1771

De curva rectificabili in superficie sphaerica

Leonhard Euler

DE CVRVA RECTIFICABILI IN SVPERFICIE SPHAERICA.

Auctore

L. EVLERO.

I. Occasione magni illius problematis Florentini, quo praeterito iam seculo postulabantur in superficie sphaerica portiones quadrabiles, iam tum problema fuit agitatum, vt in superficie sphaerica lineae ducerentur rectificabiles. Quamuis autem Geometrae plurimum studii ad hoc problema soluendum contulerint; tamen plus vna huiusmodi linea inuenire non potuerunt. Quae circumstantia nunc imprimis maxime videtur memorabilis, quandoquidem haec quaestio ad analysin infinitorum indeterminatam est referenda, vbi plerumque infinita solutionum multitudo locum habere solet; quamobrem haec vnica solutio quam quidem adhuc elicere licuit maxime digna videtur, vt eius indolem accuratius inuestigemus; vtrum fortasse inde plures solutiones deduci queant, an vero ratio quaepiam perspiciatur ob quam eam solutionem vnice locum habere intelligere possimus? In hoc quidem Analyseos genere quod etiamnunc parum est excultum, plurima obseruantur phaenomena, quae nullo modo ad certas rationes reuocare licet, cuiusmodi sunt haec duo Theoremata, iam pridem a me obseruata, quae tamen neutiquam omni rigore demonstrare valeo, alterum: *praeter circulum nulla datur linea algebraica cuius portioni cuicunque, arcus circuli aequalis assignari posset*, alterum: *nulla plane datur curua algebraica cuius arcus quicunque per logarithmum exprimi possit.* Hic scilicet non de eiusmodi curuis loquor quarum rectificatio vel ab arcubus circularibus vel a logarithmis pendet, cuiusmodi sine dubio infinita datur multitudo, sed de talibus quarum arcus quicunque praecise aequalis sit vel arcui cuidam circulari vel cuipiam logarithmo, nulla scilicet vel addita vel subtracta quantitate geometrica.

II. Lineae igitur in superficie sphaerica quaesitae, sit punctum quodcunque Z, determinandum ternis coordinatis $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ vbi si punctum C in centro sphaerae capiatur, radiusque ponatur $= 1$, habebitur haec aequatio: $xx + yy + zz = 1$, deinde quia elementum huius lineae Zz hac formula exprimitur:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

necesse est vt eius integrale euadat quantitas algebraica.

III. Quum ex priore aequatione sit:

$$z = \sqrt{(1 - xx - yy)} \text{ erit } dz = -\frac{xdx - ydy}{\sqrt{(1 - xx - yy)}}$$

ex

ex quo elementum curuae colligitur

$$Zz = \sqrt{\left(dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx+ydy)^2}{1-xx-yy}\right)} = \sqrt{\frac{(dx^2(1-yy)+2xydxdy+dy^2(1-xx))}{1-xx-yy}}$$

siue etiam

$$Zz = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2-(ydx-xdy)^2}{1-xx-yy}},$$

tota igitur quaestio iam huc redit, cuiusmodi relatio inter binas variabiles x et y intercedere, vel qualis functio altera alterius esse debeat; vt haec formula fiat integrabilis?

IV. Ante omnia hanc expressionem ad simpliciorem formam reduci oportet; quem in finem statuamus:

$$y = u\sqrt{(1-xx)}$$

vt sit

$$1 - xx - yy = (1-xx)(1-uu),$$

tum ob

$$dy = \frac{du(1-xx)-xudx}{\sqrt{(1-xx)}} = du\sqrt{(1-xx)} - \frac{uxdx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

erit

$$ydx - xdy = \frac{udx}{\sqrt{(1-xx)}} - xdu\sqrt{(1-xx)}$$

vnde numerator noster fiet:

$$dx^2(1-uu) + du^2(1-xx)^2,$$

ex quo formula nostra pro elemento Zz colligitur:

$$\sqrt{\frac{(dx^2(1-uu)+du^2(1-xx)^2}{\sqrt{(1-xx)}(1-uu)}} = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{1-xx} + \frac{du^2(1-xx)}{1-uu}\right)},$$

vbi quaestio iterum in inuentione relationis inter x et u versatur, vt huius formulae integrale exhiberi possit.

V.

V. Si velimus angulos introducere haec formula adhuc concinnior reddi potest, ponendo enim $x = \cos.\theta$ et $u = \sin.\phi$, vt fiat $y = \sin.\phi \cdot \sin.\theta$ et $z = \cos.\phi \cdot \sin.\theta$, formula nostra integranda prodit $\sqrt{(d\theta^2 + d\phi^2 \sin.\theta^2)}$. Hic autem iam probe obseruari oportet, litteras θ et ϕ denotare angulos ideoque ipsas algebraicas non esse, sed per arcus circulares exprimi debere, quorum autem sinus vel cosinus algebraice exprimantur deinde vero quia formula $\sqrt{(d\theta^2 + d\phi^2 \sin.\theta^2)}$ integrabilis esse debet, necesse est vt eius integrale non arcui circulari sed sinui, cosinuiue, siue formae ex sinibus et cosinibus vtcunque complexae aequatur.

VI. Quoniam nulla adhuc certa constat Methodus huiusmodi formulas tractandi alia via non relinquitur, nisi vt rem tendando et quasi diuinando adgrediamur. Fingamus ergo primo integrale quaesitum esse $= \alpha \sin.\theta$, eritque

$$\sqrt{(d\theta^2 + d\phi^2 \sin.\theta^2)} = \alpha d\theta \cos.\theta \text{ vnde fit}$$

$$d\phi = \frac{d\theta \sqrt{(\alpha^2 \cos\theta^2 - 1)}}{\sin.\theta};$$

quare huius formulae integrale arcum circularem exprimere debet, quum igitur sit:

$$\sqrt{(\alpha\alpha \cos.\theta^2 - 1)} = \sqrt{((\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha \sin.\theta^2)}$$

habebimus

$$d\phi = \frac{d\theta}{\sin.\theta} \sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha \sin.\theta^2)},$$

siue in membra partiendo

$$d\Phi = \frac{d\theta\,(\alpha\alpha - 1)}{\sin.\theta\sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha\sin.\theta^2)}} - \frac{\alpha\alpha\, d\theta\sin.\theta}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1 - \alpha\alpha\sin.\theta^2)}},$$

quo facilius pateat indoles posterioris membri, ponamus $\cos.\theta = v$, ac ob $-d\theta\sin.\theta = dv$ posterius membrum fiet $\frac{\alpha\alpha\, dv}{\sqrt{(\alpha\alpha vv - 1)}}$ cuius autem integrale non per arcum circulorum sed per logarithmum exhibetur, quocirca hoc primum tentamen non succedit.

VII. Tentemus ergo hanc positionem $\int\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2\sin.\theta^2)} = \alpha\cos.\theta$ siue differentiando $-\alpha d\theta\sin.\theta = \sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2\sin.\theta^2)}$, vnde colligimus $d\Phi = \frac{d\theta\sqrt{(\alpha\alpha\sin.\theta^2 - 1)}}{\sin.\theta}$, quae simili modo in duo membra distributa praebet:

$$d\Phi + \frac{\alpha\alpha\, d\theta\sin.\theta}{\sqrt{(\alpha\alpha\sin.\theta^2 - 1)}} = \frac{-d\theta}{\sin\theta\sqrt{(\alpha\alpha\sin.\theta^2 - 1)}},$$

vbi prius membrum posito $\cos.\theta = v$, ob $d\theta = dv$ induit hanc formam $\frac{-\alpha\alpha\, dv}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1) - \alpha\alpha vv}}$ cuius integrale manifesto est α Ang. cos. $\frac{\alpha v}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}}$, cuius sinum cosinumue dare licet, quoties α est numerus rationalis. Nunc igitur superest, vt etiam alterum membrum $\frac{-d\theta}{\sin.\theta\sqrt{(\alpha\alpha\sin.\theta^2 - 1)}}$ per integrationem ad arcum circularem perducatur, facile autem intelligitur formam huius integralis fore: β Ang. cuius sin. $\frac{\gamma\cos.\theta}{\sin.\theta}$ quae formula differentiata praebet $\frac{-\beta\gamma\, d\theta}{\sin.\theta\sqrt{(\sin.\theta^2 - \gamma\gamma\cos.\theta^2)}}$, quae vt aequalis fiat nostro secundo membro capi debet $\beta = 1$ et $\frac{1 + \gamma\gamma}{\gamma\gamma} = \alpha\alpha$, siue $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}}$ sicque integrale posterioris membri erit Ang. cuius sin. $(\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}})$, quocirca nostrum integrale totum seu valor anguli Φ ita exprimitur, vt sit

$$\Phi = \alpha\,\text{Ang. cuius cos.}\left(\frac{\alpha\cos.\theta}{\sqrt{\alpha\alpha - 1}}\right)\ \text{Ang. cuius sin.}\ \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta\sqrt{(\alpha\alpha - 1)}}.$$

VIII.

VIII. Hanc formulam commodiorem reddemus constantem α ita immutando, vt sit $\alpha = \text{sec.}\,\varepsilon = \frac{1}{\cos.\varepsilon}$; tum enim adipiscemur:

$$\Phi = \frac{1}{\cos.\varepsilon}.\,\text{Ang. cui. cos.}\left(\frac{\cos.\theta}{\sin.\varepsilon}\right) + \text{Ang. cui. sin.}\left(\frac{\cos.\theta\cos.\varepsilon}{\sin.\theta\sin.\varepsilon}\right) + C,$$

siue loco ε scribendo $90^\circ - \varepsilon$

$$\Phi = \frac{1}{\sin.\varepsilon}.\,\text{Ang. cui. cos.}\left(\frac{\cos.\theta}{\cos.\varepsilon}\right) + \text{Ang. cui. sin.}\left(\frac{\text{tang.}\,\varepsilon}{\text{tang.}\,\theta}\right) + C.$$

Hic autem probe notandum est, nisi $\sin.\varepsilon$ fuerit fractio rationalis, hanc solutionem pro congrua haberi non posse propterea quod geometrice angulum assignare non licet, qui foret ad Ang. cuius cos. $\left(\frac{\cos.\theta}{\cos.\varepsilon}\right)$ in ratione $1 : \sin.\varepsilon$. Hinc ergo videri posset pro angulo ε alios angulos praeter 90° et 30° assumi non posse, sed quia ipse angulus ε hic non in computum venit, pro lubitu loco $\sin.\varepsilon$ fractionem quamcunque rationalem vnitate minorem assumere licet, vbi quidem casus excludi debere euidens est quibus foret vel $\varepsilon = 0$ vel $\sin.\varepsilon = 1$. At vero vt ambo anguli fiant reales, necesse est vt Ang. θ semper sit maior quam ε, vel saltem nusquam minor euadat.

IX. Vt huius integrationes exemplum speciale euoluamus, ponamus $\sin.\varepsilon = \frac{1}{2}$, vt fiat $\cos.\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tum erit pars prior $= 2$ Arc. cui. cos. $\frac{2\cos.\theta}{\sqrt{3}} =$ Arc. cui. sin. $\frac{4\cos.\theta\sqrt{(4\sin.\theta^2 - 1)}}{3}$ et pars posterior $=$ Arc. cuius sin. $\frac{1}{\text{tang.}\,\theta.\sqrt{3}} =$ Arc. cuius sin. $\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta.\sqrt{3}}$ quibus ambobus angulis coniunctis colligemus

$\Phi =$

$\Phi =$ Arcus cuius sin. $(\frac{9 \cos.\theta - 8 \cos.\theta^3}{3 \cdot \sin.\theta \sqrt{3}})$ ita vt sit

$\sin.\Phi = \frac{\cos.\theta(9 - 8\cos.\theta^2)}{3 \sin.\theta \sqrt{3}}$ siue

$\cos.\Phi = \frac{(4\sin.\theta^2 - 1)\sqrt{(4\sin.\theta^2 - 1)}}{3\sin.\theta\sqrt{3}}$,

quare angulo hoc Φ ita definito, habebimus hanc integrationem:

$$\int\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 . \sin.\theta^2)} = 2\cos.\theta, \text{ vnde fit}$$

$$d\Phi = \frac{-d\theta\sqrt{(4\sin.\theta^2 - 1)}}{\sin.\theta},$$

cuius ergo integrale vicissim est, ille ipse angulus Φ, quem modo descripsimus. Quaestio ergo est quomodo per certam quandam Methodum directam ad hanc solutionem pervenire licuisset.

X. Non parum autem hoc argumentum dilucidatum iri videtur, si solutionem ex principiis Trigonometriae Sphaericae repetere conemur, quandoquidem plures insignes proprietates inde cognoscere poterimus. Sit igitur in superficie sphaerae cuius radium ponimus $= 1$, curua B M m linea illa rectificabilis quam quaerimus, ac sumto quodam puncto fixo A tamquam Polo ductisque meridianis AM et Am vocemus angulum BAM $= \Phi$ et arcum AM $= \theta$, erit angulus elementaris MA$m = d\Phi$, et ducta ad Am normaliter lineola Mn erit M$n = d\Phi . \sin.\theta$ et $mn = d\theta$, vnde elementum curuae colligitur, vt supra iam habuimus Mm $= \sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 . \sin.\theta^2)}$ quod ergo integrabile esse oportet. Tab. I. Fig. 2.

XI. Quoniam autem hoc certa Methodo praestare non licet, inuestigemus nonnullas proprietates quas nobis natura sphaerae suppeditabit. Contemplemur igitur imprimis arcus circulorum maximorum qui in singulis curuae nostrae punctis sint normales cuiusmodi sunt arcus MO et mO, atque statim liquet fore angulum AMO $=n$Mm, vnde si ponamus angulum AMO $=\psi$, habebimus

$$\sin.\psi = \frac{d\theta}{\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \sin.\theta^2)}}; \quad \cos.\psi = \frac{d\Phi . \sin\theta}{\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 \sin.\theta^2)}},$$

ideoque $\tang.\psi = \frac{d\theta}{d\Phi \sin.\theta}$.

XII. Quodsi ergo ex A in arcum MO demittamus perpendiculum AP, ex triangulo rectangulo APM reperiemus:

$$\sin.\,AP = \sin\theta \sin.\psi = \frac{d\theta \sin\theta}{\sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 . \sin.\theta^2)}} \text{ tum vero}$$

$$\tang.\,MP = \tang.\theta \cos.\psi = \frac{d\Phi . \sin.\theta^2}{\cos.\theta \sqrt{(d\theta^2 + d\Phi^2 . \sin.\theta^2)}},$$

ac praeterea

$$\tang.\,MAP . \tang.\psi = \frac{1}{\cos.\theta}, \text{ seu } \tang.\,MAP = \frac{d\Phi \sin.\theta}{d\theta . \cos.\theta}.$$

XIII. Concurrant hi bini arcus in nostram curuam normales in puncto O eritque hoc punctum O, polus circuli minoris curuam nostram per elementum Mm osculantis, ita vt sin. OM recte pro radio osculi nostrae curuae haberi possit. Quo nunc istud punctum O inuestigemus, ducamus arcum AO et consideremus bina triangula sphaerica AMO et AmO, quae non solum latus AO habebunt commune sed etiam in vtroque latera MO et mO sunt aequaqualia, quare si ponamus arcum $MO = mO = r$, quoniam in triangulo AMO ex lateribus $AM = \theta$ et $MO = r$ cum angulo intercepto $AMO = \psi$ colligitur:

$$\cos. AO = \cos.\theta \cos. r + \sin.\theta \sin. r \cos.\psi;$$

manifestum est si arcus θ suo differentiali $d\theta$ et angulus ψ suo differentiali $d\psi$ augeatur, valorem huius formulae eundem manere debere, hoc est eius differentiale, sumtis tantum θ et ψ variabilibus nihilo aequari debere. Hoc autem facto nanciscimur

$$- d\theta . \sin.\theta \cos. r + d.(\sin.\theta \cos.\psi) \sin. r = 0 \text{ vnde fit}$$

$$\text{tang.} r = \frac{d\theta . \sin.\theta}{d.(\cos.\psi \sin.\theta)},$$

quae est expressio generalis pro radiis osculi curuarum in superficie sphaerica descriptarum.

XIV. Quodsi insuper ipsum arcum curuae vocemus $BM = s$, vt sit eius elementum $Mm = ds$ angulum $mMn = \psi$ habebimus $d\theta = ds \sin.\psi$ et $d\Phi \sin.\theta = ds \cos.\psi$, vnde si relatio inter s et ψ esset data; inde binas quantitates Φ et θ deducere liceret, foret enim $\theta = \int ds . \sin.\psi$ hincque porro $\Phi = \int \frac{ds \cos.\psi}{\sin.\theta}$, quae integralia in se indeterminata satis declarant punctum A ab arbitrio nostro pendere.

XV. Sin autem relatio detur inter arcum curuae s et radium osculi r multo difficilius erit inde reliqua elementa scilicet ψ, θ et Φ determinare. Excluso quidem angulo Φ habemus has duas aequationes:

Cc 2 $d\theta$

$$d\theta = ds \sin.\psi \text{ et } \tan g. r = \frac{ds \,.\, \sin.\psi \sin.\theta}{d\,.\,(\cos.\psi \sin.\theta)},$$

ex quibus ambas quantitates θ et ψ inuestigari oportet; verum etiamnunc nulla patet via ad hunc scopum perueniendi, quum tamen in plano ex data relatione inter arcum curuae et radium osculi constructio curuae facile perficiatur.

XVI. Postquam igitur ostendimus quemadmodum ex curva BM tamquam data spectata eius radium osculi MO definiri oporteat, hinc vniuersam Theoriam euolutionis in superficie Sphaerica deriuare poterimus, namque punctum illud O situm erit in curua quapiam CO, quam merito euolutam curuae BM appellare licet. Si enim curuae CO filum concipiatur applicatum, idque extendatur in superficie Sphaerica arcum circuli maximi repraesentabit, qui euolutam in ipso puncto O tangat, omnino vti in plano vsu venit, ita vt nostra curua BM ex euolutione curuae CO reipsa describi possit, vnde perinde atque in plano notandum est, fore radium osculi seu arcum MO, arcui euolutae CO aequalem, vel quantitate constante superantem, quae quantitas constans quoniam ab arbitrio nostro pendet, euidens est ex eiusdem curuae CO euolutione innumerabiles curvas BM produci posse.

Tab. I. Fig. 3. XVII. His expositis ordine retrogrado consideremus primum ipsam curuam euolutam CO*o* pro qua vocemus arcum CO $= s$ vt sit elementum O*o* $= ds$, ac ne opus habeamus punctum quodpiam arbitrarium veluti A in computum inducere,

na-

natura huius curuae definiatur eius radio osculi $OR = r$, quaecunque enim haec sit curua, quoniam vt data spectatur, relatio datur inter s et r, iam ope fili quod initio toti curuae applicatum concipiatur, fiat euolutio, quae nunc quidem pertigerit vsque in O vbi filum extensum erit, secundum arcum circuli maximi OM, cuius longitudo erit $= OC = s$, qui arcum tanget curuam CO in puncto O et nunc punctum M reperietur in curua BM per hanc euolutionem descripta, ad quam etiam ex puncto proximo o ducatur arcus om, qui perinde ac ille OM in hanc curuam erit normalis. Tum vero quum sit $OM = s$ erit $om = s + ds$, quo posito in indolem huius curuae descriptae BM inquiramus.

XVIII. Quoniam arcus circuli maximi MO normalis est ad OR eiusque continuatio pro ipso elemento Oo haberi potest is cum radio proximo Ro angulum faciet MoR cuius

$$\text{tang.} = \frac{\textit{tang.}\ RO}{\textit{sin.}\ Oo} = \frac{\textit{tang.}\ R}{ds},$$

quum autem radius proximus mo sit ad Ro normalis erit ang. Mom completum illius anguli OoR ideoque tang. M$om = \frac{ds}{\textit{tang.}\ r}$, siue ipse hic angulus $= \frac{ds}{\textit{tang.}\ r}$, vbi notasse iuuabit esse angulum OR$o = \frac{ds}{\textit{sin.}\ r}$, vnde patet angulos M$om$ et ORo non esse inter se aequales vti euenit in plano, sed illum Mom se habere ad hunc ORo : : sin. r : tang. r hoc est in ratione minoris inaequalitatis, atque adeo si radius OR fiat quadrans circuli angulus M$om = 0$ seu ambo radii MO, mo coincident,

sci-

scilicet ipsa curua circa elementum Oo erit circulus maximus, qui ipse sibi est tangens in singulis punctis.

XIX. Nunc facile erit curuae per euolutionem descriptae elementum Mm exprimere, quum enim hoc elementum per sinum arcus MO diuisum, praebeat angulum Mom, ob $OM = s$ habebimus elementum $Mm = \frac{ds \sin. s}{tang\, r}$. Quocirca si nunc problema nostrum circa rectificationem curuae BM adgrediamur, relatio inter binas variabiles r et s talis esse debet, vt formula $\frac{ds \sin. s}{tang. r}$ fiat absolute integrabilis. Praeterea vero quia haec curua simul esse debet algebraica vel geometrice construibilis, primo requiritur vt ipsa curua CO sit geometrica deinde vero quia arcus $MO = CO$, curua CO, ita debet esse comparata vt cuilibet eius arcui CO, arcum circuli aequalem geometrice assignare liceat.

XX. Hic omnino notatu dignum est, quod pro elemento Mm, tam simplicem formulam elicuerimus, de qua facillime iudicare licet, quibus casibus ea integrabilis euadat, atque adeo statim in oculos incurrit si radius osculi OR fuerit constans, puta $r = c$, tum curuam BM absolute fore integrabilem, erit enim arcus

$$BM = \frac{\int ds \sin. s}{tang. c} = - \frac{\cos. s}{tang\, c} + C,$$

vbi si constantem ita definiamus, vt descriptio in ipso puncto C incoeperit vbi $s = 0$, ita vt punctum B in C incidat, tum erit arcus

BM

$$BM = \frac{1 - \cos. s'}{tang. c} = \frac{2 \sin. \frac{s^2}{2}}{tang. c}.$$

Hinc igitur patet dum initio quo $s = o$, fit arcus $BM = o$, sumto arcu CO quadranti circuli maximi aequali, ita vt OM fiat quadrans, tum fore arcum $BM = \frac{1}{tang. c}$, ac si arcus CO eo vsque augeatur, vt semiperipheriae circuli maximi aequalis fiat, quo casu arcus OM abit in semicirculum, tum fore arcum $BM = \frac{2}{tang. c}$, vbi vnitas definitur per ipsum radium Sphaerae.

XXI. En ergo simplicem profecto solutionem problematis propositi, quae quidem vt examinanti facile patebit prorsus conuenit cum ea, quam ante per plures ambages sumus adepti; sed hic eius insignes proprietates multo clarius elucent, quam antea ex intricatis illis formulis cognoscere licuisset. Quia enim sumsimus $r = c$ statim apparet euolutam curuae nostrae BM esse circulum minorem, cuius radius sit $= \sin. c$; praeterea vero vt cuilibet huius circuli minoris arcui, $CO = s$ arcus circuli maximi aequalis $MD = s$, geometrice sumi possit, necesse est, vt radius istius circuli minoris $\sin. c$ ad radium Sphaerae rationem teneat rationalem, quae est eadem conditio, quam etiam supra inuenimus.

XXII. Quoniam infinitos huiusmodi circulos minores in Sphaera designare licet, quorum radii ad radium Sphaerae rationem habeant rationalem, reuera quidem infinitas

so-

solutiones exhibuisse sumus censendi; verum tamen quia omnes in vna quasi formula continentur, non immerito haec solutio pro vnica haberi solet, atque nunc quaestio maximi momenti exoritur, vtrum praeter circulos minores non aliae dentur in superficie sphaerica lineae curuae ex quarum euolutione, etiam curuae geometricae et rectificabiles oriantur.

XXIII. Sed antequam hanc quaestionem diligentius examinemus, alias nonnullas insignes proprietates harum curuarum perpendamus. Ac primo quidem patet ex eodem circulo minore infinitas describi posse curuas problemati nostro satisfacientes, quoniam in eius peripheria initium seu punctum C pro arbitrio assumi potest. Omnes vero tales lineae si in superficie sphaerica descriptae concipiantur, quasi inter se erunt parallelae, quandoquidem omnes ab eodem circulo maximo, qui in vnam est normalis, simul normaliter secantur, atque omnes portiones talium circulorum maximorum inter binas curuas interceptae erunt inter se aequales. Euidens quidem est omnes has curuas esse aequales et tantum ratione situs super sphaera differre, vnde pulcherrimum exemplum infinitarum curuarum aequalium in superficie sphaerae ducendarum habemus, quarum traiectione orthogonales sint circuli maximi.

XXIV. Initio porro curuae BM in puncto C constituto, si arcus circuli minoris CO aequalis capiatur semicircirculo maximo, quod si circulus ille fuerit satis exiguus, demum post aliquot reuolutiones eueniet, tum qui arcus OM fit semicirculus, punctum M e diametro puncto O opponetur, quare si circulus iste minor COo tamquam circulus polaris spectetur polo existente in R, atque aequalis circulus polaris huic oppositus concipiatur, omnes curuae descriptae inter hos duos circulos polares cadent, atque si circuli polares fuerint satis parui pluribus reuolutionibus circa sphaeram vagabuntur antequam ad alterum circulum polarem pertingant.

XXV. Hinc adhuc alia generatio curuarum BM se manifestat, facile enim perspiciemus easdem lineas curuas BM describi debere, si circulus sphaerae maximus super peripheria circuli minoris voluendo incedat, simili modo quo in plano epicicloides describi solent. Sit enim CO circulus ille minor, quem in puncto O contingere concipiatur circulus maximus OMFG, qui voluendo per peripheriam circuli minoris continuo vlterius progrediatur initio autem contactus fuerit in puncto C, vbi punctum M circuli maximi erat applicatum, ita vt per motus voluentis naturam arcus OM aequalis sit arcui CO, vnde si circulus maximus in puncto M stilo fuerit munitus, hoc ipso stilo, curuam quandam CM descripserit necesse est, atque quum OM sit arcus circuli maximi arcui CO aequalis et circulum minorem in puncto O tangens; euidens est, per hunc motum voluentum eandem curuam CM describi, quae ante ex so- Tab. I. Fig. 4.

lutione erat nata, ita vt haec curua etiam epicycloidibus sphaericis sit annumeranda, quae scilicet oriuntur, si circulus maximus mobilis per peripheriam circuli minoris fixi voluendo promouetur.

XXVI. Si etiam in superficie sphaerica, praeter circulos nullae aliae darentur curuae geometricae, quarum cuilibet arcui indefinito arcus circuli aequalis assignari posset, quod Theorema initio pro figuris planis attulimus, tum demonstrationem haberemus validam quod praeter curuas iam inuentas nullae aliae problemati nostro satisfaciant. Si quis enim dicat dari aliam quandam curuam BM geometricam, quae esset rectificabilis, tum certe eius radium osculi MO ideoque omnia puncta O geometrice assignare liceret, vnde ipsa curua euoluta CO resultaret geometrica eiusque arcui indefinito CO daretur arcus circuli aequalis OM, per illud ergo Theorema curva CO necessario foret circulus, ideoque praeter solutionem iam inuentam alia nulla exspectari posset.

XXVII. Verum etiamsi istud Theorema pro figuris planis perfecte esset demonstratum, tamen in superficie sphaerica nullo modo locum inuenire posset. Quum enim nullum sit dubium, quin in superficie sphaerica innumerabiles lineae curvae geometricae describi queant; dummodo enim Sinus vel Tangentes angulorum supra vsurpatorum Φ et θ algebraicam inter se teneant relationem curua inde nata BM vtique pro geometrica

trica est censenda, hic enim ad conditionem rectificabilitatis non attendamus; tum autem eius radius osculi MO semper geometrice assignari potest; hincque etiam euoluta CO erit curua algebraica et quae insuper certe ita est comparata, vt eius arcui CO cuicunque arcus circuli maximi OM aequalis exhiberi possit, inde necessario sequitur infinitas dari curuas algebraicas CO, quarum singulos arcus per arcus circulares exprimere liceat. Quamobrem etiamnunc maximam dubitandi rationem habemus, vtrum problema nostrum solutione illa, quam iam duplici modo sumus adepti plane sit exhaustum nec ne? Ac si forte nullae aliae dentur solutiones longe aliam demonstrationem adferri oportet.

XXVIII. Quodsi formulam generalem supra pro elemento Mm inuentam $\frac{ds.\sin s}{tang.r}$ attentius consideremus, mox deprehendemus, eam praeter casum $r=c$ infinitis aliis integrabilem fieri posse veluti si fuerit $r=s$, vel tang. $r=\cos.s^2$, priori enim fiet arcus $BM=\sin.s+C$, hoc vero $BM=C-\frac{1}{\cos.s}$, ac si esset tang. $r=\sin.s.\cos.s^2$, foret $BM=tang.s+C$ verum tum quaestio haec reuoluitur vtrum curua CN proditura sit geometrica nec ne? Vbi imprimis notandum, si talis curua geometrica elici posset tum etiam alteri conditioni, qua arcus CO per arcum circularem exponi debet fore satisfactum, propterea quod data supponitur relatio inter quantitates sin. s et sin. r vel tang. r; quum enim r sit arcus circuli maximi et sin. s per eius quam-

 piam

piam functionem algebraicam exprimatur etiam in circulo maximo arcum s assignare licebit cuius Sinus sit illi functioni aequalis, verum hoc modo in maximas difficultates delaberemur quandoquidem ante iam annotauimus nullam adhuc Methodum patere, cuius ope ex data quapiam relatione inter arcum curvae s eiusque radium osculi in superficie sphaerica r, ipsa curva definiri posset. Si enim ex aequationibus §. XV. datis, vel θ vel ψ eliminemus in aequationem differentialem secundi gradus incidimus, quam quomodo tractari oporteat quum non perspiciatur; multo minus iudicare licebit, utrum curua inde proditura algebraica sit nec ne?

XXIX. Hactenus quidem curuae, quam pro nostro problemate eruimus ea symptomata recensuimus, quae considerationes geometricae nobis suppeditauerunt, nunc igitur etiam conueniet eius aequationem analyticam accuratius euolui. Sumatur igitur punctum A in ipso polo circuli minoris COD, ex cuius euolutione initio facto in puncto C, oriatur curua nostra rectificabilis CM, cuius radius osculi in puncto M referatur arcu circuli maximi MO circulum minorem in C tangente eiusque arcui CO aequali. Ducantur arcus AO et AM et posito arcu $AC = AO = c$, ita vt circuli minoris radius sit $= \sin. c$ quoniam posuimus arcum $CO = s$ eiusque mensura est angulus CAO erit hic angulus $CAO = \frac{s}{\sin. c}$, nunc quia in triangulo AMO rectangulo dantur catheti $AO = c$ et $MO = s$, si vocemus vt supra

Tab. I. Fig. 5.

ar-

arcum $AM = \theta$, habebimus $\cos.\theta = \cos.s \cos.c$, deinde si porro vocemus angulum $CAM = \Phi$ erit ang. $MAO = \frac{s}{\sin.c} - \Phi$, hincque tang. huius ang. $= \frac{tang.s}{\sin c}$, ita vt sit $\Phi = \frac{s}{\sin.c} -$ ang. cui. tang. $\frac{tang.s}{\sin.c}$, tum vero prodit ipse curuae CM arcus $= \frac{1 - \cos.s}{tang.c}$.

XXX. Reducamus haec ad bina elementa Φ et θ et cum ex priore aequatione sit $\cos.s = \frac{\cos.\theta}{\cos.c}$, vnde statim sequitur arcus $CM = \frac{\cos.c - \cos.\theta}{\sin.c}$, ex quo manifestum est hanc curuam prorsus eandem esse, quam prima methodo elicueramus, tum vero quum sit $\sin.s = \frac{\sqrt{(\cos.c^2 - \cos.\theta^2)}}{\cos.c}$ et $s =$ Ang. cuius cos. $\left(\frac{\cos.\theta}{\cos.c}\right)$ inde concludimus ang. $\Phi = \frac{1}{\sin.c}$ Ang. cuius cos. $\left(\frac{\cos.\theta}{\cos.c}\right)$ — Ang. cuius tang. $\frac{\sqrt{(\cos.c^2 - \cos.\theta^2)}}{\sin.c.\cos.\theta}$. Quodsi etiam formulas differentiales contemplari velimus, quum sit $ds.\sin.s = \frac{d\theta \sin.\theta}{\sin.c}$ hincque

$$ds = \frac{d\theta . \sin.\theta}{tang.c \sqrt{(\cos.c^2 - \cos.\theta^2)}},$$

deinde quum sit

$$d\Phi = \frac{ds}{\sin.c} - \frac{ds . \sin c}{\cos.s^2 (\sin.c^2 + tang.s^2)} = \frac{ds}{\sin.c} - \frac{-ds . \sin.c}{\sin.c^2 . \cos.s^2 + \sin.s^2}$$
$$= \frac{ds(\cos.c^2 . \sin.s^2)}{\sin.c(\sin.c^2 . \cos.s^2 + \sin.s^2)},$$

erit

$$d\Phi = \frac{ds(\cos.c^2 \sin.s^2)}{\sin.c(\sin.c^2 + \cos.c^2 \sin.s^2)} = \frac{ds \cos.c^2 \sin.s^2}{\sin.c(1 - \cos.c^2 \cos.s^2)}.$$

Iam quum sit

$$ds = \frac{d\theta . \sin.\theta}{tang.c \sqrt{(\cos.c^2 - \cos.\theta^2)}}; \quad \sin.s^2 = \frac{\cos.c^2 - \cos.\theta^2}{\cos.c^2}$$

et $1 - \cos.c^2 . \cos.s^2 = \sin.\theta^2$, habebimus

$$d\Phi = \frac{d\theta \cos.c \sqrt{(\cos.c^2 - \cos.\theta^2)}}{\sin.c^2 \sin.\theta},$$

quae est eadem formula cum ea, quam supra pro $d\Phi$ invenimus.

XXXI.

XXXI. Quum nunc quidem certum sit, in superficie sphaerica praeter circulos infinitas dari curuas geometricas, quarum singulas portiones indefinite arcubus circularibus metiri liceat: sequens Problema nihilominus tamquam aeque difficile ac omni attentione dignum spectandum videtur.

Problema.

In superficie sphaerica omnes inuenire curuas geometricas quarum arcui indefinito cuicunque, arcum aequalem circuli exhibere liceat.

Si quis solutionem huius problematis methodo directa indagare voluerit maximas sine dubio difficultates offendet, quas methodis adhuc cognitis vix ac ne vix quidem superare licebit.
Tab. I. Fig. 2. At considerationes ante factae nobis sequentem solutionem satis concinnam suppeditant. Primum in superficie sphaerica describatur curua quaecunque geometrica BM, quod fit si posito angulo $BAM = \Phi$ et arcu $AM = \theta$, relatio quaecunque detur algebraica inter $\sin.\Phi$ et $\sin.\theta$, ita vt $\sin.\Phi$ spectari possit tamquam functio algebraica ipsius $\sin.\theta$, manifestum autem est, quae hic de $\sin.\Phi$ et $\sin.\theta$ dicuntur, aeque valere pro cosinubus et tangentibus. Tali ergo relatione inter $\sin.\Phi$ et $\sin.\theta$ constituta quaeratur angulus ψ, vt sit tangens $\psi = \frac{d.\theta}{d\Phi \sin.\theta}$, quem ergo angulum etiam geometrice assignare licet, sicque habebitur ang. $AMO = \psi$, quem arcus MO in curuam normalis cum

me-

meridiano AM facit. Porro in hoc arcu circuli maximi MO abscindatur arcus $MO = r$, ita vt sit tang. $r = \frac{d\theta \sin.\theta}{d.\sin.\theta \cos.\psi}$, sic autem etiam punctum O geometrice assignabitur; quandoquidem tang. r aequabitur functioni algebraicae quantitatum sin. θ et sin. Φ; quo facto punctum O reperietur in ipsa curua quaesita CO, quippe quae ita erit comparata vt eius portio CO aequetur arcui circulari $MO = r$; atque ista curua CO manifesto erit geometrica vel algebraica, hic enim voces geometricae et algebraicae exprimi potest id etiam geometricum sit censendum.

XXXII. Quo hanc curuam constructam CO etiam analytice euoluamus, ponamus angulum $BAO = x$ et arcum $AO = y$ et videamus cuiusmodi aequatio proditura sit inter has quasi coordinatas, seu potius inter quantitates sin. x et sin. y. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia ang. $MAO = \xi$ ita vt fiat $x = \Phi + \xi$; iam ex triangulo Sphaerico AMO, habemus primo

$$\cos.y = \cos.\theta \cos.r + \sin.\theta \sin.r \cos.\psi \text{ tum vero}$$

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{\sin.r.\sin.\psi}{\cos.r \sin.\theta - \sin.r \cos.\theta \cos.\psi},$$

vnde simul habetur $x = \Phi + \xi$, patet ergo tam sin. x, quam sin. y etiam per functiones algebraicas quantitatum sin. θ et sin. Φ expressum iri.

XXXIII. Quodsi iam solutionem huius problematis methodo directa tentare velimus incipiendum erit a coordinatis x et y et quum inde fiat arcus CO elementum $= \sqrt{(dy^2 + dx^2 \sin.y^2)}$

iminter sin.x et sin.y talis relatio intercedere debet eaque algebraica, vt integrale huius elementi fiat arcus circularis, quare posito hoc arcu $= r$ necesse est fiat $\sqrt{(dy^2 + dx^2 \sin. y^2)} = dr$, seu si tangens huius arcus r vocetur $= t$, vt fiat $\sqrt{(dy^2 + dx^2 \sin. y^2)} = \frac{dt}{1+tt}$, hic igitur Methodus desideratur, cuius beneficio cognosci queat qualis relatio inter quantitates sin. x et sin. y intercedere debeat, vt haec conditio adimpleatur, seu quibusnam artificiis inuestigatio ita adornari possit, vt intelligatur ad hoc praestandum opus esse noua quadam variabili sin. θ cuius functio quaecunque algebraica sit sin. Φ, indeque deduci oportere angulum ψ, vt sit tang. $\psi = \frac{d\theta}{d\Phi \sin. \theta}$, hincque porro arcum r vt sit tang. $r = \frac{d\theta \cdot \sin. \theta}{d \cdot \sin. \theta \cos. \psi}$, hincque porro angulum ξ, vt sit:

$$\text{tang. } \xi = \frac{\sin. r \cdot \sin. \psi}{\cos. r \sin. \theta - \sin. r \cdot \cos. \theta \cos. \psi},$$

hisque omnibus factis, vt perspici queat problemati huic satisfieri si capiatur

$$x = \Phi + \xi \text{ et } \cos. y = \cos. \theta \cdot \cos. r + \sin. \theta \cdot \sin. r \cdot \cos. \psi.$$

Cuilibet hinc statim patebit hoc problema ad Analysin infinitorum indeterminatam pertinere, quae quum adhuc parum sit exculta, nullum est dubium quin si Methodum illam desideratam explorare valeamus, maxima inde incrementa, in nouam hanc Analyseos partem esse redundatura.

PHY-