. Quoniam hoc problema ad primum casum pertinet, habebimus sequentes formulas:

$$\text{I}^{\circ}.\ dT = \beta dx \quad \text{et} \quad \text{II}^{\circ}.\ + Td\Phi = \beta dy.$$

Ex priore fit $T = \beta x + C$, ideoque hinc pro curua colligimus

$$\beta x d\Phi + C d\Phi = \beta dy.$$

Ad hanc aequationem resolvendam ponamus statim $dy = udx$, fietque $ds = dx \sqrt{(1 + uu)}$, hinc $\sin. \Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+uu)}}$ et $\cos. \Phi = \frac{u}{\sqrt{(1+uu)}}$: vnde elicitur $d\Phi = \frac{-du}{1+uu}$, quo valore substituto aequatio nostra erit $\frac{-du(\beta x + C)}{1 + uu} = \beta u dx$; ideoque $\frac{\beta dx}{\beta x + C} = \frac{-du}{u(1+uu)} = \frac{-du}{u} + \frac{udu}{1+uu}$, vnde integrando consequimur $\text{Log.} (\beta x + C) = L \frac{\sqrt{(1+uu)}}{u} + L.D$, seu $\beta x + C = D \frac{\sqrt{(1+uu)}}{u}$, vnde $u = \frac{D}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}} = \frac{dy}{dx}$, hincque $dy = \frac{D\,dx}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}$, quae est aequatio differentialis inter coordinatas x et y pro catenaria, cuius constructio pendet vti constat a logarithmis, siquidem hinc fit $\frac{\beta y}{D} = L.\frac{\beta x + C + \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}{E}$; praeterea vero notasse iuuabit, hinc fore:

$$ds = \frac{(\beta x + C)\,dx}{\sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}},$$

ita vt sit $Dds = (\beta x + C)\,dy$, inde vero integrando colligimus $\beta s = \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)} + E$ vbi βs denotat ipsum pondus arcus $AM = s$.

XXIV. Inuenta hac aequatione generali consideremus etiam ipsam illam vim T, quae tensionem elementi Mm ex-

exhibet, quae vis ex praecedentibus erit $\beta x + C$, ita vt in eo loco vbi $x = o$, haec tensio fiat $= C$, et quo altius filum ascendit eo fortior euadit eius tensio. Quo nunc constantes propius definiamus, sumamus primo initium abscissarum in ipso puncto A, vbi ipsa curua axem secat, ita vt fiat $x = o$, $y = o$ quin etiam $s = o$. Hinc consequimur:

$$\frac{\beta y}{D} = L. \frac{\beta x + C + \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)}}{C + \sqrt{(CC - DD)}} \text{ et}$$

$$\beta s = \sqrt{((\beta x + C)^2 - DD)} - \sqrt{(CC - DD)}.$$

Si praeterea verticem A ibi constituamus, vbi tangens curuae fit horizontalis, vt sumto $x = o$ sit $\frac{dy}{dx} = \infty$, ideoque $D = C$, seu $dy = \frac{C dx}{\sqrt{(2 C\beta x + \beta\beta xx)}}$, quae si ponamus $C = \beta a$, abit in $dy = \frac{a dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, vnde fit $y = aL\frac{x + a + \sqrt{(2ax + xx)}}{a}$, et arcus $AM = s = \sqrt{(2ax + xx)}$, ita vt sit $dy = \frac{a dx}{s}$, siue $dy : dx :: a : s$, tum vero erit tensio in puncto imo $A = \beta a$, tensio vero in puncto $M = \beta(x + a)$.

XXV. Hinc si funis aequabilis in duobus punctis aeque altis M et N, fuerit fixus et pondere suo curuam MAN induerit, pro eius figura autem dentur primo sagitta seu profunditas $AX = x$, deinde vero etiam dimidia longitudo totius funis $AM = s$, cuius pondus sit βs, hinc omnia, quae huc pertinent poterunt determinari. Primo autem reperitur $a = \frac{ss - xx}{2x}$, vnde statim innotescit distantia horizontalis: Tab. VII. Fig. 6.

XMI

$$XM = XN = y = \frac{ss - xx}{2x} L \frac{s + x}{s - x}.$$

Tertio anguli quo funis in punctis M et N ad horizontem inclinatur tangens, seu tang. $AMX =$ tang. $ANX = \frac{2sx}{ss - xx}$ hincque tang. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{x}{s}$. Denique vero tensio in imo puncto A erit $\beta \frac{(ss - xx)}{2x}$; tensio vero in punctis supremis M et N prodit $\beta \frac{(ss + xx)}{2x}$ vnde patet, quo minor fuerit profunditas $AX = x$ pro eadem funis longitudine, eo maiorem requiri tensionem in punctis M et N ita vt funis prorsus in directum extendi nequeat, nisi a vi infinita, vbi notasse iuuabit si altitudo x fuerit valde exigua respectu arcus s, tum ob

$$L \frac{x + s}{x - s} = \frac{2x}{s} + \frac{2x^3}{3s^3} + \frac{2x^5}{5s^5} \text{ etc. fore}$$

$$MX = y = s - \frac{2xx}{3s} - \frac{2x^4}{3 \cdot 5 \cdot s^3}.$$

Problema II.

Si filum perfecte flexile et aequaliter crassum, vento exponatur, definire curuam, quae ipsi a vi venti inducetur, mentem abstrahendo a grauitate ipsius fili, siue inuestigare curuam velariam.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 7. XXVI. Statuatur axis AX horizontalis, vt directio venti VM ipsi fiat parallela, sitque AM curua quaesita, in cuius elementum Mn ventus ferit sub angulo $VMm = 90° - \Phi$. Ponatur k altitudo celeritati venti debita atque constat

eius

eius vim in datam basin ds aequalem fore ponderi columnae aëreae, cuius basis sit $= ds$, altitudo vero $= k \cos. \Phi^2$, quicquid autem sit quoniam hic de vi absoluta non sumus solliciti, sufficit nosse hanc vim esse proportionalem formulae $ds . \cos. \Phi^2$, quoniam igitur haec vis normalis est in ipsam curuam, inde nulla nascitur tangentialis eritque $p ds = 0$, atque ipsa iam dabit vim illam elementarem normalem, quia autem directionem habet contrariam ponamus $q ds = - \beta ds . \cos. \Phi^2$.

XXVIII. Quare quum hoc problema etiam ad casum primum referatur habemus:

I°. $dT = 0$, ideoque $T = C$, II°. vero $C d\Phi = \beta ds . \cos. \Phi^2$, vnde colligitur haec aequatio $\frac{C d\Phi}{\cos. \Phi^2} = \beta ds$, quae integrata praebet C tang. $\Phi = \beta s + D$, at vero est tang. $\Phi = \frac{dx}{dy}$, ita vt pro velaria habeatur ista aequatio $\frac{C dx}{dy} = \beta s + D$. Vnde iam intelligitur hanc curuam non discrepare a praecedente funicularia, nisi quod hic axis AX sit horizontalis, quum in casu praecedente esset verticalis. Vt autem aequationem inter coordinatas eruamus, primam aequationem $\frac{C d\Phi}{\cos. \Phi^2} = \beta ds$ multiplicemus per sin. Φ, et quia $ds \sin. \Phi = dx$ integratio dabit $\frac{C}{\cos. \Phi} = \beta x + D$, vnde quum sit $\cos. \Phi = \frac{dy}{ds}$, habebimus hanc aequationem $C ds = dy (\beta x + D)$, hincque $dy = \frac{C dx}{\sqrt{((\beta x + D)^2 - CC)}}$; tum vero erit $\beta s = \sqrt{((\beta x + D)^2 - CC)} + E$,

pror-

prorsus vt in solutione praecedente, quocirca si axis AX quasi per medium veli A transeat, vbi tangens curuae est verticalis, sumi debebit C = D, ponatur autem porro $C = D = \beta a$, fietque pro hac curua:

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax+xx)}};\quad y = a\,\mathrm{L}\,\frac{x+a+\sqrt{(2ax+xx)}}{a};$$

ipse arcus $AM = s = \sqrt{(2ax+xx)}$ et tensio in puncto $M = \beta a$, quae in omnibus punctis est eadem. Ceterum quae supra de catenaria obseruauimus hic etiam locum habebunt.

Problema III.

Si filum aequabile, vbique fuerit aequaliter elasticum atque adeo grauitatis expers, idque duabus viribus quibuscunque eius terminis A et B vtcunque applicatis incurvetur, naturam huius curuae AMB inuestigare, siue naturam curuae elasticae definire.

Solutio.

Tab. VII. Fig. 3. XXVIII. Quia praeter vires ipsis terminis A et B applicatas, nullas vires quae seorsim in singula elementa agunt admittimus, vires illae elementares pds et qds euanescunt, ideoque ex casu secundo, quo hoc problema est referendum, sequentem solutionem elicimus, ante omnia $Vv = \frac{A\,d\Phi}{ds}$ tum vero praeterea:

I°. $dT + Vd\Phi = 0$; II°. $dV - Td\Phi = 0$; III°. $d.Vv = Vds$.

Ex

Ex tertia statim colligimus sumto elemento ds constante, $V = \frac{A dd\Phi}{d s^2}$, qui valor in I^{ma} et II^{da} substitutus praebet:

$$dT + \frac{A d\Phi dd\Phi}{d s^2} = 0; \quad T = \frac{A d^3 \Phi}{d\Phi . ds^2},$$

prioris integrale manifesto est $T = B - \frac{A d\Phi^2}{2 d s^2}$, sicque eliminando T assequimur $\frac{2A d^3 \Phi}{d\Phi} + A d\Phi^2 = 2B ds^2$, quae per $\frac{4 d\Phi dd\Phi}{A}$ multiplicata praebet: $8 dd\Phi d^3\Phi + 4 d\Phi^3 . dd\Phi = \frac{8B}{A} . ds^2 . d\Phi dd\Phi$, cuius integrale est $4 dd\Phi^2 + d\Phi^4 = \frac{4B}{A} . ds^2 . d\Phi^2 + C ds^4$ vnde elicitur

$$dd\Phi = \sqrt{} \left(\frac{C}{4} d s^4 + \frac{B}{A} d s^2 d\Phi^2 - \frac{1}{4} d\Phi^4\right).$$

Statuatur nunc $d\Phi = u ds$, vt obtineamus hanc aequationem:

$$du = ds \sqrt{} \left(\frac{C}{4} + \frac{B}{A} . uu - \frac{1}{4} u^4\right) \text{ siue } ds = \frac{du}{\sqrt{} (C + \frac{4B}{A} uu - u^4)}.$$

Verum hoc modo calculus fit nimis molestus, vnde ab initio eum multo commodius instituamus.

XXIX. Quoniam $p = 0$ et $q = 0$, ambae aequationes I. et II. quae sunt $dT + V d\Phi = 0$; $dV - T d\Phi = 0$, tres tantum continent variabiles T, V et $d\Phi$ ex quibus eliminando $d\Phi$ elicimus $T dT + V dV = 0$ vnde fit $TT + VV = CC$ et $T = \sqrt{} (CC - VV)$, qui in secunda substitutus praebet $dV = d\Phi \sqrt{} (CC - VV)$, siue $d\Phi = \frac{dV}{\sqrt{} (CC - VV)}$, vnde denuo integrando, Ang. cui. sin. $\frac{V}{C} = \Phi + D$ hincque $V = C \sin. (\Phi + D)$ et $T = C \cos. (\Phi + D)$. Quod hic ad angulum Φ attinet cuius differentiale tantum $d\Phi$ in nostras formulas principales ingreditur eius determinatio pen-

 det

det a certa quadam directione fixa, quae quum penitus arbitrio nostro relinquatur ea ita capiatur vt fiat $D = 0$, sicque iam adepti sumus has duas formulas satis simplices $V = C \sin.\phi$ et $T = C \cos.\phi$, his autem litteris binae illae vires exprimuntur, quibus status cuiusque elementi Mm definitur, quae ergo vbique ita sunt comparatae vt sit $TT + VV = CC$ siue vis illis aequiualens constans.

XXX. His inuentis iam supra vidimus ex tertia aequatione fieri $V = \frac{A\,dd\phi}{ds^2} = C \sin.\phi$, sumto ds constante, quae per $2d\phi$ multiplicata et integrata praebet: $\frac{Ad\phi^2}{ds^2} = B - 2C.\cos.\phi$, hincque $\frac{d\phi}{ds} = \sqrt{\left(\frac{B - 2C\cos.\phi}{A}\right)}$, siue $ds = \frac{d\phi\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C.\cos.\phi)}}$, quae aequatio duas tantum variabiles continet ϕ et s, vbi s denotat arcum curuae AM a puncto quodam fixo computatum; angulus ϕ vero exprimit amplitudinem huius arcus. Deinde possumus etiam radium osculi curuae definire, qui si ponatur $= r$, ob $d\phi = \frac{ds}{r}$, aequatio inuenta ostendit fore $r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C\cos\phi)}}$, vnde patet sumto $\phi = 0$, fieri radium osculi $r = \sqrt{\frac{A}{B - 2C}}$.

XXXI. Hinc etiam facile possumus progredi ad coordinatas orthogonales, si enim axem AX ita ducamus vt fiat angulus $AMX = \phi$, tum quia $dx = ds \sin.\phi$, et $dy = ds \cos.\phi$ sequentem habebimus aequationem:

$$dx = \frac{d\phi\,\sin.\phi.\sqrt{A}}{\sqrt{(B - 2C.\cos.\phi)}},$$

quae

quae aequatio integrata praebet:

$$x = \frac{\sqrt{(A(B - 2C\cos\phi))}}{C} + \text{Const.},$$

quare si punctum A ibi assumimus vbi axis in curuam erit normalis, tum vtique arcus AM amplitudo erit aequalis ϕ, at quia nunc amplitudine ϕ euanescente abscissa x sit $= 0$, constante postrema debito determinata habebitur:

$$x = \frac{\sqrt{(A(B - 2C\cos.\phi))}}{C} - \frac{\sqrt{(A(B - 2C))}}{C},$$

vnde colligimus

$$\cos.\phi = 1 - x\frac{\sqrt{(A(B - 2C))}}{A} - \frac{C}{2A}.xx,$$

quo haec aequatio concinnior reddatur statuamus

$$\cos.\phi = 1 - \frac{x}{a} - \frac{nxx}{aa}$$

fietque

$$B = \frac{(4n+1)A}{aa} \text{ et } C = \frac{2nA}{aa},$$

sicque inuento angulo ϕ per abscissam x, ambae vires statim prodeunt

$$V = \frac{2nA}{aa}.\sin.\phi \text{ et } T = \frac{2nA}{aa}.\cos.\phi.$$

XXXII. Deinde quia supra habebamus:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\sqrt{(B - 2C\cos.\phi)}}{\sqrt{A}} \text{ erit } \frac{d\phi}{ds} = \frac{\sqrt{(4n + 1 - 4n\cos.\phi)}}{a},$$

hincque

$$Vv = \frac{A\sqrt{(4n + 1 - 4n\cos.\phi)}}{a},$$

ideoque

$$v = \frac{a\sqrt{(4n + 1 - 4n\cos.\phi)}}{2n\sin.\phi},$$

vnde vires quibus singula elementa afficiuntur nunc perfecte innotescunt. Denique, quoniam

 cos.

$$\cos.\,\Phi = \frac{dy}{ds} \text{ et } \sin.\,\Phi = \frac{dx}{ds} \text{ erit } dy = dx \cot.\,\Phi,$$

vbi si loco cos. Φ valor substituatur orietur:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aa - ax - nxx}{\sqrt{(2a^3x + (2n-1)aaxx - 2nax^3 - n^2x^4)}},$$

sicque inter coordinatas habebitur haec aequatio differentialis:

$$dy = \frac{(aa - ax - nxx)\,dx}{\sqrt{(2a^3x + (2n-1)aaxx - 2nax^3 - n^2x^4)}},$$

XXXIII. Quo autem clarius intelligatur, quam variae curuarum species hic locum inuenire possint, consideretur illa aequatio inter amplitudinem Φ et radium osculi r inuenta:

$$r = \frac{a}{\sqrt{(4n + 1 - 4n\cos.\,\Phi)}},$$

vel quod eodem redit valor supra pro abscissa inuentus:

$$x = \frac{a\sqrt{(4n + 1 - 4n\cos\,\Phi)}}{2n} - \frac{a}{2n}, \text{ ita vt sit } x = \frac{aa}{2nr} - \frac{a}{2n},$$

quam eximiam proprietatem omnibus elasticis communem probe notari conuenit. Totum negotium ad formulam hanc irrationalem reducitur:

$$\sqrt{(4n + 1 - 4n\cos.\,\Phi)} = \sqrt{(1 + 8n\sin.\tfrac{1}{2}\Phi^2)},$$

vbi imprimis spectandum est, an coëfficiens $8n$, sit positiuus an negatiuus, vel maior vel minor vnitate. Primum enim perspicuum est, si $8n$ fuerit numerus positiuus puta $= m$, tum formulam $\sqrt{(1 + m\sin.\tfrac{1}{2}\Phi^2)}$ semper esse realem, ideoque angulum Φ per omnes valores crescere posse; sin autem fiat $8n = 0$, elasticam fore circulum ob $r = a$. Si autem $8n$ fuerit numerus negatiuus, duos casus considerari oportet: alterum, quo vnitate fit minus, alterum, quo maius, priori casu quo $8n = -m$ et $m < 1$, formula

$\sqrt{}$

$\sqrt{(1 - m \sin \tfrac{1}{2}\phi^2)}$, etiam nunc per omnes valores ipsius ϕ variari potest, id quod vsque ad valorem $m = 1$ valet, quo casu erit $r = a \cos. \tfrac{1}{2}\phi$. Verum si denique fuerit $m > 1$, haec formula realis esse nequit, nisi $\sin. \tfrac{1}{2}\phi^2$ fuerit $< \frac{1}{m}$, vnde amplitudo non vltra certum gradum augeri poterit, atque hinc sequentur omnes istae species elasticarum, quas euoluimus in Tractatu de Problemate Isoperimetrico.

XXXIV. Plura exempla circa aequilibrium huiusmodi filorum flexibilium et elasticorum, hic subiungere superfluum foret, quoniam hoc argumentum iam passim abunde tractatum reperitur. Hic enim id tantum nobis erat propositum, vt methodum facilem simulque aequabilem, quae ad omnia genera huiusmodi corporum extendatur, traderemus, hocque respectu nullum est dubium, quin haec methodus aliis quibus Geometrae sunt vsi, longe sit anteferanda, id quod imprimis ex altera parte huius dissertationis patebit, vbi ostendemus hanc methodum pari successu adeo ad motus huiusmodi corporum determinandos adhiberi posse.

Problema Generale Alterum.

Si filum siue perfecte flexile siue elasticum atque in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatum vtcunque moueatur, principia exponere ex quibus hunc motum de-

definire liceat, vbi quidem assumimus totum motum semper in eodem plano absolui, in quo ipsa fili figura versatur.

Solutio.

XXXV. Hic primo motum fili in genere considerari conuenit, ante quam necesse sit vires elementares quibus in singulis punctis sollicitatur, in computum introducere, id quod cum insigni calculi commodo fieri licet, ne sta-
Tab. VII. Fig. 3. tim ab initio multitudo quantitatum nimis augeatur. Constituta certa temporis epocha qua motum inchoasse assumimus, teneat filum elapso tempore $= t$ (quod in minutis secundis exprimi sumimus) situm in figura repraesentatum AMB, quem ad certum axem AD aliumue ipsi parallelum referimus, quoniam etiam fili punctum A, motu quocunque ferri potest, ita vt etiam punctum fili A, non amplius pro initio abscissarum haberi debet. Vocetur fili portio quaecunque $AM = s$ (vt ante, hoc tantum discrimine, quod A non amplius sit punctum fixum) et ducta tangente MT, vocetur etiamnunc vt ante angulus $XMT = \phi$ atque nunc manifestum est hunc angulum ϕ non amplius tamquam functionem arcus s spectari posse, quoniam eidem arcui $AM = s$, diuersis temporibus, diuersi anguli ϕ conueniunt, sed potius angulus ϕ pro functione duarum variabilium s et t haberi debebit, quo ipso haec inuestigatio ad eam quasi nouam Analyseos partem in qua de

de

de functionibus duarum variabilium tractatur erit referenda, atque hinc nunc facile intelligitur, quid per formulas $(\frac{d\Phi}{ds})$ et $(\frac{d\Phi}{dt})$ indicetur.

XXXVI. Interim tamen ex angulo Φ elementa coordinatarum dx et dy perinde vt ante exprimentur, ita vt sit $dx = ds \sin.\Phi$ et $dy = ds \cos.\Phi$, vnde abscissa x a certo puncto fixo computata erit $\int ds \sin.\Phi$ et applicata $y = \int ds \cos.\Phi$, in quibus integralibus, sola variabilitas arcus s spectatur. Hoc autem non obstante, ipsae hae coordinatae x et y erunt functiones ambarum variabilium s et t, de quibus nouimus esse $(\frac{dx}{ds}) = \sin.\Phi$ et $(\frac{dy}{ds}) = \cos.\Phi$. Nunc autem inuestigemus motum elementi $Mm = ds$, cuius massam ponamus $= \Sigma ds$, ita vt Σ sit certa functio solius variabilis s, quam secundum binas directiones fixas coordinatarum resoluamus, atque consequemur eius celeritatem in directione $AX = (\frac{dx}{dt})$ et in directione $XM = (\frac{dy}{dt})$, quae denuo differentiatae pro solo t variabili dabunt accelerationes in directione $AX = (\frac{ddx}{dt^2})$ et in directione $XM = (\frac{ddy}{dt^2})$, quae ductae in massam elementi mouendi Σds et diuisae per $2g$ (denotante g altitudinem lapsus grauis, tempore vnius minuti secundi) dabunt vires requisitas, quibus hoc elementum sollicitari deberet, vt motum suppositum prosequeretur. Quocirca vt motus fili ita sit comparatus, quemadmodum positiones nostrae declarant, necesse est, vt

sin-

singula eius elementa $Mm = ds$ praesenti tempore a binis viribus sollicitentur, quae sunt

sec. directionem $AX = \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ et sec. $XM = \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$.

XXXVII. Vires istae vocari solent, vires ad motum producendum immediate requisitae, quas probe distingui oportet ab iis viribus, quibus singula elementa actu sollicitantur; at quia filum tantum ab his posterioribus reuera sollicitatur, necesse est vt hae eundem effectum producant, quem illis viribus adscripsimus, siue quod eodem redit necesse est, vt omnes vires requisitae simul sumtae aequiualeant viribus actualibus simul sumtis. Ex quo sequitur si vires illae requisitae contrario modo applicarentur, eas cum actualibus in aequilibrio consistere debere, siue tum ipsum filum, eo saltem momento in aequilibrio fore constitutum; hoc igitur modo, quaestionem de motu fili ad inuestigationem aequilibrii feliciter perduximus.

XXXVIII. Vt igitur in hoc aequilibrium, ex quo ipse motus fili innotescit, inquiramus; filo nostro praeter vires illas pds et qds, quibus immediate sollicitatur, insuper adiungamus *primo* vim in directione $XA = \frac{\Sigma ds}{2g} \cdot \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, quandoquidem nunc certum est, filum tum futurum esse in aequilibrio; hunc in finem has vires posteriores etiam ad directionem tangentis MT et normalis mr reducamus, atque hinc prodit vis;

sec.

$$\text{sec. MT} = \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\sin.\Phi + \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\cos.\Phi,$$

at vero in directione mr:

$$\frac{\Sigma ds}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\sin.\Phi - \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\cos.\Phi,$$

quo facto filum nunc ita considerari debebit, quasi eius elementum Mm sollicitaretur a duabus viribus, sequentibus:

$$\text{I}^{\circ}.\ \text{sec. MT} = pds + \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\sin.\Phi + \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\cos.\Phi\right),$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \text{sec. } mr = qds + \frac{\Sigma ds}{2g}\left(\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\sin.\Phi - \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\cos.\Phi\right),$$

quibus inuentis nunc tantum opus est, vt istae vires loco pds et qds in formulis nostris supra inuentis substituantur, atque tum illae aequationes nostri problematis solutionem suppeditabunt.

XXXIX. Quodsi vires illae pds et qds non immediate dentur, sed vt supra ostendimus ex viribus elementaribus secundum certas directiones agentibus deduci debeant, calculus sequenti modo se habebit: ponamus igitur fili elementum Mm actu sollicitari in directione XA vi Pds et in directione MX vi $=$ Qds, atque nunc vires, quae mente saltem filo applicari debebunt, erunt:

$$\text{I}^{\circ}.\ \text{vis sec.MT} = ds\left(P + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\sin.\Phi + ds\left(Q + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\cos.\Phi,$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \text{vis sec.} mr = ds\left(Q + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\sin.\Phi - ds\left(P + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\cos.\Phi,$$

quas vt ante loco formularum pds et qds substitui oportet.

XL. Faciamus igitur hanc substitutionem, atque pro motu fili definiendo, habebimus sequentes quatuor aequationes:

$$\text{I}^{\circ}.\ \left(\frac{dT}{ds}\right) + V\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \left(P + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\sin\Phi + \left(Q + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\cos.\Phi,$$

$$\text{II}^{\circ}.\ \left(\frac{dV}{ds}\right) - T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \left(Q + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\right)\sin.\Phi - \left(P + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\right)\cos.\Phi,$$

$$\text{III}^{\circ}.\ (Vv = S\left(\frac{d\Phi}{dt}\right);\quad \text{IV}^{\circ}.\ \left(\frac{d.Vv}{ds}\right) = V.$$

Quoniam enim supra omnes istae quantitates V, T et Φ functiones erant solius variabilis s, hic autem vt functiones duarum variabilium s et t spectari debent, signandi modum per clausulas, more consueto introduci oportuit, tum vero notendum est, hic litteram S exprimere elasticitatem absolutam fili in puncto M, ideoque functionem esse ipsius S tantum. Quo autem clarius appareat, quomodo hae quatuor aequationes, solutionem problematis nostri suppeditare queant, primo quidem perspicuum est determinationem incipi debere, a viribus T et V cum distantia v, ex quibus etiam durante motu ad quoduis tempus, tensio et status cuiusque elementi cognoscitur, his autem tribus quantitatibus inuentis et substitutis exorietur vna aequatio has quidem quinque quantitates inuoluens, t, s, x, y et Φ, quae autem ob has duas relationes cognitas:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right) = \sin.\Phi \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{ds}\right) = \cos.\Phi,$$

ad tres tantum reducuntur, quae si fuerint s et t cum angulo Φ, haec aequatio natura sua declarat valorem anguli Φ, per binas variabiles s et t exprimendum, vnde pro quouis fili puncto M ad quoduis tempus t, angulus conueniens Φ determinatur, vnde deinceps ipsae coordinatae con-

constabunt, atque adeo figura totius fili ad quoduis tempus, hincque etiam ipse motus eius patefiet.

XLI. Ex tertia et quarta aequatione eliminando distantiam v statim colligimus:

$$V = S\left(\frac{dd\Phi}{ds^2}\right) + \frac{dS}{ds}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right),$$

ita vt hoc valore substituto, iam tantum duas aequationes simus habituri ex quibus si vis T elidatur statim obtinetur illa aequatio finalis principalis, cuius rationem modo explicauimus.

XLII. Quoniam praeter oscillationes infinite paruas vix quicquam adhuc circa huiusmodi motus est inuestigatum, neque etiam nunc Methodus patet tales formulas non parum intricatas tractandi, hinc saltem eas deducamus formulas ex quibus Geometrae motum cordatum vibrantium determinauerunt. Primo igitur filum perfecte flexile statuatur, vnde statim fit $V = 0$, deinde etiam vires elementares P et Q euanescant, postmodum quia tantum vibrationes infinite paruae sunt considerandae, statuamus applicatam y veluti infinite paruam prae s et x, vnde etiam erit $\frac{dy}{ds} = 0$, et $\frac{dx}{ds} = 1$, tum vero erit Φ quasi rectus. Quibus notatis nostrae duae aequationes erunt:

$$\text{I}^\circ.\ \left(\frac{dT}{ds}\right) = \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\sin.\Phi + \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\cos.\Phi,$$

$$\text{II}^\circ.\ + T\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)\cos.\Phi - \frac{\Sigma}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)\sin.\Phi.$$

Ratione prioris obseruandum est, quia abscissa x ab ipso arcu s non discrepare censetur, fore $(\frac{dx}{dt}) = 0$, atque $(\frac{ddx}{dt^2}) = 0$, deinde quia $\cos.\Phi = 0$, manifestum est fore $\frac{dT}{ds} = 0$, hincque vim T constantem siquidem etiam durante motu, tensio fili eadem conseruari supponitur. Pro altera aequatione, quia $\cos.\Phi = (\frac{dy}{ds})$, hincque differentiando $-(\frac{d\Phi}{ds})\sin.\Phi = (\frac{ddy}{ds^2})$, siue ob $\sin.\Phi = 1$, $(\frac{d\Phi}{ds}) = -(\frac{ddy}{ds^2})$; haec aequatio ob $\cos.\Phi = 0$, praebet statim $T(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, quae quia T est quantitas constans et Σ crassitiem fili in puncto M exprimit, aequatio nostra talem induet formam $A(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$, vbi A denotat tensionem fili, atque haec est eadem aequatio, qua Auctores sunt vsi in motu cordarum determinando.

XLIII. Deinde quae de inflexione laminarum elasticarum sunt tradita, etiam hinc peti possunt, quia enim vt ante vibrationes infinite paruae considerantur, erit iterum $\sin.\Phi = 1$, $\cos.\Phi = 0$, $(\frac{dx}{dt}) = 0$ et $(\frac{d\Phi}{ds}) = -(\frac{ddy}{ds^2})$; praeterea etiam vires elementares P et Q hinc excluduntur, vnde primo vim V ita habebimus expressam vt sit:

$$V = -\frac{dS}{ds}(\frac{ddy}{ds^2}) - S(\frac{d^3y}{ds^3});$$

duae reliquae vero aequationes induent has formas:

$$(\frac{dT}{ds}) - V(\frac{ddy}{ds^2}) = 0; \quad (\frac{dV}{ds}) + T(\frac{ddy}{ds^2}) = \frac{\Sigma}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}),$$

quae

quae si lamina elastica fuerit aequabilis, ideoque $S = A$, dabunt statim $V = - A \left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)$, hincque $\left(\frac{dT}{ds}\right) = - A \left(\frac{ddy}{ds^2}\right) \left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)$, quae per ds multiplicata et integrata dat $T = B - \frac{A}{2} \left(\frac{ddy}{ds^2}\right)^2$; vnde eliminando T ad aequationem peruenitur differentialem quarti gradus, quemadmodum etiam inuenerunt ii, qui hoc argumentum fusius tractauerunt.

DE