1770

De formulis integralibus duplicatis

Leonhard Euler

DE FORMVLIS INTEGRALIBVS DVPLICATIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si corporis cuiuscunque propositi vel soliditatem vel superficiem vel alias huiusmodi quantitates definire velimus, id per duplicem integrationem fieri solet; Formula enim differentialis bis integranda tali forma $Z dx dy$ exprimitur, binas variabiles x et y continente quarum altera sola in priori integratione vt variabilis spectatur; posterior vero integratio ad alteram iam vt variabilem spectatam instituitur. Hinc quantitas per duplicem istam integrationem resultans duplex signum integrale praefigendo indicari solet hoc modo: $\int\int Z\, dx\, dy$, quippe qua duplicatione formula differentialis proposita $Z\, dx\, dy$ bis integrari debere est intelligenda. Huiusmodi igitur expressiones geminato signo summatorio affectas hic formulas integrales duplicatas appello, quarum vsus cum latissime pateat, in earum indolem hic diligentius inquirere, earumque proprietates et affectiones accuratius euoluere constitui.

2. Pri-

2. Primum igitur cum x et y sint duae quantitates variabiles a se inuicem non pendentes, Z vero denotet earum functionem quamcunque, formulae integralis duplicatae $\int\int Z\, dx\, dy$ vis ita exponi potest, vt quaerenda sit functio finita binarum istarum variabilium x et y, quae ita bis differentiata, vt in altera differentiatione sola x in altera sola y pro variabili habeatur, ad formulam $Z\, dx\, dy$ deducat. Ita si fuerit $Z = a$, euidens fore $\int\int a\, dx\, dy = axy$; generalius vero erit $\int\int a\, dx\, dy = axy + X + Y$, denotante X functionem quamcunque ipsius x et Y ipsius y, quandoquidem hae duae quantitates per geminam illam differentiationem ex calculo tolluntur.

3. In genere autem si V fuerit eiusmodi functio ipsarum x et y, quae bis differentiata ita vt modo est praeceptum, praebeat $Z\, dx\, dy$; erit quidem vtique $V = \int\int Z\, dx\, dy$; verum duplex integratio insuper functiones arbitrarias X et Y, illam ipsius x; hanc ipsius y inducit, vt sit generalissime:

$$\int\int Z\, dx\, dy = V + X + Y.$$

Ex statim perspicitur, huiusmodi formulas differentiales necessario affectas esse producto $dx\, dy$, neque propterea secundum hanc significationem tales formulas $\int\int Z\, dx^2$ vel $\int\int Z\, dy^2$ quicquam significare; siquidem per ipsam rei naturam excluduntur, dum in altera integratione sola x, in altera vero sola y vt variabilis tractatur.

 4. Con-

4. Conſtituta ſic forma huiusmodi formularum integralium duplicatarum $\int\int Z\,dx\,dy$, ita vt x et y ſint duae quantitates variabiles a ſe inuicem non pendentes et Z functio finita ex iis vtcunque compoſita, haud difficile eſt duplicem integrationem, quam inuoluunt, inſtituere, quod quidem prout primo vel x vel y ſola variabilis conſideratur, duplici modo fieri poteſt. Sumta ſcilicet primo y pro variabili, altera x vt conſtans tractatur, quaeriturque integrale $\int Z\,dy$ quod erit certa quaedam functio ipſarum x et y; qua inuenta ſuſcipiatur formula differentialis $dx\int Z\,dy$ in qua iam y vt conſtans ſolaque x vt variabilis tractetur, eiusque quaeratur integrale $\int dx\int Z\,dy$ qui erit valor quaeſitus formulae integralis duplicatae propoſitae $\int\int Z\,dx\,dy$. Si in hac duplici integratione ordo variabilium x et y inuertatur, valor quaeſitus ita exprimetur $\int dy\int Z\,dx$, qui ab illo non diſcrepabit.

5. Ob hunc conſenſum fit, vt talis forma $\int\int Z\,dx\,dy$ promiſcue ſiue hoc modo $\int dx\int Z\,dy$ ſiue hoc $\int dy\int Z\,dx$ exhiberi poſſit; vtrouis autem vtamur, regulae vulgares integrationis ſunt obſeruandae, ſi modo notetur in ea integratione, in qua vel x vel y pro conſtante ſumatur, conſtantem introductam eiusdem fore functionem quamcunque. Veluti ſi proponatur haec forma $\int\int\frac{dx\,dy}{xx+yy}=\int dx\int\frac{dy}{xx+yy}$ ob $\int\frac{dy}{xx+yy}=\frac{1}{x}\,\text{A tang.}\,\frac{y}{x}+\frac{dX}{dx}$, denotante $\frac{dX}{dx}$ functionem quamcunque ipſius x, erit $\int\int\frac{dx\,dy}{xx+yy}=\int\frac{dx}{x}$ A tang.

$\text{A tang.}\,\frac{y}{x}+X$, vbi in integratione adhuc perficienda y pro conſtante habetur. Simili vero modo reperitur $\int\int\frac{dx\,dy}{xx+yy}=\int\frac{dy}{y}\,\text{A tang.}\,\frac{x}{y}+Y$, in qua integratione x conſtans aſſumitur, in quo quidem exemplo conſenſus binorum valorum inuentorum non ſatis eſt perſpicuus.

6. Interim tamen veritas conſenſus per ſeries facile oſtenditur; cum enim ſit $\text{A tang.}\,\frac{x}{y}=\frac{\pi}{2}-\text{A tang.}\,\frac{y}{x}$, denotante $\frac{\pi}{2}$ angulum rectum, et

$$\text{A tang.}\,\frac{y}{x}=\frac{y}{x}-\frac{y^3}{3x^3}+\frac{y^5}{5x^5}-\frac{y^7}{7x^7}+\frac{y^9}{9x^9}-\text{etc.}$$

erit

$$\int\frac{dx}{x}\,\text{A tang.}\,\frac{y}{x}=\frac{-y}{x}+\frac{y^3}{9x^3}-\frac{y^5}{25x^5}+\frac{y^7}{49x^7}-\text{etc.}+f:y \text{ et}$$

$$\int\frac{dy}{y}\,\text{A tang.}\,\frac{x}{y}=\frac{\pi}{2}\,ly-\frac{y}{x}+\frac{y^3}{9x^3}-\frac{y^5}{25x^5}+\frac{y^7}{49x^7}-\text{etc.}+f:x$$

ex quarum vtraque oritur:

$$\int\int\frac{dx\,dy}{xx+yy}=X+Y-\frac{y}{x}+\frac{y^3}{9x^3}-\frac{y^5}{25x^5}+\frac{y^7}{49x^7}-\text{etc.}$$

Verum vbi ambae integrationes ſuccedunt, conuenientia ſponte ſe offert: quod quidem pluribus exemplis oſtendiſſe ſuperfluum foret, cum eius ratio ex natura differentialium et integralium perfecte ſit demonſtrata.

7. Haec igitur tenenda ſunt de iſtiusmodi formulis integralibus duplicatis, quando binae variabiles x et y nullo plane nexu inter ſe cohaerent, ita vt in altera integratione altera, in altera vero altera conſtans accipiatur. Verum tales formulae non

non confundendae ſunt cum iis, quibus vt initio dixi, ſoliditas et ſuperficies corporum quorumcunque exprimi ſolet. Etſi enim hae formulae etiam duplicem integrationem requirunt, et in priori altera binarum variabilium puta y ſola vt variabilis tractatur altera x pro conſtante aſſumta, tamen priori integratione peracta, ea per omnes valores ipſius y extendi, ſicque tandem loco y extremus valor, quem recipere poteſt, ſtatui debet, qui plerumque ab x pendet, ita vt hoc valore poſt primam integrationem loco y conſtituto in poſteriori integratione y tanquam functio quaedam ipſius x ingrediatur, neque propterea pro conſtanti haberi queat, qua conditione fit, vt altera integratio plurimum immutetur, etſi prior ſimili modo vt ante abſoluatur.

Tab I. Fig. 1. 8. Quod diſcrimen quo clarius perſpiciatur, exemplum attuliſſe iuuabit. Quaeratur ergo ſoliditas ſphaerae, cuius centrum ſit C et radius CA $= a$, ac primo quidem portio eius quadranti ACB inſiſtens, cuius elementum eſt columella $YZyz$ areolae $Yy = dx\,dy$ inſiſtens, poſitis $CP = x$, et $PY = y$ eritque eius altitudo $YZ = \sqrt{(aa - xx - yy)}$; hinc ſoliditas columellae elementaris $= dx\,dy\sqrt{(aa-xx-yy)}$ quam bis integrari oportet. Maneat primo intervallum $CP = x$ conſtans, et integrale $\int dy\sqrt{(aa-xx-yy)}$ ita ſumtum, vt euaneſcat poſito $y = 0$, dabit portiunculam areolae $PpYq$ inſiſtentem, quae ergo erit

erit $= \frac{1}{2}y\sqrt{(aa-xx-yy)} + \frac{1}{2}(aa-xx)\,\text{A sin.}\,\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Iam hoc valore in altera integratione vti oportet, ſed antequam is inducatur, per totam diſtantiam PM extendi debet, vt habeatur elementum ſoliditatis toti areolae $PpMm$ inſiſtens; puncto autem Y ad M vsque promoto, fit $y = \sqrt{(aa - xx)}$, qui ergo valor loco y ſubſtitui debet, ita vt in ſequente integratione quantitas y minime vt conſtans conſideretur, haecque tractandi methodus plurimum a praecedente diſcrepet.

9. Poſito ergo $y = \sqrt{(aa-xx)}$, fit $\int dy\sqrt{(aa-xx-yy)} = \frac{\pi}{4}(aa-xx)$ cum ſit A ſin. $1 = \frac{\pi}{2}$; ſicque integratio adhuc abſoluenda erit $\int dx\int dy\sqrt{(aa-xx-yy)} = \frac{\pi}{4}\int(aa-xx)dx$, vbi quidem vnica variabilis x ineſt, ſed non ideo, quod iam hic y pro conſtanti habeatur, ſed quia pro y certa quaedam functio ipſius x eſt ſubſtituta. Haec altera vero integratio ita inſtituta, vt euaneſcat poſito $x = 0$, dabit ſoliditatem portionis ſphaerae, quae areae CBMP inſiſtit, quae idcirco erit $= \frac{\pi}{4}(aax - \frac{1}{3}x^3)$; vnde ſphaerae octans ſeu portio toti quadranti ACB inſiſtens prodibit punctum P vsque in A promouendo vt fiat $x = a$. Tum ergo ſoliditas octantis ſphaerae erit $= \frac{\pi}{6}a^3$, hincque totius ſphaerae $= \frac{4\pi}{3}a^3$ vti conſtat. Ex quo exemplo intelligitur, talem ſoliditatis inueſtigationem plurimum differre ab integratione duplicata formularum primo expoſita.

Tab. I. Fig. 2. 10. Quod ſi non totum octantem ſphaerae, ſed cam tantum eius portionem quae areae rectangulari CEDF inſiſtit inueſtigare velimus, prior integratio vt ante inſtituenda eſt, ſed ea peracta ipſi y valor PM debet tribui, qui quidem eſt conſtans et propterea haec inueſtigatio ad primum genus videtur accedere, verumtamen eo diſcrepat, quod integrale determinatum prodeat, cum ibi functiones indefinitae X et Y inucherentur. Poſito ergo vt ante ſphaerae radio $CA=a$, ſit rectanguli CEFD latus $CD=e$ et $CE=f$: et ſolidum elementare areolae $Pp\,Yq$ inſiſtens erit vt ante

$$\tfrac{1}{3}y\sqrt{(aa-xx-yy)}+\tfrac{1}{3}(aa-xx)\text{ A ſin }\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}},$$

quod vsque ad M extenſum, vbi ſit $y=f$; erit

$$\tfrac{1}{3}f\sqrt{(aa-ff-xx)}+\tfrac{1}{3}(aa-xx)\text{ A ſin. }\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

vnde ſolidum areae CPEM inſiſtens ſequenti integrali exprimetur.

$$\tfrac{1}{3}f\int dx\sqrt{(aa-ff-xx)}+\tfrac{1}{3}\int(aa-xx)dx\text{ A ſin. }\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

ſi quidem ita definiatur, vt euaneſcat poſito $x=0$. Euoluamus ergo ſeorſim has binas formulas.

11. Ac prima quidem ſtatim praebet;

$$\int dx\sqrt{(aa-ff-xx)}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(aa-ff-xx)}+\tfrac{1}{2}(aa-ff)\text{ A ſin. }\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}}$$

altera autem ob $d.\text{ A ſin. }\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{fx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$ ita transformatur:

$\int(aa-$

$$\int(aa-xx)dx\text{ A ſin. }\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}=(aax-\tfrac{1}{3}x^3)\text{ A ſin. }\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$$
$$-f\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

ad quam poſtremam partem integrandam, notetur eſſe

$$\text{A ſin. }\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}=\int\frac{af\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

huius ergo dabitur multiplum quoddam, quod illi formae adiectum praebeat talem formam

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}+m\text{ A ſin. }\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$=\int\frac{(aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf)dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$$

vt $aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf$ fiat per $aa-xx$ diuiſibile, id quod fit ſumendo $m=-\frac{2a^3}{3f}$; hincque erit

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}=\frac{2a^3}{3f}\text{ A ſin. }\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$-\tfrac{1}{3}\int\frac{(2aa-xx)dx}{\sqrt{(aa-ff-xx)}}.$$

12. Cum igitur ſit

$$\int\frac{(2aa-xx)dx}{\sqrt{(aa-ff-xx)}}=\tfrac{1}{2}(3aa+ff)\text{ A ſin. }\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}}+\tfrac{1}{2}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

erit . . . . . $\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\,dx}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}$

$=$

$$= \frac{2a^3}{3f} \text{A sin.} \frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}} - \tfrac{1}{6}(3aa+ff) \text{A sin.} \frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} - \tfrac{1}{6} x \sqrt{(aa-ff-xx)}$$

hincque . . . . $\int (aa-xx) dx \, \text{A sin.} \frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$

$$= (aax - \tfrac{1}{3}x^3) \text{A sin.} \frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} - \tfrac{2}{3} a^3 \text{A sin.} \frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$+ \tfrac{1}{6} f (3aa+ff) \text{A sin.} \frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6} f x \sqrt{(aa-ff-xx)}.$$

Quare posito $x = CD = e$, erit soliditas portionis sphaerae rectangulo C D E F insistentis:

$$\tfrac{1}{4} e f \sqrt{(aa-ee-ff)} + \tfrac{1}{4} f (aa-ff) \text{A sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6} e (3aa-ee)$$
$$\text{A sin.} \frac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \tfrac{1}{3} a^3 \text{A sin.} \frac{ef}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}} + \tfrac{1}{12} f (3aa-ff)$$
$$\text{A sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{12} e f \sqrt{(aa-ee-ff)}$$

quae expressio reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{3} e f \sqrt{(aa-ee-ff)} + \tfrac{1}{6} f (3aa-ff) \text{A sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6} e (3aa-ee)$$
$$\text{A sin.} \frac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \tfrac{1}{3} a^3 \text{A sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}}.$$

13. Si ergo rectanguli terminus F vsque ad peripheriam porrigatur vt fit $ee + ff = aa$, primum membrum euanescit et arcus circulares tria reliqua afficientes abeunt in angulum rectum seu $\frac{\pi}{2}$, eritque soliditas

$$\tfrac{\pi}{2} \left(\tfrac{1}{2} aae + \tfrac{1}{2} aaf - \tfrac{1}{6} e^3 - \tfrac{1}{6} f^3 - \tfrac{2}{3} a^3 \right)$$

seu ob $f = \sqrt{(aa-ee)}$.

$$\tfrac{\pi}{12} ((2aa+ee)\sqrt{(aa-ee)} - 2a^3 + 3aae - e^3)$$

quod solidum fit maximum, si $f = e = \frac{a}{\sqrt{2}}$, fitque id tum $= \frac{\pi a^3 (5 - 2\sqrt{2})}{12 \sqrt{2}}$, dum soliditas octantis sphaerae est $= \frac{\pi}{6} a^3$. Ita vt nostrum solidum fit ad octantem sphaerae vt $5 - 2\sqrt{2}$ ad $2\sqrt{2}$. Sin autem punctum F non ad peripheriam quadrantis pertingat, fueritque $f = e$ erit soliditas quaesita $= \frac{1}{3} ee \sqrt{(aa-2ee)} + \frac{1}{3} e (3aa-ee) \text{A sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} - \frac{1}{3} a^3 \text{A sin.} \frac{ee}{aa-ee}$ Quare si fuerit

$$\text{A sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} : \text{A sin.} \frac{ee}{aa-ee} = a^3 : e(3aa-ee)$$

solidum algebraice exprimetur.

14. Quo autem rem generalius complectamur Tab. I. Fig. 3. quaeramus solidum areae cuicunque GQHR insistens cuius elementum cum areolae $Y y = dx\,dy$ insistat, idque fit $= dx\,dy \sqrt{(aa-xx-yy)}$, prima integratio sumto x constante praebet $\frac{1}{2} dx (y \sqrt{(aa-xx-yy)}$ $+ (aa-xx) \text{A sin.} \frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}})$

Sint iam ex natura curuae G Q H R distantiae extremae $PQ = q$ et $PR = r$, atque solidum elementare areolae Q R insistens erit

$$\tfrac{1}{2} dx \begin{Bmatrix} + r\sqrt{(aa-xx-rr)} + (aa-xx) \text{A sin.} \frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}} \\ - q\sqrt{(aa-xx-qq)} - (aa-xx) \text{A sin.} \frac{q}{\sqrt{(aa-xx)}} \end{Bmatrix}$$

Quare cum q et r possint esse functiones quaecunque ipsius x, euidens est quantum absit, quo minus quantitas y in sequente integratione pro constanti habeatur. Sequens autem integratio a valore $x = OE$ vsque ad valorem $x = OF$ est extendenda.

15. Si figura basis G Q H R a recta C A Tab. I. Fig. 4. traiiciatur vt quaeratur solidum basi C G H insistens cuius

cuius natura exprimatur aequatione quacunque inter $CP = x$, $PR = r$, erit solidum:

$$\tfrac{1}{2}\int dx\left(r\sqrt{(aa-xx-rr)}+(aa-xx)\,\mathrm{A\,sin.}\,\frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}}\right)$$

vbi problema non inelegans se offert, *quo figura basis* CGH *quaeritur, vt solidum ei insistens algebraice exprimatur*. Statuatur in hunc finem $r = u\sqrt{(aa-xx)}$ vt solidum indefinitum areae CPRG insistens sit

$$\tfrac{1}{2}\int(aa-xx)\,dx\,(u\sqrt{(1-uu)}+\mathrm{A\,sin.}\,u)$$

quae expressio transformatur in hanc:

$$\tfrac{1}{2}(aax-\tfrac{1}{3}x^3)(u\sqrt{(1-uu)}+\mathrm{A\,sin.}\,u)$$
$$-\int(aax-\tfrac{1}{3}x^3)\,du\sqrt{(1-uu)}$$

Fiat iam $\int(aax-\frac{1}{3}x^3)\,du\sqrt{(1-uu)} = na^3\mathrm{A\,sin.}\,u + a^3U$ existente U functione algebraica ipsius u, et cum sit soliditas

$$\tfrac{1}{2}(aax-\tfrac{1}{3}x^3)u\sqrt{(1-uu)}-a^3U+(\tfrac{1}{2}aax-\tfrac{1}{6}x^3-na^3)\,\mathrm{A\,sin.}\,u$$

ea erit algebraica casu $-x^3+3aax = 6na^3$: dummodo u euanescat posito $x = 0$, tum enim soliditas erit $= na^3u\sqrt{(1-uu)}-a^3U$.

16. Ponamus $dU = U'du$, ac prodibit haec inter x et u aequatio:

$$aax-\tfrac{1}{3}x^3 = \frac{na^3}{1-uu}+\frac{a^3U'}{\sqrt{(1-uu)}}.$$

Fingatur $U = mu\sqrt{(1-uu)}$, erit $U' = \frac{m-2muu}{\sqrt{(1-uu)}}$, et vt u euanescat posito $x = 0$, debet esse $m = -n$, vt fiat

$$aax-\tfrac{1}{3}x^3 = \frac{2na^3uu}{1-uu}, \text{ seu } u = \sqrt{\frac{3aax-x^3}{6na^3+3aax-x^3}}$$

hinc-

hincque $r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{6na^3+3aax-x^3}}$. Iam ob $u\sqrt{(1-uu)} = \frac{\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$, fit soliditas illa $= \frac{2na^3\sqrt{6na^3(3aax-x^3)}}{6na^3+3aax-x^3}$

Si haec soliditas locum habere debeat, facto $x = a$; fit $n = \frac{1}{3}$; $r = \sqrt{\frac{(aa-xx)(3aax-x^3)}{2a^3+3aax-x^3}} = \sqrt{\frac{x(a-x)(3aa-xx)}{(a+x)(2a-x)}}$ ac posito $x = a$, erit soliditas $= \frac{1}{3}a^3$, et curua pro basi inuenta est linea quarti ordinis.

17. Quae hic de soliditate portionis sphaericae datae basi insistentis sunt tradita, simili calculo ad quaeuis alia corpora accommodari possunt, cum tantum in formula $Z\,dx\,dy$ quantitas Z alio modo per x et y determinetur dum hic erat $Z = \sqrt{(aa-xx-yy)}$. Quin etiam si superficies corporis cuiuscunque datae basi imminens definiri debeat, id integratione gemina similis formulae differentialis $Z\,dx\,dy$ eodem modo expeditur: ita si corpus sit sphaera, elementum superficiei areolae elementari basis $dx\,dy$ imminentis est $\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$, ita vt sit $Z = \frac{a}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$, cuius gemina integratio pari modo pro ratione basis, cui imminens portio superficiei quaeritur, est instituenda. Atque in genere quantitates quaecunque aliae cuiusuis corporis, quae certae basi respondeant, ope similium operationum determinabuntur.

18. Quaecunque ergo Z fuerit functio ipsarum x et y pro integrali duplicato $\iint Z\,dx\,dy$ primo quaeritur integrale $\int Z\,dy$, quantitate x vt constante spectata, idque extendatur per totam quantitatem y,

 sicque

ſicque extremi valores ipſius y in computum ingredientur, quae erunt functiones ipſius x, ex baſis figura cognitae: ſicque pro $\int Z\,dy$ oritur functio ipſius x, quae in dx ducta denuo more ſolito debet integrari. Idem tenendum eſt, ſi ordine inuerſo primo formula $\int Z\,dx$ integretur, ſpectato y vt conſtante quod integrale dum per totum interuallum x extenditur extremi valores ipſius x eidem y reſpondentes, qui erunt functiones ipſius y, inuehentur, ſicque $\int Z\,dx$ abibit in functionem ipſius y tantum, quae per dy multiplicata denuo ita integrari debet, vt integrale per totum interuallum y extendatur. Vtroque ſcilicet modo integratio per totam baſin eſt extendenda, eademque praecepta ſunt obſeruanda, qualiscunque Z fuerit functio ipſarum x et y.

19. Baſi ergo data, determinatio integrationum perinde ſe habet, ac ſi quantitas Z eſſet conſtans, quaerereturque tantum integrale $\int\int dx\,dy$, quo area baſis exprimitur. Quare ad praecepta, quae in determinatione horum integralium obſeruari oportet ſtabilienda, ſufficiet poſuiſſe $Z = 1$, vt integrale duplicatum $\int\int dx\,dy$ definiendum ſit ſiue autem ſumatur x ſiue y, extremi valores vtriusque determinabuntur per aequationem baſis figuram exprimentem. Scilicet priori integratione peracta, vbi punctum Y vbicunque intra terminos extremos erat aſſumtum, tum hoc punctum in peripheriam baſis trans-

Tab. I. Fig. 5.

feratur, quo pacto x et y fient coordinatae baſis, inter quas aequatio datur, ex qua deinceps ſiue y per x ſiue x per y determinabitur.

20. Quae quo clarius perſpiciantur, ſumamus baſis figuram eſſe circulum centrum in G et radium GQ habentem, ponamusque $CF = f$; $FG = g$, et $GQ = c$, erit puncto Y in peripheriam huius circuli translato $cc = (f-x)^2 + (g-y)^2$. Iam ad aream huius circuli inueſtigandam ſit primo x conſtans, eritque $\int dy = y + C$, et quia y habet geminum valorem in noſtra baſi $y = g \pm \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$, haec integratio ita determinetur, vt integrale euaneſcat, dum ipſi y minor horum valorum $g - \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$ tribuitur, ita vt ſit

$$\int dy = y - g + \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$$

Nunc ergo y vsque ad alterum terminum $y = g + \sqrt{(cc-(f-x)^2)}$ extenſo erit $\int dy = 2\sqrt{(cc-(f-x)^2)}$, quod iam per dx multiplicatum et integratum praebet: $\int dx \int dy = C - (f-x)\sqrt{(cc-(f-x)^2)} - cc\,A\,\text{ſin.}\frac{f-x}{c}$ quod vt euaneſcat poſito $x = f - c$ fit $C = cc\,A\,\text{ſin.}\,1 = \frac{\pi}{2}cc$. Porro ſtatuatur $x = f + c$. et ob $cc\,A\,\text{ſin.}\frac{f-x}{c} = -cc\,A\,\text{ſin.}\,1 = -\frac{\pi}{2}cc$ erit area quaeſita tota $= \frac{\pi}{2}cc + \frac{\pi}{2}cc = \pi cc$, vti conſtat.

21. Si has determinationes accuratius perpendamus videmus extremos valores ipſius x ita eſſe comparatos, vt alter ſit maximus, ſiquidem baſis

basis tota quadam curua in se redeunte terminetur. Hi ergo ambo valores reperientur, si aequatio naturam basis exprimens differentietur, et $dx = 0$ ponatur. Quando autem basis non vna quadam linea curua terminatur, sed portione quapiam veluti
Tab. I. CGH continetur, cuius basis CH sit maxima tum
Fig. 4. minor terminus ipsius x manifesto est $= 0$, maior autem ipsi CH aequalis: eodemque casu termini applicatae PR abscissae $CP = x$ respondentis sunt alter $= 0$, alter vero $= PR$. Quacunque ergo basi proposita eius figura ante probe est examinanda ipsiusque termini quaquauersus explorandi, quam inuestigatio areae vel cuiusuis alius formulae integralis duplicatae suscipi queat: definitis autem terminis quibus area continetur, inde determinationes integrationum sunt petendae.

22. His de integrationum determinatione expositis, insignes maximeque notatu dignae affectiones huiusmodi formularum integralium duplicatarum perpendi merentur, quae in earum transformatione occurrunt. Scilicet quemadmodum coordinatae eiusdem curuae infinitis modis sumi possunt, ita hic loco binarum variabilium x et y, binae quaecunque aliae variabiles in computum introduci possunt, siue eae pariter sint coordinatae, siue aliae quantitates vtcunque definitae. Ita talis transformatio in genere ita concipi potest, vt loco x et y functiones quaecunque aliarum duarum variabilium t et

t et v substituantur, hisque in aequationem pro basi datam introductis, simili modo limites harum quantitatum t et v quibus figura basis terminatur, definiri poterunt. Vtcunque autem hae substitutiones sumantur, tandem post duplicem integrationem semper eadem quantitas resultet necesse est.

23. Si loco x et y aliae quaecunque binae coordinatae orthogonales introducantur puta t et v quod sit in genere ponendo:

$$x = f + mt + v\sqrt{(1-mm)} \text{ et } y = g + t\sqrt{(1-mm)} - mv$$

manifestum est elementum areae basis, quod ante erat $dx\,dy$, nunc per $dt\,dv$ exprimi debere. Cum autem inde fit

$$dx = m\,dt + dv\sqrt{(1-mm)} \text{ et } dy = dt\sqrt{(1-mm)} - m\,dv$$

minime patet, quomodo loco $dx\,dy$ per has substitutiones oriri possit $dt\,dv$; dum potius prodiret $dx\,dy = m\,dt^2\sqrt{(1-mm)} + (1-2mm)\,dt\,dv - m\,dv^2\sqrt{(1-mm)}$ quae autem formula, vtcunque ad geminam integrationem adaptatur, semper in maximos errores inducet. Multo minus ergo hinc colligere licet, si loco x et y aliae functiones ipsarum t et v substituantur, cuiusmodi expressio loco $dx\,dy$ adhiberi debeat.

24. Ac primo quidem obseruo nullam hic esse rationem, cur expressio loco $dx\,dy$ in calculum introducenda ei aequalis esse debeat; quod tum demum

demum necesse esset, si binae integrationes eodem modo vt ante secundum binas variabiles instituerentur. Cum autem nunc aliae variabiles t et v adsint, atque altera integratio per variabilitatem ipsius t, altera ipsius v sit administranda, quae operationes a praecedentibus plurimum differunt; formula iam loco $dx\,dy$ inducenda non ex aequalitate aestimari, sed potius ad scopum, qui est propositus, accommodari debet. Et quoniam iam binas integrationes secundum binas variabiles t et v distingui oportet, manifestum est formulam loco $dx\,dy$ adhibendam necessario producto $dt\,dv$ affectam esse, et huiusmodi formam $Z\,dt\,dv$ habere debere.

25. Quo haec certius expediantur, maneat primo x, et loco y introducatur alia variabilis u, ita vt sit y functio quaecunque ipsarum x et u, et $dy = P\,dx + Q\,du$ Si iam in priori integratione x constans sumatur, erit vtique $dy = Q\,du$, hinc $\int\int dx\,dy = \int dx \int Q\,du$, ita vt nunc loco formulae $dx\,dy$ habeatur $Q\,dx\,du$, cuius integrale duplicatum proinde etiam hoc modo exprimi poterit $\int du \int Q\,dx$, vbi in priori integratione $\int Q\,dx$ quantitas u sumitur pro constante. Quodsi nunc simili modo u retineatur et loco x introducatur functio quaecunque ipsarum t et u, vt sit $dx = R\,dt + S\,du$, in tractatione formulae $\int du \int Q\,dx$ prior integratio $\int Q\,dx$, in qua u constans statuitur, abibit in hanc $\int QR\,dt$; ita vt integrale duplicatum sit $\int du \int QR\,dt$ seu promiscue $\int\int QR\,dt\,du$ vnde manifestum est ob has ambas substitutiones loco formulae $dx\,dy$ hanc $QR\,dt\,du$ tractari debere.

26. Introducamus nunc statim loco x et y has duas nouas variabiles t et u, per quas illae ita determinentur, vt sit:

$$dx = R\,dt + S\,du \quad \text{et} \quad dy = T\,dt + V\,du$$

vnde valore ipsius dx in forma $dy = P\,dx + Q\,du$ substituto fit $dy = PR\,dt + (PS + Q)\,du$, ita vt sit $PR = T$ et $PS + Q = V$, vnde fit $P = \frac{T}{R}$ et $\frac{ST}{R} + Q = V$ sicque $QR = VR - ST$. Quare vi harum substitutionum loco $dx\,dy$ vti debemus formula $(VR - ST)\,dt\,du$ quae bis integrata iustis adhibitis determinationibus aeque aream totius basis praebere debet, atque ipsa formula $dx\,dy$ bis integrata. Quod autem hic pro formula areae baseos $\int\int dx\,dy$ est ostensum, locum habet pro quacunque alia formula $\int\int Z\,dx\,dy$, quippe quae per easdem substitutiones transformatur in hanc $\int\int Z(VR - ST)\,dt\,du$ dummodo in Z loco x et y assumti valores substituantur. Pari enim modo binas integrationes ex figura basis determinari oportet.

27. Quod si ergo ponatur:

$$dx = R\,dt + S\,du \quad \text{et} \quad dy = T\,dt + V\,du$$

loco $dx\,dy$ consequimur $(RV - ST)\,dt\,du$, quae formula plurimum differt ab ea, cui productum

$dx\,dy$ reuera eſt aequale; etiamſi enim termini per dt^2 et du^2 affecti, vtpote ad duplicem integrationem inepti, reiiciantur tamen quod reſtat $(RV+ST)dt\,du$ ratione ſigni a vera formula diſcrepat. Verum hic non leue dubium exoritur quod cum coordinatae x et y pari paſſu ambulent, noſtra formula potius differentiam $RV-ST$ quam inuerſam $ST-RV$ complectatur: quod dubium eo magis augetur, quod ſi ſuperius ratiocinium reſpectu x et y inuertiſſemus eaedem ſubſtitutiones nos reuera ad formulam $(ST-RV)dt\,du$ perduxiſſent. Sed quia totum diſcrimen tantum in ſigno verſatur, alteraque formula alterius eſt negatiua, hinc determinatio abſoluta areae baſis, quippe cuius quantitas abſoluta quaeritur, nullam mutationem realem patitur.

Tab. I. Fig. 5. 28. Haec autem magis fient perſpicua, ſi modum quo ſupra (20) ad aream EQHR inueniendam vſi ſumus attentius conſideremus. Primum ſcilicet ex integratione formulae $\iint dx\,dy$ deduximus hanc aream $=\int dx(PR-PQ)$, vbi quidem PQ a PR ſubtraximus, quia manifeſto erat $PR > PQ$; ſed in ipſo calculo nulla continetur ratio, quae praecipiat, vt potius PQ a PR quam viciſſim PR a PQ ſubtrahamus, ſicque non aduerſante calculo potuiſſemus aequo iure eandem aream per $\int dx(PQ-PR)$ exprimere, quo pacto ea negatiua ſed priori aequalis prodítura fuiſſet. Ex quo perſpicuum eſt ſignum + vel − non quantitatem areae,

areae, quae quaeritur, afficere, et calculum pari iure ad vtrumque perducere poſſe. Quam ob cauſam ſuperius dubium ita diluetur, vt dicamus aream quaeſitam ita exprimi debere, vt ſit $=\pm\iint dt\,du\,(RV-ST)$, et vt area poſitiue expreſſa prodeat, quouis caſu eo ſigno vtendum eſſe, quo $\pm(RV-ST)$ reddatur quantitas poſitiua.

29. Hinc etiam dubia, quae forte oriri poſſent circa inuentionem areae curuarum, quarum partes vtrinque ad axem ſunt diſpoſitae, et quibus tyrones ſaepe non parum turbari ſolent, facile reſoluuntur. Si enim curuae QAR ad axem AP relatae area tota QAR abſciſſae $AP=x$ reſpondens definiri debeat, eiusque partes APQ et APR ſeorſim conſiderentur, certum eſt ſi altera APQ affirmatiue ſpectetur vt ſit $=+Q$, alteram APR negatiue concipi debere, vt ſit $=-R$. Neque tamen hinc ſequitur aream totam QAR fore $=Q-R$, quippe quae euaneſceret, ſi ambae partes APQ et APR eſſent aequales; ſed perinde ac ſi ambo puncta Q et R ad eandem axis partem ſita eſſent, area perpetuo eſt $=+\int dx(PR-PQ)$, vnde ob $\int PQ.\,dx=Q$ et $\int PR.\,dx=-R$, fit tota area $=\pm(Q+R)$, vti rei natura poſtulat. Tab. I. Fig. 6.

30. Ope autem talium ſubſtitutionum, quibus loco binarum variabilium x et y binae quaecunque aliae introducantur t et u ſaepe numero integrationes plurimum ſubleuari facilioresque reddi poſſunt,

et

ſphaerae portio curuae GRH cuius propterea figura eſt determinanda: in qua ſi ponatur $CP = x$, $PR = y$, ſuperficies ſphaerae imminens hac formula integrali duplicata exprimitur $\iint \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{(aa-xx-yy)}}$. Iam nulla ſubſtitutione adhibita, ſi primo x pro conſtante habeatur, prodibit $\int a\,dx\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}}$; qua portio ſphaerae aream indefinitam CPRG tegens exprimitur; et quaeſtio nunc huc redit, vt eiusmodi aequatio algebraica inter x et y aſſignetur, vnde pro tota area CHRG portio ſuperficiei ſphaericae ei reſpondentis fiat algebraice aſſignabilis.

34. Ponamus breuitatis gratia $\frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}} = v$, vt ſit $y = v\sqrt{(aa-xx)}$, ac poſito $x = 0$ fiat $v = n$: quoniam ſuperius integrale euaneſcere debet poſito $x = 0$: Erit ergo ſuperficies ſphaerica aream indefinitam CPRG tegens $= ax\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,v - a\int \frac{x\,dv}{\sqrt{(1-vv)}}$, ſumto hoc integrali ita vt euaneſcat poſito $x = 0$. Statuatur nunc $\int \frac{x\,dv}{\sqrt{(1-vv)}} = f\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,v - a\,\mathrm{V}$, denotante V functionem quamcunque algebraicam ipſius V, quae abeat in N poſito $x = 0$, eritque ſuperficies noſtra $= ax\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,v - af\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,v + aa\mathrm{V} + fa\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,n - aa\mathrm{N}$, atque x per v ita determinabitur, vt ſit.

$$x = f - \frac{a\,d\mathrm{V}\sqrt{(1-vv)}}{a\,v}$$

ſit iam $CH = b$, ac ponatur $x = b$, quo caſu fiat $v = m$ et $\mathrm{V} = \mathrm{M}$, et cum ſuperficies propoſita ſit

$$ab\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,m - af\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,m + aa\mathrm{M} + af\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,n - aa\mathrm{N}$$

ea

ea algebraica eſſe nequit niſi ſit

$$b\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,m - f\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,m + f\,\mathrm{A}\,\text{ſin.}\,n = 0$$

35. Hic igitur primo arcus quorum ſinus ſunt m et n inter ſe commenſurabiles reddi debent, niſi forte ſit $n = 0$, quo caſu ſufficit fieri $b = f$, Quod etſi facile infinitis modis praeſtari poteſt. tamen hoc problema multo facilius adhibendis ſubſtitutionibus ante expoſitis reſoluetur. Ponatur ergo $x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}}$ et $y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}}$, vt fiat $xx + yy = tt$, et pro $dx\,dy$ prodeat $\frac{t\,dt\,du}{1+uu}$, atque ſuperficies portionis ſphaericae hac formula integrali duplicata exprimetur. $\iint \frac{a\,t\,dt\,du}{(1+uu)\sqrt{(aa-tt)}}$. Sumatur primo u conſtans erit ea $= \int \frac{a\,du}{1+uu}(b - \sqrt{(aa-tt)})$ quae iam facile abſolute integrabilis reddi poteſt: ponatur enim aequalis functioni algebraicae cuicunque ipſius u quae ſit $= \mathrm{V}$ eritque $b - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{d\mathrm{V}(1+uu)}{a\,du}$, et portio ſuperficiei ſphaericae adeo indefinita erit $= \mathrm{V}$, vbi pro V functionem algebraicam quamcunque ipſius u accipere licet.

36. Simpliciſſimae ſolutiones deducentur ex hac hypotheſi $\mathrm{V} = \frac{\alpha a + \beta u}{\sqrt{(1+uu)}}$, vnde fit $\frac{d\mathrm{V}}{a\,du} = \frac{-\alpha u + \beta}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}$ hincque

$$b - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{\beta - \alpha u}{\sqrt{(1+uu)}}.$$

Ponatur

Ponatur $b = 0$, et cum per substitutiones sit $u = \frac{y}{x}$ et $t = \sqrt{(xx+yy)}$, erit pro curua quaesita

$$\sqrt{(xx+yy)(aa-xx-yy)} = \alpha y - \beta x$$

et pro superficie $V = \frac{a(\alpha x + \beta y)}{\sqrt{(xx+yy)}}$.

Hinc casus simplicissimus oritur ponendo $\beta = 0$, et $\alpha = a$ vnde prodit $aaxx - (xx+yy)^2 = 0$ seu $yy = ax - xx$ ita vt curua G R H sit circulus diametro A C descriptus et $V = \frac{aax}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Infiniti alii circuli diametrum $= a$ habentes ac per centrum sphaerae transeuntes reperiuntur si sit $\beta = \sqrt{(aa-\alpha\alpha)}$, vnde fit $ax + y\sqrt{(aa-\alpha\alpha)} = xx+yy$ et $V = \frac{a(\alpha x + y\sqrt{(aa-\alpha\alpha)})}{\sqrt{(xx+yy)}} = a\sqrt{(xx+yy)}$ vbi notandum est quantitatem V pro natura rei constantem quandam assumere.

Tab. II. Fig. 7 37. Concipiatur ergo octans sphaerae super quadrante A C B extractus cuius radius $CA = a$, qui simul sit diameter semicirculi C R A, in quo si ducatur corda quaecunque C R, et perpendiculum R P, vt sit $CP = x$ et $PR = y$, erit $CR = t$, et u erit tangens anguli A C R. Quoniam igitur posuimus $b = 0$, prius integrale quo u erat constans est $\sqrt{(aa-tt)}$, quod cum euanescat si $t = a$, euidens est id non per cordam $CR = t$ sed per eius complementum R S extendi. Hinc repetita integratio $\int \frac{adu}{1+uu}\sqrt{(aa-tt)}$ eam sphaericae superficiei portionem exprimit, quae trilineo R V A S imminet, quae ergo ob $\sqrt{(aa-tt)} = \frac{au}{\sqrt{(1+uu)}}$ est

$= \frac{-aa}{\sqrt{(1+uu)}} + aa$, integrali scilicet ita sumto vt euanescat cum angulo ACR. Quare ob $\frac{1}{\sqrt{(1+uu)}} =$ cos. A C R, ducto perpendiculo S T, erit illa superficies $= a(a - CT) = CA.AT = AV^2$, ducta corda AV. Consequenter portio superficiei sphaerae spatio C E R A S B inter quadrantem et semicirculo intercepto imminens aequatur quadrato radii sphaerae.

38. Contemplemur autem adhuc eiusmodi casum, quo prima integratio euanescat posito $t = 0$, seu sit $b = a$ ac ponatur $V = \frac{1}{2}aau$, quae expressio simul superficiem quaesitam praebet. Erit ergo $a - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{1}{2}a(1+uu)$ et $\sqrt{(aa-tt)} = \frac{1}{2}a(1-uu)$, ita vt sit $t = \frac{1}{2}a\sqrt{(3+2uu-u^4)}$ seu $t = \frac{1}{2}a\sqrt{(1+uu)(3-uu)}$, vbi est $CR = t$, et u denotat tangentem anguli A C R. Ex hac aequatione patet, si sit $u = 0$ fore $t = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; scilicet curua quaesita radio A C ita in E occurrit vt sit $CE = CA.\frac{\sqrt{3}}{2}$, eique perpendiculariter insistit. Tum si angulus ACR augeatur ad semirectum A C F, vt fiat $u = 1$, erit $t = a$; hocque casu curua per ipsum punctum. F transit, ibique quadrantem osculabitur; ac simul distantia t sit maxima. Dehinc curua introrsum reflectitur. et t euanescit si $u = \sqrt{3}$: hoc est curua centro C ita immergitur, vt eius tangens in C cum radio C A faciat angulum 60°. Tab. II. Fig. 8.

39. Tota ergo curua in quadrante descripta figuram habebit ERFGC, et ducta in ea ex C recta vtcunque CR, angulique ECR tangens sit $= u$, tum portio superficiei sphaericae sectori ECR imminens algebraice poterit assignari, eritque ea $= \frac{1}{2} aau$. Quare si CR ad occursum cum tangente AT producatur, ob $AT = au$ ea portio praecise aequabitur triangulo CAT: et portio imminens sectori ECF erit $= \frac{1}{2}aa$, si autem angulus ECR maior semirecto sumatur, vt sit $u > 1$, quia tum $\sqrt{(aa-tt)} = \sqrt{(aa-xx-yy)}$ quae est eleuatio superficiei sphaericae supra quadrantem, fit negatiua, superficies in inferiori octante capi debet. Quodsi huius curuae aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PR = y$ desideremus ob $tt = xx + yy$ et $u = \frac{y}{x}$, habebimus:

$$4xx + 4yy = aa\left(3 + \frac{2yy}{xx} - \frac{y^4}{x^4}\right) = \frac{aa(xx+yy)(3xx-yy)}{x^4}$$

quae diuisa per $xx + yy$ praebet:

$$4x^4 = 3aaxx - aayy \text{ seu } yy = 3xx - \frac{4x^4}{aa}.$$

40. Hanc solutionem reddere possumus generaliorem ponendo $V = abu$, fietque $a - \sqrt{(aa-tt)} = b(1+uu)$ hinc $\sqrt{(aa-tt)} = a - b - buu$, ergo

$$tt = 2ab - bb + 2(a-b)buu - bbu^4 = (1+uu)(2ab - bb - bbuu).$$

Qua ad coordinatas orthogonales translata, diuisio per $xx + yy$ iterum succedet, fietque

$$x^4 = (2ab - bb)xx - bbyy \text{ seu } y = \frac{x}{b}\sqrt{(2ab - bb - xx)}$$

ac

ac portio superficiei sphaericae sectori ECR huius curuae imminens erit $= \frac{aby}{x} = b.AT$: quae expressio locum habet, quamdiu $uu < \frac{a-b}{b}$; hoc est donec anguli ECR tangens fiat $= \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, vbi fit $t = a$. Tum vero angulo ECR vltra aucto perpendiculares super curua erectae ad hemisphaerium inferius protendi debent, quo casu superficies eo magis augetur. Si ergo sit $b = a$ quia $\sqrt{(aa-tt)}$ vbique fit quantitas negatiua, quantitas $b.AT$ portionem sphaericae superficiei ad inferius hemisphaerium continuatae exprimit.

41. Sit adhuc $b = a$, ac ponatur $V = \frac{a^2(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \alpha a^2$ vt superficies assignanda euanescat posito $u = 0$, eritque

$$a - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } \sqrt{(aa-tt)} = a - \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}}$$

vbi notandum est, si haec expressio fiat negatiua, ibi in hemisphaerium inferius descendi. Ex his autem prodit

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{(\beta - \alpha u)^2}{1+uu}.$$

Quare euanescente angulo ECR cuius tangens $= u$, erit $\frac{tt}{aa} = 2\beta - \beta\beta$, at si $u = \frac{\beta}{\alpha}$, euanescit t. Pro altera parte axis CA fit u negatiuum, ac posito $u = -v$ habetur superficies negatiue expressa $V = \frac{aa(\alpha - \beta v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \alpha a^2$ et curua hac definietur aequatione

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta + \alpha v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \frac{(\beta + \alpha v)^2}{1+vv}$$

vnde

vnde posito v infinito prodit $\frac{tt}{aa} = 2\alpha - \alpha\alpha$; vbi recta CR fit in curuam normalis, quod etiam euenit, vbi $v = \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{tt}{aa} = 2\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} - \alpha\alpha - \beta\beta$. Quare ne fiat t imaginarium oportet sit $\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta)} < 2$.

42. Consideremus casum quo $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vt sit superficies $V = aa(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1+u}{\sqrt{2(1+uu)}})$ et

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(1+u)}{\sqrt{2(1+uu)}} - \frac{(1+u)^2}{2(1+uu)}$$

vbi patet si $u = -1$ fore $t = 0$; tum vero vt sequitur:

si $u = 0$; si $u = 1$; si $u = 7$; si $u = \infty$

erit $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$; $t = a$; $t = a\sqrt{\frac{24}{25}}$; $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$

vbi notandum casibus $u = 1$ et $u = \infty$ rectam CR fore in curuam normalem. In hoc ergo quadrante curua nostra fere cum quadrante confunditur, cum vbique sit proxime $t = a$: cui portio superficiei sphaericae imminens erit $= aa\sqrt{2}$, quae deficit a superficie totius octantis, quae est $\frac{\pi}{2}aa$ parte satis parua $aa(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) = 0,15658\,aa$. Ad alteram axis CA partem haec curua in centrum incidit vbi tangens cum CA faciet angulum semirectum.

43. Verum solutio §. 35. data multo magis amplificari potest, cum enim superficies sphaerae assignanda hac formula exprimatur $\int \frac{a\,du}{1+uu} \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(aa-tt)}}$, et in integratione $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{(aa-tt)}}$ quantitas u vt constans consideretur, integrale ita exhiberi poterit $U - \sqrt{(aa-tt)}$, denotante U functionem quamcunque ipsius u, quae formula quoniam euanescit si $\sqrt{(aa-tt)} = U$ et $t = \sqrt{(aa-UU)}$, ab hoc termino quantitas t vlterius protendi est concipienda. Denotet iam V aliam quamcunque functionem ipsius u, quae abeat in C posito $u = 0$, ac ponatur superficies

$$\int \frac{a\,du}{1+uu}(U - \sqrt{(aa-tt)}) = aV - aC$$

eritque hinc $U - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{dV(1+uu)}{du}$

ideoque $\sqrt{(aa-tt)} = U - \frac{dV(1+uu)}{du}$

vnde alter terminus ipsius t definitur.

44. Hinc igitur solutio problematis Florentini ita generalissime adornabitur. Constituto quadrante circuli ACB, cui octans sphaerae insistat, radio CA existente $= a$, ductoque radio quocunque CS, vocetur anguli ACS tangens $= u$; tum primo curva EQG ita construatur vt sit $CQ = \sqrt{(aa-UU)}$, et perpendiculum ex Q ad sphaericam vsque superficiem erectum $QM = U$, denotante U functionem quamcunque algebraicam ipsius u. Si $u = 0$ abeat CQ in CE, et QM in EI. Deinde alia describatur curua FRH, vt sit Tab. II. Fig. 9.

$$CR = \sqrt{(aa - (U - \tfrac{dV(1+uu)}{du})^2)}$$

et perpendiculum ex R ad sphaeram vsque pertingens

$$RN = U - \frac{dV(1+uu)}{du}$$

denotante V aliam quamcunque functionem algebraicam ipsius u, quae abeat in C si $u = 0$; quo casu simul CR in CF et RN in FK abeat. Iam his duabus curuis constructis portio superficiei sphaericae

cae areae EQRF imminens et intra terminos I, K, M, N contenta, algebraice exprimetur eritque $= a(V-C)$.

45. Haec de natura formularum integralium duplicatarum commentandi occasionem praebuit ~~problema aeque~~ elegans atque vtile in analysi, si quidem eius solutionem euoluere liceret. Quaerebatur scilicet inter omnia corpora eiusdem soliditatis id, quod minima superficie contineretur: quod quidem ad ternas coordinatas orthogonales x, y et z relatum, posito $dz = p\,dx + q\,dy$ ita analytice exprimitur, vt inter omnes relationes harum trium variabilium, quae eandem quantitatem huius formulae integralis duplicatae $\iint z\,dx\,dy$ contineant, ea definiatur cui minima quantitas huius $\iint dx\,dy\,\sqrt{(1+pp+qq)}$ respondeat. Quod problema si per theoriam variationum aggrediamur, effici oportebit vt fiat

$$a\delta\iint dx\,dy\,\sqrt{(1+pp+qq)} = \delta\iint z\,dx\,dy$$

ita vt totum negotium ad variationes huiusmodi formularum integralium duplicatarum indagandas reducatur.

46. Quoniam vtraque formula duplicem integrationem exigit, si in priori x pro constante habeatur, nostra aequatio ita repraesentabitur:

$$a\delta\int dx\int dy\,\sqrt{(1+pp+qq)} = \delta\int dx\int z\,dy$$

Verum hic probe animaduertendum est, postquam integralia $\int dy\,\sqrt{(1+pp+qq)}$ et $\int z\,dy$ fuerint inuenta tum variabilem y non amplius indefinitam seu ab x non pendentem relinqui, quin potius pro y certam functionem ipsius x quam figura corporis exigit, substitui oportere, ita vt in secunda integratione quantitas y non vt constans seu ab x non pendens spectari queat. Quia autem ob figuram corporis etiamnunc incognitam ista functio non constat, neutiquam apparet, quomodo variationes istiusmodi formularum duplicatarum determinari debeant.

47. Ipsa vero huius quaestionis natura alias praeterea determinationes requirere videtur, quarum ratio in solutione haberi debeat. Nam quemadmodum si curua quaeritur, quae inter omnes alias eandem aream includentes breuissimo arcu contineatur: non solum basis AP sed etiam duo puncta B et M, per quae curua transeat, praescribi solent, ita etiam in nostro problemate non modo basis, cui corpus tanquam columna insistat pro cognita assumi debere videtur, sed etiam ipsi extremi termini superficiei quaesitae. Quodsi enim hae res non praescribantur omnes, ne quaestioni quidem certae locus relinquitur: nam etiamsi basis praescriberetur, termini vero supremi superficiei arbitrio nostro relinquerentur manifestum est, quo altior fuerit columna eo magis soliditatem auctum iri eadem manente superficie suprema; quandoquidem superficies laterum non in computum ducitur. Multo minus autem problema sine basis praescriptione vllam vim retineret, quoniam basi coarctanda quantumuis magna soliditas cum minima superficie posset esse coniuncta.

Tab. II. Fig. 10.

EVO-