



1770

Des Herrn Leonhard Eulers nothige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencasse

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Des Herrn Leonhard Eulers nothige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencasse" (1770). *Euler Archive - All Works*. 403.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/403>

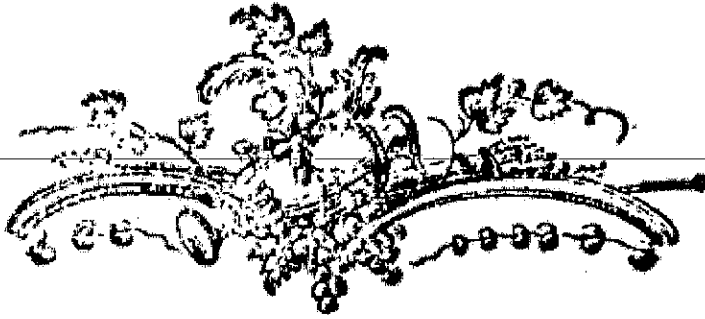
This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

Neues
Hamburgisches
Magazin,
oder
Fortsetzung
gesammelter Schriften,
aus der
Naturforschung, der allgemeinen Stadt-
und Land-Oekonomie,
und den
angenehmen Wissenschaften überhaupt.



Drey und vierzigstes Stück.

Leipzig,
bey Adam Heinrich Hollens Witwe, 1770.



I.

Des

Herrn Leonhard Eulers

nützige

Berechnung zur Einrichtung einer Witwencaße.

Hierbey kommt alles auf eine richtige Erörterung dieser Frage an: ein Ehepaar, wovon der Mann m Jahr, die Frau aber n Jahr alt ist, bezahlet anho in die Caße eine gewisse Summe Geld a , und macht sich anheftschig, so lange die beyde leben, jährlich noch eine gewisse Summe b zu der Caße bezutragen: dagegen verpflichtet sich die Caße nach dem Tode des Mannes, seiner Witwe jährlich eine Pension $= p$, so lange sie lebet, auszujahlen; nun ist die Frage, wie das richtige

A a Wern

4 Nöthige Berechnung

Verhältniß zwischen dem ersten Einlage a , und dem jährlichen Beitrag b , und zwischen der bewilligten Pension p richtig bestimmt werden soll?

Vorläufige Anmerkungen über diese Frage.

1. Erstlich ist klar, daß dieses Verhältniß, aus der durch die Erfahrung befundenen Sterblichkeit der Menschen, bestimmt werden müsse, also daß die Casse daher weder einen beträchtlichen Gewinnst zu hoffen, noch einen beträchtlichen Schaden zu befürchten habe, wobei auch denn insonderheit, sowohl das Alter des Mannes = m als das Alter der Frauen = n in Betrachtung gezogen werden muß.

2. Hernach versteht es sich von selbst, daß sich ein solches Werk nicht einrichten lasse, wosferne nicht eine beträchtliche Menge solcher Ehepaare zugleich daran Antheil nehmen, als welcher Umstand bey allen dergleichen Unternehmungen, welche auf die Regeln der Wahrscheinlichkeit gegründet sind, unumgänglich nöthig ist.

3. So bald aber diese Anzahl so stark angewachsen, daß die Casse nichts weiter zu befürchten Ursache hat, so kann das Werk sicher zu Stande gebracht werden, und wird hierzu keineswegs erfordert, daß dazu nach und nach immer neue Mitgenossen aufgenommen werden. Denn wenn das obige Verhältniß richtig bestimmt worden, so muß das von der ersten Gesellschaft in die Casse geflossene Capital hinreichend seyn, alle daher entstehende Witwen zu versorgen: wenn aber nach der Zeit mehr Mitgenossen aufgenommen werden sollten, so muß

zur Einrichtung einer Wittwencasse. 5

muß derselben Beitrag nicht anders, als zum Be-
huf ihrer Wittwen, angewendet werden.

4. Ferner ist wohl zu merken, daß, in Fall von einem solchen Ehepaare die Frau vor dem Manne stirbt, die weitere Verpflichtung gänzlich aufhöre, und dergleichen Fälle dem übrigen zu statten kommen; und sollte sich der Mann zum zweiten male verheyrathen, so müßte er von neuem in diese Gesellschaft treten, und nach Maasgebung seines und seiner zweiten Frauen Alters, von neuem in die Cassé bezahlen, ohne daß sein voriger Beitrag hiebey in Betrachtung gezogen werden könnte.

5. Wenn aber die Frau dem Manne überlebet, so entsteht diese Frage, ob die Witwe, auch im Fall sie sich wieder verheyrathen sollte, die versprochene Pension genießen könne? Diese Frage wird nun bey den in Hessen und Bremen errichteten Gesellschaften von dieser Art verneinet, also daß, so bald sich eine solche Witwe wiederum verheyrathet, die Pension wegfällt. Allein da sich dieser Umstand, als etwas willkührliches, nicht in die Rechnungen bringen läßt, und es auch ferner den Grundsätzen eines Staats entgegen ist, wenn durch dergleichen besondere Einrichtung neue Ehebündnisse verhindert werden sollten: so ist allerdings weit zuträglicher, daß die den Wittwen zugestandenen Pensionen, beständig bis an ihren Tode fortdauern, dieselben mögen sich wiederum verheyrathen oder nicht. Man kann denselben auch so gar zugesehen, daß ihr zweyter Mann von neuem in eine solche Gesellschaft eintrete, in welchem Falle seine künftige Witwe eine doppelte Pension zu genießen haben würde.

6 Nöthige Berechnung

Vorbereitung zur Auflösung der vorgelegten Frage.

Aus dem jährlich herauskommenen Todtenlisten, haben die Gelehrten schon lange solche Tabellen verfertigt, aus welchen der Grad der Sterblichkeit der Menschen für ein jegliches Alter bestimmt werden kann. Man nimmt nämlich an, daß zu einer Zeit hundert tausend Kinder zugleich geboren werden, und bemerkt in den Tabellen, wie viel von denselben, nach Verfließung einer jeglichen Anzahl von Jahren, wahrscheinlicher Weise noch am Leben seyn werden. Eine solche Tabelle, dergleichen man hin und wieder antrifft, muß demnach zum Grunde gelegt werden, um daraus die vorgelegte Frage zu beantworten, wobey folgende Punkte zu bemerken sind.

Um sich an keine solche Specialtabelle allzu genau zubinden, so ist es nöthig, die Sache auf eine allgemeine Art vorzustellen, und bey uns einer besondern Bezeichnung zu bedienen. Um also anzuzeigen, wie viel von den obgemeldeten zugleich geborenen hundert tausend Kindern nach Verfließung von X Jahren, noch am Leben seyn werden, so wollen wir diese Zahl durch dieses Zeichen (x) andeuten, woraus den klar ist, daß wenn $X = 0$ dieses (100000), die Zahl 100000 ausdrückt, je größer aber X genommen wird, die Zahl (x) je länger, je kleiner werde, und daß endlich, wenn $X = 100$ oder größer als hundert, X gänzlich verschwinde. Zum voraus aber ist es nöthig, eine sehr wichtige Anmerkung zu machen: wenn sich alle Ehepaare, in einem

zur Einrichtung einer Wittwenkasse. 7

einem Lande oder Stadt, in eine solche Gesellschaft verpflichteten, oder dazu gezwungen würden: so würde man eine solche Sterbetabelle, die aus den allgemeinen Todtenlisten geschlossen worden, ohne Bedenken gebrauchen können, weil sich alsdenn in der Gesellschaft, alle verschiedene Arten von Ehepaaren, sowohl junge als alte, sowohl starke als schwache, mit einander vermengen, befinden würden. Da nun aber erstlich eine große Menge Eheleute von selbst ausgeschlossen werden, und hernach die Gesellschaft solche Eheleute, da der Mann auf dem Todebette liegt, oder die Schwindsucht offenbar am Halse hat, ausschließen muß; über dieses aber auch solche Eheleute, da der Mann gesund und stark, die Frau aber schwach ist, nicht leicht in diese Gesellschaft treten werden: so müssen diejenigen Fälle, welche der Gesellschaft offenbar zum Schaden gereichen, wie auch diejenigen Fälle, wovon sie sich einen gewissen Vortheil versprechen könnte, gänzlich ausgeschlossen werden, folglich läßt die Rechnung sich nicht auf die allgemeinen Regeln der Sterblichkeit gründen, sondern man wird genöthiget seyn, den Männern einen größern Grad der Sterblichkeit, den Frauen aber einen geringeren Grad der Sterblichkeit zuzueignen; dieses wird nun geschehen, wenn man das Alter der Männer um einige Jahre höher, der Frauen ihres aber geringer ansetzt, weil sonst die Cassé unmöglich würde bestehen können.

Auflösung der vorgelegten Frage.

Um diese Frage richtig aufzulösen, so wollen wir von Anfang an, von Jahr zu Jahr fortschreiten,
 A 4 und

8 Nöthige Berechnung

und für eine jegliche Zeit, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, den Zustand der Casse bestimmen, um daraus endlich einen solchen Schluß zu ziehen, daß der Casse zuletzt weder ein Vortheil, noch ein Schade zuwachse, sondern das Capital derselben gänzlich zernichtet werde. Die Auflösung wird demnach in folgenden Punkten enthalten seyn.

1. Ist es von der größten Wichtigkeit, daß die Gelder in der Casse nicht still liegen, sondern auf eine solche Art genüßet werden, daß davon jährlich gewisse Zinsen mit in die Casse fließen, und dadurch das Capital vermehret werde; denn eben diese Vermehrung des Capitals, enthält den stärksten Bewegungsgrund, um die Leute in eine solche Gesellschaft zu locken, als welche sonst, viel klüger handeln würden, wenn sie ihre jährliche Bensteuer, beysetze legten, und zum Besten ihrer Frauen, auf Zinsen austhäten.

2. In Bremen wird die jährliche Vermehrung des Capitals auf 4 pro Cento gerechnet, also daß ein Capital, so ich gleich C nach einem Jahre $= 1.04C$ seyn wird, um aber auch hierinnen nichts zu bestimmen, so will ich den Werth des Capitals C nach einem Jahre durch λC ausdrücken, dahero will hier Zinse auf Zinse gerechnet werden muß: so wird nach zwey Jahren dieses Capital seyn $= \lambda^2 C$ nach 3 Jahren $= \lambda^3 C$ nach 4 Jahren $= \lambda^4 C$ und nach X Jahren $\lambda^X C$.

3. Dieses vorausgesetzt, werde ich nur ein einziges Ehepaar in die folgende Rechnung bringen, wovon, wie angefezt, der Mann im Jahr, die Frau aber

zu Einrichtung einer Wittwencasse. 9

aber n Jahr, alt seyn sollen. Da nun dieselben so-
gleich die Summe $= a$ in die Cassé gelegt haben, so
wird daher nach einem Jahre, der Zustand der
Casse seyn $= \lambda a$.

4. Nach Berücksichtigung aber eines Jahres, sind vier
Fälle zu erwägen, denn entweder ist 1. sowohl der
Mann als die Frau noch am Leben, 2. oder der
Mann lebt noch, und die Frau ist todt, oder 3.
der Mann ist todt und die Frau lebt noch, oder 4.
der Mann und Frau sind beyde todt. In dem ersten
dieser Fälle erhält die Cassé den Beitrag $= b$, im
dritten Fall aber muß die Cassé auszahlen, oder sie
verliert die Summe p , die beyden übrigen Fälle
aber haben auf die Cassé keinen Einfluß.

5. Weil der Mann m Jahr alt ist, so befin-
det er sich in der Zahl (m) , als wodurch die Anzahl
derjenigen angedeutet wird, welche von den vor m
Jahren gebornen hundert tausend Kindern anho
noch am Leben sind. Weil nun nach einem Jahre
die Anzahl der noch lebenden seyn wird $(m+1)$, und
daher die Zahl der in diesem Jahre verstorbenen $=$
 $(m) - (m+1)$, daß also nach einem Jahre, der
Mann noch am Leben seyn werde, ist die Wahr-
scheinlichkeit $= \frac{(m+1)}{(m)}$, daß er aber todt sey, ist die-
selbe Wahrscheinlichkeit $= \frac{(m) - (m+1)}{(m)} = 1 - \frac{(m+1)}{(m)}$.

Gleichergestalt, daß nach einem Jahre die Frau
noch lebe, ist die Wahrscheinlichkeit, $\frac{(n+1)}{(n)}$ daß sie
aber schon todt sey, ist dieselbe $= 1 - \frac{(n+1)}{(n)}$;
woraus folget, daß für den ersten Fall, da Mann
und

10 Nöthige Berechnung

und Frau noch leben, die Wahrscheinlichkeit noch
seyn werde $\frac{(m+1)}{\binom{n}{m}} \cdot \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}}$, für den dritten Fall

aber, da der Mann todt ist, und die Frau lebt, wird
seyn die Wahrscheinlichkeit $= \left(1 - \frac{(m+1)}{\binom{n}{m}} \right) \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}}$.

6. Da nun nach einem Jahre in der Casse sich
schon allbereit befindet λa , und darzu nach dem ersten
Falle, noch die Summe b einfließt, nach dem dritten
Fall aber die Pension p schon ausgezahlt werden
muß: so wird nach einem vollen Jahre, oder zu
Anfang des zweiten Jahres, der Zustand der Casse
also ausgedrückt seyn: $\lambda a + b \frac{(m+1)}{\binom{n}{m}} \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}} - p$.

$\left(1 - \frac{(m+1)}{\binom{n}{m}} \right) \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}}$ welcher Ausdruck auch also
vorgestellt werden kann, $\lambda a + \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}}$

$\left(\frac{(m+1)}{\binom{n}{m}} (b+p) - p \right)$.

7. Um nun weiter fortzuschreiten, so ist über-
haupt zu bemerken, daß nach X Jahren, für das
Leben des Mannes die Wahrscheinlichkeit seyn $\frac{(m+x)}{\binom{n}{m}}$

für seinen Tod aber ist dieselbe $1 - \frac{(m+x)}{\binom{n}{m}}$;

und eben so verhält es sich auch mit dem Leben oder
mit dem Tode der Frauen; daher, daß nach Ver-
fließung von X Jahren noch die Summe b in die
Casse fließt, wird seyn die Wahrscheinlichkeit
 $= \frac{(m+x)}{\binom{n}{m}} \frac{(n+x)}{\binom{n}{n}}$, daß aber alsdenn die Pension p aus-

gezahlt werden müsse, davon ist die Wahrscheinlichkeit
 $\left(1 - \frac{(m+x)}{\binom{n}{m}} \right) \frac{(n+x)}{\binom{n}{n}}$, woraus für die Casse er-

wächst

zur Einrichtung einer Wittwencasse. 11

$$\text{wächst ein Zuwachs} = b \frac{(m+x)}{\binom{m}{m}} \frac{(n+x)}{\binom{n}{n}} - p \frac{(n+x)}{\binom{n}{n}}$$

$$\left(1 - \frac{(m+x)}{\binom{m}{m}}\right) = \frac{(n+x)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+x)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right).$$

8. Hieraus folget nun ganz leicht, daß nach Verfließung von zwey Jahren der Zustand der Cassé seyn werde,

$$\lambda a + \lambda \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+1)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

$$+ \frac{(n+2)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+2)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right),$$

gleichergestalt nach dreÿ Jahren wird der Zustand der Cassé seyn,

$$\lambda^2 a + \lambda \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+1)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

$$+ \lambda \frac{(n+2)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+2)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

$$+ \frac{(n+3)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+3)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

überhaupt also nach Verfließung von X Jahren wird der Zustand der Cassé seyn:

$$\lambda^x a + \lambda^{x-1} \frac{(n+1)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+1)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

$$+ \lambda^{x-2} \frac{(n+2)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+2)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

$$+ \lambda^{x-3} \frac{(n+3)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+3)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

$$+ \vdots$$

$$+ \lambda^0 \frac{(n+x)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{(m+x)}{\binom{m}{m}} (b+p) - p\right)$$

9. laßt uns nun X so groß nehmen, das sowohl $(n+x)$ als $(m+x) = 0$, und alsdenn muß der Willigkeit

Nöthige Berechnung

keit gemäß, der Zustand der Casse sich auf 0 reduciren. Man theile demnach den obigen Ausdruck durch λ^x , und setze dasjenige, was herauskommt = 0, so wird man aus dieser Gleichung den richtigen Werth für die Pension p bestimmen können, wenn nämlich die beiden Summen a und b , bekannt sind. Wollte man aber die Pension p für bekannt annehmen, so würde man aus eben der Gleichung, entweder den ersten Einfaß a oder den jährlichen Beitrag b leicht bestimmen können.

10. Man setze, um abzukürzen,

$$\frac{1}{(n)} \left(\frac{(n+1)}{\lambda} + \frac{(n+2)}{\lambda\lambda} + \frac{(n+3)}{\lambda\lambda\lambda} + \&c. \right) = N$$

und

$$\frac{(1)}{(n)(m)} \left(\frac{(n+1)(m+1)}{\lambda} + \frac{(n+2)(m+2)}{\lambda\lambda} + \frac{(n+3)(m+3)}{\lambda^3} + \&c. \right) = M$$

So wird man folgende Gleichung erhalten $a + M(p + b) - Np = 0$, woraus man erhält $p = \frac{a + bM}{N - M}$, für den Fall, wenn a und b bekannt

sind; wäre aber die Pension p nebst dem ersten Einfaße a gegeben, so würde man bekommen $b = \frac{p(N - M) - a}{M}$; und wäre endlich die Pension p

mit dem jährlichen Beitrage b bekannt, so würde man den ersten Einfaß a finden = $Np - M(p + b)$.

Erste

zur Einrichtung einer Wittwencasse. 13

Erinnerung.

Herr Euler ist zu diesem Aufsätze durch die Bemühungen einer Anlegung von Wittwencassen veranlaßt worden, die 1760 in unterschiedenen Ländern unternommen werden. Besonders hat ihm hierzu eine Schrift Gelegenheit gegeben, die zu Göttingen 1768 im Vandenhoeckischen Verlage, unter der Aufschrift erschienen ist: *Oeconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche 1760 wegen der Einrichtung dauerhafter Wittwencassen aufgeworfen werden.* Herr Euler hat diese Schrift für gründlich abgefaßt erkannt. Sie ist von dem Rathsherrn zu Göttingen, Herrn Krieger, der über diese Sache vieles, und mit verdientem Besolte, gearbeitet hat. Herrn Kriegers vorläufig verfaßte Berechnungen stimmen mit demjenigen überein, was sich nach Herr Eulers Formeln berechnen läßt, wenn man die Erfahrungen von der Sterblichkeit, die Süßmilch gesammelt hat, zum Grunde legt.

A. G. Kästner.



II. 30