



1770

# Nouvelle méthode de déterminer les dérangemens dans le mouvement des corps célestes, causés par leur action mutuelle

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

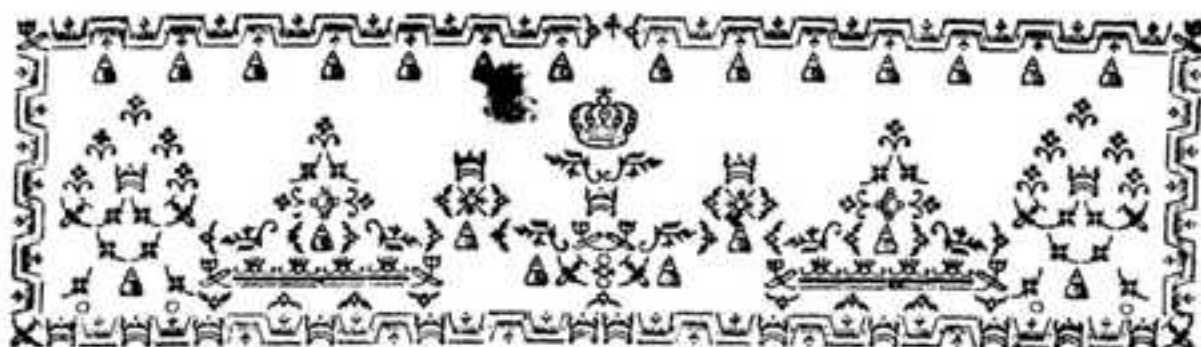
Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Nouvelle méthode de déterminer les dérangemens dans le mouvement des corps célestes, causés par leur action mutuelle" (1770). *Euler Archive - All Works*. 398.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/398>



NOUVELLE MÉTHODE  
DE  
DÉTERMINER LES DÉRANGEMENS  
DANS  
LE MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES, CAUSÉS  
PAR LEUR ACTION MUTUELLE. (\*)  
PAR MR. L. EULER.

---

**T**oute la Théorie de l'Astronomie se réduit aujourd'hui à la détermination du mouvement d'un corps, qui est poussé par des forces quelconques, qu'on peut regarder comme connues. En effet, toutes les recherches qu'on a faites jusqu'ici dans l'Astronomie, prouvent incontestablement que tous les corps célestes s'attirent mutuellement en raison de leurs masses & du quarré renversé de leurs distances, quoiqu'il y ait des cas où cette dernière proportion souffre quelque changement, lorsque le corps attirant n'est pas sphérique, & la distance en même tems peu considérable, comme il arrive à l'égard des Satellites de Jupiter, sur lesquels la force de cette planète s'écarte assez sensiblement de ladite proportion, à cause de son aplatissement.

(\*) L'A le 8 Juillet 1762.



Mais, dès que la distance des corps est plus considérable, cette irrégularité évanouit entièrement, & l'attraction devient la même que si les corps étoient parfaitement sphériques. Cependant, quand même on seroit obligé de tenir compte de cette aberration, & que les forces ne suivroient pas exactement la raison renversée du quarré des distances, la méthode demeure la même, pourvu que cette aberration soit connue, & on aura toujours à résoudre le problème suivant :

*Toutes les forces dont un corps céleste est poussé, étant connues, déterminer son mouvement en sorte qu'on soit en état d'assigner pour tout tems la vraie place qu'il occupe dans le Ciel.*

C'est sur ce problème fondamental de toute l'Astronomie, que je vai faire les réflexions suivantes.

I. Le mouvement d'un corps céleste est censé régulier, lorsqu'il n'est attiré que vers un seul corps en repos, dont la force suit exactement la raison inverse du quarré des distances; ou bien, en cas que le corps attirant ait lui-même quelque mouvement, étant poussé par des forces quelconques, lorsque le corps attiré est outre cela poussé par les mêmes forces. C'est dans ces cas que le corps attiré décrit, autour de celui qui l'attire, une section conique conformément aux regles découvertes par Kepler: lequel mouvement étant fort aisé à déterminer, on peut bien le regarder comme parfaitement connu, & les autres mouvemens ne sont estimés irréguliers, qu'entant qu'ils s'écartent des regles Képlériennes. Ainsi le mouvement des planetes principales seroit régulier, si elles n'étoient poussées par d'autres forces, que celles qui les tire vers le centre du Soleil: & le mouvement de la Lune autour de la Terre seroit aussi régulier, si, outre la force attractive de la Terre, elle éprouvoit précisément les mêmes forces accélératrices qui agissent sur la Terre, quelque irrégulier que fût d'ailleurs le mouvement de celle-ci.

II. Mais il n'est que trop certain qu'un tel mouvement régulier ne se trouve pas dans tout le Ciel. Car, quelque exactement que la  
Terre



Terre & les autres planetes principales, à l'exception de Saturne & de Jupiter, semblent observer les regles de Kepler, le seul mouvement progressif de leurs absides, dont aucun Astronome ne disconvient plus, renferme une aberration très réelle de ces regles, quand même on voudroit encore douter de plusieurs petites inégalités qu'on vient de découvrir dans leur mouvement même. Et puisque les lignes des nœuds, dont les orbites des planetes se coupent mutuellement, ne se trouvent pas non plus en repos, c'est une preuve certaine que toutes les planetes sont assujetties encore à d'autres forces que celle qui les pousse vers le Soleil. Tout cela prouve incontestablement l'action mutuelle que tous les corps célestes exercent les uns sur les autres.

III. Il arrive bien, heureusement, que ces dérangemens qu'on observe dans le mouvement des corps célestes, sont pour la plupart fort petits, ce qui nous met en état de les déterminer assez exactement par voie d'approximation, mais il s'en faut beaucoup que nous puissions nous vanter d'une connoissance parfaite de leurs mouvemens, étant obligés de négliger même une infinité de petites inégalités, lesquelles, quand même elles seroient pour la plupart insensibles, prouvent suffisamment combien peu nous sommes encore avancés dans ces recherches. Après les soins de feu Mr. *Tobie Meyer*, dont la mort prématurée nous prive des plus importantes découvertes, on peut regarder le mouvement de la Lune comme presque aussi bien connu que celui de la Terre, l'erreur de ses Tables ne montant jamais à une minute. Mais, si l'on exigeoit un plus haut degré de précision, & qu'on prétendît savoir le lieu de la Lune à une seconde près, il faudroit avouer que la méthode dont on s'est servi est insuffisante, & qu'elle ne sauroit être portée à ce degré de précision.

IV. Il en est de même des dérangemens que les planetes se causent mutuellement par leurs forces attractives; à moins que l'effet ne soit très petit, la méthode qu'on emploie pour le déterminer, est assujettie à de très grands inconvéniens. Une des principales raisons en est qu'on est obligé d'exprimer les dérangemens par des séries, dont



les termes ne renferment que les sinus ou cosinus de certains angles, de la même manière qu'on représente les irrégularités dans le mouvement de la Lune: or, quand il s'agit de celles dont Jupiter & Saturne se troublent l'un l'autre, leur distance est trop différente dans leur conjonction & opposition, pour qu'on puisse exprimer l'effet de leurs forces par une telle série convergente. De quelque manière qu'on s'y prenne, on ne sauroit jamais être sûr que les termes qu'on est forcé de négliger, ne donnent un résultat encore assez considérable. La grande inégalité que Mr. *de la Lande* vient de découvrir dans le mouvement de Saturne, & qui monte jusques à 14 minutes, provient sans doute de ces termes qu'on a négligés dans le calcul, dont le nombre étant infini, on doit être d'autant moins surpris que la série elle-même soit très peu convergente.

V. Dans ces recherches sur la Lune & les planètes, on a tâché de déterminer les inégalités par des intégrations actuelles, en exprimant par des séries infinies les intégrales des équations différentio-différentielles, qui renferment toutes les déterminations du mouvement; ce qui ne peut se pratiquer que par des approximations très ennuyeuses, & qui ne laissent que trop de doutes sur la certitude. Mais, lorsqu'il s'agit des dérangemens que cause la force attractive d'une comète dans le mouvement d'une planète, ou réciproquement la force de celle-ci dans le mouvement d'une comète, tous ces secours deviennent entièrement inutiles, & les séries auxquelles on seroit réduit en suivant la même méthode, perdroient leur convergence à un tel point qu'on n'en sauroit plus rien conclure. Par cette raison, quand Mr. *Clairaut* entreprit de déterminer la retardation de la fameuse Comète de 1682, qui ne fut de retour que l'an 1759, il a été obligé de suivre une route tout à fait différente, & de s'en tenir immédiatement aux équations différentio-différentielles, d'où ayant déduit par un travail incroyable tous les changemens quasi momentanés, il en a conclu enfin l'effet tout entier que la force de Jupiter a dû produire sur cette comète. Il en seroit de même, si l'on vouloit déterminer l'effet qu'u-





ne comete produit sur le mouvement de la Terre ou de quelqu'autre planete, dont elle s'approcheroit assez pour y causer un changement sensible.

VI. Après tant de recherches de cette nature, on peut presque prononcer, que tous les soins qu'on se donneroit pour découvrir les intégrales des équations primitives, qui sont toujours différentielles du second degré, seront perdus, & qu'on n'en sauroit attendre aucun secours. Pour ces raisons, je me propose ici d'examiner quel parti on peut tirer immédiatement des équations différentio-différentielles que les principes de la Mécanique nous fournissent; & de quelle maniere on peut par-là parvenir à une connoissance plus ou moins complete du mouvement que nous cherchons, sans nous engager dans les intégrations qui semblent surpasser notre portée. Dans cette vue, je vai commencer par les formules différentio-différentielles auxquelles les principes du mouvement nous conduisent immédiatement, & ensuite j'examinerai comment on les peut transformer, pour les rendre plus propres à l'usage astronomique. En voici le probleme.

### PROBLEME I.

*Les forces dont un corps céleste est poussé, étant données, trouver les formules différentio-différentielles qui renferment les changemens causés dans son mouvement.*

### SOLUTION.

Qu'on rapporte le lieu présent du corps, aussi bien que son mouvement, à un plan fixe pris à volonté, & qui soit le même que celui de la Planche. Sur ce plan on établit aussi une direction fixe  $OI$  Planche VII. tirée d'un point aussi fixe  $O$ . Fig. 1. Que le corps en question se trouve maintenant dans un lieu quelconque  $Z$ , d'où l'on tire sur le plan la perpendiculaire  $ZY$ , & du point  $Y$  sur la direction fixe  $OI$  la perpendiculaire  $YX$ : de sorte que le lieu du corps soit déterminé par les trois coordonnées que je nomme :

$$OX = x; \quad XY = y \quad \& \quad XZ = z.$$



Maintenant, de quelques forces que le corps soit poussé, on les peut toujours décomposer en sorte qu'il en résulte trois forces qui agissent selon les mêmes directions ZP, ZQ & ZR. Soient donc ces trois forces

selon ZP = P; selon ZQ = Q & selon ZR = R.

Cela posé, prenant l'élément du tems  $dt$  constant, les principes du mouvement nous fournissent ces trois égalités:

$$addx = Pdt^2; \quad addy = Qdt^2; \quad addz = Rdt^2$$

où  $a$  est une quantité constante qu'il faut déterminer par la manière dont on exprime les forces relativement au tems. Ainsi, exprimant la force de chaque corps céleste par sa masse divisée par le carré de sa distance, & au lieu du tems introduisant le mouvement moyen du Soleil, dont l'élément soit =  $d\tau$ ; si nous posons la masse du Soleil =  $S$  & sa distance moyenne à la Terre =  $e$ , on aura  $a = \frac{S}{e^3}$  en écrivant  $d\tau$  au lieu de  $dt$ : en sorte que  $\tau$  exprime l'angle décrit par le Soleil autour de la Terre dans le tems  $t$ , selon le mouvement moyen.

*Remarque I.* Je suppose ici le point O avec le plan OXY en repos; mais ordinairement on prend le point O dans le centre d'un corps céleste, auquel on rapporte le mouvement du corps en question Z. Dans ce cas, à moins que ce corps en O ne soit effectivement en repos, comme si l'on y mettoit le Soleil, il faut aussi tenir compte du mouvement de ce corps, où plutôt des forces qui le produisent. Alors il ne s'agit que de faire un léger changement dans nos formules: on n'a qu'à décomposer les forces qui agissent sur le corps O selon les mêmes trois directions, & les appliquer en sens contraire encore au corps Z, outre celles qui y agissent actuellement. Après ce changement, nos formules exprimeront le mouvement respectif du corps Z, par rapport au corps O, ou tel qu'il paroît à un Spectateur placé dans le centre du corps O. Or alors, le point O n'étant plus en repos, il faut toujours tirer les trois coordonnées en sorte qu'elles demeurent paral-



parallèles à trois directions fixes, ou dirigées toujours vers les mêmes points du Ciel. Ainsi nos formules s'appliquent également, tant au mouvement absolu du corps Z, qu'à son mouvement respectif à l'égard d'un autre corps quelconque, pourvu qu'on comprenne aussi dans les lettres P, Q & R les forces accélératrices qui agissent sur le corps O, mais dans un sens contraire.

*Remarque II.* Soit qu'on se serve immédiatement de ces formules, soit qu'on les transforme en d'autres formes quelconques, on n'en sauroit tirer aucun fruit à moins que pour un certain tems donné on ne connoisse, tant le lieu du corps Z, que le mouvement qu'il a dans cet instant. Dans ce moment donc, les trois coordonnées  $x$ ,  $y$  &  $z$  seront connues, qui déterminent le lieu du corps Z: or, à cause du mouvement qui est aussi connu, on tirera les vitesses selon les trois directions fixes, ou, ce qui revient au même, les trois valeurs  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  seront connues. Maintenant, ces élémens étant donnés, on demande une solution par laquelle l'on puisse déterminer pour tout autre tems, tant le lieu que le mouvement du même corps. L'intégration de nos formules nous procureroit sans doute cet avantage; mais, comme nous sommes obligés d'y renoncer en général, nous devons borner nos recherches à un tems peu considérable, écoulé depuis l'époque marquée, où le lieu avec le mouvement du corps est connu: & partant je m'appliquerai à la solution du problème suivant.

## PROBLEME II.

*Le lieu & le mouvement du corps étant connus pour une époque donnée, avec les forces qui agissent sur le corps, déterminer pour un tems peu considérable écoulé depuis cette époque, tant le lieu que le mouvement du corps.*





## SOLUTION.

Que le tems  $t$  réponde à l'époque proposée, où les trois coordonnées  $x, y$  &  $z$  déterminent le lieu du corps, & sont par conséquent données; à cause de son mouvement pareillement donné, les quantités suivantes seront aussi connues

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dy}{dt} = q \quad \& \quad \frac{dz}{dt} = r.$$

Ces valeurs étant introduites dans nos formules à cause de  $ddx = dpdt$ ,  $ddy = dqdt$  &  $ddz = drdt$ , nous fournissent

$$adx = Pdt, \quad ady = Qdt \quad \& \quad adr = Rdt.$$

Maintenant, si l'on demandoit l'état du corps après un tems infiniment petit  $dt$ , depuis l'époque établie, nous aurions pour son lieu les coordonnées

$$x + dx = x + pdt, \quad y + dy = y + qdt, \quad z + dz = z + rdt,$$

& pour son mouvement les quantités

$$p + dp = p + \frac{1}{a} Pdt, \quad q + dq = q + \frac{1}{a} Qdt, \quad r + dr = r + \frac{1}{a} Rdt,$$

& ces formules pourront avoir lieu quand on prend pour  $dt$  un tems fini, mais extrêmement petit, en sorte que, plus on le supposera petit, & moins on s'écartera de la vérité. Mais marquons le tems écoulé après l'époque par  $\tau$ , & soient alors les trois coordonnées  $x', y', z'$ , & les trois quantités pour la détermination du mouvement  $p', q', r'$ , dont il s'agit de définir les valeurs. Or ces quantités pouvant être regardées comme des fonctions du tems  $t + \tau$ , pendant que les primitives sont de semblables fonctions du tems  $t$ , nous aurons par les principes de l'analyse:

$$x' = x + \frac{\tau dx}{dt} + \frac{\tau^2 ddx}{2dt^2} + \frac{\tau^3 d^3x}{6dt^3} + \frac{\tau^4 d^4x}{24dt^4} + \text{etc.}$$

& ainsi des autres. Or, puisque  $\frac{dx}{dt} = p$  &  $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{a} P = \frac{ddx}{dt^2}$

d'où



d'où nous tirons outre cela :

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dP}{adt}; \quad \frac{d^4x}{dt^4} = \frac{ddP}{adt^2} \quad \text{etc.}$$

& partant les trois coordonnées cherchées seront :

$$x' = x + \tau p + \frac{\tau \tau P}{2a} + \frac{\tau^3 dP}{6a dt} + \frac{\tau^4 ddP}{24a dt^2} + \frac{\tau^5 d^3P}{120a dt^3} + \text{etc.}$$

$$y' = y + \tau q + \frac{\tau \tau Q}{2a} + \frac{\tau^3 dQ}{6a dt} + \frac{\tau^4 ddQ}{24a dt^2} + \frac{\tau^5 d^3Q}{120a dt^3} + \text{etc.}$$

$$z' = z + \tau r + \frac{\tau \tau R}{2a} + \frac{\tau^3 dR}{6a dt} + \frac{\tau^4 ddR}{24a dt^2} + \frac{\tau^5 d^3R}{120a dt^3} + \text{etc.}$$

& par le même fondement nous aurons pour le mouvement du corps

$$p' = p + \frac{\tau P}{a} + \frac{\tau^2 dP}{2a dt} + \frac{\tau^3 ddP}{6a dt^2} + \frac{\tau^4 d^3P}{24a dt^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\tau Q}{a} + \frac{\tau^2 dQ}{2a dt} + \frac{\tau^3 ddQ}{6a dt^2} + \frac{\tau^4 d^3Q}{24a dt^3} + \text{etc.}$$

$$r' = r + \frac{\tau R}{a} + \frac{\tau^2 dR}{2a dt} + \frac{\tau^3 ddR}{6a dt^2} + \frac{\tau^4 d^3R}{24a dt^3} + \text{etc.}$$

où je n'ai qu'à remarquer que les forces  $P, Q, R$  étant données, puisqu'elles dépendent en partie des coordonnées  $x, y, z$ , & en partie du lieu & du mouvement des corps dont elles résultent, leurs valeurs différentielles  $\frac{dP}{dt}, \frac{ddP}{dt^2}$  etc. seront aussi exprimées par des quantités finies & connues; de sorte que ces séries infinies expriment exactement les quantités que nous cherchons.

*Remarque I.* Si l'intervalle de tems  $\tau$  est infiniment petit, ces formules nous fournissent les mêmes valeurs que la différentiation; mais, pour peu que cet intervalle  $\tau$  soit considérable, on sentira aisément combien les déterminations différentielles s'écartent de la vérité.



*Remarque II.* Plus cet intervalle de tems  $\tau$  est pris grand, & moins les séries trouvées seront convergentes; on fera donc obligé d'en prendre d'autant plus de termes depuis le commencement, pour arriver au même point de précision. Cependant, quelque nombre de termes qu'on en veuille prendre, il ne sera jamais convenable de donner à  $\tau$  une trop grande valeur, de peur que les termes négligés ne deviennent trop considérables. Car, quoique les termes suivans soient divisés par de plus grands nombres, il arrive ordinairement que les valeurs fournies par la différentiation réitérée  $\frac{dP}{dt}$ ,  $\frac{ddP}{dt^2}$ ,  $\frac{d^3P}{dt^3}$  etc. vont aussi en augmentant, de sorte que pour la plupart la convergence dépend plutôt de la petitesse de l'intervalle  $\tau$ , que de la grandeur des dénominateurs.

*Remarque III.* Or, ayant trouvé par cette méthode l'état du corps pour le tems  $t + \tau$ ; ou bien les quantités  $x', y', z', p', q', r'$ , en les substituant au lieu des primitives  $x, y, z, p, q, r$ , on passera de la même manière encore plus loin, & on déterminera l'état du corps pour le tems  $t + 2\tau$ . Mais alors il faut que les forces  $P, Q, R$ , soient aussi connues pour le tems  $t + \tau$ , ce qu'on peut bien supposer, quand le mouvement des autres corps qui agissent sur le corps  $Z$  est connu. Mais, en cas que leur mouvement fût aussi troublé, on seroit obligé de chercher par la même méthode l'état de chacun pour le tems  $t + \tau$ , avant que de passer à un nouvel intervalle de tems  $\tau$ . Par ce moyen, en réitérant plusieurs fois les mêmes opérations, on parviendra enfin à la connoissance du mouvement pour un tems aussi éloigné de la première époque qu'on voudra, & cela sans le secours d'aucune intégration.

*Remarque IV.* Plus on prendra les intervalles de tems  $\tau$  petits pour parvenir à ce but, & plus de fois on sera obligé de répéter les mêmes opérations. Ainsi, pour le tems  $t + T$ , en prenant  $\tau = \frac{T}{n}$ , il faudra répéter ces opérations  $n$  fois. De là naît cette question

assez



assez importante : puisque dans chaque opération on admet une petite erreur, qui étant réitérée devient enfin considérable, s'il vaut mieux donner à  $\tau$  des valeurs plus petites ou plus grandes, attendu que dans le premier cas les erreurs, quoique plus petites, sont multipliées par un plus grand nombre que dans l'autre? Pour décider cette question, supposons qu'on prenne de nos séries les trois premiers termes, de sorte que l'erreur commise puisse être estimée par le quatrième terme, & partant  $= \lambda \tau^3$ . Soit maintenant le tems entier  $T = n\tau$ , de sorte que les opérations doivent être répétées  $n$  fois, & l'erreur totale sera  $= n\lambda \tau^3 = \lambda \tau T$ ; d'où l'on voit que, plus on prend l'intervalle  $\tau$  petit, & plus sera aussi petite l'erreur totale qui en résulte, nonobstant la plus grande replication: dans la supposition qu'on n'emploie dans le calcul que les trois premiers termes, l'erreur totale sera diminuée en raison du carré de l'intervalle  $\tau$ : & si l'on vouloit se servir de 4 termes, cette diminution suivroit la raison du cube de l'intervalle  $\tau$ .

*Remarque V.* Il est donc toujours fort important de prendre les intervalles de tems  $\tau$  aussi petits que les circonstances le permettent, quoiqu'en prenant plusieurs termes des séries on puisse en admettre d'assez considérables. Cependant il est aisé de se décider là-dessus: car, supposant l'erreur d'une opération  $= \lambda \tau^3$ , en employant trois termes, si l'on veut passer au tems  $T$  écoulé de la première époque, on n'a qu'à égaler  $\lambda \tau T$  à l'erreur qu'on veut éviter dans le résultat final, & de là on tirera la valeur du tems  $\tau$ . Alors il seroit bien superflu de prendre cet intervalle encore plus petit. C'est ainsi qu'on pourra atteindre à un degré de précision aussi haut qu'on souhaite, & étendre cette détermination du mouvement à des tems très éloignés, sans qu'on ait à craindre des erreurs sensibles.

### OBSERVATION.

En considérant bien cette méthode, elle me paroît si aisée & si propre à la pratique, au moyen des précautions que je viens d'indiquer,





quer, que nous pouvons aisément renoncer à la solution complète, qui se fait par l'intégration. Car, quand même on réussiroit un jour à résoudre le fameux problème des trois corps, de sorte qu'on pût déterminer en général par des expressions finies le mouvement de trois corps quelconques, qui s'attirent mutuellement, ces expressions seroient certainement si compliquées & enveloppées de toutes les quantités inconnues qui entrent dans le calcul, qu'il seroit peut-être impossible de les débrouiller & d'en faire l'application au calcul astronomique. Il faudroit sans doute recourir à des approximations extrêmement embarrassantes, & on risqueroit toujours de se tromper beaucoup plus que suivant la méthode que je viens d'indiquer. Il est bien vrai qu'une telle solution nous montreroit également l'état du mouvement des trois corps pour tous les tems, quelque éloignés qu'ils fussent d'une certaine époque pour laquelle le mouvement seroit connu, & on ne se tromperoit gueres plus après plusieurs siècles qu'après quelques heures, supposé que le mouvement eût été une fois parfaitement bien connu. Mais la moindre incertitude à cet égard, qu'on ne sauroit jamais éviter, ôtera aussi cette préférence à une solution parfaite. Pour peu qu'on se trompât dans la détermination du mouvement pour une époque fixe, les erreurs qui en résulteroient dans la suite, iroient toujours en augmentant; & après un tems très considérable, elles rendroient les conclusions aussi incertaines que la méthode proposée. Je n'hésite donc pas à préférer cette méthode à la solution parfaite du problème de trois corps, qu'on recherche avec tant d'empressement, vu que le calcul seroit non seulement incompatible plus difficile, mais que nous n'en serions pas moins incertains pour des tems fort éloignés.

Mais il y a plus: cette nouvelle méthode l'emporte aussi à d'autres égards sur la solution parfaite du problème des trois corps, quand même on seroit assez heureux pour y réussir, & que l'application au calcul n'auroit aucune difficulté; puisque, dès qu'un quatrième corps y concourroit par son action, tout le succès en seroit anéanti, à moins qu'on ne pût





pût étendre la solution à quatre corps & plus, ce qu'on ne sauroit jamais espérer, sans parler des difficultés insurmontables qui en réjailliroient sur le calcul. Mais la méthode que je propose, s'exécute avec la même facilité, quelque grand que soit le nombre des corps qui agissent sur celui dont on cherche le mouvement: on n'a qu'à en comprendre les forces dans les lettres  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , ce qui se fait sans la moindre difficulté; & quand même quelque comète surviendrait, on en tiendrait compte aussi aisément sans que le calcul en fût dérangé, ce qui ne sauroit jamais se pratiquer dans l'autre méthode, qu'on regarde comme parfaite.

Cependant je ne saurois disconvenir d'un assez grand inconvénient de ma méthode, qui est que, pour déterminer le lieu & le mouvement du corps pour quelque tems éloigné de l'époque établie dans le calcul, on est obligé de passer par tous les tems intermédiaires; & qu'on ne sauroit, par exemple, assigner la place de la Lune après un an sans calculer en même tems ses places pour tous les jours. C'est sans doute un très grand avantage des Tables Astronomiques, qu'elles nous découvrent d'abord pour tous les tems les lieux des corps célestes, sans que nous ayons besoin de suivre presque pas à pas leurs mouvemens. Si cet avantage pouvoit subsister avec tous les dérangemens auxquels les corps célestes sont assujettis, ce seroit sans doute tout ce qu'on pourroit souhaiter. Mais, comme cet avantage n'est attaché qu'aux mouvemens réguliers, & à ceux tout au plus qui ne s'en écartent pas sensiblement, nous devrions bien y renoncer quand il s'agit de connoître plus exactement toutes les inégalités qui y sont causées par leur action mutuelle. D'ailleurs, il n'est rien moins que superflu de chercher pour tous les jours, & pour des intervalles plus petits encore, les lieux des corps célestes: & ceux qui s'occupent à calculer les éphémérides, suivent précisément la même route. C'est sans doute un grand travail que de calculer le lieu de la Lune par les Tables de feu M. Meyer, tant pour le midi que pour le minuit de chaque jour, dont M. de la Lande veut bien se charger dans la Connoissance des tems: & j'ose presque assurer que, si l'on

vouloit calculer les lieux de la Lune pour les mêmes tems suivant cette nouvelle méthode, cela se pourroit faire avec moins de peine. Quand même cela couteroit un peu davantage, n'en feroit-on pas amplement récompensé par le plus haut degré de précision, qu'on atteindroit par ce moyen, en rendant tout à fait insensibles les erreurs qui dans les tables peuvent bien monter jusqu'à une minute. Mais ce n'est pas encore tout : on pourroit même, sans rendre le calcul plus pénible, tenir compte des forces que les planetes exercent sur la Lune : & il est assez vraisemblable que l'effet de Vénus & de Mars, & peut-être aussi de Jupiter, est assez sensible, lorsque ces planetes se trouvent dans leurs périégées. Comme ceux qui calculent les éphémérides, déterminent pour tous les jours les lieux de ces planetes, la considération de leurs forces sur la Lune n'augmenteroit presque point les travaux du calcul, & si l'on étoit curieux d'apprendre si la dernière comete n'a rien changé dans le mouvement de la Lune, ce seroit sans contredit le seul moyen de s'en assurer. Or, calculant pour tous les tems de suite les valeurs des trois coordonnées  $x, y, z$ , il est aisé d'en déduire les déterminations dont on se sert dans l'Astronomie : comme, si le plan  $OXY$  est celui de l'écliptique, & que la droite  $OI$  soit dirigée vers son commencement, l'angle  $XOY$  donnera la longitude, & l'angle  $YOZ$  la latitude ; & je ne crois pas qu'il en valût la peine, de transformer nos formules primitives, pour en tirer immédiatement ces angles avec la distance  $OZ$ . Surtout, quand les dérangemens sont très considérables, on fera mieux de s'en tenir aux formules les plus simples. Mais, pour satisfaire à ceux qui, selon la maniere reçue parmi les Astronomes, voudroient être éclaircis sur les absides, excentricités, lignes des nœuds & inclinaisons des orbites, & les changemens causés dans ces élémens, je vais ajuster les formules primitives à ce dessein.

*Sur la ligne des nœuds & l'inclinaison de l'orbite.*

La direction du mouvement du corps  $Z$  avec le point fixe  $O$  détermine un plan, qu'on nomme le plan où le corps se meut à présent, ou le plan de son orbite, & qui coupera le plan fixe  $OXY$ , auquel



quel on rapporte le mouvement, selon une ligne droite  $ON$ , qu'on nomme la ligne des nœuds. Ici il y a deux choses qu'il faut introduire dans le calcul, premièrement la position de cette ligne des nœuds  $ON$ , ou l'angle  $ION$ , qu'on nomme la longitude du nœud, & ensuite l'inclinaison de l'orbite au plan fixe  $OXY$ , ou bien l'angle que fait avec ce plan celui qui passe par le point  $Z$  & la ligne  $ON$ . Posons donc

la longitude du nœud, ou l'angle  $ION = \psi$

& l'inclinaison de l'orbite au plan fixe  $= \omega$ .

Outre cela, pour rapporter le lieu du corps  $Z$  à ces élémens, soit l'angle que fait la ligne  $OZ$  avec la ligne des nœuds  $ON$  qu'on nomme l'argument de latitude, ou l'angle  $ZON = \sigma$ . Lorsque le mouvement du corps se fait dans le même plan, les deux angles  $\psi$  &  $\omega$  demeurent invariables, ce qui arrive dans le mouvement régulier. Mais, dans le mouvement irrégulier, que j'ai ici principalement en vue, il faut considérer ces élémens comme variables, & alors leur variabilité se trouve dans un certain rapport avec l'angle  $\sigma$ , qu'on détermine le plus commodément par la Trigonométrie sphérique.

I. En plaçant le point fixe  $O$  dans le centre de la sphère, le plan fixe représentera sur la surface le grand cercle  $INP$ , sur lequel la ligne des nœuds marque le point  $N$ , & la direction fixe  $OI$  le point  $I$ ; or  $Z$  soit le lieu apparent du corps sur la surface de la sphère. Qu'on tire l'arc d'un grand cercle  $ZN$ , qui représente le plan de l'orbite, & cet arc sera mesuré par l'argument de latitude  $\sigma = NOZ$ : enfin l'angle  $PNZ$  sera le même que celui de l'inclinaison  $\omega$ , de sorte que nous ayons sur la sphère

Fig. 2.

l'arc  $IN = \psi$ ; l'arc  $NZ = \sigma$  & l'angle  $PNZ = \omega$ .

II. Maintenant, si la ligne des nœuds avec l'inclinaison est variable, ou bien que le plan de l'orbite change, il faut bien que ce plan changé passe encore par le même point  $Z$ , puisque le lieu du corps peut être regardé comme commun à l'un & l'autre état. Supposons

donc que dans un instant la ligne des nœuds passe en  $n$ , & que le plan de l'orbite soit alors l'arc  $nZ$ : nous obtiendrons par-là  $Nn = d\psi$  & l'inclinaison changée  $PnZ = \omega + d\omega$ . Qu'on tire  $nm$  perpendiculaire sur  $NZ$ ; & on aura  $Nm = d\psi \cos \omega$ , donc  $Zn = \sigma - d\psi \cos \omega$ , de sorte que  $-d\psi \cos \omega$  puisse être considéré comme le différentiel de  $\sigma$ .

III. Donc, tirant de  $Z$  sur le cercle  $IP$  l'arc  $ZP$  perpendiculairement, puisque le triangle  $ZN P$  donne  $\sin ZP = \sin \sigma \sin \omega$ , & le triangle  $Zn P$  donne  $\sin ZP = \sin (\sigma - d\psi \cos \omega) \sin (\omega + d\omega)$ , il est clair que le différentiel de la formule  $\sin \sigma \sin \omega$  évanouit en posant  $d\sigma = -d\psi \cos \omega$ . De là nous tirons:

$$-d\psi \cos \omega \cdot \cos \sigma \sin \omega + d\omega \sin \sigma \cos \omega = 0, \text{ donc } d\psi = \frac{d\omega \sin \sigma}{\cos \sigma \sin \omega}$$

& partant les changemens de la ligne des nœuds & de l'inclinaison dépendent de telle sorte l'un de l'autre, que connoissant l'un on détermine aisément l'autre, ce qui nous sera d'un très grand secours dans les recherches suivantes.

IV. Cette représentation sur la sphere nous fournit encore d'autres déterminations, qui demanderoient sans ce moyen des calculs assez pénibles. D'abord, supposant que le corps parvienne de  $Z$  en  $z$  pendant que la ligne des nœuds avance de  $N$  en  $n$ , l'argument de latitude sera à présent l'arc  $nZz$ , & partant  $= \sigma + d\sigma$ : mais nous venons de trouver  $nZ = \sigma - d\psi \cos \omega$ , par conséquent nous aurons  $Zz = d\sigma + d\psi \cos \omega$ . Or  $Zz$  marque l'angle élémentaire que le corps  $Z$  décrit un instant autour du point fixe  $O$ ; donc, si nous posons cet angle  $= d\Phi$ , nous aurons

$$d\Phi = d\sigma + d\psi \cos \omega, \text{ ou bien } d\sigma = d\Phi - d\psi \cos \omega$$

V. De là nous définirons aussi aisément le changement même qui se fait dans le plan de l'orbite, ou combien après un instant le plan de l'orbite est incliné à son plan précédent. Il est évident que l'angle  $NZn$  exprime ce changement élémentaire. Or cet angle se trouve

ve



ve  $NZn = mn : \sin NZ$ , qui à cause de  $mn = d\psi \sin \omega$  se réduit à

$$NZn = \frac{d\psi \sin \omega}{\sin \sigma} = \frac{d\omega}{\cos \sigma}$$

de sorte que cet angle est toujours plus grand que le changement de l'inclinaison.

*Introduction de ces nouveaux élémens dans le calcul.*

I. Posant donc l'angle  $ION = \psi$ , qu'on tire du point Y sur la ligne des nœuds ON, la perpendiculaire YN, & la droite ZN y étant aussi perpendiculaire, l'angle YNZ mesurera l'inclinaison de l'orbite, de sorte que  $YNZ = \omega$ . Ensuite, tirant la droite OZ, nous aurons l'angle  $NOZ = \sigma$ . Soit maintenant la distance du corps Z au point fixe O, ou  $OZ = v$ , & de là nous aurons: Fig. 3.

$$ON = v \cos \sigma \quad \& \quad ZN = v \sin \sigma$$

d'où le triangle NZY fournit

$$ZY = v \sin \sigma \sin \omega \quad \& \quad NY = v \sin \sigma \cos \omega.$$

De là nous déterminerons nos trois coordonnées de la manière suivante

$$OX = x = ON \cos \psi - NY \sin \psi = v \cos \sigma \cos \psi - v \sin \sigma \cos \omega \sin \psi$$

$$XY = y = ON \sin \psi + NY \cos \psi = v \cos \sigma \sin \psi + v \sin \sigma \cos \omega \cos \psi$$

$$\& \quad YZ = z = v \sin \sigma \sin \omega.$$

II. Que dans le tems  $dt$  le corps avance de Z en  $z$ , pour avoir  $Oz = v + dv$ , & puisque l'angle élémentaire  $ZOz = d\phi = d\sigma + d\psi \cos \omega$ , comme nous venons de trouver, nous aurons l'élément  $Zz = V(dv^2 + vv d\phi^2)$ . Mais, par les coordonnées, ce même élément est  $Zz = V(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , de sorte que

$$dv^2 + vv d\phi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



& partant prenant les différentiels, en écrivant pour  $ddx$ ,  $ddy$ ,  $ddz$ , leurs valeurs des formules primitives:

$$d.(dv^2 + vv d\phi^2) = \frac{2 dt^2}{a} (Pdx + Qdy + Rdz)$$

ou en indiquant seulement les intégrales:

$$dv^2 + vv d\phi^2 = \frac{2 dt^2}{a} f(Pdx + Qdy + Rdz).$$

III. Mais, pour éliminer aussi les différentiels  $dx$ ,  $dy$  &  $dz$ , je remarque que les différentiels qui se rapportent au changement du point  $Z$ , doivent provenir les mêmes, soit qu'on prenne les angles  $\psi$  &  $\omega$  variables, soit qu'on les suppose constans, en mettant alors  $d\sigma = d\phi$ , puisque le point  $z$  appartient également au plan primitif de l'orbite qu'au changé: cette remarque abrégera très considérablement les différentiations que nous avons à faire; cependant si l'on veut se donner la peine de différentier en général, on arrivera aux mêmes résultats, pourvu qu'on tienne compte de  $d\psi = \frac{d\omega \sin \sigma}{\cos \sigma f\omega}$ , & qu'on mette  $d\phi$  à la place de  $d\sigma + d\psi \cos \omega$ .

IV. Ayant donc par les formules trouvées

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos \sigma \cos \psi}{\sin \sigma \sin \omega} - \frac{\cos \omega f\psi}{f\omega} \quad \& \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos \sigma f\psi}{f\sigma f\omega} + \frac{\cos \omega \cos \psi}{f\omega}$$

nous en tirerons par la différentiation

$$\frac{z dx - x dz}{zz} = \frac{-d\phi \cos \psi}{f\sigma^2 f\omega} \quad \& \quad \frac{z dy - y dz}{zz} = \frac{-d\phi f\psi}{f\sigma^2 f\omega}.$$

Multiplions, par  $zz = vv \sin \sigma^2 \sin \omega^2$ , & nous aurons

$$x dz - z dx = vv d\phi f\omega \cos \psi \quad \& \quad y dz - z dy = vv d\phi \sin \omega \sin \psi,$$

& en combinant ces deux équations:

$$z(x dy - y dx) = vv d\phi f\omega (y \cos \psi - x f\psi) = v^3 d\phi f\sigma f\omega \cos \omega$$

d'où s'ensuit  $x dy - y dx = vv d\phi \cos \omega$ .

V. Ces



V. Ces formules sont très propres à l'application de nos équations primitives, qui nous fournissent

$$x d d z - z d d x = d. v v d \phi f \omega \cos \psi = \frac{d t^2}{a} (R x - P z)$$

$$y d d z - z d d y = d. v v d \phi f \omega \sin \psi = \frac{d t^2}{a} (R y - Q z)$$

$$x d d y - y d d x = d. v v d \phi \cos \omega = \frac{d t^2}{a} (Q x - P y)$$

dont les deux premières donnent par le développement :

$$\cos \psi d. v v d \phi f \omega - v v d \phi d \psi f \omega \sin \psi = \frac{d t^2}{a} (R x - P z)$$

$$\sin \psi d. v v d \phi f \omega + v v d \phi d \psi f \omega \cos \psi = \frac{d t^2}{a} (R y - Q z)$$

d'où éliminant le membre  $d. v v d \phi f \omega$

$$v v d \phi d \psi f \omega = \frac{d t^2}{a} (R (y \cos \psi - x \sin \psi) + z (P \sin \psi - Q \cos \psi))$$

$$\text{ou } v v d \phi d \psi f \omega = \frac{d t^2}{a} (R v f \sigma \cos \omega + v f \sigma f \omega (P \sin \psi - Q \cos \psi))$$

$$\text{donc } d \psi = \frac{d t^2 \sin \sigma}{a v d \phi} (R \cot \omega + P \sin \psi - Q \cos \psi)$$

$$\& \quad \frac{d \omega}{\sin \omega} = \frac{d t^2 \cos \sigma}{a v d \phi} (R \cot \omega + P \sin \psi - Q \cos \psi).$$

Ces deux équations renferment les variations que la ligne des nœuds & l'inclination de l'orbite subissent.

VI. Mais, en éliminant des deux équations précédentes l'élément  $d \psi$ , nous obtiendrons :

$$d. v v d \phi \sin \omega = \frac{d t^2}{a} (R (x \cos \psi + y \sin \psi) - z (P \cos \psi + Q \sin \psi))$$

qu'on



qu'on combinera avec succès avec la troisième de l'art. préc.

$$d. vv d\phi \cos \omega = \frac{dt^2}{a} (Qx - Py).$$

Or, en développant ces deux différentiels, & en éliminant tantôt le différentiel de  $vv d\phi$ , tantôt  $d\omega$ , nous trouverons enfin en substituant à  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , les valeurs trouvées ci-dessus :

$$vv d\phi d\omega = \frac{v dt^2 \cos \sigma}{a} (R \cos \omega + P f\omega f\psi - Q f\omega \cos \psi) \&$$

$$d. vv d\phi = \frac{v dt^2}{a} (R \cos \sigma f\omega - P (f\sigma \cos \psi + \cos \sigma f\psi \cos \omega) - Q (f\sigma f\psi - \cos \sigma \cos \psi \cos \omega))$$

dont celle-là convient avec la dernière que j'ai trouvée tantôt. Or celle-ci étant multipliée par  $2vv d\phi$  & intégrée, donne :

$$v^4 d\phi^2 = \frac{2 dt^2}{a} f v^3 d\phi (R \cos \sigma f\omega - P (f\sigma \cos \psi + \cos \omega) - Q (f\sigma f\psi - \cos \sigma \cos \psi \cos \omega))$$

d'où l'on obtient la valeur de  $vv d\phi^2$  pour la première équation trouvée N°. II.

VII. Il ne reste donc qu'à définir les valeurs des différentiels  $dx$ ,  $dy$  &  $dz$ , pour les substituer dans la première équation. Or, pour  $dz$  ayant  $dz = dv + d\sigma + d\omega$ , on trouve

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma \cos \sigma}{f\sigma} + \frac{d\omega \cos \omega}{f\omega}$$

qui, à cause de  $d\omega = \frac{d\psi \cos \sigma f\omega}{f\sigma}$  &  $d\sigma = d\phi - d\psi \cos \omega$ ,

ou simplement de  $d\sigma = d\phi - \frac{d\omega f\sigma \cos \omega}{\cos \sigma f\omega}$ , se réduit à

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\phi \cos \sigma}{f\sigma} \text{ ou } dz = dv f\sigma f\omega + v d\phi \cos \sigma f\omega.$$

En-





Ensuite nous tirons des autres formules de N<sup>o</sup>. IV.

$$dx = \frac{x dz}{z} + \frac{v d\phi \cos \psi}{f \sigma} \quad \& \quad dy = \frac{y dz}{z} - \frac{v d\phi f \psi}{f \sigma}$$

qui se réduisent à ces formes :

$$dx = \frac{x dv}{v} - v d\phi (f \sigma \cos \psi + \cos \sigma \cos \omega \sin \psi)$$

$$dy = \frac{y dv}{v} - v d\phi (f \sigma \sin \psi - \cos \sigma \cos \omega \cos \psi)$$

dont on peut substituer les valeurs dans l'équation

$$d.(dv^2 + vv d\phi^2) = \frac{2 dt^2}{a} (P dx + Q dy + R dz).$$

VIII. Les formules composées d'angles, qui entrent dans ces équations, peuvent très commodément se représenter par la Trigonométrie sphérique. Soit pour cet effet comme ci-dessus :

l'arc IN =  $\psi$ ; l'arc NZ =  $\sigma$  & l'angle KNZ =  $\omega$ ;  
qu'on prolonge l'arc IN jusqu'en K, & l'arc ZN jusqu'en V de sorte que IK & ZV soient des quarts de cercle, & qu'on tire les arcs de grands cercles IZ, KZ, IV & KV, de même que les perpendiculaires ZP & VQ sur IK. Cela posé, on aura

$\sin ZP = \sin \sigma \sin \omega$  :  $\sin VQ = \cos \sigma \sin \omega$   
 $\cos IZ = \cos \sigma \cos \psi - \sin \sigma \sin \psi \cos \omega$  :  $\cos KZ = \cos \sigma f \psi + \sin \sigma \cos \psi c. \omega$   
 $\cos IV = \sin \sigma \cos \psi + \cos \sigma \sin \psi \cos \omega$  :  $\cos KV = \sin \sigma f \psi - \cos \sigma c. \psi c. \omega$   
d'où nous tirons :

$$\begin{aligned} x &= v \cos IZ; \quad y = v \cos KZ; \quad z = v \sin ZP \\ dx &= dv \cos IZ - v d\phi \cos IV; \quad dy = dv \cos KZ - v d\phi \cos KV; \\ dz &= dv \sin ZP + v d\phi \sin VQ. \end{aligned}$$



IX. Mais, sans entrer dans un plus grand détail de ces formules, qui dépendent des forces dont le corps est sollicité, je me bornerai à montrer comment on doit s'y prendre pour les résoudre par la méthode générale que je viens de proposer. Or les deux dernières équations étant développées donnent

$$2vdvd\phi + vvdd\phi = \frac{vdt^2}{a} (R \sin VQ - P \cos IV - Q \cos KV)$$

$$dvddv + vdv d\phi^2 + vv d\phi dd\phi = \frac{dt^2}{a} (P dv \cos IZ + Q dv \cos KZ + R dv \sin ZP - \frac{vdt^2 d\phi}{a} (P \cos IV + Q \cos KV - R \sin VQ))$$

Otons de celle-ci celle-là multipliée par  $d\phi$ , & divisant par  $dv$  nous aurons :

$$ddv - vd\phi^2 = \frac{dt^2}{a} (P \cos IZ + Q \cos KZ + R \sin ZP)$$

& divisant la première par  $v$  :

$$2dv d\phi + vdd\phi = \frac{dt^2}{a} (R \sin VQ - P \cos IV - Q \cos KV).$$

X. Soit maintenant  $dv = p dt$ ;  $d\phi = q dt$ ,  $d\psi = r dt$ , & partant

$$d\omega = \frac{r dt \cos \sigma \sin \omega}{\sin \sigma} \quad \& \quad d\sigma = dt (q - r \cos \omega) \text{ de sorte que}$$

$$dp = vqq dt + \frac{dt}{a} (P \cos IZ + Q \cos KZ + R \sin ZP)$$

$$dq = -\frac{2pq dt}{v} + \frac{dt}{av} (R \sin VQ - P \cos IV - Q \cos KV)$$

$$\& \quad r = \frac{dt \sin \sigma}{avq} (R \cot \omega + P \sin \psi - Q \cos \psi).$$

Donc



Donc, si pour une époque donnée, qui répond au tems  $t$ , on connoît les quantités  $v, \phi, p, q, \psi, \omega$  &  $\sigma$ , on en trouvera pour tout autre tems  $t + \tau$  ces mêmes élémens  $v', \phi', p', q', \psi', \omega', \sigma'$ , par la formule générale  $z' = z + \frac{\tau dz}{dt} + \frac{\tau^2 d^2z}{2 dt^2} + \frac{\tau^3 d^3z}{6 dt^3} + \text{etc.}$  en sorte que

$$v' = v + \tau p + \frac{\tau \tau dp}{2 dt} + \frac{\tau^3 d^2p}{6 dt^2}$$

$$\phi' = \phi + \tau q + \frac{\tau \tau dq}{2 dt} + \frac{\tau^3 d^2q}{6 dt^2} + \text{etc.}$$

$$p' = p + \frac{\tau dp}{dt} + \frac{\tau \tau d^2p}{2 dt^2} + \frac{\tau^3 d^3p}{6 dt^3} + \text{etc.}$$

$$q' = q + \frac{\tau dq}{dt} + \frac{\tau \tau d^2q}{2 dt^2} + \frac{\tau^3 d^3q}{6 dt^3} + \text{etc.}$$

$$\psi' = \psi + \tau r + \frac{\tau \tau dr}{2 dt} + \frac{\tau^3 d^2r}{6 dt^2}$$

$$\omega' = \omega + \frac{\tau d\omega}{dt} + \frac{\tau \tau d^2\omega}{2 dt^2} + \frac{\tau^3 d^3\omega}{6 dt^3} + \text{etc.}$$

$$\sigma' = \sigma + \frac{\tau d\sigma}{dt} + \frac{\tau \tau d^2\sigma}{2 dt^2} + \frac{\tau^3 d^3\sigma}{6 dt^3} + \text{etc.}$$

XI. Je remarque ici, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer pour chaque tems l'angle  $\phi$ , qui n'existe presque que dans notre imagination; il suffit de savoir la valeur de  $\frac{d\phi}{dt} = q$ , pour en trouver l'argument de latitude  $\sigma$ : ainsi on peut entièrement se passer de l'angle  $\phi$ . Cependant il n'est que trop évident que cette manière de concevoir le mouvement du corps, est beaucoup plus embarrassante & plus pénible que celle que j'ai proposée au commencement, où j'ai calculé immédiatement les trois coordonnées qui déterminent le mouve-



ment du corps: & on se précipiteroit encore dans un plus grand embarras, si l'on vouloit introduire dans le calcul la ligne des absides avec l'excentricité. Et partant je conseille à ceux qui voudront se servir de cette méthode pour déterminer les dérangemens des corps célestes, de s'en tenir aux premières règles, & d'appliquer le calcul immédiatement aux trois coordonnées.

### APPLICATION DE CETTE MÉTHODE *aux forces réelles du Ciel.*

Fig. f.

Soit A la masse du corps auquel on veut rapporter le mouvement des autres corps, & qu'on regarde comme étant en repos, quoiqu'il ait un mouvement quelconque. Que B soit la masse du corps en B, dont nous cherchons principalement le mouvement; & qu'un troisième corps qui y agit soit en C, la masse étant = C. Sur un plan fixe tiré par A, on baïsse de B & C les perpendiculaires BY & Cy, & de là à la droite fixe AI les perpendiculaires YX & yx, pour avoir pour le lieu de chaque corps les trois coordonnées, que je nommerai:

$AX = x$ ;  $XY = y$ ;  $YB = z$ :  $Ax = r$ ;  $xy = \eta$ ;  $yC = \zeta$ ;  
soient outre cela les distances au corps A

$AB = v$  &  $AC = v$ , de sorte que

$$vv = xx + yy + zz \quad \& \quad vv = rr + \eta\eta + \zeta\zeta.$$

Ensuite, soit la distance  $BC = w$  & on aura

$$ww = (x - r)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = vv + vv - 2xr - 2y\eta - 2z\zeta.$$

Cela posé, le corps B est premièrement attiré par le corps A par la force =  $\frac{A}{vv}$ , & ensuite par le corps C par la force =  $\frac{C}{ww}$ , qu'on décompose selon les directions BA & BE, parallèles à AC, d'où résulte la force selon

$BA = \frac{Cv}{w^3}$  & selon  $BE = \frac{Cv}{w^3}$ . Or, le corps A étant lui-même

attiré par le corps B par la force selon  $AB = \frac{B}{vv}$ , & par le corps C par la  
force



force selon  $AC = \frac{C}{v^3}$ , pour maintenir le corps A en repos, il faut transporter ces deux forces en sens contraire sur le corps B, d'où les forces qui agissent sur le corps B, se réduisent à ces deux :

$$\text{selon } BA = \frac{A+B}{v^3} + \frac{Cv}{w^3}; \text{ \& selon } BE = \frac{Cv}{w^3} - \frac{C}{v^3}$$

d'où l'on tirera les forces P, Q, R, qui agissent sur le corps B selon les directions des trois coordonnées AX, XY & YB, qui seront exprimées de cette sorte :

$$P = -x \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + x \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{v^3} \right)$$

$$Q = -y \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + y \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{v^3} \right)$$

$$R = -z \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + z \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{v^3} \right)$$

& maintenant le mouvement du corps B sera contenu dans ces trois formules

$$addx = Pdt^2; \quad addy = Qdt^2; \quad addz = Rdt^2.$$

*Méthode de déterminer le mouvement de trois corps  
qui s'attirent mutuellement.*

Puisque le mouvement du corps C est aussi bien connu que celui du corps B, il est aisé d'en exprimer le mouvement par des formules semblables; qu'on pose pour cet effet :

$$\mathfrak{P} = -x \left( \frac{A+C}{v^3} + \frac{B}{w^3} \right) + x \left( \frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3} \right)$$

$$\mathfrak{Q} = -y \left( \frac{A+C}{v^3} + \frac{B}{w^3} \right) + y \left( \frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3} \right)$$

$$\mathfrak{R} = -z \left( \frac{A+C}{v^3} + \frac{B}{w^3} \right) + z \left( \frac{B}{w^3} - \frac{B}{v^3} \right)$$





& le mouvement du corps C sera déterminé par ces trois formules

$$a \, dd\mathfrak{x} = \mathfrak{P} \, dt^2; \quad a \, dd\mathfrak{y} = \Omega \, dt^2; \quad a \, dd\mathfrak{z} = \mathfrak{R} \, dt^2.$$

Voyons maintenant quel usage on peut tirer de ces six formules, pour déterminer le mouvement des deux corps B & C.

I. Or d'abord il faut supposer que, pour une certaine époque qui répond au tems  $t$ , tant le lieu que le mouvement de chaque corps B & C est connu, & partant les quantités suivantes, entant qu'elles répondent au tems  $t$  sont données

$$x, y, z \quad \& \quad \frac{dx}{dt} = p; \quad \frac{dy}{dt} = q; \quad \frac{dz}{dt} = r$$

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \quad \& \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{p}; \quad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{q}; \quad \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \mathfrak{r}$$

& ensuite les formules trouvées nous fournissent :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{a} P; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{a} Q; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{a} R;$$

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \frac{1}{a} \mathfrak{P}; \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \frac{1}{a} \mathfrak{Q}; \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{1}{a} \mathfrak{R}.$$

II. De là on peut passer aux différentiels plus hauts, ayant

$$\frac{dv}{dt} = \frac{xp + yq + zr}{v}; \quad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q} + \mathfrak{z}\mathfrak{r}}{\mathfrak{v}} \quad \&$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(x - \mathfrak{x})(p - \mathfrak{p}) + (y - \mathfrak{y})(q - \mathfrak{q}) + (z - \mathfrak{z})(r - \mathfrak{r})}{w}$$

d'où l'on formera les valeurs :

$$\frac{dP}{dt}; \quad \frac{dQ}{dt}; \quad \frac{dR}{dt} \quad \& \quad \frac{d\mathfrak{P}}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{Q}}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt}$$

qui renfermeront, outre les coordonnées  $x, y, z$  &  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ , encore les lettres  $p, q, r$  &  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$  pareillement connues. Or les diffé-  
ren-



rentielles de celles-ci étant aussi connues; on trouvera aussi les formules différentielles suivantes:

$$\frac{ddP}{dt^2}; \quad \frac{ddQ}{dt^2}; \quad \frac{ddR}{dt^2} \quad \& \quad \frac{dd\mathfrak{P}}{dt^2}; \quad \frac{dd\Omega}{dt^2}; \quad \frac{dd\mathfrak{R}}{dt^2}$$

lesquelles renfermant, outre les lettres précédentes, encore les quantités  $P, Q, R$  &  $\mathfrak{P}, \Omega, \mathfrak{R}$ , dont nous avons déjà assigné les différentielles, on pourra par la différentiation réitérée parvenir aux valeurs différentielles plus hautes, aussi loin qu'on le jugera à propos.

III. Ayant déterminé toutes ces valeurs, on en tirera aisément tant les lieux que les mouvemens de nos deux corps B & C, après un tems  $\tau$  écoulé depuis l'époque marquée. Car, marquant pour le lieu de l'un & de l'autre corps les coordonnées par les lettres  $x', y', z'$ , &  $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ , & pour leur mouvement les vitesses selon ces trois directions par les lettres

$$p' = \frac{dx'}{dt}; \quad q' = \frac{dy'}{dt}; \quad r' = \frac{dz'}{dt}; \quad \& \quad \mathfrak{p}' = \frac{d\mathfrak{x}'}{dt}; \quad \mathfrak{q}' = \frac{d\mathfrak{y}'}{dt}; \quad \mathfrak{r}' = \frac{d\mathfrak{z}'}{dt}$$

on aura: pour le corps B

$$x' = x + \tau p + \frac{\tau^2 P}{2a} + \frac{\tau^3 dP}{6a dt} \dots; \quad p' = p + \frac{\tau P}{a} + \frac{\tau^2 dP}{2a dt} \dots$$

$$y' = y + \tau q + \frac{\tau^2 Q}{2a} + \frac{\tau^3 dQ}{6a dt} \dots; \quad q' = q + \frac{\tau Q}{a} + \frac{\tau^2 dQ}{2a dt} \dots$$

$$z' = z + \tau r + \frac{\tau^2 R}{2a} + \frac{\tau^3 dR}{6a dt}; \quad r' = r + \frac{\tau R}{a} + \frac{\tau^2 dR}{2a dt}$$

& de la même manière pour le corps C

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + \tau \mathfrak{p} + \frac{\tau^2 \mathfrak{P}}{2a} + \frac{\tau^3 d\mathfrak{P}}{6a dt} \dots; \quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{p} + \frac{\tau \mathfrak{P}}{a} + \frac{\tau^2 d\mathfrak{P}}{2a dt} \dots$$

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{y} + \tau \mathfrak{q} + \frac{\tau^2 \Omega}{2a} + \frac{\tau^3 d\Omega}{6a dt} \dots; \quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + \frac{\tau \Omega}{a} + \frac{\tau^2 d\Omega}{2a dt} \dots$$

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} + \tau \mathfrak{r} + \frac{\tau^2 \mathfrak{R}}{2a} + \frac{\tau^3 d\mathfrak{R}}{6a dt} \dots; \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \frac{\tau \mathfrak{R}}{a} + \frac{\tau^2 d\mathfrak{R}}{2a dt} \dots$$



IV. Plus on prend petit l'intervalle de tems  $\tau$ , & moins on a besoin de termes dans ces expressions; & je crois même qu'on feroit fort bien de ne prendre le tems  $\tau$  qu'assez grand, pour qu'on pût se passer des termes qui renferment les différentiels des quantités  $P, Q, R$  &  $\mathfrak{P}, \Omega, \mathfrak{N}$ , sans porter aucune atteinte à la précision. Par là on sera dispensé du travail assez ennuyeux de chercher ces valeurs différentielles qui deviendroient extrêmement compliquées. Alors, ayant déterminé l'état des deux corps pour le tems  $t + \tau$ , on poursuivra de la même manière le calcul pour arriver à des tems plus éloignés de la première époque, en prenant les précautions que j'ai indiquées ci-dessus.

V. Je crois que cette méthode est non seulement la plus simple qu'on puisse employer dans ces recherches, mais qu'elle est aussi la seule qu'on puisse pratiquer avec succès. En effet, quand même on réussiroit à trouver les intégrales des formules différentio-différentielles qui renferment le mouvement désiré, ce qu'on ne sauroit pourtant espérer, je suis assuré qu'on feroit toujours mieux de se servir de la méthode que je viens d'exposer, & qu'on pourroit même porter les recherches à un plus haut degré de précision. Outre cela, on comprend aisément qu'on peut étendre cette méthode avec le même succès à l'attraction de quatre corps & plus, sans que le calcul devienne beaucoup plus embarrassé: de la même manière que l'action du corps C a été ici introduite dans le calcul, on y introduiroit encore celle d'un corps D, & même de plusieurs E, F etc. Les règles exposées seront aussi suffisantes pour déterminer le mouvement de chacun séparément.

VI. Mais ordinairement, quand on recherche les dérangemens dans le mouvement d'un corps céleste, on peut regarder comme connu le mouvement des autres corps qui causent ces dérangemens. Car, quoique leur mouvement souffre aussi par leur action mutuelle, on peut toujours le considérer comme à peu près connu, & cela suffit, puisqu'une petite erreur dans la position du corps-troublant n'est presque d'au-

cune



cune conséquence dans le corps troublé. Cependant, puisqu'il est aussi intéressant de connoître en même tems les dérangemens de tous les corps, rien n'empêche qu'on ne mette d'abord en pratique la méthode que je viens de proposer.

Mais, si les dérangemens sont fort petits & qu'on veuille se contenter d'un moindre degré de précision, je ne disconviens point qu'il vaut alors mieux déterminer ces dérangemens dans les élémens, par lesquels les Astronomes ont accoutumé de représenter les orbites des corps célestes. Pour cette raison, j'ajoute les recherches suivantes.

*Sur la détermination des dérangemens extrêmement petits.*

Outre les dénominations employées ci-dessus, soit AN la ligne des nœuds pour l'orbite du corps B, & posons :

la longitude du nœud  $IAN = \psi$

l'inclinaison de l'orbite ou l'angle  $BNY = \omega$

l'argument de latitude ou l'angle  $NAB = \sigma$

la distance AB étant  $= v$ , & l'angle élémentaire décrit par le corps B, dans le tems  $dt$ , autour de A  $= d\phi$ .

Cela posé, nous avons vu que les coordonnées sont exprimées ainsi :

$$x = v(\cos\sigma \cos\psi - \sin\sigma \sin\psi \cos\omega); \quad y = v(\cos\sigma \sin\psi + \sin\sigma \cos\psi \cos\omega)$$

$$\& \quad z = v \sin\sigma \sin\omega.$$

Ensuite, pour le corps C soit

la longitude ou l'angle  $I Ay = \zeta$

la latitude ou l'angle  $yAC = \eta$

& la distance AC  $= u$ , que j'ai indiquée auparavant par la lettre allemande  $\vartheta$ . De là nous aurons les coordonnées :

$$x = u \cos\eta \cos\zeta; \quad y = u \cos\eta \sin\zeta \quad \& \quad z = u \sin\eta,$$

d'où nous tirons  $x\xi + y\eta = vu \cos\eta (\cos\sigma \cos(\zeta - \psi) + \sin\sigma \sin(\zeta - \psi) \cos\omega)$



donc  $x\xi + y\eta + z\zeta = vu (\sin \eta \cos \sigma \cos \omega + \cos \eta \cos \sigma \cos (\zeta - \psi) + \cos \eta \sin \sigma \sin (\zeta - \psi) \cos \omega)$ ,

formule qui exprime le cosinus de l'angle  $BAC$  multiplié par  $vu$ : donc, posant cet angle  $BAC = \theta$ , de sorte que

$$\cos \theta = \sin \eta \cos \sigma \cos \omega + \cos \eta \cos \sigma \cos (\zeta - \psi) + \cos \eta \sin \sigma \sin (\zeta - \psi) \cos \omega,$$

nous aurons  $ww = vv + uu - 2vu \cos \theta$ , & de là nos trois forces qui agissent sur le corps  $B$  seront:

$$P = -x \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + u \cos \eta \cos \zeta \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$Q = -y \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + u \cos \eta \sin \zeta \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$R = -z \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + u \sin \eta \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

Substituons maintenant ces formules dans les équations trouvées ci-dessus, qui expriment les dérangemens de ces élémens; & nous trouvons:

$$Px + Qy + Rz = -vv \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + vu (\sin \eta \cos \sigma \cos \omega + \cos \eta \cos \sigma \cos (\zeta - \psi) + \cos \eta \sin \sigma \sin (\zeta - \psi) \cos \omega) \text{ par } \left( \frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3} \right)$$

$$\text{ou bien } Px + Qy + Rz = -vv \left( \frac{A+B}{v^3} + \frac{C}{w^3} \right) + vu \cos \theta \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right).$$

Ensuite, selon la Fig. 4.

$$R \sin VQ - P \cos IV - Q \cos KV = u \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right) (\sin \eta \cos \sigma \sin \omega - \cos \eta \cos \sigma \cos (\zeta - \psi) + \cos \eta \cos \sigma \sin (\zeta - \psi) \cos \omega),$$

où je remarque que cette formule provient de la précédente, si l'on y met  $\cos \sigma$  au lieu de  $\sin \sigma$ , &  $-\sin \sigma$  au lieu de  $\cos \sigma$ , ou bien le





le négatif de celle-ci résulte de celle-là, si l'on y écrit  $-(90^\circ - \sigma)$  au lieu de  $\sigma$ .

Enfin, la troisième formule devient

$$R \cot \omega + P \cot \psi - Q \cot \phi = u \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right) \left( \frac{f \eta \cot \omega}{\sin \omega} - \cot \eta \cot (\zeta - \psi) \right).$$

Pour comprendre mieux la nature de ces expressions, nous n'avons qu'à transporter tout à la Trigonométrie sphérique de la même manière que ci-dessus dans la Fig. 4.

Que le grand cercle  $INy$  représente donc le plan fixe, &  $B$  &  $C$  les lieux de ces deux corps, vus du corps  $A$ , qu'on doit concevoir dans le centre de la sphère. Soit  $N$  le lieu du nœud, de sorte que  $IN = \psi$ , l'angle  $yNB = \omega$ , & l'arc  $NB = \sigma$ ; ensuite pour l'autre corps  $C$ , on a

la longitude  $Iy = \zeta$ , & la latitude  $yC = \eta$

de sorte que  $Ny = \zeta - \psi$ , & il est clair que l'arc  $BC$  est représenté par l'angle  $\theta$ . Qu'on prenne maintenant  $NV = 90^\circ - \sigma$ , ou bien soit l'arc  $BNV$  un quart de cercle, & le cosinus de l'arc  $VC$  pris négativement sera la même expression qui se trouve dans la seconde formule: ou bien, prenant l'arc  $VQ$  aussi égal à un quart de cercle, la dite formule est exprimée par  $\sin CQ$  de sorte que

$$R \sin VQ = P \cot IV - Q \cot KV = u \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right) \sin CQ.$$

Pour la troisième, qu'on continue les arcs  $NB$  &  $yC$  jusqu'à leur concurrence en  $S$ , & on aura

$$\tan yS = \tan \omega \sin (\zeta - \psi) \quad \& \quad \sin S = \frac{\cot \omega}{\cot yS}.$$

De  $C$  tirons sur l'arc  $NB$  la perpendiculaire  $CR$ , & nous aurons:

$$\sin CR = \sin CS \cdot \sin S = fS (f yS \cot \eta - \cot yS \sin \eta)$$



donc  $\sin CR = \cos \eta \cos \omega \operatorname{tag} \gamma S - \sin \eta \cos \omega$ , ou bien

$$\sin CR = \cos \eta \sin \omega \sin (\zeta - \psi) - \sin \eta \cos \omega.$$

Par conséquent, la troisième formule se réduit à celle-ci :

$$R \cos \omega + P \sin \psi - Q \cos \psi = -u \left( \frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3} \right) \frac{\sin CR}{\sin \omega}.$$

Maintenant le mouvement du corps B est déterminé par les équations suivantes :

$$\text{I. } d d v - v d \phi^2 = -\frac{d t^2}{a} \left( \frac{A+B}{v v} + \frac{C v}{w^3} \right) + \frac{u d t^2 \cos \theta}{a} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$\text{II. } 2 d v d \phi + v d d \phi = \frac{u d t^2 \sin C Q}{a} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$\text{III. } d \psi = -\frac{u d t^2 \sin \sigma \sin CR}{a v d \phi \sin \omega} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$\text{IV. } d \omega = -\frac{u d t^2 \cos \sigma \sin CR}{a v d \phi} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

& enfin V.  $d \sigma = d \phi - d \psi \cos \omega$ .

Si la masse du corps C évanouissoit, le mouvement du corps B seroit régulier & se feroit dans le même plan. Mais les dérangemens seront

peu considérables lorsque les expressions  $\frac{C v}{w^3}$  &  $u \left( \frac{C}{w^3} + \frac{C}{u^3} \right)$

sont très petites par rapport à celle-ci  $\frac{A+B}{v v}$  : c'est donc à ce cas

principalement que j'appliquerai les recherches suivantes sur les variations que subissent les élémens Astronomiques, dont on se sert pour la détermination des orbites.

I. Ces recherches roulent principalement sur les deux premières équations, que je représente pour abréger de cette sorte :

1<sup>o</sup>.  $ddv - v d\phi^2 = \frac{E dt^2}{vv} + R dt^2$  & 2<sup>o</sup>.  $2v dv d\phi + v dd\phi = S dt^2$ ,  
de sorte que

$$E = \frac{1}{a} (A + B); R = \frac{u \cos \theta}{a} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right) - \frac{Cv}{aw^3}$$

$$\& S = \frac{u \sin CQ}{a} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

où les dérangemens font causés par les quantités  $R$  &  $S$ , puisque le mouvement seroit régulier si ces quantités évanouissoient.

II. Puisque, dans le cas  $S = 0$ , la seconde équation donneroit  $vv d\phi = \mathcal{E} dt$ , la quantité  $\mathcal{E}$  étant constante, je pose  $vv d\phi = r dt$ , & parce que  $dr dt = 2v dv d\phi + v dd\phi$ , il s'ensuit  $dr = S v dt$ , d'où l'on connoit la variabilité de cette quantité  $r$ ; & en même tems on en tire le rapport entre les différentiels  $dt$  &  $d\phi$ , d'où l'on pourra éliminer l'un ou l'autre du calcul.

III. Puisque la distance  $v$  devient tantôt un *maximum*, tantôt un *minimum*, de sorte que dans l'un & l'autre cas il soit  $dv = 0$ , pour en tenir compte, j'introduis dans le calcul un certain angle  $\lambda$ , connu sous le nom d'anomalie, duquel le différentiel  $dv$  dépende en sorte qu'il évanouisse avec le sinus de cet angle  $\lambda$ . Pour cet effet, po-

sant  $v = \frac{p}{1 + q \cos \lambda}$ , formule semblable à celle qu'on trouve pour

le mouvement régulier, de sorte que  $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p} \cos \lambda$ , je sup-

pose d'abord  $\frac{dv}{vv} = s d\phi \sin \lambda$ , afin qu'on obtienne  $dv = 0$ , quand  $\sin \lambda = 0$ .

IV. Sur cette formule  $v = \frac{p}{1 + q \cos \lambda}$  j'observe, que la lettre  $p$  marque le demi-parametre de l'orbite, &  $q$  son excentricité, qui  
Y 3 font



sont constantes dans le mouvement régulier, mais ici à cause des forces perturbatrices il les faut regarder comme variables. Ensuite, l'angle  $\lambda$ , qui exprime l'anomalie vraie, croîtroit également avec l'angle  $\phi$  dans le mouvement régulier, mais ici leurs différentiels  $d\phi$  &  $d\lambda$  seront inégaux, & leur différence  $d\phi - d\lambda$  donnera le mouvement de la ligne des absides.

V. Ayant donc  $\frac{r}{v} = \frac{r}{p} + \frac{q}{p} \cos \lambda$  &  $\frac{dv}{vv} = s d\phi \sin \lambda$ , nous en tirons l'égalité suivante :

$$\frac{dp}{pp} + \frac{q dp - p dq}{pp} \cos \lambda + \frac{q}{p} d\lambda \sin \lambda = s d\phi \sin \lambda,$$

qui, pour le mouvement régulier, où  $d\phi = 0$ ,  $dq = 0$  &  $d\lambda = d\phi$ , donneroit  $s = \frac{q}{p}$ ; mais rien n'empêche que nous ne sup-

posions aussi ici  $s = \frac{q}{p}$ , à cause de plusieurs nouvelles quantités variables que nous venons d'introduire dans le calcul. Posant donc  $s = \frac{q}{p}$ , nous aurons :

$$d\lambda = d\phi - \frac{dp}{pq \sin \lambda} + \frac{p dq - q dp}{pq \sin \lambda} \cos \lambda.$$

VI. Ensuite, ayant déjà posé  $vv d\phi = r dt$ , la formule  $\frac{dv}{vv} = s d\phi \sin \lambda$  donne  $dv = r s dt \sin \lambda$ , d'où pour la première équation nous tirons  $ddv = d.r s. dt \sin \lambda + r s dt d\lambda \cos \lambda$ : cette valeur  $y$  étant substituée, en divisant par  $dt$ , nous aurons :

$$d.r s. \sin \lambda + r s d\lambda \cos \lambda - \frac{v d\phi^2}{dt} = -\frac{E dt}{vv} + R dt.$$

Or, puisque  $dt = \frac{vv d\phi}{r}$ , il en résultera

$$d. rs. \sin \lambda + rs d\lambda \cos \lambda - \frac{r d\phi}{v} + \frac{E d\phi}{r} - \frac{Rvv d\phi}{r} = 0$$

ou bien, à cause de  $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p} \cos \lambda$ ,

$$d. rs. \sin \lambda + rs d\lambda \cos \lambda - \frac{r}{p} d\phi - \frac{qr}{p} d\phi \cos \lambda + \frac{E d\phi}{r} - \frac{Rvv d\phi}{r} = 0.$$

VII. Quoique nous fassions  $s = \frac{q}{p}$ , la multitude des lettres nous permet encore de supposer  $\frac{r}{p} = \frac{E}{r}$ , ou bien  $r = \sqrt{Ep}$ , pour faire évanouir les grands termes  $-\frac{r}{p} d\phi$  &  $\frac{E d\phi}{r}$ . Donc, puisque  $s = \frac{p}{q}$ , nous aurons :

$d. rs. \sin \lambda + \frac{qr}{p} (d\lambda - d\phi) \cos \lambda - \frac{Rvv d\phi}{r} = 0$ , ou bien  
en conservant plutôt la lettre  $s$  au lieu de  $q$ , puisque

$$d\lambda - d\phi = -\frac{dp}{pps \sin \lambda} + \frac{ds \cos \lambda}{s \sin \lambda},$$

$$r ds \sin \lambda + s dr \sin \lambda - \frac{r dp \cos \lambda}{pp \sin \lambda} + \frac{r ds \cos \lambda^2}{\sin \lambda} - \frac{Rvv d\phi}{r} = 0, \text{ ou}$$

$$rr ds \sin \lambda^2 + s r dr \sin \lambda^2 - \frac{rr dp \cos \lambda}{pp} + r r ds \cos \lambda^2 - Rvv d\phi \sin \lambda = 0.$$

VIII. Mais, puisque  $rr = Ep$ , cette équation se changera en celle-ci :

$$Ep ds + \frac{1}{2} Es dp \sin \lambda^2 - \frac{E dp \cos \lambda}{p} - Rvv d\phi \sin \lambda = 0.$$

Or





Or, ayant tiré de la seconde équation:  $dr = Sv dt = \frac{Sv^3 d\Phi}{r}$ ,  
 donc  $\frac{1}{2} E dp = Sv^3 d\Phi$ , le rapport des différentiels  $ds$  &  $d\Phi$  fera  
 exprimé ainsi

$$E p ds + Sv^3 s d\Phi \sin \lambda^2 - \frac{2 Sv^3 d\Phi \cos \lambda}{p} - R v v d\Phi \sin \lambda = 0,$$

ou bien, en substituant  $\frac{q}{p}$  au lieu de  $s$

$$E d q - \frac{S q v^3 d\Phi}{p} (2 - \sin \lambda^2) - \frac{2 Sv^3 d\Phi \cos \lambda}{p} - R v v d\Phi \sin \lambda = 0,$$

$$\text{ou } d q = \frac{R v v d\Phi \sin \lambda}{E} + \frac{S v^3 d\Phi}{E p} (q + 2 \cos \lambda + q \cos \lambda^2).$$

IX. Voilà maintenant tous nos différentiels réduits au seul différentiel  $d\Phi$ , dont le rapport à l'élément du tems  $dt$  est donné par la formule  $v v d\Phi = dt \sqrt{E p}$ . Car, posant  $v = \frac{p}{1 + q \cos \lambda}$ , nous aurons:

$$1^{\circ}. dp = \frac{2 S v^3 d\Phi}{E} = 2 S v dt \sqrt{\frac{p}{E}}$$

$$2^{\circ}. dq = \frac{R v v d\Phi \sin \lambda}{E} + \frac{S v^3 d\Phi}{E p} (q + 2 \cos \lambda + q \cos \lambda^2)$$

$$\text{ou } dq = R dt \sin \lambda \cdot \sqrt{\frac{p}{E}} + \frac{S v dt (q + 2 \cos \lambda + q \cos \lambda^2)}{\sqrt{E p}}$$

$$3^{\circ}. d\lambda = d\Phi + \frac{R v v d\Phi \cos \lambda}{E q} - \frac{S v^3 d\Phi \sin \lambda}{E p q} (2 + q \cos \lambda)$$

$$\& \text{ de là on a } dv = \frac{q v v d\Phi}{p} \sin \lambda = \frac{q}{p} dt \sin \lambda \cdot \sqrt{E p}.$$



X. Enfin, pour les changemens du plan de l'orbite, à cause de  
 $v d\phi = \frac{dt \sqrt{Ep}}{v}$ , nous aurons :

$$d\psi = -\frac{v u dt \sin \sigma \sin CR}{a \sin \omega \sqrt{Ep}} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$d\omega = -\frac{v u dt \cos \sigma \sin CR}{a \sqrt{Ep}} \left( \frac{C}{w^3} - \frac{C}{u^3} \right)$$

$$\& d\sigma = d\phi - d\psi \cos \omega.$$

XI. A l'aide de ces formules on pourra, pour chaque petit intervalle de tems, déterminer les variations causées 1°. dans le demi-parametre de l'orbite  $p$ , 2°. dans l'excentricité  $q$ , 3°. dans la position de la ligne des absides, 4°. dans la position de la ligne des nœuds, 5°. dans l'inclinaison de l'orbite, c'est à dire, dans les élémens qui demeureroient constans dans le mouvement régulier. Ensuite, pour le mouvement même du corps, on a d'abord l'angle élémentaire  $d\phi$  avec le changement de la distance  $dv$ , & ensuite aussi l'accroissement de l'argument de latitude  $\sigma$ . Tout revient donc à l'intégration de ces formules par des approximations convenables.

#### REMARQUES

*sur les formules précédentes.*

I. Quand même l'intégration de ces formules réussiroit, ce qu'on ne sauroit pourtant espérer que par des approximations, on voit que la détermination de tous les élémens renfermeroit les mêmes élémens, de sorte qu'on n'en sauroit tirer aucun avantage, à moins que ces élémens ne soient déjà à peu près connus: ce qui est la raison pour laquelle je ne regarde cette méthode applicable qu'aux cas où les dérangemens sont extrêmement petits, ou bien où les corrections qu'on cherche, sont fort petites. Cependant, dans ces cas mêmes, il sera bon, après avoir corrigé ces élémens, de répéter les mêmes opérations sur ces élémens corrigés, pour les trouver encore plus exactement.



II. Il faudroit fans doute prendre cette précaution dans l'usage des Tables de la Lune, dont les argumens supposent déjà pour la plupart connue la distance de la Lune au Soleil, qu'on ne sauroit pourtant savoir exactement avant que d'avoir déjà déterminé le lieu de la Lune. Je parle des Tables ordinaires de la Lune dont on se sert aujourd'hui; & je suis fort en doute encore, s'il est convenable de changer leur forme en sorte que les argumens de toutes les inégalités dépendent uniquement du mouvement moyen de la Lune.

III. Je dois encore remarquer, que les Tables de la Lune dont les Astronomes se servent, ne sont pas construites sur les formules que je viens d'exposer ici. La différence se trouve dans l'anomalie, que je prens ici en sorte que la distance de la Lune à la Terre en résulte exactement, ou la plus grande, ou la plus petite, lorsque le sinus de l'anomalie évanouit; au lieu que dans les Tables l'anomalie tient toujours le même rapport au vrai mouvement de la Lune, ou bien on y suppose uniforme le mouvement des absides, d'où vient que les plus grandes & les plus petites distances de la Lune ne répondent pas exactement aux points où le sinus de l'anomalie évanouit. Or, suivant les formules données, le mouvement des absides devient très irrégulier, & cela d'autant plus que l'excentricité est plus petite, d'où elles ne seroient point applicables à des cas où l'excentricité évanouiroit. Pour éviter cet inconvénient, on ne devoit plus mettre  $s = \frac{q}{p}$ , comme j'ai fait dans le développement des formules générales.

IV. Mais, quoi qu'il en soit, la premiere méthode me paroît toujours fort préférable, à moins que les dérangemens ne soient extrêmement petits, & il me paroît encore douteux s'il ne seroit pas même moins pénible de suivre cette méthode pour la détermination du mouvement de la Lune, & partant d'une époque où tant le lieu que le mouvement auroit été parfaitement connu, & de calculer, par exemple, de 6 heures en 6 heures, le lieu de la Lune suivant les formules,

Fig. 1.

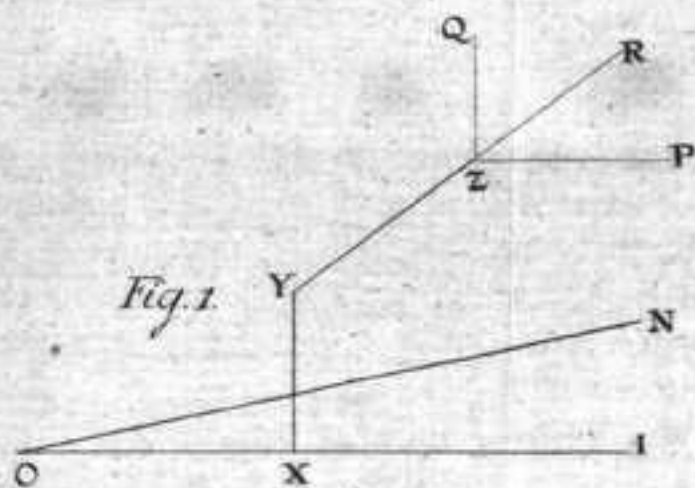


Fig. 2.

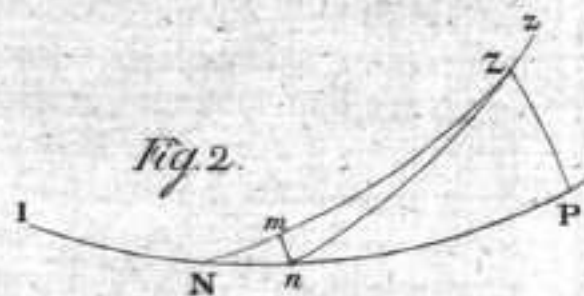


Fig. 3.

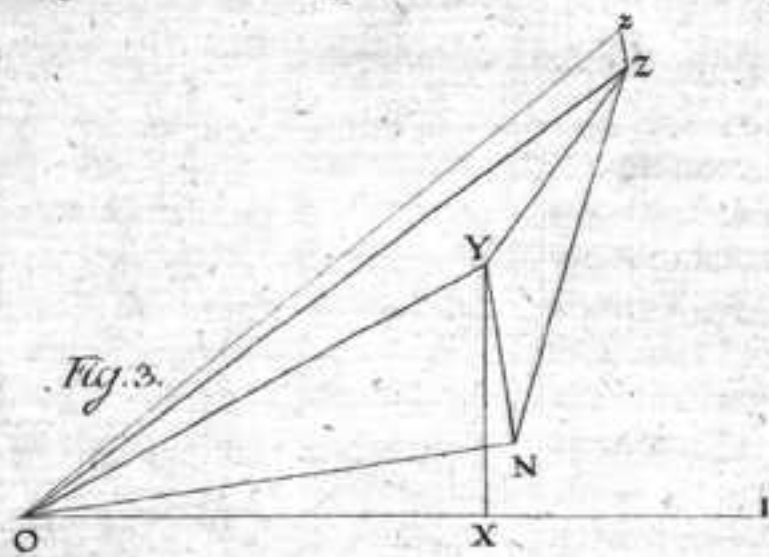


Fig. 4.

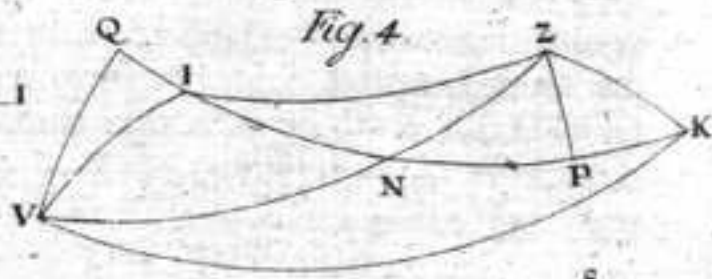


Fig. 5.

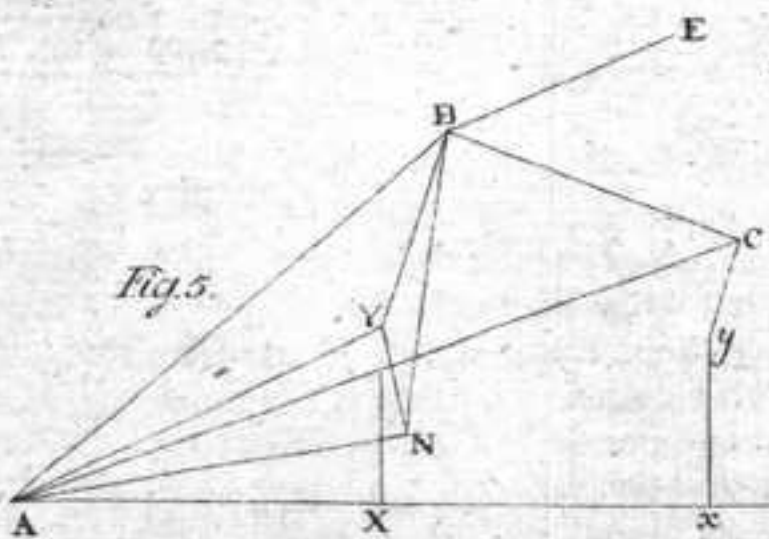
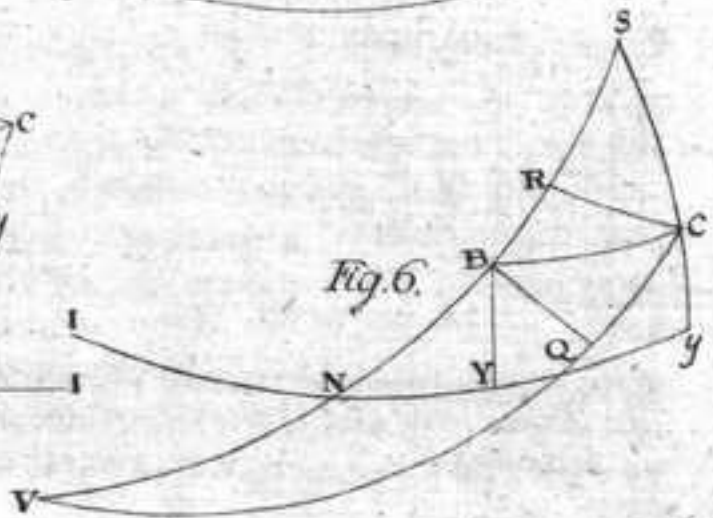


Fig. 6.





mules que j'ai exposées ci-dessus. Alors, au lieu des Tables Lunaires, on auroit des éphémérides continuelles, & tout le travail tomberoit uniquement sur les premiers Calculateurs, dont l'ouvrage ne demanderoit peut-être pas plus de peine que quand on calcule par les Tables pour le midi & le minuit de chaque jour le lieu de la Lune: outre que, par cette nouvelle méthode, on pourroit arriver à un plus haut degré de précision, puisqu'on ne seroit obligé de négliger aucune force qui agit sur la Lune. C'est ce qui me fait espérer que ces nouvelles idées mériteront l'attention des Astronomes.

