



1770

Evolutio insignis paradoxo circa aequatlitatem superficierum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Evolutio insignis paradoxo circa aequatlitatem superficierum" (1770). *Euler Archive - All Works*. 392.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/392>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

INSIGNIS PARADOXI

CIRCA AEQUALITATEM

SUPERFICIERVM.

Auctore

L. E V L E R O.

In doctrina linearum curvarum, si proponatur quantitas, cui arcus cuique abscissae indefinitae respondens aequalis esse debeat, linea curva inde ita determinatur ut plus una problemati satisfacere neutiquam possit. Veluti si pro coordinatis orthogonibus x et y , quarum illa x abscissam haec y applicatam denotet, eiusmodi linea curva quaeratur, cuius arcus abscissae x conueniens aequetur eiusdem functioni cuiusque X , problema perfecte determinatur, atque non nisi unicam lineam curuam admittit. Cum enim statui oportet, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dX$, posito $dX = P dx$, vbi P iridem erit functio data ipsius x , fiet $dy = dx \sqrt{(P^2 - 1)}$ cuius formulae integratio aequationem determinatam pro linea curva quaesita suppediabit, siquidem constans per integrationem inuecta naturam curuae non afficit, sed tantum eius ab axe distantiam definit. Ita proposita linea curva quaecunque praeter eam nulla datur alia, ipsi ita longitudine aequalis, ut arcus omnibus

E V O L V T. PARADOXI CIRCA AEQUALIT. 105

bus abscissis respondentes sint aequales. Quae enim a Geometris de aequalitate linearum curvarum passim sunt inuestigata, haec aequalitas non ad omnes arcus eidem abscissae respondentes extenditur; sed pro vna tantum determinata abscissa seu etiam pluribus, nequaquam autem omnibus locum habere potest. Ex quo perspicuum est non dari duas lineas curuas diuersas, quae ad eundem axem relatae pro omnibus abscissis habeant arcus inter se aequales.

Haec ideo praeremonenda duxi, quo clarius insigne discrimen, quod inter lineas curuas et superficies intercedit, perspicui possit. Cum enim superficies perinde ad planum quoddam fixum ac lineae curuae ad axem rectilineum fixum referri earumque portiones cuique spatio in illo plano assumpto imminentes indagari soleant; etiam si hic pro quouis spatio quantitas superficiei imminuentis proponatur, inde tamen natura superficiei neutquam determinatur, sed saepe innumerabiles superficies diuersae exhiberi possunt, quarum portiones cuique spatio plani fixi imminentes sint inter se aequales. Quae circumstantia a natura linearum tantopere discepsans eo magis omni attentione digna videtur, quod insigne paradoxon in doctrina solidorum complectitur. Ita super basim circulari hemisphaerico constituto, super eadem basim innumerabilia alia solida exstrui posse omnino mirum videbitur, quorum non solum tota superficies aequalis sit superficiei Tom. XIV. Nou. Comm. O hemi-

hemisphaerii, sed etiam quorum superficies cuique portioni indefinitae basis imminens superficiei sphaericae eidem imminenti sit aequalis. Quia etiam si basi aliud planum oblique imminet, cuius proinde quaelibet portio ad basin cui imminet datam teneat rationem, infinita alia solida seu superficies siue conuexae siue concauae assignari possunt, quarum portiones quaeuis indefinitae ad basin cui imminet, eandem tenent rationem. Hoc igitur insigne paradoxon in Theoria solidorum hic accuratius examini subicere conserui, cum inde haud leuia incrementa tam in ipsam hanc Theoriam quam in analysin redundatura videantur.

Primum ergo veritatem huius paradoxii cuiusdeterminetur puncti cuiusuis superficiei situs tenis coordinatis orthogonalibus x, y, z , quarum binae priores sitae sint in plano fixo, tertia vero z illius puncti ab hoc plano distantiam exprimat. Cum iam natura superficiei aequatione inter has ternas coordinatas contineatur, ex ea valor ipsius z eliciatur, qui differentiatibus praebat $dz = p dx + q dy$; quo facto constat elementum superficiei hac formula $dx dy \sqrt{(1 + pp + qq)}$ exprimi, imminet autem hoc elementum reftangulo infinito paruo baseos differentialibus dx et dy formato. Quodsi iam alia habeatur superficies, ex cuius aequatione inter eandem ternas coordinatas x, y et z prodcat $dz = r dx + s dy$, elementum huius superficiei eidem reftangulo

gulo $dx dy$ imminens erit $dx dy \sqrt{(1 + rr + ss)}$; unde manifestum est, si fuerit $rr + ss = pp + qq$, hoc illi fore aequale; et cum haec aequalitas in omnibus elementis locum habeat, etiam cuique spatio finito in plano fixo seu basi assumto aequa portio vtriusque superficiei imminet. Verum quaelio superest principalis, vtrum haec aequalitas $rr + ss = pp + qq$ subsistere possit, quin simul sit $r = p$ et $s = q$, vnde eandem superficies prodiret; namque huic principali conditioni satisfieri oportet, vt formula $r dx + s dy$ integrationem admittat, quod an praeter casum $r = p$ et $s = q$ fieri possit non tam facile liquet. Omnis autem dubitatio vnico exemplo euanescet quo est $p = \frac{x}{a}$ et $q = \frac{y}{a}$, vt sit $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ si enim pro altera superficiei capiat $r = \frac{y}{a}$ et $s = \frac{x}{a}$, vnde vtrique fit $rr + ss = pp + qq$, eius aequatio erit $z = \frac{x^2}{a}$. En ergo duas superficies prorsus diuersas, alteram hac aequatione $az = x^2 + y^2$ alteram vero hac $az = xy$ contentam, quae ita inter se conueniunt, vt omnibus spatiis in basi assumtis in vtriusque pares superficiei portiones imminant. Huiusmodi superficies congruentes appellabo, vnde nascetur haec quaelio maxime curiosa, quomodo propofita quacunque superficie, alias atque adeo omnes ei congruentes investigari oporteat. Quod problema latissimo sensu acceptum cum sit difficillimum, casus quos mihi quidem euoluere licuit, in fequentibus problematibus complectar.

Problema 1.

1. Si superficies data fuerit plana ad basin seu planum fixam utcumque inclinata, inuenire omnes alias superficies ipsi congruentes.

Solutio.

Cum superficies data sit plana eius natura tali aequatione exprimitur $z = a + mx + ny$, quae ad basin inclinatur angulo, cuius secans est $\sqrt{(1 + mm + nn)}$. Hic ergo ob $dz = mdx + ndy$ est $p = m$ et $q = n$, ideoque $pp + qq$ constans. Statuatur ergo $r = a \cos \omega$ et $s = a \sin \omega$ existente $a = \sqrt{(mm + nn)}$, ac necesse est angulum eo ita per binas coordinatas in basi assumtas x et y definiti ut formula $dz = a dx \cos \omega + a dy \sin \omega$ integrabilis euadat. Cum igitur per transformationem fiat

$$z = a(x \cos \omega + y \sin \omega) + a \int d\omega(x \sin \omega - y \cos \omega)$$

evidens est huic conditioni satisfieri, si fuerit $x \sin \omega - y \cos \omega$ functio quaecumque anguli ω . Denotet ergo in genere Ω functionem quamcumque anguli ω , ac statuatur

$$x \sin \omega - y \cos \omega = a \Omega \text{ eritque } z = a(x \cos \omega + y \sin \omega + a \int \Omega d\omega)$$

vbi notandum est litteram $a = \sqrt{(mm + nn)}$ denotare tangentem anguli, quem planum propositum facit cum basi.

Coroll.

COROLL. 1.

2. Primum ergo patet si planum propositum basi sit parallelum, ideoque $a = 0$, fore etiam $s = 0$, seu $z = \text{const.}$ ita ut omnes superficies congruentes sint etiam planae basi parallelae; quod quidem per se est manifestum, cum tale planum sit minimum, quod cuique basi portioni imminere possit, neque propterea aliud detur ipsi aequale.

COROLL. 2.

3. Sin autem planum propositum basi non sit parallelum neque etiam perpendicularare, ita ut a valorem quemcumque finitum obtineat, tum utique innumerabiles aliae superficies congruentes assignari possunt: cum functio Ω penitus ab arbitrio nostro pendat.

COROLL. 3.

4. Quoniam formula $d\omega(x \sin \omega - y \cos \omega)$ integrabilis esse debet. haec conditio etiam impletur, si fuerit $d\omega = 0$, ideoque angulus ω constans; Sit ergo $\omega = \zeta$; fietque $z = a(x \cos \zeta + y \sin \zeta) + \text{const.}$ quae est aequatio pro plano ad basin aequae inclinatio ac propositum: ratione autem intersectionis utrumque ab eo discrepare potest.

EXEMPLVM 1.

5. Pro superficiebus autem diuersis inueniendis sit primo $\int \Omega d\omega = 0$, hincque $\Omega = 0$: et ob $x \sin$

0 3

$x \sin. \omega = y \cos. \omega$ fiet $\sin. \omega = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et $\cos. \omega = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$
 unde aequatio pro superficie e prodit: $z = a \sqrt{(ax+yy)}$,
 quae est ad superficiem conicam, cuius axis basi
 perpendiculariter insistit, latus vero inclinatur an-
 gulo cuius tangens est $= a$. Cum enim hic omnia
 plana tangentia ad basin sub eodem angulo inclinen-
 tur, ratio congruentiae est manifesta.

Exemplum 2.

6. Sit $a \Omega = b \sin \omega + \cos \omega$ erit $a \int \Omega d\omega$
 $= a - b \cos. \omega + c \sin \omega$. Fit ergo $x \sin. \omega - y$
 $\cos \omega = b \sin. \omega + c \cos. \omega$, hinc: $\frac{\ln. \omega}{c \cdot \omega} = \frac{x - b}{c}$ atque
 $\sin. \omega = \frac{y + c}{\sqrt{(x - b)^2 + (y + c)^2}}$ et $\cos. \omega = \frac{x - b}{\sqrt{(x - b)^2 + (y + c)^2}}$
 unde colligitur.

$$z = a \left(\sqrt{(x-b)^2 + (y+c)^2} + a \right)$$

quae est pro simili cono respectu basium utraque
 aliter constituto, ita tamen ut eius axis basi per-
 pendiculariter insistat.

Exemplum 3.

Tab. III. 7. Plano basis in ipsa tabula assumto, sit
 Fig. 1. recta AX axis abscissarum x , et XY $= y$, iuncta
 AB ipsa AX normali sumatur angulus BAM $= \omega$,
 et descripta curva quacunq; EM, exprimat radus
 AM eam functionem ipsius; ω quam per $a \Omega$
 indicavi. Ad hanc AM cadat recta YM normaliter
 et ob angulum ATM $= \omega$, fiet AM $= x \sin. \omega - y \cos. \omega$,
 prof-

positus ut solutio inuenta possulat. Tum vero erit
 MY $= x \cos. \omega + y \sin. \omega$. Porro radio AM iuncta-
 tur normaliter recta MV $= f A M. d \omega$ critique
 $z = a (Y M + M V) = a Y V$; scilicet in pun-
 cto basis Y erigi debet perpendicularis aequalis ipsi
 $a. Y V$ eaque pertinget ad superficiem quaesitam.
 Vel si super recta VY perpendiculariter constituitur
 angulus cuius tangens $= a$, vertice in ipso puncto
 V existente, latus sursum vergens totum suum
 erit in superficie quaesta. Simili modo si super
 alia quacunq; recta $\psi m O$ constituitur planum ad
 basin normale, in eoque ex ψ ducatur recta cum
 ψO faciens angulum, cuius tangens $= a$, etiam
 haec recta tota in superficiem quaesitam cadet
 sique tota superficies facile determinabitur.

Scholion.

8. Constructio haec attentius considerari mere-
 tur. Primo igitur curva EM circa punctum A
 pro arbitrio est descripta, et rectae cuique ceu radio
 AM normaliter iuncta est recta MY, in qua
 ultra M producta capi debet MV $= f A M. d \omega$,
 atque ex puncto V facile educitur recta, quae
 tota in superficiem quaesitam incidit. Hic animaduer-
 to si radius AM ipsa AM sit proximus, ideoque
 ang. MA m $= d \omega$, fore rectam m $\psi = M V + A M. d \omega$.
 at est M $\mu = A M. d \omega$, hincque m $\psi = \mu V$. Quod si
 ergo recta ψm priorem VM fecerit in O erit ele-
 mentum V ψ arcus circularis centro O descriptus.
 Hinc

Hinc loco curvae E M pro arbitrio describi potest curua V φ , ad quam sufficit in singulis punctis V, φ normaliter eduxisse rectas V O, φ o, super quibus deinceps angulos, quorum tangens $= \alpha$, erigi oportet. Hinc ergo colligitur sequens facilissima constructio.

Constructio omnium superficierum planae congruentium.

9. Super plano pro basi assumto describatur pro lubitu linea curua quaecunque B P F, ad cuius singula puncta P in plano basis ducantur normales P Q Y, euolutam illius curuae C Q G tangentes in Q. Ad punctum autem Q basi normaliter instat recta Q S, vt sit $QS = \alpha P Q$, tum recta P S tota erit sita in superficie quaesita. Haec ergo constructio adhuc breuius ita enunciari potest:

Descripta in plano pro basi assumto ad lubitum curua quaecunque B P F, ad eius singula puncta P extra basin educantur rectae et ad hanc curuam normales et ad ipsam basin inclinatae sub angulo cuius tangens $= \alpha$ tum omnes istae rectae in infinitum productae totae erunt sitae in superficie congruente, ideoque eam determinabunt.

Ratio huius constructionis etiam per se est evidens, cum enim omnes rectae SP in superficiem inventam cadant eoque in curua B P F terminentur, etiam

etiam omnia plana tangentia hanc curuam tangent, ideoque ad basin sub angulo cuius tangens $= \alpha$ inclinantur vnde superficiei portiuacula bases elemento $dx dy$ imminens erit $= dx dy \sqrt{1 + \alpha^2}$.

Scholion.

10. Imprimis autem hic notasse iuuabit hanc constructionem latissime patere, cum descriptio curuae B P F prorsus ab arbitrio nostro pendeat, quod ita est interpretandum, vt pro ea non solum curuas regulares aequatione quapiam contentas siue algebraicas siue transcendentes accipere liceat, sed etiam ex pluribus partibus diuersarum linearum vitunque compositas, quin etiam lineas libero manu ductu vitunque descriptas. Ita si eius loco perimetri trianguli accipiatur, prodibit superficies pyramidis: circulus autem semper dat superficiem conicam.

Problema 2.

11. Si superficies data hac aequatione $zaz = xx + yy$ exprimatur, inuenire omnes superficies alias illi congruentes.

Solutio.

Cum pro superficie data sit $adz = xdx + ydy$, ponatur pro quacvis $adz = rdx + sdy$, atque necesse est sit $r r + s s = x x + y y$, vnde eiusmodi valores pro r et s elici oportet, vt formula Tom. XIV. Nou. Comm. P rdx

$r \dot{x} x + s \dot{d} y$ integrationem admittat. Ac casus quidem facili obuii sunt primo $r = y$ et $s = x$, unde oritur $ax = xy$, deinde $r = x$ et $s = -y$, unde fit $2ax = xx - yy$ quae autem a priori non est diuersa, dum mutando binarum x et y in basi directionem similem recipiunt formam; ac generaliter quidem ponendo $x = X \cos. \zeta - Y \sin. \zeta$ et $y = X \sin. \zeta + Y \cos. \zeta$, prior dat

$$ax = XX \sin. \zeta \cos. \zeta + XY (\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2) - YY \sin. \zeta \cos. \zeta \text{ seu } 2ax = XX \sin. 2\zeta + 2XY \cos. 2\zeta - YY \sin. 2\zeta$$

quae sumto angulo 2ζ recto manifesto in formam posteriorem abit. Ut autem alias superficies eliciamus, statuamus $rr = xx + 2v$ et $ss = yy - 2v$.

Hinc cum sit $ax = \int r dx + \int s dy$ habebimus

$$\begin{aligned} \int r dx &= \int dx \sqrt{(xx + 2v)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(xx + 2v)} + v \sqrt{(xx + 2v)} \\ &\quad - \int dv \sqrt{(x + v)} \\ \int s dy &= \int dy \sqrt{(yy - 2v)} = \frac{1}{2} y \sqrt{(yy - 2v)} - v \sqrt{(yy - 2v)} \\ &\quad + \int dv \sqrt{(y + v)} \end{aligned}$$

quare ut summa fiat integrabilis, sumi oportet pro $\sqrt{\frac{y + v}{x + v}}$ functionem quampiam ipsius v quae sit \sqrt{V} , eritque $ax = \frac{1}{2} x \sqrt{(xx + 2v)} + \frac{1}{2} y \sqrt{(yy - 2v)} - v \sqrt{V} + \int dv \sqrt{V}$ existente $\frac{y + v}{x + v} = V$, sicque introducendo nouam variabilem v , eiusque functionem quamcunque assumendo ad quoduis basis punctum perpendicularum erigi potest vsque ad superficiem

ciem quaestam pertingens. Notandum autem est esse $-v \sqrt{V} + \int dv \sqrt{V} = -\int v \frac{dV}{V}$, ita ut logarithmus ex calculo egrediatur. Verum hic iugens incommodum occurrit, quod relatio inter x, y et v nimis difficulter expediatur; ex quo aliam solutionem adiungo.

Alia Solutio.

12. Cum esse debeat $rr + ss = xx + yy$ statuamus:

$x = v \cos. \Phi, y = v \sin. \Phi, r = v \cos. \omega$ et $s = v \sin. \omega$ eritque $dx = dv \cos. \Phi - v d \sin. \Phi$ et $dy = dv \sin. \Phi + v d \cos. \Phi$ hincque $ax = v d v \cos. (\Phi - \omega) - v^2 d \sin. (\Phi - \omega)$. Iam cum sit $\int v dv \cos. (\Phi - \omega) = \frac{1}{2} v^2 \cos. (\Phi - \omega) + \frac{1}{2} \int v^2 (d\Phi - d\omega) \sin. (\Phi - \omega)$ erit $ax = \frac{1}{2} v^2 \cos. (\Phi - \omega) - \frac{1}{2} \int v^2 v (d\Phi - d\omega) \sin. (\Phi - \omega)$ quod vltimum membrum integrabile esse nequit, nisi sit $v \sin. (\Phi - \omega)$ functio anguli $\Phi + \omega$. Statim ergo secundum signandi modum iam passim receptum, $v \sin. (\Phi - \omega) = F' : \Phi + \omega$, ut fiat

$$\begin{aligned} 2ax &= v^2 \cos. (\Phi - \omega) - F : (\Phi + \omega) \\ \text{existente } d.F : (\Phi + \omega) &= (d\Phi + d\omega) F' : (\Phi + \omega). \\ \text{Vel introducantur alii bini anguli } \mu \text{ et } \nu \text{ ut sit} \\ \Phi &= \frac{\mu + \nu}{2} \text{ et } \omega = \frac{\mu - \nu}{2}, \text{ hincque habebitur} \\ v &= \sqrt{\frac{F' : \mu}{F' : \nu}}; \quad x = v \cos. \Phi, \quad y = v \sin. \Phi \text{ tandemque} \\ 2ax &= \frac{F' : \mu}{\log. \nu} - F' : \mu \end{aligned}$$

quae

quae solutio multo est simplicior; nihilo tamen minus tertiam subiungo.

Solutio tertia.

13. Cum esse debeat $r r + s s = x x + y y$, po-

$$r = x \cos \omega + y \sin \omega \text{ et } s = x \sin \omega - y \cos \omega$$

eritque $ads = x dx \cos \omega + (y dx + x dy) \sin \omega - y dy \cos \omega$ ideoque

$$as = \frac{1}{2} x x \cos \omega - \frac{1}{2} y y \cos \omega + x y \sin \omega - \int d\omega (x y \cos \omega - \frac{1}{2} (x x - y y) \sin \omega).$$

Sit itaque Ω functio quaecunque anguli ω , statueritque $2xy \cos \omega - (xx - yy) \sin \omega = \Omega$ eritque

$$2as = (xx - yy) \cos \omega + 2xy \sin \omega - \int \Omega d\omega$$

quae solutio praecedentes simplicitate multum superat.

Coroll. 1.

14. Si in hac vltima solutione ponatur $x = v \cos \Phi$ et $y = v \sin \Phi$ erit $xx - yy = v v \cos 2\Phi$ et $2xy = v v \sin 2\Phi$; ex quo solutio ita his duabus aequationibus erit contenta

$$v v \sin (2\Phi - \omega) = \Omega \text{ et } 2as = v v \cos (2\Phi - \omega) - \int \Omega d\omega$$

vbi pro Ω functio quaecunque anguli ω accipi potest.

Coroll. 2.

15. Casus eolutu facillimus habetur, ponendo $\Omega = A \cos \omega + B \sin \omega$ vnde fit $\int \Omega d\omega = A \sin \omega - B \cos \omega$.

$-B \cos \omega$. Hinc postrema solutio, dat $(2xy - A) \cos \omega = (xx - yy + B) \sin \omega$ vnde elicitur:

$$\sin \omega = \frac{2xy - A}{\sqrt{(xx + yy)^2 - (xx - yy)^2 + A^2 + B^2}} = \frac{2xy - A}{\sqrt{4xy^2 + B^2}}$$

$$\cos \omega = \frac{xx - yy + B}{\sqrt{(xx + yy)^2 - (xx - yy)^2 + A^2 + B^2}} = \frac{xx - yy + B}{\sqrt{4xy^2 + B^2}}$$

scribendo V loco formulae radicalis. Hincque fit

$$2as = V (xx + yy)^2 - 4Axy + 2B (xx - yy) + AA + BB.$$

Coroll. 3.

16. Cum in tertia solutione formula $d\omega (xy \cos \omega - \frac{1}{2} (xx - yy) \sin \omega)$ integrabilis effici debeat, evidens est hoc fieri si angulus ω constans accipitur. Sit ergo $\omega = \zeta$ prodibique solutio iam supra indicata $2as = (xx - yy) \cos \zeta + 2xy \sin \zeta$.

Constructio generalis.

17. Positis $AX = x$ et $XY = y$ erit pro co-Tab. III roll. 1. $AY = v$ et angulus $XAY = \Phi$. Dacatur Fig. 3. AV vt sit ang. $YAV = XAY = \Phi$ et summa $AD = a$, capiatur AV tertia proportionalis ad AD et AY , vt fiat $AV = \frac{v^2}{a}$. Ad alteram axis partem statuatür angulus $XAM = 90^\circ - \omega$, erit angulus $VAM = 90^\circ + 2\Phi - \omega$, ex V ad AM ducatur normalis VM , eritque $AM = -\frac{v^2}{a} \sin (2\Phi - \omega)$, ideoque $\Omega = -AM \cdot a$, et $VM = \frac{2v^2}{a} \cos (2\Phi - \omega)$. Ex hac ergo constructione colligitur

$$2as = a \cdot VM - a / AM \cdot d\omega \text{ seu } 2s = VM + \int AM \cdot d\omega$$

P 3 summa-

sumatur ergo $MP = \int AM. d\omega$ ut fiat $zs = VP$, ac supra iam vidimus, in quacunq; curva fuerit punctum M, curuam CPG punctum P continentem ita esse comparatam, vt recta MP ad eam sit normalis. Quare relecta curva BMF eius loco curuam CPG pro arbitrio assumere licet, vnde haec constructio conficietur.

Sumta in basi recta AX, in eaque AD = a, ad lubitum describatur curva quaecunq; CPG, ad quam in quouis puncto P ducatur normalis indefinita PV, in qua sumto puncto quocunq; V ductaque recta AV bisectur angulus DAV recta AY cuius longitudo sumatur media proportionalis inter AD et AV, et in puncto Y ad basin perpendiculariter erigatur recta semissi ipsius PV aequalis, quae ad superficiem quae eam pertinget. Si hoc modo in singulis normalibus PV in infinitum productis omnia puncta euoluuntur, omnia superficies ex curua CPG oriundae puncta determinantur.

Scholion.

18. Solutio huius problematis multo est difficilior quam praecedentis, cum reductio formulae $rx + sdy$ ad integrabilitatem, ita vt sit $rr + ss = xx + yy$ haud exigua artificia requirat. Qui autem alios casus tentare voluerit, saepe tantas offendet difficultates, quibus superari his omnibus sagacitatis Analytica vix sufficere videtur. Quare solutionem

gene-

generalem etiamnum vix sperare licet; quae huc redit vt proposita formula integrabili $pdx + qdy$, inuestigetur alia formula $rdx + sdy - dz$ iidem integrabilis, ita vt sit $rr + ss = pp + qq$. Statui quidem posset $r = p \cos. \omega + q \sin. \omega$ et $s = q \cos. \omega - p \sin. \omega$, haeque

$$dz = (pdx + qdy) \cos. \omega + (qdx - pdy) \sin. \omega$$

vbi cum $pdx + qdy$ sit integrabile statuitur integrale $= u \cos. \omega + \int (uq \cos. \omega + qdx - pdy) \sin. \omega$. Neque vero patet quomodo angulum ω per x et y definire liceat vt haec formula integrabilis euadat. Quare eiusmodi casus euoluam, vbi mihi quidem difficultates superare licuit.

Problema 3.

19. Si superficies data hac exprimitur aequatione $dz = Xdx + Ydy$, vbi X per solam x et Y per solam Y detur, inuenire omnes superficies isti congruentes.

Solutio.

Quod si ergo pro superficiebus quaesitis ponatur

$$dz = rdx + sdy, \text{ necesse est sit } rr + ss = XX + YY$$

Natiatur ergo $r = \sqrt{XX + 2\psi}$ et $s = \sqrt{YY - 2\psi}$

$$\text{vt fiat } z = \int (dx \sqrt{XX + 2\psi} + dy \sqrt{YY - 2\psi})$$

Iam

Tam quaeratur integrale formulae $dx\sqrt{(XX+2\psi)}$ sumta quantitate ψ constante, quod sit $=P$, ita ut P sit functio ipsarum x et ψ , quam tanquam datam spectare licet; ea igitur differentiata prodeat $dP = dx\sqrt{(XX+2\psi)} + R d\psi$, vbi quidem constat fore $R = \frac{dx}{\sqrt{(XX+2\psi)}}$ quantitate ψ pro constante habita. Simili modo spectata ψ ut constante quaeratur quantitas $Q = \int dy\sqrt{(YY-2\psi)}$, eaque denuo differentiata utraque y et ψ prae variabili habita prodeat $dQ = dy\sqrt{(YY-2\psi)} + S d\psi$, eritque $S = -\frac{dy}{\sqrt{(YY-2\psi)}}$, quae ergo quantitates pariter erunt cognitae. Hinc facta substitutione habebitur.

$$z = \int (dP - R d\psi + dQ - S d\psi) = P + Q - \int (R + S) d\psi$$

et nunc formulam $(R + S) d\psi$ integrabilem reddi oportet quod aliter fieri nequit nisi $R + S$ sit functio ipsius ψ . Sit itaque V functio quaecunque ipsius ψ , et sumatur $R + S = V$, eritque $z = P + Q - \int V d\psi$, in quibus aequationibus constructio generalis omnium superficierum congruentium continetur.

Problema 4.

20. Si pro superficie data coordinata ad basin perpendicularis exprimitur functione homogenea n dimensionum ipsarum x et y , inuestigare omnes superficies ipsi congruentes.

Solutio.

Ponatur $y = nx$, et aequatio pro superficie data talem habeat formam $a^{n-1} z = x^n U$ existente U functio-

functione ipsius u tantum, quae ergo erit data. Hinc sit.

$$a^{n-1} dz = n x^{n-1} U dx + x^n dU.$$

Ab ob $dy = u dx + x du$, erit:

$$a^{n-1} dz = x^{n-1} (n U dx + \frac{dU}{x} dy - \frac{u dU}{x} dx)$$

ita ut sit $p = x^{n-1} (n U - \frac{u dU}{x})$ et $q = x^{n-1} \frac{dU}{x}$.

hincque $p p + q q = x^{2n-2} (n U U - \frac{2u dU}{x} U + \frac{(1+uu)dU^2}{x^2})$

Statuatur $mn U U - \frac{2nuUdU}{x} + \frac{(1+uu)dU^2}{x^2} = V V$, ita

ut etiam V sit functio data ipsius u : et iam pro superficibus quaesitis constituantur haec aequatio differentialis

$$a^{n-1} dz = x^{n-1} (r dx + s dy)$$

ac necesse est ut sit $r r + s s = V V$. Nunc pro y substituto valore ux , sit.

$$a^{n-1} dz = x^{n-1} ((r + s u) dx + x s du)$$

hincque prius membrum integrando per x .

$$a^{n-1} z = \frac{1}{n} x^n (r + s u) + \int x^n (s du - \frac{dr - s du - u ds}{n})$$

Statuatur $r = V \cos. \Phi$ et $s = V \sin. \Phi$, ut habeatur

$$na^{n-1} z = x^n V (\cos. \Phi + u \sin. \Phi) + \int x^n ((n-1) V du \sin. \Phi + V d\Phi (\sin. \Phi + u \cos. \Phi) - dV (\cos. \Phi + u \sin. \Phi))$$

Hic formula differentialis $(n-1) V du \sin. \Phi + V d\Phi (\sin. \Phi + u \cos. \Phi) - dV (\cos. \Phi + u \sin. \Phi)$ duas tantum variables u et Φ complectitur, dabitur Tom. XIV. Non. Comm. **Q**

tur ergo multiplicator M itidem functio ipsarum, u et Φ qui eam reddat integrabilem: sic ergo

$$M((n-1)Vdu \sin. \Phi + Vd\Phi \sin. \Phi - u \cos. \Phi) - dV(\cos. \Phi + u \sin. \Phi) = dS,$$

et S etiam erit functio assignabilis ipsarum u et Φ , inde cum sit

$$nd^2 - 1z = x^2 V(\cos. \Phi + u \sin. \Phi) + \int \frac{x^2 dS}{M}$$

evidens est hanc formulam integrabilem esse non posse nisi sit $\frac{x^2}{M}$ functio ipsius S. Ponamus ergo

$$x^2 = MF': S \text{ fietque } nd^2 - 1z = x^2 V(\cos. \Phi + u \sin. \Phi) + F: S,$$

Per binas porro Variables u et Φ , determinantur M et S, hincque porro x et y = ux, atque z. Vnde ob functionem arbitrariam hic introductam, haec solutio est generalis.

Scholion 1.

21. Hic modo proxius singulari euenit, vt casu n = 0 haec solutio locum non inueniat, neque, etiam patet quomodo huic incommodo occurrere possit. Quod hic eo magis mirum videtur, cum aliquibus huiusmodi casus alio modo tractari satis facile expediantur. Interim haec duo problemata latissime patent, et ex III. casus resolui possunt quibus superficies data est cylindrica, ex IV. vero quibus

quibus est conica, qui etiamsi videntur facillimi, tamen solutiones hinc resultantibus formulas transcendentibus valde complicatas inuoluunt, vt inde superficies congruentes simpliciores nullo modo elicere liceat. Verum neuter horum casuum ad superficiem sphaericam accommodari potest cuius natura cum hac aequatione $z = V(aa - xx - yy)$ exprimitur, pro aequatione superficieum congruentium $dz = rdx + sdy$ fieri debet $rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$; quomodocunque autem hinc quantitates r et s definiantur, haud patet quomodo formula $r dx + s dy$ ad integrabilitatem perducere possit. Dubium tamen est nullum, quin dentur infinitae superficies sphaericae congruentes.

Scholion 2.

22. Casum autem, quo superficies proposita est sphaerica, aliosque similes expediri posse obseruari, si in plano fixo pro basi assumto binae coordinatae non orthogonales capiuntur, sed altera sumatur recta ex puncto fixo educa, altera vero angulo cuius positionem determinante continetur. Fig. 4. Sit igitur C hoc punctum fixum, et recta CA positione data, et pro puncto quocunque in basi assumto V statuat recta CV = ψ et angulus ACV = Φ , perpendicularium autem in V inscissus ad superficiem, pertingens sit z, quod ita per ψ et Φ exprimitur vt sit $dz = p d\psi + q d\Phi$; consideretur primo angulus Φ constans et sumto $|V\psi = d\psi$ perpendicularium puncto ψ inscissus erit $z = p d\psi$ vnde tangens

Q 2

tangens in rectae VC punctum Q incidet vt sit $VQ = \frac{z}{p}$. Tum consideretur distantia ϖ vt constans, et sumto angulo $VCu = d\Phi$ vt sit $Vu = \varpi a\Phi$ perpendicularum puncto u insilens erit $= z + qd\Phi$; quare in recta VP ad C V normali tangens incidet in P vt sit $VP = \frac{z}{q}$ vnde planum tangens basim secabit recta P Q, ad quam ex V demisso perpendicularo VR, erit $VR = \frac{VR \cdot VQ}{PQ} = \frac{z^2}{r(q + p\varpi^2)}$ ideoque anguli quem planum tangens facit cum basi, tangens $= \sqrt{(p + \frac{q^2}{\varpi^2})}$ et secans $= \sqrt{(r + p + \frac{q^2}{\varpi^2})}$. Quare cum in basi spatium reſtangulare $\varpi V u \theta$ sit $= \varpi d\varpi d\Phi$, elementum superficiei ipsi imminens habebitur $= \varpi d\varpi d\Phi \sqrt{(r + p + \frac{q^2}{\varpi^2})}$, ex quo alia superficies aequatione $dz = r d\varpi + s d\Phi$ expresse illi erit congruens si fuerit $r r + \frac{s^2}{\varpi^2} = p p + \frac{q^2}{\varpi^2}$. Verum etiam hanc substitutionem in analysi praecedente instituire licet, vti ex solutione problematis sequentis perspicietur.

Problema 5.

23. Si superficies proposita fuerit sphaerica radio $= z$ descripta, inuestigare omnes superficies ipsi congruentes.

Solutio.

Cum aequatio pro superficie sphaerica sit $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$ posito $dz = p dx + q dy$ erit $p = \frac{-ax}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ et $q = \frac{-ay}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ vnde $pp +$

$pp + qq = \frac{z^2 + y^2}{aa - xx - yy}$. Quare si pro superficiebus quacunque aequatio sumatur $dz = r dx + s dy$, oportet sit $r r + s s = \frac{z^2 + y^2}{aa - xx - yy}$. Nunc vero sumatur $x = \varpi \cos \Phi$ et $y = \varpi \sin \Phi$, vt fiat $r r + s s = \frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2}$, eritque $dz = d\varpi (r \cos \Phi + s \sin \Phi) + \varpi d\Phi (s \cos \Phi - r \sin \Phi)$, pro qua breuitatis gratia scribatur $dz = R d\varpi + S \varpi d\Phi$, vbi perspicuum est etiam fieri oportere $RR + SS = \frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2}$, vnde idoneos valores pro R et S erui conuenit, vt forma $R d\varpi + S \varpi d\Phi$ integrationem admittat. Hoc autem per problema tertium praestari posse manifestum est. Ponatur enim $S = \frac{1}{\varpi}$ et $R = \sqrt{(\frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2})}$ et habebitur

$$dz = d\varpi \sqrt{(\frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2})} + d\Phi, \text{ seu}$$

$$z = \int d\varpi \sqrt{(\frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2})} + \Phi dt.$$

Quaeritur eiusmodi functio ipsarum ϖ et t , vt fiat

$$dP = d\varpi \sqrt{(\frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2})} + Q dt$$

ita vt sit $P = \int d\varpi \sqrt{(\frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2})}$ sumto t constante

et $Q = -\int \frac{d\varpi}{\varpi^2 \sqrt{(\frac{\varpi^2}{aa - \varpi^2} - \frac{1}{\varpi^2})}}$ sumto pariter t constante.

Tum igitur sit $z = \int dP + \int (dP - Q dt - \Phi dt)$ seu $z = P + t\Phi - \int dt (Q + \Phi)$.

Quo circa necesse est sit $Q + \Phi =$ functioni ipsius t quae sit T, vnde sit $\Phi = T - Q$ et

$$z = P + T t - Q t - \int T dt = P - Q t + \int t dt.$$

Scho-
pp +

Scholiön.

24. En ergo solutionem huius problematis difficillimi vnde simul patet simili, modo problema multo generalius quo $rr + ss$ seu $RR + SS$ aequari debeat functioni cuiuscunque ipsius w resolu potuisse. Verum cum hic valores litterarum P et Q non nisi maxime transcendentaliter assignari possint, neutrquam patet, quomodo vnica saltem superficies simplicior inueniri queat, quae sphaericae sit congruens. Ceterum hic artificia, quibus haecenus formulam $r dx + s dy$ ad integrabilitatem reuocare licuit distinctius exposuisse inuabit. Hic autem primum obseruandum est in hac formula ternas variables contineri, praeter x et y scilicet vnam novam in litteris r et s innotitam, cuius relatio ad x y ea quaeritur, qua illa formula integrabilis reddatur. Artificia autem hic adhibenda eo redeunt, vt per idoneas substitutiones ternae nouae variables t , u et w introducuntur, quaestioque eo redigatur, vt huiusmodi formula $Mdt + Ndu$ integrabilis sit efficienda. Tertium enim differentiale $d w$ semper eliminare licet, ita vt haec variabilis w tantum in quantitatibus finitis M et N contineatur. Tum autem sequentibus casibus solutionem elicere licebit,

1°. Si alterutra quantitatium M et N euanescat, namque si $N = 0$, vt formula Mdt sit integrabilis, necesse est quantitatem M functioni ipsius t aequari; factio igitur $M = F'$; t , vnde relatio inter ternas vari-

variables t , u , et w generalissime definitur, erit $\int M dt = F : t$.

2°. Si formula $M dt + N du$ huiusmodi formam habeat $S(P dt + Q du)$, vbi P et Q sunt functiones tantum binarum variabilium t et u , tertia vero w in solo factore S contineatur. Tunc enim semper inueniri potest multiplicator R vt sit $R(P dt + Q du) = dV$ sicque quantitas V definiti queat, quae erit functio ipsarum t et u . Hoc modo formula abit in, $\frac{SdV}{R}$, ac iam statim debet $S = RF' : V$, formulaeque integrale fiet $\int \frac{S}{R} dV = F : V$.

3°. Resolutio quoque succedit si quantitas M tantum sit functio binarum t et u tertiaque w in sola N insit, tum enim eiusmodi functionem binarum t et u quae sit V inuenire licet, vt sit $dV = M dt + S du$ hoc modo formula proposita hanc induit formam $dV + (N - M) du$: sicque capi debet $N = M + F' : u$ et integrale erit $V + F : u$.

4°. Si tertia variabilis w ita in vtramque quantitatem M et N ingredatur, vt binae functiones ipsarum t et u puta P et Q dentur, quibus haec forma $MQ + NP$ a variabilis w immunis reddatur, tum solutio sequenti modo obtineri poterit.

$$dt = \frac{Qdp - Rdq}{FQ - Ks} \text{ et } du = \frac{Pdq - Sdp}{FQ - Ks}$$

Con-

Considerentur formula differentialis $P dt - Q du$; quae multiplicatore R integrabilis reddatur; ponaturque $d\psi = R(P dt - Q du)$, eritque ψ functio cognita ipsarum t et u , unde vicissim t per u et ψ definiatur ac fiet $dt = \frac{Q}{P} du + \frac{d\psi}{R}$. Quare formula proposita erit:

$\frac{M Q + N P}{P} du + \frac{R d\psi}{R}$, ubi $\frac{M Q + N P}{P}$ est functio ipsarum u et ψ tantum sicque resolutio per n. 4 absoluetur.

Scholion 2.

25. De his integrationibus imprimis notandura est, eas esse generalissimas, dum functiones maxime generales cuiuspiam variabilis in integrata introducuntur, pro quibus adeo functiones nullo continuitatis vinculo contentas, quae ut supra videmus ex libero manus ductu nascuntur, assumere licet. Quin etiam omnium huius generis quaestionum criterium in hoc consistit, ut tales functiones prorsus ab arbitrio nostro pendentes ip earum solutiones introducantur.

DE

SYMMIS SERRIVM

NUMEROS BERNOULLIANOS

INVOLVENTIVM.

Auctore

L. EYLER O.

I.

Quantopere sint notatu digni numeri ab Inventore *Bernoulliani* vocati, quippe quibus olim *Iacobus Bernoulli* in *Arte coniectandi* est usus ad progressionem potestatum numerorum naturalium summandas, cum ab aliis, qui serierum doctrinam novis inuentis locupletauerunt, tum etiam a me abunde est ostensum, ubi per eosdem numeros serierum potestatum reciprocaturum summam expressas dedi. *Bernoullius* quidem progressionem horum numerorum ob calculi molestantiam non ultra quintum terminum continuavit, qui sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^5}$, atque Auctori vsque ad vndeclimas potestates summandas sufficiebant. Postquam autem facis concinnam huius progressionis legem detexissem, 17 eius primores terminos assignavi. Ipsos vero numeros *Bernoullianos* respectu per numeros 6, 10, 14, 18, 22 etc. multiplico quo denominatores sunt simpliciores, Tom. XIV. Nou. Comm. R

DE

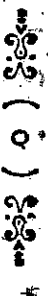
res,

Consideretur formula differentialis $P dt - Q du$, quae multiplicatore R integrabilis reddatur; ponaturque $d\psi = R(P dt - Q du)$, eritque ψ functio cognita ipsarum t et u , unde vicissim t per u et ψ definiatur ac fiet $dt = \frac{Q du}{P} + \frac{d\psi}{R}$. Quare formula proposita erit:

$\frac{MQ + NP}{P} du + \frac{M d\psi}{PR}$, ubi $\frac{MQ + NP}{P}$ est functio ipsarum u et ψ tantum sicque resolutio per n^o. 4 absoluetur.

Scholion 2.

25. De his integrationibus imprimis notandura est, eas esse generalissimas, dum functiones maxime generales cuiuscumque variabilis in integranda introducuntur, pro quibus adeo functiones nullo continuata-tis vinculo contentas, quae ut supra videmus ex libero manu ductu nascuntur, assumere licet. Quin etiam omnium huius generis quaestionum criterium in hoc consistit, ut tales functiones prorsus ab arbitrio postro pendentes in earum solutiones introducantur.



DE

SYMMIS SERIERVM

NUMEROS BERNOULLIANOS
INVOLVENTIVM.

Auctore

L. EULER O.

I.

Quantopere sint notatu digni numeri ab Inven-tore *Bernoulliani* vocati, quippe quibus olim *Jacobus Bernoulli* in Arte coniectandi est usus ad progressionem potestatum numerorum naturalium summandas, cum ab aliis, qui serierum doctrinam novis inuentis locupletauerunt, tum etiam a me abunde est ostentum, ubi per eosdem numeros se-rierum potestatum reciprocarum summas expressas dedi. *Bernoullius* quidem progressionem horum nu-merorum ob calculi molestiam non vera quintum terminum continuavit, qui sunt $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}$, at-que Auctori vsque ad vndecimas potestates summan-das sufficiebant. Postquam autem factis conuiniam huius progressionis legem detexissem, 17 eius pri-miores terminos assignavi. Ipsos vero numeros *Ber-noullianos* respectiue per numeros 6, 10, 14, 18, 22 etc. multiplico quo denominatores fiant simplicio-Tom. XIV. Nou. Comm. R res,