University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works
Euler Archive

1770

Considerationes de traiectoriis orthogonalibus

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Considerationes de traiectoriis orthogonalibus" (1770). *Euler Archive - All Works*. 390.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/390

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

CONSIDERATIONES
DE TRAIECTORIIS ORTHOGONALIBVS.

Auctore

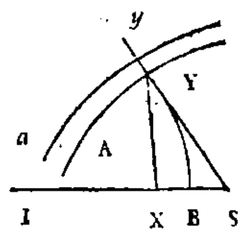
L. EVLERO.

I.

Problema traiectoriarum orthogonalium, quod olim Geometrarum ſagacitatem diu multumque exercuit, ita ſe habebat

vt propoſitis infinitis lineis AY, ay *communi quadam lege contentis, quaerantur aliae lineae* BYy *illas normaliter traiicientes*

ad quod ſoluendum ſequentia momenta perpendi oportet.



1°. Cum lineae ſecandae communi quadam aequatione contineantur, haec aequatio praeter binas coordinatas $IX = x$ et $XY = y$, parametrum inuoluet p, quae pro eadem curua AY eundem valorem retineat, valore autem mutato reliquas curuas exhibeat.

2°. Hinc iſta aequatio differentiata parametrum p quoque variabilem ſumendo huiusmodi formam induet $Ldy = Mdx + Ndp$; vnde pro eadem curua AY,

AY, ob $dp = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{L}$; ideoque ducta ad eam recta normali YS fiet ſubnormalis $XS = \frac{My}{L}$.

3°. Verum haec eadem ſubnormalis XS pro curua ſecante BY debet eſſe ſubtangens, vnde retentis pro hac curua iisdem coordinatis $IX = x$, et $XY = y$, neceſſe eſt ſit eius ſubtangens $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-My}{L}$ ideoque $Ldx + Mdy = 0$.

4°. Pro lineis ergo ſecandis propoſita aequatione inter coordinatas x, y et parametrum variabilem p, quae differentiata praebeat $Ldy = Mdx + Ndp$, pro curuis ſecantibus haec habebitur aequatio differentialis $Ldx + Mdy = 0$.

II.

Totum ergo negotium huc eſt reductum, vt data huiusmodi aequatione differentiali $Ldy = Mdx + Ndp$, methodus inueniatur hanc aequationem $Ldx + Mdy = 0$ integrandi, in quo quidem nulla foret difficultas ſi quantitates L et M ſolas binas coordinatas x et y implicarent excluſa parametro p, quia tum in ea duae tantum occurrent variabiles x et y, et huiusmodi aequationum integratio merito hic tanquam conceſſa ſpectatur. Verum ſi quantitates L et M inſuper parametrum p inuoluant, ita vt aequatio $Ldx + Mdy = 0$ tres contineat quantitates variabiles x, y et p, eius integrationem ne ſuſcipere quidem licet, niſi ſimul cum altera aequatione data $Ldy = Mdx + Ndp$ coniungatur, indeque

deque vna trium variabilium penitus extrudatur, vt aequatio differentialis inter duas tantum variabiles obtineatur. Quod nisi efficere licuerit, vix quicquam circa naturam traiectoriarum orthogonalium definiri poterit, quare quoties haec difficultas occurrit, problema hoc merito inter difficillima refertur; tantumque abest vt hoc problema etiamsi olim summo studio sit tractatum, pro confecto sit habendum, vt potius etiamnunc maxima attentione dignum sit iudicandum.

III.

Cum igitur totum negotium eo redeat, vt pro traiectoriis eiusmodi aequatio differentialis eliciatur, quae duas tantum quantitates variabiles contineat, praecipuos percurramus casus, quibus hunc scopum assequi licet.

1°. Ac primo quidem si aequatio pro curuis secandis ita exhiberi queat, vt parameter p per coordinatas x et y absolute definiatur, seu functioni cuipiam ipsarum x et y aequetur, haec aequatio differentiata huiusmodi dabit formam $dp = Pdx + Qdy$, in qua P et Q sunt functiones ipsarum x et y tantum quae cum forma $Ldy = Mdx + Ndp$ comparata praebet $L = Q$, $M = -P$ et $N = 1$. Quare pro traiectoriis haec habebitur aequatio: $Qdx - Pdy = 0$ duas tantum variabiles x et y inuoluens, cuius adeo integratio pro concessa haberi potest.

2°. Si aequatio pro curuis secandis ita exhiberi queat, vt applicata y aequetur functioni cuipiam ipsarum x et p, ex eiusque differentiatione prodeat $dy = Pdx + Rdp$, ita vt P et R sint functiones ipsarum x et p tantum, tum ob $L = 1$, $M = P$ et $N = R$, pro traiectoriis habebitur aequatio $dx + Pdy = 0$, quae ob $dy = Pdx + Rdp$ abit in hanc formam: $(1 + PP)dx + PRdp = 0$, duas tantum variabiles p et x implicantem.

3°. Si aequatio pro curuis secandis ita exhibeatur, vt abscissa x aequetur functioni cuipiam ipsarum y et p ex cuius differentiatione prodeat $dx = Qdy + Rdp$, vbi Q et R sint functiones ipsarum y et p tantum tum ob $L = Q$, $M = 1$ et $N = -R$, natura traiectoriarum exprimetur hac aequatione $Qdx + dy = 0$, quae ob $dx = Qdy + Rdp$ transformatur in hanc $(1 + QQ)dy + QRdp = 0$ inter y et p tantum.

IV.

Quoties ergo vel parameter p per ambas coordinatas x et y vel altera coordinatarum per alteram et parametrum definitur, inuentio traiectoriarum ad aequationem eiusmodi differentialem reducitur in qua duae tantum insunt quantitates variabiles, cuius propterea resolutio tanquam concessa poterit spectari, etiamsi forte nulla etiamnum pateat via negotium expediendi. Hoc autem intelligendum est ſi illae expreſſiones fuerint explicitae, ſiue ſint algebraicae ſiue tranſcendentes, ſin autem tantum per formulas integrales dentur, in quibus altera variabilium pro conſtante habeatur, tum aequationes inventae nullum praeſtant vſum, niſi forte peculiari artificio a formula integrali liberari queant. Veluti ſi pro curuis ſecandis huiusmodi habeatur aequatio $y = \int V\,dx$, vbi V ſit functio ipſarum x et p, in hac autem integratione parameter p vt conſtans ſpectetur: tum enim pro valore ipſius $dy = P\,dx + R\,dp$, habetur quidem $P = V$, ſed quantitas R noua forma integrali implicatur dum ſit $R = \int dx\,(\frac{dV}{dp})$, in qua integratione iterum ſola x variabilis aſſumitur. Quare cum aequatio pro traiectoriis futura ſit $(1 + VV)\,dx + V\,dp \int dx\,(\frac{dV}{dp}) = 0$, ob hanc formulam integralem minime patet, quomodo eius reſolutionem inſtitui conueniat.

V.

Quo haec difficultas clarius appareat caſum ſingularem euoluam, quo aequationem pro traiectoriis exhibere licet et qui iam olim methodo perquam ingenioſa fuit erutus. Quaeritur ſcilicet, cuiusmodi functio ipſarum x et p debeat eſſe quantitas V, vt cum pro curuis ſecandis ſit $y = \int V\,dx$, aequatio pro traiectoriis $(1 + VV)\,dx + V\,dp \int dx\,(\frac{dV}{dp}) = 0$, per certam quantitatem multiplicata integrabilis euadat. Sit iſte multiplicator $\frac{\Pi}{V}$, exiſtente Π functione ipſius p tantum, vt habeatur.

$$\frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V} + dp \int \Pi\,dx\,(\frac{dV}{dp}) = 0$$

quoniam enim Π quantitatem x non inuoluit, erit vtique

$$\Pi\,dp \int dx\,(\frac{dV}{dp}) = dp \int \Pi\,dx\,(\frac{dV}{dp}).$$

Iam ſtatuatur huius formae integrale $= \int \frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V}$ vt pro traiectoriis habeatur haec aequatio.

$$\int \frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V} = C$$

et cum eius differentiale ex variabilitate vtriusque x et p natum fiat:

$$\frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V} + dp \int dx\,(\frac{1}{dp}\,d\,\frac{\Pi(1+VV)}{V}) = 0$$

Quare ſtatui oportet:

$$\int \Pi\,dx\,(\frac{dV}{dp}) = \int dx\,(\frac{1}{dp}\,d.\frac{\Pi(1+VV)}{V})$$

ſeu $\Pi\,(\frac{dV}{dp}) = (\frac{1}{dp}\,d.\frac{\Pi(1+VV)}{V})$. Cum nunc in his differentialibus ſola p vt variabilis, x vero vt conſtans ſpectetur facta euolutione prodit:

$$\Pi\,dV = \frac{\Pi\,dV(VV-1)}{VV} + \frac{d\Pi(1+VV)}{V} \text{ ſeu}$$

$\frac{\Pi\,dV}{VV} = \frac{d\Pi(1+VV)}{V}$, ideoque $\frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{V\,dV}{1+VV}$ vnde integrando elicitur $\Pi = \frac{VX}{\sqrt{(1+VV)}}$, loco conſtantis indroducta X functione ipſius x tantum. Hinc ergo ſit $V = \frac{\Pi}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$

 VI.

VI.

En ergo caſum ſatis elegantem ſimulque non parum late patentem, quo traiectorias orthogonales exhibere licet etiamſi aequatio pro curuis ſecandis ſit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$ vbi X denotat functionem quamcunque abſciſſae x, atque Π functionem parametri p quamcunque, ita vt forte haec formula integralis nullo modo euolutionem admittat. Pro traiectoriis enim, ob $1 + VV = \frac{XX}{XX - \Pi\Pi}$, habebitur iſta aequatio $\int \frac{X\, X\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}} = C$. quae pro diuerſis valoribus conſtantis C infinitas praebet curuas, quae omnes normaliter curuas datas traiicient. Pro iis quidem aequatio inter coordinatas x et y eliceretur, ſi ope aequationis $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$, parameter p eiusue functio Π eliminari poſſet verum ad conſtructionem aequatio inuenta iam maxime eſt accommodata. Pro quauis enim parametro, ſeu quouis valore litterae Π ſuper axe deſcribatur curua, cuius applicata $= \frac{XX}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$, in eaque abſcindatur area datae areae aequalis, cuius abciſſa ſi ſit $= x$, applicata traiectoriae erit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$: vel ſufficit notaſſe has duas aequationes:

$$y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}} \text{ et } C = \int \frac{X\, X\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$$

vbi notetur C deſignare parametrum traiectoriarum.

VII.

VII.

Verum his quae iam olim copioſiſſime ſunt pertractata, diutius hic immorandum non cenſeo; ſed potius alias conſiderationes, ad quas me haec quaeſtio perduxit, in medium afferam. Ac primo quidem, quod per ſe eſt perſpicuum obſeruo lineas ſecandas et traiectorias inter ſe reciprocari; atque quaeſtionem circa duo eiusmodi ſyſtemata linearum verſari quae ad eundem axem deſcripta, ſe mutuo vbique ad angulos rectos interſecent. Vtriusque autem ſyſtematis natura exprimitur aequatione inter binas coordinatas x et y et parametrum, cuius variabilitas infinitas lineas ſuppeditat. Pro altero ergo ſyſtemate ſit parameter $= p$, pro altero vero $= q$; vnde duas concipi oportet aequationes, alteram inter x, y et p, alteram vero inter x, y et q; inter quas quaenam intercedere debeat relatio, vt propoſitae conditioni ſatisfiat, hic accuratius ſum inueſtigaturus. Supra autem vidimus, ſi pro altero ſyſtemate habeatur huiusmodi aequatio differentialis $L\,dp + M\,dx + N\,dy = 0$, tum naturam alterius hac aequatione $N\,dx - M\,dy = 0$ expreſſum iri hicque eius parametrum q vt conſtantem ſpectari.

VIII.

Quia nunc aequatio $N\,dx - M\,dy = 0$ duas tantum quantitates variabiles x et y continere intelligitur, et huius ſyſtematis parameter q in conſtante per integrationem accedente demum inuoluitur,

tur, aequatio differentialis pro altero ſyſtemate, etiam parametrum q pro variabili habendo, ita erit comparata: $Kdq + Ndx - Mdy = 0$. Hincque nouimus aequationes differentiales pro vtroque linearum ſyſtemate ita inter ſe eſſe connexas, vt ſint:

$$Ldp + Mdx + Ndy = 0 \quad \text{et} \quad Kdq + Ndx - Mdy = 0.$$

Si in illa p in hac vero q per x et y detur, et vtraque aequatio ad integrabilitatem perducatur, formae prodibunt huiusmodi:

$$dp = M(Pdx + Qdy) \quad \text{et} \quad dq = N(Qdx - Pdy)$$

vbi P et Q denotant functiones ipſarum x et y quascunque, M vero et N eiusmodi multiplicatores, qui illas formulas differentiales $Pdx + Qdy$ et $Qdx - Pdy$ integrabiles reddant. Quod cum ſemper fieri poſſit, hinc facile infinita huiusmodi ſyſtematum paria exhiberi poſſunt: veluti ſi ſit $P = X$ functioni ipſius x et $Q = Y$ functioni ipſius y noſtrae aequationes integratae ita ſe habebunt:

$$p = \int X dx + \int Y dy \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}.$$

IX.

Definiamus quoque ambas coordinatas per parametros p et q, et aequationes noſtrae ita fient comparatae

$$dx + \frac{LMdp + KNdq}{MM + NN} = 0 \quad \text{et}$$

$$dy + \frac{LNdp - KMdq}{MM + NN} = 0$$

quae

quae ad has formas concinniores reuocantur:

$$dx = PRdp + QSdq \quad \text{et} \quad dy = PSdp - QRdq$$

atque hic iam P, Q, R et S denotant functiones ipſarum p et q eiusmodi, vt ambae formulae integrabiles euadant. Cum igitur x et y ſint functiones ipſarum p et q erit

$$PR = \left(\frac{dx}{dp}\right); \; QS = \left(\frac{dx}{dq}\right); \; PS = \left(\frac{dy}{dp}\right); \; QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right)$$

hinc colligitur iſta inſignis proprietas vt ſit

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$$

indeque porro haec quaeſtio maximi momenti, quomodo ſi pro altera coordinatarum x et y detur functio ipſarum p et q ipſi aequalis, inde functio ipſarum p et q alteri aequalis erui debeat: quae quaeſtio ad eam calculi integralis partem eſt referenda, quam demum excoli conuenit.

X.

Cum ſolutio huius aequationis admodum ardua videatur, operae erit pretium binas aequationes modo inuentas.

$$dx = PRdp + QSdq \quad \text{et} \quad dy = PSdp - QRdq$$

alia methodo reſoluere. Imaginaria ſcilicet haud reformidantes inde colligimus:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (R + S\sqrt{-1})(Pdp - Qdq\sqrt{-1})$$

ſimili autem modo ſit neceſſe eſt:

$$dx - dy\sqrt{-1} = (R - S\sqrt{-1})(Pdp + Qdq\sqrt{-1}).$$

Iam

Iam quaecunque fuerint P et Q functiones ipſarum p et q multiplicator ſemper inueniri poterit hanc formulam ambiguam $P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}$ integrabilem reddens: ſit ergo M iſte multiplicator et ponatur $\int M(P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1}$; atque pro $R \pm S\sqrt{-1}$ aſſumi oportet functionem quamcunque ipſius $T \pm V\sqrt{-1}$ in M ductam, vnde facta integratione prodibit

$$x+y\sqrt{-1} = \text{funct.}\,(T+V\sqrt{-1}) \text{ et } x-y\sqrt{-1} = \text{funct.}\,(T-V\sqrt{-1})$$

hincque colligimus has formas integrales:

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

quae ſemper ad realitatem reuocantur, quaecunque functiones his ſignis Γ et Δ denotentur.

XI.

Hic quidem litterae T et V denotant functiones binarum parametrorum p et q ſed minime arbitrarias, definiuntur enim ex formula differentiali $P\,dp \mp Q\,dq\sqrt{-1}$, vbi P et Q neceſſario ſunt quantitates reales. Verumtamen ſine hac conditione indoles illarum quantitatum T et V erui poteſt, conſiderando quod eſſe debeat $\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$.

Cum

Cum enim inuenerimus:

$x+y\sqrt{-1} = \Sigma:(T+V\sqrt{-1})$, et $x-y\sqrt{-1} = \Theta:(T-V\sqrt{-1})$

erit differentiando:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{dx}{dp}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dp}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$$

$$\text{II.}\quad \left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{dx}{dp}\right) - \left(\frac{dy}{dp}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dp}\right) - \left(\frac{dV}{dp}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

$$\text{IV.}\quad \left(\frac{dx}{dq}\right) - \left(\frac{dy}{dq}\right)\sqrt{-1} = \left(\left(\frac{dT}{dq}\right) - \left(\frac{dV}{dq}\right)\sqrt{-1}\right)\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

colligantur hinc producta I x IV et III x II in vnam ſummam ac reperietur:

$$2\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + 2\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 2\left(\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{dV}{dq}\right)\right)\Sigma':(T+V\sqrt{-1}).\,\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

ideoque functiones T et V ita ſunt comparatae; vt ſit

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right)\left(\frac{dV}{dq}\right) = 0.$$

XII.

Hinc ergo intelligimus pro T et V eiusmodi functiones ipſarum p et q ſumi debere, quae iam ipſae idoneos valores pro coordinatis x et y praebeant. Quare inuentis iam duobus valoribus bina linearum ſe mutuo orthogonaliter ſecantium ſyſtemata exhibentibus, $x = t$ et $y = u$ exiſtentibus t et u eiusmodi functionibus binarum parametrorum p et q vt ſit $\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0$ hinc facillime infinita alia talium ſyſtematum paria

 deriuan-

deriuantur, quae binis ſequentibus aequationibus continentur

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

quam formam magis complicatam ideo elegi, vt imaginaria ſingulis functionibus euoluendis ſponte ſe deſtruant.

XIII.

Hae formulae eo magis ad praxin ſunt accommodatae, quod eadem operatione infinitae ſolutiones obtineri queant. Prodeant enim pro Γ variis functionibus determinatis ſumendis ex forma $\tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi valores $T; T'; T''; T'''$ etc. ex hac vero $\tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi V, V', V'', V''' etc. atque valores quaeſtioni ſatisfacientes erunt ſequentes

$$x = \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' - \varepsilon V - \zeta V' - \eta V'' - \theta V'''$$

$$y = \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \varepsilon T + \zeta T' + \eta T'' + \theta T'''$$

vbi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ denotant coefficientes quoscunque. Probe autem notandum eſt valores homologos V, V, item T', V' etc. ex iisdem functionibus Γ: ſimulque omnes ex iisdem litteris t et u eſſe formandas. Neque enim hinc in genere concludere licet ſi ſatisfaciant valores $x = T$, $y = V$, tum vero etiam alii quicunque $x = R$, $y = S$ inde quoque hos $x = \alpha T + \beta R$ et $y = \alpha V + \beta S$ eſſe ſatisfacturos; hoc enim non valet niſi functiones R et S ex iisdem litteris t et u ſint natae atque functiones T et V. Hinc probe cauendum eſt, ne ſuperioribus formis generalibus plus tribuatur, quam fas eſt.

XIV.

Valores ſimpliciores litterarum T et V ex iam inuentis quantitatibus idoneis t et u formandi, ex poteſtatibus loco functionis Γ ſubſtitutis naſcuntur atque ita ſe habebunt:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} T = t & T = tt - uu & T = t^3 - 3tuu & T = t^4 - 6ttuu + u^4 & \\ V = u & V = 2tu & V = 3ttu - u^3 & V = 4t^3u - 4tu^3 & \text{etc.} \end{array}$$

ex poteſtatibus vero negatiuis oriuntur:

$$\begin{array}{l|l|l|l} T = \frac{t}{tt+uu} & T = \frac{tt-uu}{(tt+uu)^2} & T = \frac{t^3-3tuu}{(tt+uu)^3} & T = \frac{t^4-6ttuu+u^4}{(tt+uu)^4} \\ V = \frac{u}{tt+uu} & V = \frac{2tu}{(tt+uu)^2} & V = \frac{3ttu-u^3}{(tt+uu)^3} & V = \frac{4t^3u-4tu^3}{(tt+uu)^4} \end{array}$$

vbi obſeruare licet ſi ponatur $t = v\,\text{cof.}\,\Phi$ et $u = v\,\text{ſin.}\,\Phi$ tum omnes hos valores in iſtis formulis ſimplicibus contineri

$$T = v^n\,\text{cof.}\,n\Phi \quad \text{et} \quad V = v^n\,\text{ſin}\,\Phi$$

Totum ergo negotium huc redit vt pro t et u eiusmodi idoneae functiones ipſarum p et q obtineantur, vt fiat

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0.$$

XV.

XV.

Seu quod eodem redit sumtis pro P et Q functionibus quibuscunque ipsarum p et q, consideretur formula differentialis $P\,dp + Q\,dq\sqrt{-1}$, et quaeratur multiplicator eam reddens integrabilem tum integrale ex parte reali et imaginaria constans comparetur cum formula $t + u\sqrt{-1}$, indeque vtriusque litterae t et u valor idoneus elicietur Vnde primum obseruo si P sit functio solius p et Q solius q, prodire $t = \int P\,dp$ et $u = \int Q\,dq$. Qoniam autem hae formae $\int P\,dp$ et $\int Q\,dq$ aeque pro parametris amborum systematum linearum haberi possunt atque ipsae quantitates p et q, idem est ac si hinc statuamus $t = p$ et $u = q$, neque etiam latius patere, censendi est haec positio $t = \alpha p + \beta$ et $u = \gamma q + \delta$. Interim tamen si sumamus $P = 1$ et $Q = 1$ formula $dp + dq\sqrt{-1}$ non solum dat $t = p$ et $u = q$, sed quia illa formula per $m + n\sqrt{-1}$ multiplicata manet integrabilis, et integrale est $mp - nq + np\sqrt{-1} + mq\sqrt{-1}$, vnde etiam hi obtinentur valores:

$$t = mp - nq \text{ et } u = np + mq.$$

qui vtique latius patere videntur, verumtamen, quia valores inde natos T, T′, T″ et V, V′, V″ etc. combinare licet, non aliae lineae inde nascuntur, atque ex simplicibus valoribus $t = p$ et $u = q$.

XVI.

Statuamus ergo $t = p$ et $u = q$, et percurramus simpliciora linearum systemata se mutuo ad angulos rectos secantium: ac primo quidem occurrunt hae formae:

$$x = \alpha p - \varepsilon q \text{ et } y = \alpha q + \varepsilon p$$

vnde eliminando primo q tum vero p ambo linearum systemata his aequationibus continebuntur:

$$\alpha x + \varepsilon y = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)p \text{ et } \alpha y - \varepsilon x = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)q$$

vtrumque continens infinitas lineas rectas inter se parallelas quarum quaelibet rectas alterius systematis normaliter secat qui sine dubio casus est simplicissimus.

XVII.

Sumatur secundo $T = tt - uu$ et $V = 2tu$, et quia binis terminis iungendis lineae tantum ad alium axem transferuntur statuamus simpliciter $x = pp - qq$ et $y = 2pq$; vnde cum sit $\sqrt{(xx + yy)} = pp + qq$, elidendo alternatim q et p, pro binis linearum systematibus adipiscimur has aequationes

$$\sqrt{(xx + yy)} + x = 2pp \text{ et } \sqrt{(xx + yy)} - x = 2qq.$$

Quare si loco $2pp$ et $2qq$ simpliciter scribamus p et q hae aequationes ita se habebunt:

$$yy = pp - 2px \text{ et } yy = qq + 2qx.$$

Vtraque aequatio infinitas continet parabolas ſuper communi axe ex eodem foco deſcriptas, dum alterius ſyſtematis parabolae dextrorſum, alterius vero ſiniſtrorſum excurrunt; quae eſt pulcerrima parabolarum proprietas, ſine dubio iam olim obſeruata. Praeterea obſeruo etiamſi praecedentes valores $T = p$ et $V = q$ cum his combinentur, tamen easdem parabolas eſſe prodituras.

XVIII.

Statuamus nunc $T = t^3 - 3tuu$ et $V = 3ttu - u^3$, formemusque has aequationes:

$$x = p^3 - 3pqq \quad \text{et} \quad y = 3ppq - q^3$$

quarum haec dat $p = \sqrt{\frac{y+q^3}{3q}}$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet: $x = \frac{y-2q^3}{3q}\sqrt{\frac{y+q^3}{3q}}$, et ſumtis quadratis:

$$27q^3xx = y^3 - 15q\,yy + 48q^6y + 64q^9$$

ſcribamus q et p loco q^3 et p^3, et aequationes pro ambobus linearum ſyſtematibus erunt:

$$27qxx = y^3 - 15qyy + 48qqy - 64q^3$$

$$27pyy = -x^3 + 15pxx - 48ppx + 64p^3$$

quae autem ad proprietates agnoſcendas commodius ita repraeſentantur:

$$x = \frac{y-2q}{3}\sqrt{\frac{y+q}{3q}} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+2p}{3}\sqrt{\frac{p-x}{3p}}.$$

quae

quae aequationes dant lineas tertii ordinis, quae pro vtroque ſyſtemate ſunt eiusdem naturae, dum coordinatae tantum permutantur.

XIX.

Conſideremus etiam functiones ex poteſtatibus negatiuis natas ſitque $T = \frac{t}{tt+uu}$ et $V = \frac{u}{tt+uu}$ atque ob $t = p$ et $u = q$, habebimus:

$$x = \frac{p}{pp+qq} \quad \text{et} \quad y = \frac{q}{pp+qq}.$$

Hinc fit $xx + yy = \frac{1}{pp+qq}$, ideoque pro ambobus linearum ſyſtematibus habebimus has aequationes:

$$x = p(xx+yy) \quad \text{et} \quad y = q(xx+yy).$$

Formam vtriusque parametri ita immutemus vt ſtatuamus $p = \frac{1}{2p}$ et $q = \frac{1}{2q}$, et bina linearum ſyſtemata his aequationibus exprimentur:

$$xx+yy = 2px \quad \text{et} \quad xx+yy = 2qy$$

quae praebent circulorum bina ſyſtemata.

XX.

Euoluamus etiam ex eodem genere ſequentes formulas, ſitque

$$x = \frac{pp-qq}{(pp+qq)^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2pq}{(pp+qq)^2}.$$

Hinc primo elicimus:

$$xx + yy = \frac{1}{(pp+qq)^2} \text{ ita vt ſit}$$

$$\frac{x}{xx+yy} = pp - qq \quad \text{et} \quad \frac{y}{xx+yy} = 2pq.$$

Dein-

Deinde cum sit $pp + qq = \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}$ reperimus

$$2pp = \frac{x + \sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy} \quad \text{et} \quad 2qq = \frac{\sqrt{(xx+yy)} - x}{xx+yy}$$

scribamus nunc $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ loco $2pp$ et $2qq$, et bina linearum systemata his aequationibus exprimuntur

$$xx + yy = px + p\sqrt{(xx+yy)} \quad \text{et} \quad xx + yy = q\sqrt{(xx+yy)} - qx$$

quae reducuntur ad has:

$$(xx+yy)^2 - 2px(xx+yy) = ppyy; \text{ seu } yy = \tfrac{1}{2}pp + px - xx + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + px)}$$

$$(xx+yy)^2 + 2qx(xx+yy) = qqyy; \text{ seu } yy = \tfrac{1}{2}qq - qx - xx - q\sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + qx)}.$$

Haec adeo duo linearum systemata sub eadem communi aequatione quarti ordinis continentur, dum in altero tantum parameter negatiue accipitur.

XXI.

Haec solutio ideo omni attentione digna videtur quod in genere per integrationem est eruta, atque adeo ad solutionem huius problematis maxime accommodata:

Inuenire ea linearum algebraicarum systemata quarum traiectoriae itidem sint lineae algebraicae.

Quamdiu enim aequatio pro illis lineis inter coordinatas x et y consideratur, enodatio huius quaestionis frustra suscipitur; totumque artificium, ad hunc scopum perducens in eo est situm, quod vtramque coordinatam per binas parametros variabiles vtriusque systematis reuocauimus. Solutio igitur huius problematis ita se habet, vt ex quouis casu inuento facillime infiniti alii assignari queant. Sint enim t et u eiusmodi functiones parametrorum p et q, quae iam coordinatas binorum systematum referant ita vt sit:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0.$$

Tum aliae quotcunque coordinatae x et y obtinebuntur, sumendo $x + y\sqrt{-1} = f:(t + u\sqrt{-1})$, vnde si t et u iam sint functiones algebraicae, omnes functiones algebraicae formulae $t + u\sqrt{-1}$, pariter pro x et y functiones algebraicas praebebunt.

XXII.

Totum ergo negotium huc redit, vt primo casus simpliciores pro t et u innotescant; ac simplicissimi quidem se statim offerentes sunt $t = p$ et $u = q$, vel etiam $t = \alpha p + \beta q$ et $u = \gamma p + \delta q$, qui iam vberrimam messem binorum systematum algebraicorum largiuntur.

Tum vero hic casus singularis notari meretur

$$t = \sqrt{p(a+q)} \quad \text{et} \quad u = \sqrt{q(b-p)}$$

qui quomodo satisfaciat sumendis differentialibus intelligitur:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{\sqrt{(a+q)}}{2\sqrt{p}}; \quad \left(\frac{dt}{dq}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{(a+q)}} \text{ hinc } \left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right) = \frac{-\sqrt{q}}{2\sqrt{(b-p)}}; \quad \left(\frac{du}{dq}\right) = \frac{\sqrt{(b-p)}}{2\sqrt{q}} \text{ hinc } \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = -\frac{1}{4}$$

ex quo propterea etiam infinitas alias solutiones deriuare licet. Ipse autem hic casus pulcerrima duo systemata linearum secundi ordinis suppeditat: posito enim:

$$xx = ap + pq \text{ et } yy = bq - pq \text{ ob } xx + yy = ap + bq$$

pro vtroque systemate prodeunt hae aequationes:

1°. $p(xx+yy) - bxx + ap(b-p) = 0$

2°. $q(xx+yy) + ayy - bq(a+q) = 0$

quarum haec est pro infinitis ellipsibus, illa vero ob $b > p$ pro infinitis hyperbolis super communi axe ex eodem centro descriptis.

XXIII.

Supra iam ostendi (14) quomodo ex huiusmodi valoribus idoneis pro t et u cognitis infinitos valores T, V, T′, V′, T″, V″, etc. elicere liceat, ex quibus deinceps porro infinita alia systematum paria formari queant, sumendo

$$x = \alpha T - \varepsilon V + \beta T' - \zeta V' + \gamma T'' - \eta V'' \text{ etc.}$$

$$y = \alpha V + \varepsilon T + \beta V' + \zeta T' + \gamma V'' + \eta T'' \text{ etc.}$$

Hos quidem valores T et V ibi ex solis potestatibus formulae $t + u\sqrt{-1}$ elicui, ponendo $T + V\sqrt{-1} = (t + u\sqrt{-1})^n$ eodem autem iure aliis quibuscunque functionibus vti licet. Veluti si ponamus $T + V\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{b + k(t + u\sqrt{-1})} = \frac{f + gt + gu\sqrt{-1}}{b + kt + ku\sqrt{-1}}$, denominatorem primo realem reddamus tum vero adipiscemur:

T =

$$T = \frac{(f+gt)(b+kt) + gkuu}{(b+kt)^2 + kkuu} \text{ et } V = \frac{(gb - fk)u}{(b+kt)^2 + kkuu}$$

vbi notasse iuuabit, cum sit $T - V\sqrt{-1} = \frac{f + gt - gu\sqrt{-1}}{b + kt - ku\sqrt{-1}}$ fore $TT + VV = \frac{(f+gt)^2 + gguu}{(b+kt)^2 + kkuu}$ hinc enim colligitur:

$TT + VV = \frac{(fk + gb + 2gkt)T - g(f+gt)}{k(b+kt)}$ tum vero etiam $T(b+kt) - kuV = f + gt$ et $TT + VV = \frac{(gb - fk)V + 2gkuT - ggu}{kku}$ item $kT + \frac{(b+kt)V}{u} - g = 0$

XXIV.

Applicemus hanc euolutionem ad casus simpliciores ac ponamus primo $t = p$ et $u = q$, et pro T et V ipsas coordinatas x et y sumendo binae postremae aequationes praebent

$$xx + yy = \frac{(fk + gb + 2gkp)x - g(f + gp)}{k(b+kp)} = \frac{(f+gp)x + gqy}{b + kp}$$

$$(b + kp)x - kqy = f + gp$$

quarum prior solam parametrum p continens, iam alterum linearum systema exhibet, quae quidem omnes erunt circuli. Tum vero ob $p = \frac{f - bx + kqy}{kx - g}$ pro altero systemate orietur haec aequatio: facta reductione.

$$xx + yy = \frac{(gb - fk)y + 2gkqx - ggq}{kkq}$$

quae etiam infinitos circulos complectitur:

Pro altero casu faciamus $a = 0$, $b = cc$, et loco p et q scribamus pp et qq vt habeamus $t = pq$ et $u = q\sqrt{(cc - pp)}$ hinc ergo fiet

$xx + yy = \frac{(fk + gb + 2gkpq)x - g(f + gpq)}{k(b + kpq)}$; $(b + kpq)x - kqy\sqrt{(cc-pp)} = f + gpq$, tum vero etiam:

x x

$xx+yy=\frac{(gb-fk)y+2gkqx\sqrt{(cc-pp)}-ggq\sqrt{(cc-pp)}}{kkq\sqrt{(cc-pp)}}$ et $kx+\frac{(b+kpq)y}{q\sqrt{(cc-pp)}}-g=0$

Vnde cum fit $q=\frac{by}{(g-kx)\sqrt{(cc-pp)}-kpy}$ elicitur pro altero fyftemate haec aequatio:

$$xx-yy=\frac{(gb+fk)x}{bk}-\frac{(gb-fk)py}{bk\sqrt{(cc-pp)}}-\frac{fg}{bk}$$

Quae cum hac forma repraefentari queat:

$xx+yy=py-aa$ pro circulis

alterius fyftematis aequatio erit

$xx+yy=qx+aa$ itidem pro circulis.

Talibus circulis in mappis mundi meridiani et paralleli referri folent.

XXV.

Ne ifte calculus tantopere fiat moleftus, fi in genere velimus ponere $t=\sqrt{p(a+q)}$ et $u=\sqrt{q(b-p)}$, primo hinc tam p quam q per t et u exprimamus vnde fequentes nafcentur aequationes

$0=btt-p(tt+uu)-ap(b-p)$ et $0=auu+q(tt+uu)-bq(a+q)$

Iam loco T et V capiendo ipfas coordinatas x et y ex formulis fuperioribus colligemus:

$$t=\frac{(fk+gb)x-fg-bk(xx+yy)}{kk(xx+yy)-2gkx+gg}=\frac{(kx-g)(f-bx)-bkyy}{(kx-g)^2+kkyy}$$

$$u=\frac{(gb-fk)y}{(kx-g)^2+kkyy}.$$

Ponamus ad calculum contrahendum

$f-bx=br$ et $kx-g=ks$ vt fit $fk-gb=bk(r+s)$ atque

$t=$

$t=\frac{b}{k}\cdot\frac{rs-yy}{ss+yy}$; $u=\frac{-b}{k}\cdot\frac{(r+s)y}{ss+yy}$ ideoque

$tt+uu=\frac{bb}{kk}\cdot\frac{rrss+(rr+ss)yy+y^4}{(ss+yy)^2}=\frac{bb}{kk}\cdot\frac{rr+yy}{ss+yy}.$

Nunc quia r et s abfciffam x inuoluunt, aequationes pro binis linearum fyftematibus ita erunt comparatae.

I. $0=b(rs-yy)^2-p(rr+yy)(ss+yy)-\frac{akkp(b-p)}{bb}(ss+yy)^2$

II. $0=a(r+s)^2yy+q(rr+yy)(ss+yy)-\frac{bkkq(a+q)}{bb}(ss+yy)^2$

quae ambae ad lineas quarti ordinis referuntur.

Nunc cafu $a=0$, cuius euolutio ante valde erat difficilis pofterior aequatio per $ss+yy$ diuifa ftatim dat

$0=rr+yy-\frac{bkkq}{bb}(ss+yy)$ feu $bb(rr+yy)=bkkq(ss+yy)$

quae ob $r=\frac{f}{b}-x$ et $s=x-\frac{g}{k}$ manifefto eft ad circulum, prior vero ob $(rr+yy)(ss+yy)=(rs-yy)^2+(r+s)^2yy$ abit in hanc: $0=(b-p)(rs-yy)^2-p(r+s)^2yy$,

feu $rs-yy=(r+s)y\sqrt{\frac{p}{b-p}}$ pariter pro circulo.

XXVI.

Ex folutione autem generali fupra data etiam hanc quaeftionem elegantiffimam enodare poterimus, quam alia methodo vix tractare liceat.

Inuenire eiusmodi bina fyftemata linearum fe mutuo normaliter fecantium, quae ambo fub eadem aequatione contineantur, ita vt prouti parametro valor

 tribua-

tribuatur vel positiuus vel negatiuus ambo inde nascantur systemata.

Casum simplicissimum huic conditioni satisfacientem iam supra §. 17. sumus adepti, quo haec aequatio $yy = pp - 2px$, prout parameter p vel positiue vel negatiue accipitur, duas parabolarum series exhibet, quae se mutuo ad angulos rectos intersecant.

XXVII.

Solutionem autem latius patentem reperiemus, si ponamus

$$x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^{2n} = (pp - qq + 2pq\sqrt{-1})^n$$

quae forma permutandis parametris p et q, abit in

$$(qq - pp + 2pq\sqrt{-1})^n = (-1)^n (pp - qq - 2pq\sqrt{-1})^n$$
$$= (-1)^n (x - y\sqrt{-1})$$

ideoque tum $x + y\sqrt{-1}$ abit vel in $x - y\sqrt{-1}$ vel in $-x + y\sqrt{-1}$ prout n fuerit vel numerus par vel impar. Illo autem casu tantum applicata y hoc vero tantum abscissa x negatiue accipitur, et vtroque curuae manent eaedem, seu sub eadem aequatione contentae. Ex quo si litterae α, β, γ, etc. denotent numeros impares quoscunque, geminam solutionem hinc consequimur:

I. $x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{2\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{2\beta}$
$+ C(p + q\sqrt{-1})^{2\gamma}$ etc.

II. $x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{4\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{4\beta}$
$+ C(p + q\sqrt{-1})^{4\gamma}$ etc.

in

in priori scilicet omnes exponentes sunt numeri impariter pares, in posteriori vero pariter pares: litterae autem α, β, γ etiam numeros negatiuos atque adeo fractos, dummodo numeratores et denominatores sint impares denotare possunt. Generalius vero hae duae ita exhiberi possunt, vt posito $pp - qq + 2pq\sqrt{-1} = R$ formula $x + y\sqrt{-1}$ aequari debeat functioni vel impari vel pari ipsius R.

XXVIII.

Adiungere insuper liceat hoc problema.

Inuenire eiusmodi curuas secandas, vt curuae secantes ab illis non aliter discrepent nisi quod coordinatae x et y inter se permutentur: seu vt eaedem lineae ad axem priori normalem translatae illas normaliter traiiciant.

Soluetur hoc problema ope huius formulae

$$x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{\beta} + C(p + q\sqrt{-1})^{\gamma}$$

si loco exponentium α, β, γ capiantur numeri impares vel formae $4i + 1$ vel formae $4i + 3$. Huius autem duplicis generis numeros impares in eadem forma inter se neutiquam permiscere licet. Vnde $x + y\sqrt{-1}$ aequari debet eiusmodi functioni impari ipsius $p + q\sqrt{-1}$, in qua nullae aliae occurrant potestates, nisi quarum exponentes sint vel omnes formae $4i + 1$, vel omnes formae $4i + 3$.

DE