



1769

Considérations sur les nouvelles lunettes d'Angleterre de Mr. Dollond et sur le principe qui en est le fondement

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Considérations sur les nouvelles lunettes d'Angleterre de Mr. Dollond et sur le principe qui en est le fondement" (1769). *Euler Archive - All Works*. 380.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/380>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



CONSIDÉRATIONS

S U R

LES NOUVELLES LUNETTES D'ANGLETERRE
DE MR. DOLLOND,

ET SUR LE PRINCIPE QUI EN EST LE FONDEMENT. (*)

P A R M. L. E U L E R.

Ces Lunettes produisent un effet si excellent, qu'il semble que leur construction remédie parfaitement aux défauts auxquels les autres instrumens dioptriques sont assujettis. Ces défauts consistent dans une double confusion, dont l'une est causée par la figure sphérique des verres, ou plutôt par leur ouverture, entant que les rayons qui passent par les bords de l'objectif représentent les objets dans un autre lieu que ceux qui passent par le milieu; l'autre provient de la diverse nature des rayons, qui, selon leurs différentes couleurs, souffrent différentes réfractions en passant par le verre. Mr. Dollond prétend avoir détruit à la fois cette double confusion, en composant l'objectif de deux verres, formés de deux especes différentes de verre, dont l'une se nomme en Anglois *Fintglass*, & l'autre *Crown glass*. Cet expédient mérite sans doute toute notre attention, tant par le bon effet qui en est produit, que par une circonstance tout à fait singulière, qui semble renverser les principes de la réfraction, qu'on a regardés jusqu'ici comme très solidement établis.

Pour ce qui regarde la premiere confusion, j'ai suffisamment fait voir, qu'en composant l'objectif de deux verres, il est possible de
la

(*) Lu le 16 de Sept. 1762.



la diminuer & même de la réduire à rien, en déterminant d'une certaine manière les sphéricités des quatre faces de ces verres: mais, pour l'autre confusion, il est certain qu'on n'y sauroit remédier qu'en employant deux matières transparentes, qui diffèrent assez considérablement par rapport à la réfraction. J'ai montré autrefois comment on pourroit composer de tels objectifs de verre & d'eau, la différence entre la réfraction de ces deux matières étant la plus grande que la Nature nous offre; cependant elle est encore trop petite, pour que la pratique en puisse tirer un assez grand avantage, vu que la courbure des faces du verre deviendrait si considérable, qu'il ne seroit plus susceptible d'une ouverture suffisante; ce qui m'a obligé de renoncer à cette idée de construire des objectifs délivrés de la confusion causée par la diverse réfrangibilité des rayons.

Par cette raison on doit être d'autant plus surpris, que Mr. Dollond ait trouvé moyen de faire de tels objectifs, en n'y employant que deux différentes espèces de verre, dont la réfraction diffère certainement beaucoup moins, que celle du verre & de l'eau; attendu que Mr. Dollond lui-même fixe la raison de réfraction de l'air dans le flint-glass à 1,583 : 1, & dans le crown-glass à 1,53 : 1. Mais il prétend que la dispersion des différens rayons diffère très considérablement dans ces deux espèces de verre, & même en raison de 3 à 2; ce qui renverseroit entièrement la théorie que j'ai donnée autrefois sur la réfraction de différentes matières transparentes, & que je me flattois avoir portée au plus haut degré de certitude. Mais, avant que de rejeter cette théorie, il me sera permis d'examiner soigneusement toutes les preuves sur lesquelles Mr. Dollond fonde son sentiment à l'égard de cette excessive différence entre ses deux sortes de verre. Or toute la controverse se réduit à cette question :

„La raison de la réfraction que souffrent les rayons moyens en
„passant d'un milieu dans un autre, étant donnée, on demande la rai-
„son de la réfraction que souffriront dans le même passage les rayons
„rouges & les violets, ou bien les plus & les moins réfrangibles.“



Il fera bon de mettre cette question dans un plus grand jour, avant que d'entreprendre l'examen des preuves que M. Dollond rapporte pour établir son sentiment; & pour une plus grande clarté, je renfermerai mes réflexions dans les articles suivans.

1. Considérons d'abord la chose en général; & quand les rayons passent d'un milieu A dans un autre milieu B, soit $m : 1$ la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons moyens; $r : 1$ la même raison pour les rayons rouges ou les moins réfrangibles, & $v : 1$ cette raison pour les rayons violets ou les plus réfrangibles. Donc, puisque la raison $r : 1$ approche plus de la raison d'égalité, que la raison $m : 1$, & que la raison $v : 1$ s'en écarte plus, il s'ensuit que, si $m > 1$, on aura $r < m$ & $v > m$; or, si $m < 1$, on aura $r > m$, & $v < m$. Cependant, comme la différence entre ces trois nombres m , r & v , est toujours très petite, on peut regarder m comme le milieu arithmétique entre r & v , de sorte que $r + v = 2m$. Si l'on vouloit établir les rayons moyens, en sorte que m fût le moyen proportionnel entre r & v , ou bien $mm = rv$, cela reviendrait au même.

2. Pour abréger le discours, en partant de ces différentes réfractions, je nommerai simplement *Réfraction moyenne*, la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction des rayons moyens. De la même manière, *Réfraction rouge* & *Réfraction violette*, signifieront cette raison du sinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons rouges & violets. On dira donc que la *réfraction violette* est plus grande que la *réfraction rouge*, & que la *réfraction moyenne* tient un milieu entr'elles: où il faut remarquer, que les mots, *plus grand* & *plus petit*, se rapportent à un plus grand & plus petit écart de la raison d'égalité.

3. Pour rendre cela plus sensible, considérons le cas où les rayons passent de l'air dans le verre, &, suivant les déterminations de Newton, nous aurons la *réfraction moyenne* $= 155 : 100$, la *réfraction*



fraction rouge $\equiv 154 : 100$, & la réfraction violette $\equiv 156 : 100$, de sorte que

$$m \equiv \frac{155}{100} = 1,55; \quad r \equiv \frac{154}{100} = 1,54 \quad \& \quad v \equiv \frac{156}{100} = 1,56;$$

ce qu'il faut entendre de cette espèce de verre, à laquelle répond la réfraction moyenne $155 : 100$; puisque Mr. Dollond a découvert des espèces très différentes de verre à cet égard. Comme ici $m > 1$, il est évident que $r < m$, & $v > m$, ou bien, la raison $r : 1$ approche plus de la raison d'égalité que la raison $v : 1$.

4. Mais, quand les rayons passent de ce verre dans l'air, on doit renverser ces mêmes raisons, & la réfraction moyenne sera $\equiv 100 : 155$, la rouge $\equiv 100 : 154$ & la violette $\equiv 100 : 156$, de sorte que réduisant à l'unité le dernier terme de ces raisons, on aura :

$$m \equiv \frac{100}{155}; \quad r \equiv \frac{100}{154}; \quad \& \quad v \equiv \frac{100}{156};$$

où il y a visiblement $r > m$ & $v < m$, puisque $m < 1$. Cependant la raison $r : 1$ approche plus de la raison d'égalité que la raison $v : 1$, & on pourra dire comme auparavant, que la *réfraction rouge* est plus petite, & la réfraction violette plus grande, quoique la valeur de r soit dans ce cas plus grande que celle de v .

5. Il en est de même en général: car si, pour le passage du milieu A dans le milieu B, on a la réfraction moyenne $\equiv m : 1$, la rouge $\equiv r : 1$ & la violette $\equiv v : 1$, on aura pour le cas renversé, où les rayons passent du milieu B dans le milieu A,

$$\text{la réfraction moyenne} \quad \equiv \frac{1}{m} : 1,$$

$$\text{la réfraction rouge} \quad \equiv \frac{1}{r} : 1,$$

$$\& \text{ la réfraction violette} \quad \equiv \frac{1}{v} : 1;$$



où la réfraction rouge est aussi bien la plus petite & la réfraction violette la plus grande, que dans le premier cas: puisque, si la raison $r : 1$, approche plus de la raison d'égalité que la raison $v : 1$, la même propriété se trouve aussi dans les raisons renversées $\frac{1}{r} : 1$ & $\frac{1}{v} : 1$.

6. Or, que le passage du milieu B dans le milieu A renferme toujours une réfraction renversée de celle qui convient au passage du milieu A dans le milieu B, c'est un principe fondamental de toute la Dioptrique, aussi bien que l'invariabilité dans le rapport entre les sinus d'incidence & de réfraction: & aucun de ceux qui ont traité jusqu'ici cette science, ne s'est avisé de douter de la vérité de ces deux principes. C'est aussi là-dessus que j'ai établi toute ma Théorie de la Réfraction, & je la regarde encore comme inébranlable, à moins qu'on ne renverse l'un ou l'autre de ces deux principes, dont j'avoue très volontiers, que je ne puis pas démontrer géométriquement la vérité, vu qu'elle dépend visiblement de la nature de la lumière, & de la manière dont se fait la réfraction dans le passage par différens milieux réfringens; & je crois qu'il s'en faut beaucoup, que nous soyons encore arrivés à cette connoissance.

7. Je suis aussi assuré que Mr. Dollond ne veut pas contester ces principes, quand il se flatte avoir détruit par ses expériences ma théorie de la réfraction, dans laquelle je crois avoir établi le vrai rapport qui doit se trouver entre les quantités m , r & v , de sorte que connoissant la réfraction moyenne, on puisse toujours assigner par-là la réfraction rouge & la violette. Mais, quand même la diverse réfrangibilité des rayons suivroit une loi différente de celle que j'ai établie, ce seroit toujours le plus grand paradoxe, que deux especes si peu différentes de verre produisissent des effets si énormément différens dans la réfraction des rayons diversement colorés. Et partant, indépendamment



ment d'aucune théorie, les preuves de M. Dollond exigent toujours l'examen le plus rigoureux.

8. La principale preuve est fondée sur l'expérience de deux prismes formés de deux espèces différentes de verre, qu'il a construits & joints de telle sorte ensemble, qu'ils lui ont présenté les objets sans les couleurs d'iris: d'où il a conclu que le verre nommé *Crown glass* disperse d'un tiers moins les divers rayons, que celui qu'on nomme *Flint glass*. Or, pour juger, tant de ces expériences, que de la conclusion que M. Dollond en a tirée, il est nécessaire de considérer en général la réfraction que les rayons éprouvent en passant par un ou plusieurs prismes.

9. Pour introduire plus commodément dans le calcul la diverse réfraction des rayons, lorsque la réfraction moyenne est exprimée par $m : 1$, ou simplement par le nombre m , je supposerai la réfraction rouge $= m - dm$, & la violette $= m + dm$, de sorte que $r = m - dm$, & $v = m + dm$; car, puisque les différences entre ces nombres sont très petites, il sera permis de la traiter sur le pied des différentiels. Selon ma théorie, la valeur de cette différentielle seroit $dm = \frac{1}{8} m/m$; mais je ferai ici abstraction de toute théorie, & je regarderai cette valeur comme inconnue, dans la vue de la déterminer par les expériences que M. Dollond propose.

10. Soit CAD l'angle d'un prisme, que je pose $= \alpha$, & la matière du prisme telle, que la réfraction moyenne des rayons qui y entrent de l'air soit $= m : 1$, & partant de ceux qui en sortent dans l'air $= 1 : m$. Considérons maintenant un rayon quelconque FQ, comme venant d'une étoile ou d'un point lumineux fort éloigné, qui entre dans le prisme en Q, où ayant pris la direction QR, il sorte en R dans l'air, de sorte qu'il faille déterminer la direction RG de ce rayon transmis par le prisme. J'ai marqué dans la figure les angles que fait ce rayon avec les deux faces du prisme CA & DA; d'où l'on tire d'abord pour la réfraction moyenne ces deux équations: $\cos p = m \cos q$, & $m \cos (q - \alpha) = \cos r$.

Pl. VIII.
Fig. 1.
Sur l'effet
d'un seul
Prisme.



11. Puisque $m > 1$, il est évident que ni le $\cos q$, ni le $\cos (q - \alpha)$, ne sauroit être plus grand que $\frac{1}{m}$. Soit donc μ l'angle dont le cosinus est précisément $= \frac{1}{m}$, ou $\cos \mu = \frac{1}{m}$, & partant il faut qu'il soit tant $\cos q < \cos \mu$ que $\cos (q - \alpha) < \cos \mu$, donc $q > \mu$; & $q - \alpha > \mu$, ou $q > \alpha + \mu$. Mais selon les figures tous ces angles sont aigus; donc, à moins que l'angle $\alpha + \mu$ ne soit plus petit qu'un droit, il est impossible que le rayon FQ soit de cette sorte transmis par le prisme, c'est à dire, tant que l'angle $\angle A Q F = p$ est aigu. Mais si l'angle p étoit obtus, ces conditions devroient s'entendre des complémens de ces angles à deux droits, & on auroit $180^\circ - q > \mu$, & $180^\circ - q + \alpha > \mu$, donc $q < 180^\circ - \mu$, ce qui remplit aussi la seconde condition: d'où nous avons ces deux limites: $q > \alpha + \mu$, & $q < 180^\circ - \mu$.

12. D'abord on demande ici la quantité de la réfraction, ou combien la direction RG s'écarte de la direction FQ. Or, si l'on continuoît le rayon FQ jusqu'au côté AD, il y feroit un angle $p - \alpha$, & partant la quantité de la réfraction est mesurée par la différence entre les angles r & $p - \alpha$, ou bien elle sera $= p - \alpha - r$; c'est à dire, en regardant l'objet par le prisme, il paroitra autant écarté de son lieu naturel. Or le rapport entre les angles p & r se trouve aisément en éliminant l'angle q ; car la première égalité donnant $\cos q = \frac{1}{m} \cos p$, & partant $\sin q = \frac{1}{m} \sqrt{mm - \cos^2 p}$, l'on en tire

$$\cos(q - \alpha) = \cos \alpha \cos q + \sin \alpha \sin q = \frac{\cos \alpha \cos p + \sin \alpha \sqrt{mm - \cos^2 p}}{m},$$

donc $\cos r = \cos \alpha \cos p + \sin \alpha \sqrt{mm - \cos^2 p}$, ou
 $\cos^2 p - 2 \cos \alpha \cos p \cos r + \cos^2 r = mm \sin^2 \alpha.$



13. Mais la principale question roule ici sur la dispersion des rayons diversement colorés; pour cet effet, on n'a qu'à chercher la variation de l'angle r , en faisant le nombre m variable, pendant que l'angle p demeure le même. La dernière équation est très propre à ce dessein, laquelle nous donne d'abord par la différentiation;

$$dr \cos \alpha \cos p \sin r - dr \sin r \cos r = m dm \sin \alpha^2,$$

& partant

$$dr = \frac{m dm \sin \alpha^2}{(\cos \alpha \cos p - \cos r) \sin r} = - \frac{m dm \sin \alpha}{\sin r \cdot \sqrt{(mm - \cos p^2)}},$$

ou bien $dr = \frac{dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}.$

Donc, après avoir trouvé l'angle DRG $= r$ pour les rayons moyens, on aura la quantité de cet angle

pour les rayons rouges $= r + \frac{dm \sin \alpha}{\sin q \sin r},$ &

pour les rayons violets $= r - \frac{dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}.$

14. La même détermination se tire aussi sans peine immédiatement de nos deux équations principales $\cos p = m \cos q$ & $m \cos (q - \alpha) = \cos r$, en les différentiant dans la supposition que les angles q & r avec le nombre m sont variables, pendant que les angles p & α demeurent constans. De là on trouve

$$0 = dm \cos q - m dq \sin q, \text{ \& } dm \cos (q - \alpha) - m dq \sin (q - \alpha) = - dr \sin r;$$

donc, puisque la première donne $mdq = \frac{dm \cos q}{\sin q}$, la seconde devient

$$dm \left(\cos (q - \alpha) - \frac{\cos q \sin (q - \alpha)}{\sin q} \right) = - dr \sin r.$$



Or, $\sin q \cos(q - \alpha) - \cos q \sin(q - \alpha) = \sin(q - (q - \alpha)) = \sin \alpha$,

donc $\frac{dm \sin \alpha}{\sin q} = -dr \sin r$, ou bien $dr = \frac{-dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$;

où dr marque l'accroissement de l'angle r , pendant qu'on met $m + dm$ au lieu de m : mais, pour les rayons rouges, il faut écrire $m - dm$, & pour les violets $m + dm$ au lieu de m .

15, La dispersion entière sera donc exprimée par $\frac{2 dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$,

ou bien une étoile vue par le prisme paroitra allongée par un si grand espace dans le Ciel, l'un des bouts étant rouge & l'autre violet. On voit que, sous les mêmes circonstances du prisme, cette image de l'étoile sera d'autant plus allongée, plus la particule $2 dm$, que marque la différence entre la réfraction rouge & violette, sera grande. De là on pourra donc aussi juger réciproquement de la valeur dm en regardant une étoile par un tel prisme; & mesurant l'espace allongé qu'elle paroît occuper dans le Ciel. Ou bien, ce qui revient au même, on laissera tomber dans une chambre obscure l'image de l'étoile, & on mesurera la grandeur du spectre, pour en conclure la valeur de la formule $\frac{2 dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$, & de là ensuite celle de dm .

16. Or M. Dollond assure, que quand on emploie de cette sorte deux prismes semblables, l'un de flintglass, l'autre de crownglass, celui-ci produit une beaucoup plus petite dispersion que le premier, & que la valeur de dm pour le crownglass ne sera environ que $\frac{2}{3}$ de celle qui répond au flintglass. Comme on ne sauroit douter du succès de cette expérience, la conclusion qu'on en tire semble être assujettie à quelque doute assez important. Le crownglass est un verre verdâtre assez foncé; or on fait qu'un tel verre ne transmet que les rayons qui sont à peu près de la même nature, & que les autres sont pour la plupart interceptés: donc, si les rayons rouges, & peut-être aussi les orangés, étoient interceptés par le crownglass, l'image colorée perdroit

droit sans doute beaucoup de son étendue, la partie rouge y manquant presque entièrement, ou devenant trop foible pour être apperçue.

17. Il seroit donc bien possible, que le crown-glass produisît une image beaucoup moins étendue que selon la loi de la réfraction, où l'on suppose que tous les rayons sont transmis également; sans que cette loi puisse être révoquée en doute. Par ce moyen on pourroit même faire évanouir toute dispersion; on n'auroit qu'à employer un tel verre coloré, qui ne transmitt que les rayons de la même couleur. Cet expédient a déjà été proposé autrefois, de construire les objectifs d'un verre coloré très foncé; mais, comme on perdrait alors tous les autres rayons, la représentation deviendroit trop obscure, & les lunettes n'en seroient pas moins défectueuses. Il me paroît donc encore fort douteux, si cette expérience suffit pour renverser aucune hypothèse sur la réfraction, quelque défectueuse qu'elle soit d'ailleurs.

18. Or le *flint-glass* n'ayant aucune couleur, & étant parfaitement transparent, produit une image complète, & étendue depuis le rouge le plus haut jusqu'au violet le plus foncé: & cette image seroit sans doute plus longue que celle du crown-glass, quand même la loi de réfraction seroit la même de part & d'autre, puisque cette loi ne se rapporte en aucune façon aux rayons qui sont interceptés. Il faut donc bien distinguer la diffusion des images, causée par la diverse réfraction des rayons, de celle qui est rétrécie par l'interception de quelques rayons, qui formeroient l'une ou l'autre extrémité de l'image.

Sur l'effet de deux Prismes collés ensemble.

19. Soient maintenant deux prismes CAB & ABD collés ensemble par le côté AB, ou, ce qui revient au même, dont les faces AB & BA soient parallèles entr'elles. Soit l'angle du premier CAB = α , & de l'autre ABD = β : la réfraction moyenne de l'air dans le premier = $m : 1$, & de l'air dans l'autre = $n : 1$. Cela posé, si un rayon FQ passe par ces deux prismes, & qu'on nomme les an-

PL. VIII.
fig. 2.



gles, comme ils sont marqués dans la figure; on aura pour la réfraction des rayons moyens ces égalités:

$$\cos p = m \cos q; \quad m \cos (q - \alpha) = n \cos r; \quad \& \quad n \cos (r + \epsilon) = \cos s;$$

où je remarque seulement que, s'il y a le moindre vuide entre les deux prismes, le passage ne sauroit subsister, à moins que les formules $m \cos (q - \alpha)$ & $n \cos r$ ne soient plus petites que l'unité.

20. La quantité de réfraction est estimée, comme auparavant, par l'angle que feroit le rayon incident FQ , continué avec le rayon rompu SG . Or le rayon FQ prolongé feroit avec la face AB un angle $= p - \alpha$, & le rayon SG avec la même face un angle $= s - \epsilon$, dont la différence $p - s - \alpha + \epsilon$ mesure la quantité de réfraction. Donc, s'il arrivoit qu'il fût $p - \alpha = s - \epsilon$, le rayon SG feroit parallèle au rayon FQ , & les prismes ne changeroient rien dans le lieu de l'objet. C'est dans ce cas que le grand Newton croyoit que la vision feroit nette & délivrée des couleurs d'iris, mais M. Dollond a trouvé que cela n'arrive pas.

21. Si les deux prismes sont faits de la même matière, de sorte que $n = m$, alors, à cause de $r = q - \alpha$, la réfraction sera déterminée par ces deux équations:

$$\cos p = m \cos q \quad \& \quad \cos s = m \cos (q - \alpha + \epsilon),$$

d'où l'on trouve aisément le cas où $p - \alpha = s - \epsilon$, & les objets paroissent dans leurs vrais lieux. Posons pour cet effet $p - \alpha = s - \epsilon = \phi$, de sorte que $p = \alpha + \phi$ & $s = \epsilon + \phi$; & , puisque la première équation donne

$$\cos q = \frac{\cos p}{m} \quad \& \quad \sin q = \frac{\sqrt{(mm - \cos p^2)}}{m},$$

en substituant ces valeurs dans l'autre équation, on aura

$$\cos (\epsilon + \phi) = \cos (\alpha + \epsilon) \cos \alpha + \phi + \sin (\alpha - \epsilon) \sqrt{(mm - \cos (\alpha + \phi)^2)}.$$

Or,



Or, puisque $\epsilon + \phi = (\alpha + \phi) - (\alpha - \epsilon)$, on a
 $\cos(\epsilon + \phi) = \cos(\alpha - \epsilon) \cos(\alpha + \phi) + \sin(\alpha - \epsilon) \sin(\alpha + \phi)$;
 donc $\sin(\alpha - \epsilon) \sin(\alpha + \phi) = \sin(\alpha - \epsilon) \sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2}$,
 d'où il s'ensuit ou $\alpha - \epsilon = 0$, ou $mm = 1$.

22. La racine $mm = 1$ étant contraire à la réfraction, il faut absolument que les deux angles α & ϵ soient égaux entr'eux, & partant les côtés AC & BD parallèles entr'eux, pour que la réfraction ne change point le lieu des objets. Mais, quand la matiere des deux prismes est différente, il n'est pas si aisé de déterminer les cas où les objets sont représentés dans leurs vrais lieux; & je remarque d'abord qu'on ne sauroit assigner une telle proportion entre les angles α & ϵ , afin que cette représentation trouve lieu pour tous les objets. Il n'y aura jamais qu'un seul angle $AQF = p$, qui donne $p - \alpha = s - \epsilon$; & dès qu'on regarde d'autres objets, dont les rayons font avec le prisme un plus grand ou un plus petit angle, leur lieu, vu par les prismes, sera différent de celui où ils se trouvent véritablement.

23. Pour développer donc les cas de cette apparition, posons comme auparavant $p - \alpha = s - \epsilon = \phi$, ou bien $p = \alpha + \phi$, & $s = \epsilon + \phi$, & nous aurons

$$\cos q = \frac{\cos(\alpha + \phi)}{m}; \text{ donc } \sin q = \frac{\sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2}}{m}$$

$$\cos(r + \epsilon) = \frac{\cos(\epsilon + \phi)}{n}; \text{ donc } \sin(r + \epsilon) = \frac{\sqrt{nn - \cos(\epsilon + \phi)^2}}{n},$$

$$\& m \cos(q - \alpha) = n \cos r, \text{ ou bien}$$

$m \cos \alpha \cos q + m \sin \alpha \sin q = n \cos \epsilon \cos(r + \epsilon) + n \sin \epsilon \sin(r + \epsilon)$,
 où substituant les premieres valeurs on arrive à cette équation:

$$\cos \alpha \cos(\alpha + \phi) + \sin \alpha \sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2} = \cos \epsilon \cos(\epsilon + \phi) + \sin \epsilon \sqrt{nn - \cos(\epsilon + \phi)^2},$$



d'où il s'agit de déterminer l'angle ϕ . Mais il est assez clair que cet angle ne sauroit être réel, à moins que le rapport entre les angles α & ϵ ne soit renfermé entre certaines limites.

24. Je ne vois aucune méthode pour résoudre commodément cette équation, si ce n'est en tâtonnant pour chaque cas proposé des nombres m & n : je remarque seulement, que prenant $\epsilon = \alpha$, cette équation, se réduisant à celle-ci:

$$\sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2} = \sqrt{nn - \cos(\alpha + \phi)^2},$$

ne sauroit subsister, à moins qu'il ne fût $n = m$. Donc, lorsque les deux prismes sont composés de différentes matières, il faut absolument que les angles α & ϵ soient inégaux. Mais il n'est pas si aisé de voir lequel de ces deux angles doit être plus grand ou plus petit; cependant il semble que, si n est plus grand que m , l'angle ϵ doit être pris plus petit que α : mais il se peut bien que cette maxime ne soit pas générale, surtout puisque le maintien des objets dans leur vraie situation n'a lieu dans chaque cas que pour un seul angle ϕ .

25. Or, pour trouver les dispositions des deux prismes, afin que les objets, dont les rayons y tombent sous un angle donné $\angle QF = p$, soient vus dans leur vrai lieu, les deux réfractions m & n étant données, on peut, outre l'angle p , encore prendre à volonté l'angle s , & de là déterminer les deux angles des prismes α & ϵ : sous cette vue le problème deviendra aisé à résoudre. Car, retenant dans le calcul les angles p & s , on aura $\alpha = p - \phi$, & $\epsilon = s - \phi$; d'où notre équation prend cette forme:

$$\cos p \cos(p - \phi) + \sin(p - \phi) \sqrt{mm - \cos p^2} = \cos s \cos(s - \phi) + \sin(s - \phi) \sqrt{nn - \cos s^2},$$

& de là, en développant les sinus & cosinus des angles $p - \phi$ & $s - \phi$, la tangente de l'angle ϕ s'en tire aisément de cette sorte:

$$\tan \phi = \frac{\cos s^2 - \cos p^2 + \sin s \sqrt{nn - \cos s^2} - \sin p \sqrt{mm - \cos p^2}}{\sin p \cos p - \sin s \cos s - \cos p \sqrt{mm - \cos p^2} + \cos s \sqrt{nn - \cos s^2}},$$

&



& ensuite les angles mêmes des deux prismes :

$$\text{tag } \alpha = \frac{(\sqrt{nn - \cos s^2}) - \sin s) \sin(p - s)}{\cos s \sin(p - s) - \sqrt{mm - \cos p^2} + \cos(p - s) \sqrt{nn - \cos s^2}},$$

&

$$\text{tag } \epsilon = \frac{(\sqrt{mm - \cos p^2}) - \sin p) \sin(p - s)}{\cos p \sin(p - s) + \sqrt{nn - \cos s^2} - \cos(p - s) \sqrt{mm - \cos p^2}},$$

26. Pour la commodité du calcul il suffit d'avoir déterminé l'un des angles α & ϵ , puisque $\alpha - \epsilon = p - s$, d'où l'on voit qu'on ne sauroit prendre $p = s$, à moins qu'il ne soit $n = m$, puisqu'alors les deux angles α & ϵ évanouiroient. Et de là il est aussi clair que, pour peu que les deux réfractions m & n soient différentes, on doit établir entre les angles p & s une différence assez considérable pour empêcher que les angles α & ϵ ne deviennent trop petits. Outre cela il faut remarquer que, si l'un de ces angles devenoit négatif, on devroit alors renverser le prisme, ou le mettre en sens contraire à celui où il est représenté dans la figure.

27. L'autre question sur ce double prisme regarde la diffusion de l'image, qu'indiquera le différentiel de l'angle s , en supposant variables les deux réfractions m & n , l'angle p demeurant constant. De là nous trouvons

$$0 = dm \cos q - m dq \sin q, \quad dn \cos r - n dr \sin r,$$

$$\& \quad dn \cos(r + \epsilon) - n dr \sin(r + \epsilon) = -ds \sin s,$$

où la première donne $mdq = \frac{dm \cos q}{\sin q}$, laquelle valeur étant substituée dans la seconde, produit

$$dm \cos(q - \alpha) - \frac{dm \cos q \sin(q - \alpha)}{\sin q} = \frac{dm \sin \alpha}{\sin q} = dn \cos r - n dr \sin r,$$

donc



donc $n dr = \frac{dn \cos r}{\sin r} - \frac{dm \sin a}{\sin q \sin r}$, d'où la troisième équation devient

$$- \frac{dn \sin \epsilon}{\sin r} + \frac{dm \sin a \sin (r + \epsilon)}{\sin q \sin r} = - ds \sin s;$$

par conséquent $ds = \frac{-dm \sin a \sin (r + \epsilon)}{\sin q \sin r \sin s} + \frac{dn \sin \epsilon}{\sin r \sin s}.$

28. Ici l'angle $s - ds$ répond aux rayons rouges, & l'angle $s + ds$ aux rayons violets, de sorte que le point lumineux paroitra étendu par un angle, qui est

$$\frac{2 dn \sin \epsilon}{\sin r \sin s} - \frac{2 dm \sin a \sin (r + \epsilon)}{\sin q \sin r \sin s}.$$

Cette diffusion évanouira donc, quand cette égalité aura lieu:

$$\frac{dn \sin \epsilon}{\sin (r + \epsilon)} = \frac{dm \sin a}{\sin q},$$

& réciproquement, quand cela arrive, on en pourra conclure le rapport entre les différentiels dm & dn . Car on aura

$$dm : dn = \frac{\sin q}{\sin a} : \frac{\sin (r + \epsilon)}{\sin \epsilon} = \frac{\sin CQR}{\sin QAR} : \frac{\sin RSD}{\sin RBS},$$

ou bien $dm : dn = \frac{AR}{QR} : \frac{BR}{RS} = AR \cdot RS : BR \cdot QR.$

29. J'ai déjà remarqué que les rayons ne sauroient passer d'un prisme dans l'autre, à moins que les formules $m \cos (q - a)$ & $n \cos r$ ne fussent moindres que l'unité. Posons donc:

$$m \cos (q - a) = n \cos r = \cos \phi,$$

& déterminons par ce nouvel angle ϕ les angles q & $r + \epsilon$ de cette sorte:



$$\cos(q-a) = \frac{\cos \Phi}{m}, \text{ donc } \cos q = \frac{\cos a \cos \Phi - \sin a \sqrt{(mm - \cos \Phi^2)}}{m},$$

$$\sin(q-a) = \frac{\sqrt{(mm - \cos \Phi^2)}}{m}, \text{ } \sin q = \frac{\sin a \cos \Phi + \cos a \sqrt{(mm - \cos \Phi^2)}}{m},$$

$$\cos r = \frac{\cos \Phi}{n}, \text{ donc } \cos(r+\epsilon) = \frac{\cos \epsilon \cos \Phi - \sin \epsilon \sqrt{(nn - \cos \Phi^2)}}{n},$$

$$\sin r = \frac{\sqrt{(nn - \cos \Phi^2)}}{n}, \text{ } \sin(r+\epsilon) = \frac{\sin \epsilon \cos \Phi + \cos \epsilon \sqrt{(nn - \cos \Phi^2)}}{n};$$

d'où nous trouvons les angles p & s déterminés ainsi :

$$\begin{aligned} \cos p &= \cos a \cos \Phi - \sin a \sqrt{(mm - \cos \Phi^2)}, \quad \& \quad \cos s \\ &= \cos \epsilon \cos \Phi - \sin \epsilon \sqrt{(nn - \cos \Phi^2)}. \end{aligned}$$

Donc, prenant l'angle Φ à volonté, on connoitra tous les passages des rayons par nos deux prismes.

30. Mais, afin que les couleurs d'iris évanouissent, il faut satisfaire à cette équation :

$$\frac{ndn \sin \epsilon}{\sin \epsilon \cos \Phi + \cos \epsilon \sqrt{(nn - \cos \Phi^2)}} = \frac{mdm \sin a}{\sin a \cos \Phi + \cos a \sqrt{(mm - \cos \Phi^2)}};$$

d'où l'on voit que cette propriété ne sauroit avoir lieu pour tous les angles Φ ; mais si elle s'observe dans deux prismes pour un certain angle Φ , ou pour un certain angle d'incidence p , toutes les autres représentations, qui se font sous d'autres angles, n'auront plus cette prérogative, & les couleurs d'iris ne manqueront pas d'y paroître, quoiqu'elles ne soient peut-être pas fort sensibles. Il se trouve donc ici la même circonstance, que j'ai déjà remarquée dans le cas où les rayons rompus doivent devenir paralleles aux incidens.

31. Il ne semble pas que M. Dollond ait fait attention à cette circonstance, puisqu'il parle de deux tels prismes composés de différentes especes de verre, qui représentent les objets délivrés des cou-



leurs d'iris, tout comme si cette propriété convenoit à tous les angles d'incidence; & des angles α & ϵ de ces deux prismes il conclut que $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \epsilon}{\sin \alpha}$, ce qui n'est pourtant vrai que lorsque les angles q & $r + \epsilon$ sont égaux. Aussi M. Clairaut, qui a traité cette même question dans les *Mém. de l'Acad. R. des Sc. de Paris* pour l'an 1756, parvient-il à cette même formule $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \epsilon}{\sin \alpha}$, ayant supposé les angles α & ϵ très petits pour se servir d'approximations, de sorte qu'il ne la donne que comme approchante de la vérité: mais je ne vois aucune nécessité de recourir à des approximations, quand on peut parvenir à une solution parfaite. C'est cependant là-dessus que M. Dollond fonde principalement son sentiment sur la réfraction des diverses espèces de verre.

32. Or, non seulement la conclusion de M. Dollond me paroît suspecte, mais il me semble aussi que les expériences d'où il l'a tirée, sont peu exactes. D'abord je remarque, que les petits angles qu'il donne à ses prismes sont peu propres à découvrir le cas où la diverse réfrangibilité des rayons est détruite: car, ayant trouvé $ds = \frac{dn \sin \epsilon}{fr fs} = \frac{dm \sin \alpha f (r + \epsilon)}{\sin q \sin r \sin s}$, il est clair que, si l'on prenoit les angles α & ϵ infiniment petits, l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons deviendrait insensible, quelque grand qu'il fût d'ailleurs en soi-même. Il vaudroit donc bien mieux faire ces angles aussi grands qu'il seroit possible.

33. La petitesse des angles α & ϵ doit donc rendre fort douteuses les expériences: &, à moins que leur rapport ne s'écarte énormément de la vérité, la diffusion causée dans l'image sera absolument insensible. On conviendra aisément qu'une telle diffusion doit être assez considérable, avant qu'on la puisse distinguer par les sens; de sorte que tant qu'elle n'excede point certaines limites, les objets nous paroîtront



tront aussi nets, que si la diverse réfrangibilité des rayons étoit parfaitement détruite. Outre cela, puisque l'un des prismes étoit de crown-glass, où les rayons rouges sont interceptés en grande partie, la diffusion en étoit encore diminuée davantage, & partant rendue moins sensible, sans qu'on en pût conclure un changement dans la nature de la réfraction.

34. Donc, quand M. Dollond prétend avoir trouvé une telle disposition de deux prismes, l'un de flintglass, l'autre de crown-glass, à travers lesquels il ait vu les objets sans aucune confusion, il s'en faut beaucoup que cette disposition soit précisément celle qui produiroit exactement ce même effet; il se pourroit même qu'elle s'en écartât très considérablement. Nous en avons déjà une preuve bien remarquable en ce que M. Dollond ne s'est pas aperçu, que cette netteté de l'image ne sauroit convenir qu'à un seul angle d'incidence; il faut donc bien que la confusion produite sous des angles différens ait été imperceptible. Mais, après ces remarques générales, je m'en vais examiner plus en détail l'expérience de M. Dollond, pour pouvoir mieux juger de la conclusion qu'il en tire.

35. Soit donc le premier prisme A de crown-glass, & la réfraction moyenne $m = 1,53$; l'autre prisme B de flintglass, & la réfraction moyenne $n = 1,583$. Ensuite, les angles α & ϵ étoient tels, selon M. Dollond, que leurs sinus tenoient à peu près la raison 3 : 2. Je supposerai donc, puisque ces angles étoient petits, $\alpha = 28^\circ$ & $\epsilon = 14^\circ$, où l'on comprend aisément qu'une différence d'un ou de deux degrés produiroit les mêmes phénomènes. Maintenant, quand il dit que par ces deux prismes les objets lui ont paru sans couleur, il faut que cette égalité $\frac{dn \sin \epsilon}{r(r + \epsilon)} = \frac{dm \sin \alpha}{r q}$ ait eu à peu près lieu pour quelque angle ϕ , en prenant $\cos(q - \alpha) = \frac{\cos \phi}{m}$ & $\cos r = \frac{\cos \phi}{n}$, puisqu'il est impossible qu'elle ait eu lieu pour



tous les angles, comme M. Dollond semble l'insinuer. Je donnerai donc à l'angle ϕ quelques diverses valeurs, pour voir combien le rapport entre dm & dn en sera changé.

36. Soit d'abord l'angle $\phi = 90^\circ$; & nous aurons
 $q - \alpha = 90^\circ$; $q = 111^\circ$; & $dn \operatorname{tag} \epsilon = dm \operatorname{tag} \alpha$,
 $r = 90^\circ$; $r + \epsilon = 104^\circ$; donc $\frac{dm}{dn} = \frac{249328}{348384}$,
 & partant $\frac{dm}{dn} < \frac{2}{3}$.

Soit maintenant $\phi = 0$, & nous aurons

$q - \alpha = 49^\circ, 11'$; $q = 70^\circ, 11'$; $26733 dn = 38137 dm$,
 $r = 50^\circ, 49'$; $r + \epsilon = 64^\circ, 49'$; ou $\frac{dm}{dn} = 0,70098$;
 cette valeur est plus grande que $\frac{2}{3}$.

Soit aussi $\phi = 180^\circ$, & nous aurons

$q - \alpha = 130^\circ, 49'$; $q = 151^\circ, 49'$; d'où $\frac{dm}{dn} = 0,53204$,
 $r = 129, 11$; $r + \epsilon = 143, 11$;
 laquelle valeur surpasse à peine $\frac{1}{2}$.

37. Voilà donc une assez grande incertitude sur le rapport des variations $\frac{dm}{dn}$, contenue entre les limites 0,532 & 0,701, sur laquelle il est impossible de se décider, à moins qu'on ne sache sous quel angle d'incidence le phénomène en question est arrivé. Mais si, au jugement des yeux, il est arrivé sous tous les angles, il s'ensuit que cette expérience ne suffit pas pour décider, si le rapport $\frac{dm}{dn}$ est $= \frac{532}{1000}$, ou s'il est $= \frac{700}{1000}$; & dans une si grande incertitude, il est très certain que ces sortes d'expériences ne font en aucune manière pro-



propres à nous éclaircir sur le véritable rapport entre les valeurs différentielles dm & dn . Cependant, puisque mon hypothèse donne ce rapport $\frac{dm}{dn} = 1.0004$, il semble pourtant que ces expériences y portent quelque atteinte; mais il faudroit toujours des expériences plus décisives avant que de la rejeter.

38. Le bon effet des objectifs composés de ces deux especes de verre prouve encore moins contre la loi de réfraction que j'ai établie; & je crois qu'il en faut chercher la raison dans des circonstances tout à fait différentes. Or d'abord, je remarque que le seul verre de crown-glass y contribue déjà quelque chose, en interceptant une bonne partie des rayons rouges qui pourroient gâter l'image. M. Dollond lui-même dit avoir observé qu'un objectif simple, fait de cette espece de verre, produit un meilleur effet, qu'un autre semblable, fait d'un verre très clair; ce dont la raison est évidemment celle que je viens d'indiquer, puisque tous les verres colorés produisent le même effet.

39. Ensuite, la principale raison doit être cherchée en ce que M. Dollond, en proportionnant les deux verres dont ses objectifs sont composés, a heureusement détruit la confusion causée par la sphéricité & l'ouverture du verre: j'ai fait voir ailleurs, que c'est ordinairement la source des plus grands défauts des lunettes, & dès qu'on y remédie, on diminue aussi très considérablement l'autre défaut, qu'on attribue à la diverse réfrangibilité des rayons. Il est même possible de rendre ce défaut insensible par un bon arrangement des verres oculaires, comme je l'ai expliqué autrefois fort au long. Ainsi, à mon avis, le plus grand mérite des lunettes de M. Dollond se trouve conjointement dans l'objectif composé, entant que le défaut de la sphéricité y est corrigé, & dans la disposition des verres oculaires: je crois même que, s'il vouloit composer ses objectifs de deux verres de la même espece, il en éprouveroit le même effet.



40. Mais au reste il feroit très facile de s'assurer par l'expérience de cette propriété prétendue des nouveaux objectifs. Cela se pratiqueroit aisément dans une chambre obscure, y ayant fixé dans un volet un tel objectif composé; on n'auroit qu'à lui opposer hors de la chambre, tantôt un morceau de drap écarlate, tantôt un autre violet, & à mesurer ensuite dans la chambre la distance derrière le verre, où l'une & l'autre image se représenteroit le plus distinctement. Pour en juger mieux, on traverse les objets par un fil noir, dont l'image doit devenir distincte. En s'y prenant de cette manière, je doute fort que les deux distances se trouvent égales, & selon toute apparence la différence sera aussi grande que dans les objectifs ordinaires.

41. Je finirai par une remarque, qui n'est pas peu importante dans le sujet présent. M. Dollond, en faisant ses expériences avec les deux prismes joints ensemble, s'étoit attendu que les couleurs d'iris disparoistroient là, où les rayons transmis seroient parallèles aux rayons incidens. Il croyoit que c'étoit une suite nécessaire de l'hypothèse de Newton, en vertu de laquelle on devoit trouver $\frac{dm}{dn} =$

$\frac{m-1}{n-1}$. Mais on s'appercvra aisément, que cette conséquence n'a

aucun fondement. La destruction des couleurs d'iris exige cette condition $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \epsilon \sin \gamma}{\sin \alpha \sin (r + \epsilon)}$: or le parallélisme des rayons transmis avec les incidens demande qu'il soit $p - \alpha = s - \epsilon$, ou bien, posant $p - \alpha = s - \epsilon = \phi$, il faut qu'il soit:

$$\cos \alpha \cos (\alpha + \phi) + \sin \alpha \sqrt{mm - \cos (\alpha + \phi)^2} = \cos \epsilon \cos (\epsilon + \phi) + \sin \epsilon \sqrt{nn - \cos (\epsilon + \phi)^2}.$$

Cette équation devoit donc être d'accord avec la précédente, si l'on posoit $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$.



42. Or nous avons vu, qu'en posant $p = \alpha + \phi$ & $s = \beta + \phi$, il s'ensuit $\sin q = \frac{\sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2}}{m}$, & $\sin(r + \beta) = \frac{\sqrt{nn - \cos(\beta + \phi)^2}}{n}$, & substituant ces valeurs, notre équation différentielle devient :

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n \sin \beta \sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2}}{m \sin \alpha \sqrt{nn - \cos(\beta + \phi)^2}}.$$

Pour l'autre équation supposons :

$\cos \alpha \cos(\alpha + \phi) + \sin \alpha \sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2} = v$,
de sorte que

$\cos \beta \cos(\beta + \phi) + \sin \beta \sqrt{nn - \cos(\beta + \phi)^2} = v$,
& de là nous tirons :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \phi) &= v \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{mm - vv} = \cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi, \\ \cos(\beta + \phi) &= v \cos \beta + \sin \beta \sqrt{nn - vv} = \cos \beta \cos \phi - \sin \beta \sin \phi. \end{aligned}$$

43. Ces deux formules nous fournissent aisément les angles α & β , dont les tangentes seront exprimées ainsi :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \phi - v}{\sin \phi + \sqrt{mm - vv}}, \quad \& \quad \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \phi - v}{\sin \phi + \sqrt{nn - vv}};$$

mais les formules irrationnelles seront :

$$\begin{aligned} \sqrt{mm - \cos(\alpha + \phi)^2} &= v \sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{mm - vv}, \\ \sqrt{nn - \cos(\beta + \phi)^2} &= v \sin \beta - \cos \beta \sqrt{nn - vv}, \end{aligned}$$

d'où l'équation différentielle provient :

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n \sin \beta (v \sin \alpha - \cos \alpha \sqrt{mm - vv})}{m \sin \alpha (v \sin \beta - \cos \beta \sqrt{nn - vv})};$$

où les valeurs trouvées ci-dessus étant substituées donnent



$$\frac{dm}{dn} = \frac{n}{m} \cdot \frac{mm - v \cos \phi + \sin \phi \sqrt{(mm - vv)}}{nn - v \cos \phi + \sin \phi \sqrt{(nn - vv)}}.$$

44. Cette équation ne se trouve dans aucune liaison avec celle-ci: $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$, que Newton a cru être la véritable: & il est

à présent très clair que, quand même cette loi seroit la véritable, il ne s'ensuivroit nullement que la destruction des couleurs d'iris fût toujours combinée avec le cas où les rayons transmis sont parallèles aux incidens. On voit plutôt que ces deux cas n'ont aucune connexion entr'eux, quelle que soit la véritable loi de la réfraction des rayons différemment réfrangibles: & la Loi Newtonienne pourroit être vraie, nonobstant la diversité de ces deux cas, que M. Dollond semble avoir cru nécessairement liés entr'eux.

