1770

De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas

Leonhard Euler

DE PARTITIONE NVMERORVM IN PARTES TAM NVMERO QVAM SPECIE DATAS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum olim tractauissem problema de partitione numerorum, quo quaerebatur, quot variis modis datus numerus in duas, vel tres, vel quatuor vel generatim in tot partes, quot quis voluerit, discerpi possit, id potissimum curaui, vt in eius solutione nihil quicquam inductioni, cuius vsus plerumque in huiusmodi problematibus soluendis solet esse frequentissimus, tribuerem. Atque methodus, qua sum vsus, ita videtur comparata, vt etiam ad alia problemata aequo successu adhiberi possit, id quod vulgatissimo illo problemate, quo quaeri solet, quot modis datus numerus dato tesserarum numero proiici possit, eo quidem amplissime extenso hic ostendere constitui.

2. Quando autem quaeritur, quot modis datus numerus N datum tesserarum numerum n proiiciendo cadere possit, quaestio huc redit, quot variis

modis datus numerus N in n partes resolui possit, quarum singulae sint vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, vel 6, siquidem facies tesserarum his numeris sint insignitae. Ex quo nascitur haec quaestio latius patens, quot variis modis datus numerus N diuidi possit in n partes, quarum singulae sint vel α, vel β, vel γ, vel δ etc. quorum numerorum α, β, γ, δ etc. multitudo sit pariter data puta $= m$; ita vt partes; in quas datus numerus sit resoluendus tam numero quam specie dentur.

3. Concipiantur scilicet eiusmodi tesserae, quae non vt vulgo sex, sed m habeant facies seu hedras, ita vt in singulis hae facies notatae sint numeris α, β, γ, δ etc. atque iam quaeritur, si habeantur n huiusmodi tesserae, quot modis iis proiiciendis datus numerus N produci possit. Possent etiam tesserae inter se dispares assumi, ita vt singulae peculiarem haberent hedrarum numerum, quae etiam in singulis peculiaribus numeris sint inscriptae; verum ex iis quae de tesseris vulgaribus sum allaturus, etiam solutio huius quaestionis latissime patentis haud difficulter colligetur.

4. Numeros autem, quibus facies tesserarum sunt notatae, tanquam exponentes quantitatis cuiusdam x considero, ita vt pro tessera vulgari hanc habeamus expressionem $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, etc. vbi cuique potestati vnitatem pro coëfficiente tribuo, quandoquidem quilibet numerus exponente designatus aeque

aeque facile cadere poteſt. Quodſi iam huius expreſſionis quadratum ſumatur, quaeuis poteſtas ipſius x tantum recipiet coefficientem, qui indicet quot modis ea poteſtas ex multiplicatione binorum terminorum iſtius expreſſionis reſultare, hoc eſt, quot modis eius exponens ex additione binorum numerorum ex ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6 produci poſſit. Euoluto ergo noſtrae expreſſionis quadrato, ſi in eo occurrat terminus Mx^N, inde colligitur numerum N binis teſſeris iaciendis tot modis prodire, quot coefficiens M contineat vnitates.

5. Simili modo euidens eſt, ſi iſtius expreſſionis ſumatur cubus $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$, in eius euolutione quamuis poteſtatem x^N toties occurrere, quot modis eius exponens N oriri poteſt addendis tribus numeris ex ordine 1, 2, 3, 4, 5, 6; vnde ſi huius poteſtatis coefficiens ſit M, totusque terminus Mx^N, ex eo concludimus numerum N tribus teſſeris iaciendis tot modis produci poſſe, quot coefficiens M contineat vnitates. Generatim ergo ſi ſumatur exponentis n dignitas noſtrae expreſſionis $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$, ea euoluta ſecundum poteſtates ipſius x, quilibet terminus Mx^N docebit, ſi numerus teſſerarum fuerit $= n$, iis iaciendis numerum N tot modis cadere poſſe, quot coefficiens M contineat vnitates.

6. Si ergo teſſerarum numerus fuerit $= n$, quaeraturque quot modis datus numerus N iis

proii-

proiiciendis cadere poſſit, quaeſtio reſoluetur per euolutionem huius formulae $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$, cuius cum primus terminus futurus ſit x^n, vltimus vero x^{6n}, prodibit huiusmodi terminorum progreſſio:

$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} \ldots + Mx^N \ldots + x^{6n}$$

cuius quilibet terminus Mx^N oſtendet numerum N exponenti aequalem tot modis cadere poſſe, quot coefficiens M contineat vnitates: ex quo ſtatim elucet, quaeſtionem locum habere non poſſe, niſi numerus propoſitus N contineatur intra limites n et $6n$. Totum ergo negotium huc redit, vt iſta progreſſio ſeu ſingulorum terminorum coefficientes aſſignentur.

7. Ad hos igitur inueniendos ponatur formula euoluenda hoc modo repraeſentata

$$x^n(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n = V$$

tum vero pro eiusdem euolutione ſtatuatur

$$V = x^n(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.})$$

Ac poſito $\frac{V}{x^n} = Z$ erit ex priori differentiale logarithmicum:

$$\frac{x\,dZ}{Z\,dx} = \frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}$$

Eiusdem autem valor ex poſteriori prodit

$$\frac{x\,dZ}{Z\,dx} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + 5Ex^5 + 6Fx^6 \text{ etc.}}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 \text{ etc.}}$$

quae

quae duae expressiones inter se debent esse aequales, vnde coefficientium valores determinabuntur

8. Constituta autem harum duarum expressionum aequalitate oritur ista aequatio

$$\begin{array}{llllllll}
nx & +nAx^2 & +nBx^3 & +nCx^4 & +nDx^5 & +nEx^6 & +nFx^7 & +nGx^8 \text{ etc.} \\
 & +2n & +2nA & +2nB & +2nC & +2nD & +2nE & +2nF \\
 & & +3n & +3nA & +3nB & +3nC & +3nD & +3nE \\
 & & & +4n & +4nA & +4nB & +4nC & +4nD \\
 & & & & +5n & +5nA & +5nB & +5nC \\
\hline
=Ax & +2Bx^2 & +3Cx^3 & +4Dx^4 & +5Ex^5 & +6Fx^6 & +7Gx^7 & +8Hx^8 \\
 & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & +6F & +7G \\
 & & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & +6F \\
 & & & +A & +2B & +3C & +4D & +5E \\
 & & & & +A & +2B & +3C & +4D \\
 & & & & & +A & +2B & +3C
\end{array}$$

quae binae expressiones, cum secundum singulos terminos inter se debeant esse aequales, valores singulorum coefficientium suppeditabunt.

9. Hinc autem sequentes determinationes impetrantur,

$A=n$
$2B=(n-1)A+2n$
$3C=(n-2)B+(2n-1)A+3n$
$4D=(n-3)C+(2n-2)B+(3n-1)A+4n$
$5E=(n-4)D+(2n-3)C+(3n-2)B+(4n-1)A+5n$
$6F=(n-5)E+(2n-4)D+(3n-3)C+(4n-2)B+(5n-1)A$
$7G=(n-6)F+(2n-5)E+(3n-4)D+(4n-3)C+(5n-2)B$
$8H=(n-7)G+(2n-6)F+(3n-5)E+(4n-4)D+(5n-3)C$
etc.

Quili-

Quilibet ergo coefficiens determinatur per quinos praecedentium, quibus inuentis erit

$$V=x^n+Ax^{n+1}+Bx^{n+2}+Cx^{n+3}+Dx^{n+4}+Ex^{n+5}+\text{etc.}$$

sicque problema de n tesseris in genere est solutum.

10. Si a qualibet superiorum aequationum praecedens subtrahatur, obtinebuntur sequentes determinationes multo simpliciores:

$A=n$
$2B=nA+n$
$3C=nB+nA+n$
$4D=nC+nB+nA+n$
$5E=nD+nC+nB+nA+n$
$6F=nE+nD+nC+nB+nA-5n$
$7G=nF+nE+nD+nC+nB-(5n-1)A$
$8H=nG+nF+nE+nD+nC-(5n-2)B$
etc.

Si denuo differentiae caperentur, relationes istae adhuc simpliciores essent prodeiturae, hoc modo

$2B=(n+1)A$; $3C=(n+2)B$; $4D=(n+3)C$; $6E=(n+4)D$;
$6F=(n+5)E-6n$; $7G=(n+6)F-(6n-1)A+5n$
$8H=(n+7)G-(6n-2)B+(5n-1)A$
$9I=(n+8)H-(6n-3)C+(5n-2)B$
$10K=(n+9)I-(6n-4)D+(5n-3)C$
etc.

11. Hinc prout tesserarum numerus fuerit vel 2, vel 3 vel 4 lex progressionis coefficientium erit vt sequitur:

pro duabus	pro tribus	pro quatuor
A = 2	3	4
2B = 3A	4A	5A
3C = 4B	5B	6B
4D = 5C	6C	7C
5E = 6D	7D	8D
6F = 7E − 12	8E − 18	9E − 24
7G = 8F − 11A + 10	9F − 17A + 15	10F − 23A + 20
8H = 9G − 10B + 9A	10G − 16B + 14A	11G − 22B + 19A
9I = 10H − 9C + 8B	11H − 15C + 13B	12H − 21C + 18B
10K = 11I − 8D + 7C	12I − 14D + 12C	13I − 20D + 17C
11L = 12K − 7E + 6D	13K − 13E + 11D	14K − 19E + 16D
12M = 13L − 6F + 5E	14L − 12F + 10E	15L − 18F + 15E

etc.

quilibet ergo coefficiens per tres praecedentes determinatur vbi hoc imprimis est notatu dignum, quod tandem in nihilum abeant, et postremi primis euadant pares, id quod ex hac lege minus perspicere licet.

12. Quo autem hanc legem clarius intelligamus denotet haec formula $(N)^{(n)}$ numerum casuum quibus numerus N per n tesseras produci potest, ita vt sit $(n)^{(n)} = 1$; $(n+1)^{(n)} = A$; $(n+2)^{(n)} = B$; $(n+3)^{(n)} = C$; $(n+4)^{(n)} = D$; ..... $(n+9)^{(n)} = I$ et $(n+10)^{(n)} = K$. Hinc ergo fiet

$$10(n+10)^{(n)} = (n+9)(n+9)^{(n)} - (6n-4)(n+4)^{(n)} + (5n-3)(n-3)^{(n)}$$

vnde concluditur fore in genere:

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)} - (6n+6-\lambda)(n+\lambda-6)^{(n)} + (5n+7-\lambda)(n+\lambda-7)^{(n)}.$$

Ponamus iam $n+\lambda = N$ vt sit $\lambda = N-n$, eritque

$$(N)^{(n)} = \frac{(N-1)(N-1)^{(n)} - (7n+6-N)(N-6)^{(n)} + (6n+7-N)(N-7)^{(n)}}{N-n}$$

vbi notandum est semper fore $(P)^{(n)} = 0$, si fuerit $P < n$.

13. Facilius autem hi coefficientes definiri possunt pro quouis tesserarum numero, si iidem pro tesserarum numero vnitate minore iam fuerint reperti. Si enim sit

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \text{etc.}$$

ponaturque

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1} = x^{n+1} + A'x^{n+2} + B'x^{n+3} + C'x^{n+4} + D'x^{n+5} + \text{etc.}$$

erit,

erit, quia haec expreſſio illi per $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ multiplicatae eſt aequalis

	hinc differentiis ſumendis
$A' = A + 1$	
$B' = B + A + 1$	$B' = A' + B$
$C' = C + B + A + 1$	$C' = B' + C$
$D' = D + C + B + A + 1$	$D' = C' + D$
$E' = E + D + C + B + A + 1$	$E' = D' + E$
$F' = F + E + D + C + B + A$	$F' = E' + F - 1$
$G' = G + F + E + D + C + B$	$G' = F' + G - A$
etc.	etc.

14. Quare ſi modo denotandi ante introducto vtamur, ex aequatione $G' = F' + G - A$ naſcitur haec:

$$(n+8)^{(n+1)} = (n+7)^{(n+1)} + (n+7)^{(n)} - (n+1)^{(n)}$$

quae in genere ita repraeſentabitur:

$$(n+1+\lambda)^{(n+1)} = (n+\lambda)^{(n+1)} + (n+\lambda)^{(n)} - (n+\lambda-6)^{(n)}.$$

Quod ſi iam pro $n+\lambda$ ſcribatur N erit

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-6)^{(n)}$$

vbi notandum eſt quamdiu fuerit $N - 6 < n$ fore $(N-6)^{(n)} = 0$. Hinc ſimul patet omnes hos numeros fore integros, quod ex priori lege minus apparet.

Tabula

Tabula oſtendens

quot modis quilibet numerus N per n teſſeras cadere poſſit

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688

N	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

15. In his ergo feriebus etiam proprietas §. 12 inuenta locum habet; ita fi fuerit $n=6$ erit:

$$(N)^{(6)}=\frac{(N-1)(N-1)^{(6)}-(48-N)(N-6)^{(6)}+(43-N)(N-7)^{(6)}}{N-6}$$

vnde fi exempli gratia $N=25$ erit

$$(25)^{(6)}=\frac{24.(24)^{(6)}-23.(19)^{(6)}+18.(18)^{(6)}}{19}$$

at eft $(24)^{(6)}=3431$; $(19)^{(6)}=3906$; $(18)^{(6)}=3431$ ideoque

$$(25)^{(6)}=\frac{24.3431-23.3906+18.3431}{19}=\frac{54264}{19}=2856$$

vti tabula habet. Similiter fi fit $N=29$ erit

$$(29)^{(6)}=\frac{28.(28)^{(6)}-19.(23)^{(6)}+14.(22)^{(6)}}{23}$$

hinc

hinc ob $(28)^{(6)}=1161$; $(23)^{(6)}=3906$ et $(22)^{(6)}=4221$ erit

$$(29)^{(6)}=\frac{32508-74214+59094}{23}=\frac{17388}{23}=756$$

16. Verum euolutio formulae V (§. 7) alio modo inftitui poteft, vt quilibet terminus abfolute affignetur, neque ad hoc praecedentibus fit opus. Cum enim fit

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=\frac{1-x^6}{1-x}$$

erit $V=\frac{x^n(1-x^6)^n}{(1-x)^n}$, atque euolutione facta ob

$$(1-x^6)^n=1-\frac{n}{1}x^6+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{12}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{18}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{24}-\text{etc.}$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^n}=x^n+\frac{n}{1}x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n+2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{n+3}$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}x^{n+4}$$

vnde colligitur fore:

$(n)^{(n)}=1$;	$(n+6)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+5)}{1\ldots\ldots6}-\frac{n}{1}1$
$(n+1)^{(n)}=\frac{n}{1}$	$(n+7)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+6)}{1\ldots\ldots7}-\frac{n}{1}.\frac{n}{1}$
$(n+2)^{(n)}=\frac{n(n+1)}{1.2}$	$(n+8)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+7)}{1\ldots\ldots8}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)}{1.2}$
$(n+3)^{(n)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$(n+9)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+8)}{1\ldots\ldots9}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
$(n+4)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+3)}{1\ldots\ldots4}$	$(n+10)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+9)}{1\ldots\ldots10}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
$(n+5)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+4)}{1\ldots\ldots5}$	$(n+11)^{(n)}=\frac{n\ldots\ldots(n+10)}{1\ldots\ldots11}-\frac{n}{1}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$

$(n+12)$

$$(n+12)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+11)}{1 \ldots\ldots 12} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+5)}{1 \ldots\ldots 6} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1$$

$$(n+13)^{(n)} = \frac{n \ldots\ldots (n+12)}{1 \ldots\ldots 13} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+6)}{1 \ldots\ldots 7} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n}{1}$$

etc.

vnde in genere concluditur:

$$(n+\lambda)^{(n)} = \frac{n \ldots (n+\lambda-1)}{1 \ldots\ldots \lambda} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-7)}{1 \ldots\ldots (\lambda-6)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-13)}{1 \ldots\ldots (\lambda-12)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-19)}{1 \ldots\ldots (\lambda-18)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-25)}{1 \ldots\ldots (\lambda-24)}.$$

etc.

17. Hinc ſolutio ad teſſeras quocunque alio facierum numero praeditas accommodari poteſt. Sit enim m numerus facierum in ſingulis teſſeris, quae notatae ſint numeris 1, 2, 3 ..... m talium autem teſſerarum numerus ſit $= n$, quibus proiectis quaeritur, quot modis datus numerus N cadere poſſit. Seu quod eodem redit, quaeritur quot modis numerus N in n partes reſolui poſſit, quae ſingulae in hoc ordine numerorum 1, 2 ..... m ſint contentae; vbi quidem notandum eſt non ſolum diuerſas partitiones, ſed etiam diuerſos ordines earundem partium numerari, vti in teſſeris fieri ſolet, vbi exempli gratia iactus 3, 4 et 4, 3 pro duobus diverſis caſibus habentur.

18. Quodſi ergo haec ſcriptio $(N)^{(n)}$ denotet caſuum numerum, quibus numerus N proiiciendis n teſſeris, quarum ſingulae habeant m facies numeris 1, 2, 3 .... m notatas, produci poſſit; primo notandum eſt fore $(n)^{(n)} = 1$, et ſi $N < n$ eſſe $(N)^{(n)} = 0$. Deinde ſi $N = mn$ eſt quoque $(mn)^{(n)} = 1$, et ſi $N > mn$ erit $(N)^{(n)} = 0$. Denique ſiue ſit $N = n+\lambda$ ſiue $N = mn-\lambda$, numerus caſuum eſt idem ſeu $(n+\lambda)^{(n)} = (mn-\lambda)^{(n)}$. Poſtrema autem formula praebet:

$$(n+\lambda)^{(n)} = \frac{n \ldots (n+\lambda-1)}{1 \ldots\ldots \lambda} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-m-1)}{1 \ldots\ldots (\lambda-m)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n \ldots (n+\lambda-2m-1)}{1 \ldots\ldots (\lambda-2m)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n \ldots\ldots (n+\lambda-3m-1)}{1 \ldots\ldots (\lambda-3m)} + \text{etc.}$$

19. Facillime autem hi numeri cum ex praecedentibus tum ex caſibus, vbi teſſerarum numerus eſt vnitate minor, determinabuntur. Erit enim generaliter, ſi ſingularum teſſerarum numerus facierum fuerit $= m$, eaeque numeris 1, 2 .... m ſint inſignitae:

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-m)^{(n)}$$

ſeu $(N+1)^{(n)} = (N)^{(n)} + (N)^{(n-1)} - (N-m)^{(n-1)}$.

Hinc ſi pro $N+1$ ſcribatur $n+\lambda$ habebitur

$$(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)^{(n)} + (n+\lambda-1)^{(n-1)} - (n+\lambda-m-1)^{(n-1)}$$

Denique pro eodem teſſerarum numero n iſti numeri ita a praecedentibus pendent, vt ſit

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)} = (n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)} - (mn+m-\lambda)(n+\lambda-m)^{(n)}$$
$$+ (mn-n+m+1-\lambda)(n+\lambda-m-1)^{(n)}$$

Ceterum notum eſt ſummam omnium horum numerorum eſſe $= m^n$.

20. Simili modo haec quaeſtio reſolui poteſt, ſi non omnes teſſerae pari hedrarum numero fuerint prae-

praeditae. Ponamus tres dari tesseras, primam hexaedram numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6 secundam octaedram numeros 1 2, 3 ... 8 et tertiam dodecaedram numeros 1, 2, 3 ..... 12 gerentem: quod si iam quaeratur, quot modis datus numerus N cadere possit euoluatur hoc productum

$$(x+x^2+x^3 \ldots x^6)(x+x^2+x^3 \ldots x^8)(x+x^2+x^3 \ldots x^{12}) = V$$

et coefficiens potestatis x^N ostendet casuum numerum. Cum iam sit

$$V = \frac{x^3(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{12})}{(1-x)^3}$$

erit numeratorem euoluendo

$$V = \frac{x^3 - x^9 - x^{11} - x^{15} + x^{17} + x^{21} + x^{23} - x^{29}}{(1-x)^3}.$$

21. Hic numerator multiplicetur per $\frac{1}{(1-x)^3}$ seu hanc seriem

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + \text{etc.}$$

cuius coefficientes sunt numeri trigonales, vnde cum numeri n trigonalis $\frac{n(n+1)}{2}$, quiuis huius seriei terminus erit

$$\frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} \text{ seu } \frac{(n-1)(n-2)}{2} x^{n-3}$$

Iam per numeratorem multiplicando, potestatis x^n coefficiens reperitur:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-7)(n-8)}{2} - \frac{(n-9)(n-10)}{2} - \frac{(n-13)(n-14)}{2}$$
$$+ \frac{(n-15)(n-16)}{2} + \frac{(n-19)(n-20)}{2} + \frac{(n-21)(n-22)}{2} - \frac{(n-27)(n-28)}{2}$$

quae

quae expressio autem quouis casu non vlterius continuari debet, quam donec ad factores negatiuos perueniatur.

22. Relicto autem denominatore $(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$ series quaesita erit recurrens ex scala relationis 3, − 3, + 1 nata, dummodo terminorum numeratoris ratio habeatur. Hinc pro quouis exponente sequentes coefficientes inueniuntur

Exp.	Coeff.	Exp.	Coeff.
3	1	15	47
4	3	16	45
5	6	17	42
6	10	18	38
7	15	19	33
8	21	20	27
9	27	21	21
10	33	22	15
11	38	23	10
12	42	24	6
13	45	25	3
14	47	26	1

Numeri hic maiores quam 26 produci nequeunt, cum sit $26 = 6 + 8 + 12$, et omnium casuum summa est $576 = 6.8.12$.

20. Cum hoc modo resolutio numerorum in partes numero et specie datas sine inductionis subsidio absolui possit, in mentem mihi incidunt, quae-

quaedam Fermatii elegantia Theoremata, quae cum nondum ſint demonſtrata, fortaſſe haec methodus ad demonſtrationes eorum perductura videtur. Cum enim Fermatius aſſeueraſſet omnes numeros vel eſſe trigonales, vel duorum vel trium trigonalium aggregata; quia cyphra etiam in ordine trigonalium reperitur, theorema ita enunciari poteſt, vt vt omnes numeri in tres trigonales reſolubiles dicantur. Quare ſi numeris trigonalibus pro exponentibus ſumtis formetur haec ſeries:

$$1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.} = S$$

demonſtrari oportet, ſi huius ſeriei cubus euoluatur tum omnes plane poteſtates ipſius x eſſe occurſuras, nullamque omiſſum iri quod ſi demonſtari poſſet, haberetur demonſtratio iſtius Theorematis Fermatiani.

24. Simili modo ſi huius ſeriei

$$1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.} = S$$

ſumatur poteſtas quarta, oſtendique queat, in ea omnes plane poteſtates ipſius x reperiri, habebitur demonſtratio huius Theorematis Fermatiani, quo omnes numeri ex additione quaternorum quadratorum reſultare ſtatuuntur. In genere autem ſi ponatur

$$S = 1 + x^1 + x^m + x^{3m-3} + x^{6m-8} + x^{10m-15} + x^{15m-24} + x^{21m-35} \text{ etc.}$$

huiusque ſeriei ſumatur poteſtas exponentis m, demonſtrandum eſt in ea omnes poteſtates ipſius x eſſe prodituras, ita vt omnis numerus ſit aggregatum

tum m numerorum polygonalium laterum numero exiſtente $= m$ vel pauciorum.

25. Ex iisdem principiis alia ſe offert via ad has demonſtrationes inueſtigandas, quae a praecedente hoc differt, quod vti ibi non ſolum diuerſitas partium ſed etiam ordo ſpectatur, hic ordinis ratio omittitur Pro reſolutione ſcilicet in triangulares numeros conſtituatur haec formula

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^3z)(1-x^6z)(1-x^{10}z)(1-x^{15}z)\text{ etc.}}$$

quae euoluta hanc praebeat ſeriem:

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{etc.}$$

ita vt P, Q, R, S, etc. ſint functiones ipſius x tantum Manifeſtum autem eſt fore:

$$P = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

at Q praeterea eas poteſtates ipſius x continebit, quarum exponentes ſunt aggregata duorum trigonalium. Demonſtrari ergo debet, in functione R omnes plane poteſtates ipſius x eſſe occurſuras.

26. Simili modo pro reſolutione numerorum in quaterna quadrata euoluatur haec fractio

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^4z)(1-x^9z)(1-x^{16}z)(1-x^{25}z)\text{ etc.}}$$

quae ſi abeat in hanc formam:

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{etc.}$$

 A a demon-

demonstrandum est functionem S omnes potestates ipsius x complecti. Nam P aequatur seriei $1+x+x^4+x^9+x^{16}+$ etc. et Q praeterea eas continet potestates ipsius x, quarum exponentes sunt aggregata duorum quadratorum, in qua ergo serie multae adhuc potestates desunt. In R autem insuper eae potestates, quarum exponentes sunt aggregata ternorum quadratorum, aderunt; atque in S quoque eae; quarum exponentes sunt summae quaternorum ita vt in S omnes numeri in exponentibus occurrere debeant.

27. Ex hoc principio definiri potest, quot solutiones problemata, quae ab arithmeticis ad regulam Virginum referri solent, admittat. Huiusmodi problemata huc redeunt, vt inueniri debeant numeri p, q, r, s, t etc. ita vt his duabus conditionibus satisfiat:

$$a p + b q + c r + d s \text{ etc.} = n \text{ et}$$
$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s \text{ etc.} = \nu$$

et iam quaestio est, quot solutiones in numeris integris positiuis locum sint habiturae: vbi quidem tenendum est numeros a, b, c, d etc. n et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ν esse integros, quia nisi tales essent, facile eo reducerentur. Statim quidem apparet, si duo tantum numeri inueniendi p et q proponantur, plus vna solutione non dari, quae adeo, nisi pro p et q numeri integri positiui prodeant, pro nulla haberi solet.

28. Iam ad numerum omnium solutionum quouis casu definiendum, ne inductioni seu tentationi quicquam tribuatur, consideretur haec expressio

$$\frac{1}{(1-x^a y^\alpha)(1-x^b y^\beta)(1-x^c y^\gamma)(1-x^d y^\delta) \text{ etc.}}$$

eaque euoluatur; vnde prodibit huiusmodi series

$$1 + A x^{\cdot\cdot} y^{\cdot\cdot} + B x^{\cdot\cdot} y^{\cdot\cdot} + C x^{\cdot\cdot} y^{\cdot\cdot} \text{ etc.}$$

in qua si occurrat terminus $N x^n y^\nu$, coefficiens N numerum solutionum indicabit: ac si eueniat, vt hic terminus non occurrat, id indicio erit nullam dari solutionem. Totum ergo negotium in hoc versatur, vt coefficiens huius termini $x^n y^\nu$ inuestigetur.