1769

De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis iunctorum

Leonhard Euler

DE AEQVILIBRIO ET MOTV CORPORVM FLEXVRIS ELASTICIS IVNCTORVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Corpora hic rigida confidero, quorum autem duo pluraue ita inter fe fint coniuncta, vt feparationi quidem refiftant, verumtamen in fingulis iuncturis inflexionem feu motum gyratorium circa quempiam axem admittant. Iuncturas autem ita comparatas affumo, vt ifta inflexio non libere fuccedat, fed vi inflectenti eo magis reluctetur, quo maior inflexio produci debeat. Datur fcilicet in huiusmodi corporibus ftatus naturalis, in quo fine actione cuiusquam vis externae fe quafi fponte conferuent; quo magis autem de hoc ftatu per inflexionem deturbari debeant, vt eo maiori vi fit opus ad eiusmodi effectum producendum. Denique vero his flexuris eiusmodi vim infitam tribuo, vt poftquam corpora de fitu naturali fuerint depulfa, ceffante vi inflectente, ea fponte fe in ftatum natura-

 lem

lem restituant, in quo quippe natura elasticitatis consistit.

2. Ad hanc igitur indolem sunt referenda omnis generis corpora elastica, veluti laminae elasticae, quae incuruatae vi pollent sese in statum naturalem restituendi. Hoc tantum intercedit discrimen, quod in huiusmodi corporibus nullum detur punctum, circa quod inflexio fieri nequeat ita vt ea tanquam ex infinitis elementis, ope flexurarum elasticarum coniuncta spectari oporteat. Hic autem quo latius inuestigationes nostrae pateant, corpora ex finito partium numero conflata contemplabor, quae partes singulae nullius figurae mutationis sint capaces, sed in ipsis tantum iuncturis circa se inuicem elasticitatis resistentia superata inflecti patiantur.

3. Quo autem clarius omnia principia, ex quibus huiusmodi corporum determinatio motus est petenda, perspiciatur, inuestigationes a casu simplicissimo, quo duo tantum corpora huiusmodi flexura elastica sunt coniuncta exordiri conueniet, sic enim omnibus circumstantiis probe perpensis multo tutius ac felicius ad maiorem corporum hoc modo inter se iunctorum numerum progredi licebit. Ante omnia igitur hic in ipsa iunctura axis ille considerandus occurrit circa quem vtrumque corpus moueri potest ita vt altero fixo alterum circa istum axem de situ naturali detorqueri queat, quatenus vis inflectens elasticitati superandae par est. Deinde vero vtrumque

que corpus seorsim est spectandum, quae cum sint rigida, mechanica cognitio ad motum definiendum requisita cum centro inertiae tum vero momentis inertiae continetur.

4. Sit igitur recta Mm axis flexurae, qua ambo corpora sunt coniuncta et dum ea in statu naturali versantur, sit alterius corporis centrum inertiae in A, alterius vero in B, quae quidem in figura ita exhibentur quasi cum axe Mm essent in eodem plano, verum vtique fieri posset vt plana MAm et MBm certum quendam angulum inter se constituerent, quemadmodum etiam rectae normales Aa et Bb ab vtroque centro inertiae ad axem ductae vel in vnum vel diuersa puncta incidere possunt, quae circumstantia si ad motum spectemus, probe est obseruanda. Hinc ergo in quouis statu violento inclinatio planorum MAm et MBm, cum naturali siue sit nulla siue aliqua, comparari debet quoniam a differentia quantitas vis elasticae, quae tum ad restitutionem exeritur, pendet. Tab. III. Fig. 1.

5. Ad vim elasticam autem mente saltem concipiendam, statuatur axis flexurae plano tabulae in L normalis, et sit ALb status naturalis, ita vt tum ambo centra inertiae in planis quae rectis LA et Lb normaliter insistunt, reperiantur. Nunc autem consideretur status quicunque violentus ALB, quo alterius corporis centrum inertiae in planum rectae LB normaliter insistens sit detrusum, ac sta- Fig. 2.

 tus

tus deturbatio ex angulo BLb erit aestimanda, cum tendat ad hunc angulum extinguendum; atque in calculo vis elastica sinui huius anguli proportionalis statui solet, cuius ratio ita exhiberi potest. Vi elasticae reuera insitae substituatur mente filum elasticum Bb, vi praeditum se in ratione longitudinis Bb contrahendi; ponatur $LB = Lb = k$ angulus $BLb = \omega$, vt sit $Bb = 2k \sin. \frac{1}{2}\omega$, ideoque ipsa vis $= E \sin. \frac{1}{2}\omega$ quae cum punctum B in directione Bb sollicitet, erit eius momentum ratione axis $L = E \sin. \frac{1}{2}\omega.\ LB \sin. LBb = Eb \sin. \frac{1}{2}\omega \cos. \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2} E.b \sin. \omega$; vnde patet momentum vis elasticae, quod hic est spectandum, non sine ratione sinui anguli inflexionis BLb proportionale statui.

6. Si extremitates A et B filo AB constringantur, euidens est hoc modo corpora in statu violento retineri posse, vbi imprimis tensionem fili ad hoc requisitam notari conuenit. Sit igitur T ista fili tensio restitutionem in statum naturalem coercens, cuius momentum ad inflexionem augendam cum sit $= T.LB. \sin. ABL = T.AL. \sin. BAL$, ob $AB : \sin. ALB = AL : \sin. ABL$, erit id $= \frac{T.LA.LB}{AB} \sin. ALB$, momento elasticitatis, quod sit $= E \sin. \omega$ aequale ponendum vnde positis $LA = a$, $LB = b$, angulo naturali $ALb = \lambda$ vt sit $ALB = \lambda - \omega$, et $AB = \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos. (\lambda - \omega))}$ erit tensio $T = \frac{E \sin. \omega. \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos. (\lambda - \omega))}}{ab \sin. (\lambda - \omega)}$. Quodsi ergo in statu naturali partes LA et Lb in directum iaceant, vt sit $\lambda = 180°$ fit $T = \frac{E.AB}{ab}$.

7. Hic

7. Hic casus per se quidem perspicuus eo magis est memorabilis quod ingens paradoxon inuoluere videtur. Si enim duae virgae rigidae AL, LB in L ita elatere sint iunctae, vt sponte in directum sint extensae, eaeque constrictione fili AB in statu inflexo ALB detineantur, mirum videbitur, quomodo tensio fili quantitati $\frac{E.AB}{LA.LB}$ hoc est ipsi fili longitudini AB proportionalis esse queat, quandoquidem hoc modo ad inflexionem minorem maior fili tensio, ad maiorem autem minor requiritur. Scilicet minuta fili tensione, virgae subito in statum naturalem resilient cum tamen tensio minor maiorem inflexionem sustinere posset. Contra autem aucta fili tensione, inflexio adeo augebitur, cum tamen maior inflexio minorem tensionem exigat. Tab. III. Fig. 3.

8. Quo hoc paradoxon dilucidemus, virgam AL vt fixam spectemus, vt altera BL cum a certa vi secundum BA quae sit $=D$, tum ab elatere Bb sollicitata circa punctum seu axem L fixum moueatur. Cum igitur positis $LA=a$ $LB=b$, $BLb=\omega$, vt sit $AB=\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}$, sit vis BA momentum $=\frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}}$, elateris autem momentum contrarium $=Eb\sin.\omega$, si virgae BL momentum inertiae respectu axis L statuamus $=Bcc$, erit ex motus principiis $\frac{Bccdd\omega}{2gdt^2} = \frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}} - Eb\sin.\omega$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, siquidem tempus

pus t in minutis secundis exprimere velimus. Multiplicemus per $d\omega$ et integrando obtinebimus

$$\frac{Bccd\omega^2}{4gdt^2} = C + Eb\,\mathrm{cos}.\,\omega - D\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cos}.\,\omega)}$$

sumamus motum a quiete incepisse, cum erat $\omega = \alpha$, vt constans C rite determinetur, ac fiet

$$\frac{Bccd\omega^2}{4gdt^2} = Eb(\mathrm{cos}.\,\omega - \mathrm{cos}.\,\alpha) + D\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cos}.\,\alpha)} - D\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cos}.\,\omega)}.$$

9. Nunc igitur ostendendum est, si fuerit vis $D = \frac{E\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cos}.\,\alpha)}}{a}$ tum virgam LB in statu initiali, vbi erat angulus $BLb = \alpha$ perpetuo quiescere, sin autem vis $BA = D$ fuerit hac quantitate maior, tum virgam LB angulo BLb continuo crescente versus LA rotari, contrarium vero euenire, si vis illa D fuerit minor, hocque casu virgam LB ad situm Lb accessuram esse. Primum quidem inde patet quod non solum ipsa quantitas, cui quadratum celeritatis angularis $\frac{d\omega^2}{dt^2}$ aequatur, casu quo $\omega = \alpha$ euanescit sed etiam eius differentiale, ideoque et acceleratio, ita vt virga LB tum perpetuo in situ initiali sit permansura. Pro reliquis casibus sit breuitatis gratia $\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cos}.\,\alpha)} = f$ et $\sqrt{(aa + bb + 2ab\,\mathrm{cos}.\,\omega)} = z$; eritque $\frac{Bccd\omega^2}{4gdt^2} = \frac{E(zz - ff)}{2a} - D(z - f) = (z - f)\left(\frac{E(z + f)}{2a} - D\right)$. Ponatur iam $D = \frac{nEf}{a}$, vt sit n modo maius modo minus vnitate fietque $\frac{Bac^2d\omega^2}{2Egdt^2} = (z - f)(z + f - 2nf)$; et celeritas angularis erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(z - f)(z + f - 2nf)}$.

10. Quod-

10. Quodsi iam sit $n > 1$, ita vt vis BA elaterem superet, primo quidem angulus ω augebitur, et distantia $AB = z$ diminuetur, vnde pro motu secuturo erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(f-z)((2n-1)f-z)}$, ex quo euidens est ob $2n-1 > 1$, dum angulus BLb crescit, et z minuitur celeritatem non solum nusquam cessare, sed continuo augeri, donec virga LB prorsus in directionem LA reducatur. Sin autem sit $n < 1$, statim distantia $AB = z$ increscit, vt fiat $z > f$, et $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(z-f)(z-(2n-1)f)}$, vbi ob $2n-1 < 1$, euidens est crescente z etiam celeritatem angularem continuo augeri, donec virga in situm naturalem Lb restituatur, fiatque $z = a+b$. Tum vero hac celeritate, motus angularis in plagam contrariam vertetur, siquidem iunctura id permittat qui motus priori omnino erit similis.

11. Tempus autem ipsum huius motus nonnisi per quadraturas satis perplexas definiri potest, quae difficultas adeo vix minuitur, etiamsi elasticitas prorsus euanescat, et virga LB circa axem L libere statuatur mobilis, a vi constante D iugiter secundum directionem BA sollicitata. Posito enim $E = 0$, habebitur $\frac{Bccd\omega^2}{4Dgdt^2} = f - z$, vnde colligitur

$$dt\sqrt{\frac{4Dg}{Bcc}} = \frac{-2zdz}{\sqrt{(f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

existente $ff = aa+bb+2ab\cos.\alpha$, ideoque $f < a+b$, quae formula integranda certe maxime est complicata, quod in tali casu tam facile ad praxin reuocando,

cando, mirum videtur. Neque elaſticitate admiſſa calculus multo fit intricatior cum poſito $D = \frac{nEf}{a}$ tum habeatur:

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2z\,dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

quae quidem aequatio ſi $b = a$ ſeu $LB = LA$ in hanc ſimpliciorem formam abit

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2\,dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(2a+z)(2a-z)}}.$$

12. Vnicus caſus occurrit, qui faciliorem integrationem admittit; cum ſcilicet ſit $f < 2a$ ob $ff = 2aa(1+\operatorname{cof.}\alpha)$; numerus n ita accipiatur vt fiat $(2n-1)f = 2a$, ſeu $2n-1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\operatorname{cof.}\alpha)}} = \frac{1}{\operatorname{cof.}\frac{1}{2}\alpha}$ et cum ſit $dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2\,dz}{(2a-z)\sqrt{(f-z)(2a+z)}}$ integrale reperitur:

$$t\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{1}{\sqrt{a(2a-f)}}\left(\text{Ang. cof.}\ \frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)}\right)$$

quae formula euaneſcit ſumto $z = f$ pro motus initio. In minutis ſecundis ergo habetur:

$$t = \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Eg(2a-f)}}\ \text{Ang. cof.}\ \frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)} = \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(2n-1)Egf}}$$
$$\text{Ang. cof.}\ \frac{(n-2)(2n-1)f+(3n-2)z}{n((2n-1)f-z)}$$

vnde ſequitur tempus quo virga LB in ſitum LA compellitur fore $= \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(n-1)Egf}}\ \text{Ang. cof.}\ \frac{n-2}{n}$ minutis ſecundis. Ita ſi initio motus fuiſſet $\alpha = 90°$, ideoque $2n-1 = \sqrt{2}$ ſeu $n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ erit hoc tempus totum $= \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Egf(\sqrt{2}-1)}}\ \text{Ang. cof.}\ \frac{\sqrt{2}-3}{1+\sqrt{2}}$, qui angulus proxi-

proxime continet $131°, 3\frac{5}{8}'$ et in partibus radii 2, 287436.

13. Si virgam LA, quam hic vt fixam spectauimus, etiam mobilem faciamus, vt ambae simul super plano tabulae, ad quod quippe axis inflexionis sumitur perpendicularis, moueantur, nullum est dubium quin problema multo sit difficilius, et profundiorem Mechanicae cognitionem postulet. Multo porro difficilius fiet problema, si hae binae virgae in vacuo vtcunque proiiciantur, vt axis inflexionis non amplius situm sibi parallelum conferuet, eaeque insuper extrinsecus a viribus quibuscunque sollicitentur. Quodsi praeterea corpus ex pluribus constet partibus, flexura elastica inter se coniunctis, neque adeo axes inflexionis in singulis flexuris fuerint inter se paralleli; nescio an quis solutionem saltem tentare auderet. Equidem hic tantummodo eiusmodi plurium partium compagem sum consideraturus, vbi omnes axes inflexionis in singulis iuncturis inter se sint paralleli, atque motus ita sit comparatus, vt in eodem plano absoluatur, ad quod illi axes sint perpendiculares, et in quo simul singularum partium centra inertiae sint sita, etiamsi methodus, qua sum vsurus, multo latius pateat.

14. Principium autem primarium, cui omnium huiusmodi motuum determinatio innititur, ex Statica seu ea scientia, quae circa aequilibrium virium est occupata, peti oportet. Nisi enim constet, a

quibus viribus corpus quodpiam, cuiuscunque indolis fuerit, in aequilibrio contineatur, determinatio motus, ab aliis quibuscunque viribus variati frustra suscipitur. Euolutio autem accuratior huius principii eo magis est necessaria, quod ipsa motus determinatio, vtcunque is fuerit intricatus, semper leui adhibita consideratione ad statum aequilibrii reuocari potest, dum vires ad motus effectionem requisitae viribus quibus corpus actu impellitur aequiualere, ideoque contrarie applicatae cum his in aequilibrio consistere debent, quod adeo etiam in motu fluidorum locum habet. Quocirca inuestigationes a statu aequilibrii incipiam.

Problema I.

15. *Si corpus ex quotcunque partibus compositum, quae flexuris elasticis inter se sint coniunctae, a viribus quibuscunque fuerit sollicitatum, definire conditiones, quibus hae vires se mutuo in aequilibrio coerceant.*

Solutio.

Primum omnium obseruandum est cunctas vires perinde in aequilibrio esse debere, ac si corpus prorsus esset rigidum; si enim singulae flexurae subito rigescerent, inde virium aequilibrium neutiquam turbaretur; quocirca primo quidem in eas conditiones est inquirendum, sub quibus vires corpus

pus sollicitantes se inuicem destruerent, si totum corpus tanquam rigidum spectetur. Hunc in finem singulae vires corpus sollicitantes ita euoluantur, vt quaelibet puncto corporis Z applicata secundum ternas directiones fixas Zp, Zq, et Zr, quae ternis axibus inter se normalibus IA, IB et IC sint parallelae resoluantur. Sit igitur vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$, et ponantur ternae coordinatae situm puncti Z definientes et iisdem axibus parallelae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ac primo quidem constat, summas omnium harum ternarum virium seorsim nihilo aequales esse debere, vnde hae tres conditiones colliguntur, vt sit: Tab. III. Fig. 4.

$$1°. \int p = 0; \quad 2°. \int q = 0; \quad 3°. \int r = 0$$

quibus obtinetur, vt corporis centrum inertiae in aequilibrio conseruetur.

Verum hae tres conditiones nondum sufficiunt, etiamsi corpus totum foret rigidum, oportet enim insuper, vt corpori circa nullum plane axem motus imprimatur; ex quo momenta omnium harum virium respectu axis cuiuscunque se mutuo destruant, necesse est. At trium virium p, q, r momentum respectu axis IA in plagam BC est $= ry - qz$; respectu vero axis IB in plagam CA est $= pz - rx$; et respectu axis IC, in plagam AB est $= qx - py$, vnde tres sequentes conditiones prioribus sunt adiiciendae:

$$4°. \int (ry - qz) = 0; \; 5°. \int (pz - rx) = 0; \; 6°. \int (qx - py) = 0.$$

 Fa-

Facile autem patet, dummodo hae ſex conditiones locum habeant, momenta virium reſpectu omnium plane axium, vtcunque accipiantur, pariter in nihilum abire.

Nunc ſex iſtae conditiones ſufficerent, ſi totum corpus eſſet perfecte rigidum, ſin autem conſtet ex partibus inuicem flexuris iunctis, neceſſe inſuper eſt, vt vires ſollicitantes cum vi elaſtica cuiusque flexurae, in aequilibrio conſiſtant. Sit igitur in N eiusmodi flexura, cuius axis inflexionis ſit recta tu vtcunque ad ternos axes inclinata, et ex ratione iuncturae et quantitate inflexionis dabitur elaſticitatis momentum, quo reſtitutio in ſtatum naturalem circa axem tu intenditur. Sit Eu hoc elaſticitatis momentum, atque ad aequilibrium requiritur vt virium ſollicitantium momenta reſpectu eiusdem axis tu ſumta, ſint vtrinque momento elaſticitatis Eu aequalia. Cum ſcilicet omnia virium momenta reſpectu axis tu ſumta ſe mutuo deſtruant, totum corpus per flexuram tNu in duas partes diſtributum eſt conſiderandum, quarum altera cis altera trans flexuram porrigitur; atque momenta virium alteri parti applicatarum reſpectu axis tu quorum ſumma ſit Vs, momento elaſticitatis Eu ita aequalia ſunt ponenda, vt reſtitutioni in ſtatum naturalem reluctentur; tum autem ſponte ſumma momentorum ex altera parte ſumtorum, quorum ſumma eſt $= -Vs$, etiam momento elaſticitatis Eu

erit

erit aequalis pariterque restitutioni aduersabitur. Hinc quaelibet flexura peculiarem suppeditat aequationem, quae omnes cum sex ante exhibitis, conditiones aequilibrii quaesitas complectuntur.

Coroll. 1.

16. Si partium iunctura ita est comparata, vt inflexioni prorsus non resistat, qui est casus corporum perfecte flexibilium, tum pro singulis flexuris vis elastica Eu euanescit, et ex vtraque parte virium momenta respectu axis inflexionis nihilo aequalia sunt ponenda.

Coroll. 2.

17. Quo haec clariora reddantur, sint duae virgae aequales AC et BC in C ita iunctae, vt inflexae vi quacunque se in directum extendere conentur: quibus in A et B applicatae sint vires aequales Aa, Bb parallelae et ad vtramque virgam aeque inclinatae, in C vero applicata sit vis duplo maior Cc illis item parallela, quae tres vires proinde erunt in aequilibrio si ambae virgae vt vnum corpus rigidum spectentur. Vt autem ob flexuram in C aequilibrium non turbetur, primum virga BC vt fixa spectetur, et vis Aa momentum exeret ad inflexionem virgae CA augendam, quod ergo vi elasticae flexurae aequale esse debet. Simili modo si virga AC fixa concipiatur, ex vi Bb nasce- Tab. III. Fig. 5.

nafcetur momentum priori aequale et contrarium quod tamen pariter inflexionem augere conabitur, ideoque vi elafticae flexurae aequabitur. Ex quo patet quomodo virium vtrinque agentium momenta fe mutuo deftruant feorfim vero cum vi elaftica flexurae in aequilibrio confiftant.

Coroll. 3.

18. Vbicunque ergo datur flexura, ibi corpus neceffario in duas partes dirimitur, quarum altera fi fixa concipiatur alteri motus circa axem flexurae imprimi queat. Quae partium diftinctio pro qualibet flexura quo facilius percipiatur, reliquae flexurae omnes tanquam rigefcerent, funt confiderandae. Pro his autem binis partibus virium follicitantium momenta probe a fe inuicem diftingui oportet.

Scholion.

19. Ex hoc principio manifefto fluunt, quae iam olim de aequilibrio corporum tam flexibilium quam elafticorum fum commentatus; dum a viribus quibuscunque follicitantur. Ibi autem omnes flexuras tanquam in eodem plano exiftentes affumferam, cui fimul omnes axes inflexionis effent perpendiculares. Nunc igitur idem principium ad complexum ampliffimum extuli, vt ad omnia flexurae genera latiffime pateret, quo quidem fcientia aequilibrii maxime promota videtur. Verumtamen ipfa huius

huius principii applicatio saepenumero ingentes adhuc difficultates inuoluit, dum virium sollicitantium momenta respectu axis cuiuscunque oblique siti non sine summa molestia definiuntur, et secundum praecepta vulgaria ad calculum reuocantur. Difficultas scilicet tum potissimum offenditur, quando axis flexurae tu ratione axium IA, IB et IC, secundum quos singulae vires sollicitantes resoluuntur, situm tenet vtcunque obliquum; tum enim nonnisi calculo perquam prolixo et taedioso, eius, respectu virium Zp, Zq et Zr momenta colliguntur, cum tamen negotium satis facile succederet, si axis tu vni principalium IA, IB et IC foret parallelus, similique modo institui posset, quo earundem virium momenta respectu ipsorum axium IA, IB, IC in solutione sunt computata. Egregium igitur subsidium scientiae aequilibrii allatum est censendum sequente propositione, qua ostensurus sum, quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium inuentis, facile definiri possit earundem virium momentum respectu alius cuiusque axis obliqui per idem punctum ducti.

Problema 2.

20. *Si dentur virium quarumcunque momenta respectu ternorum axium* IA, IB, IC *inter se normalium in puncto* I, *inuenire earundem virium momentum respectu axis cuiuscunque obliqui* IO *per idem punctum* I *traiecti.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Tota haec inuestigatio commodissime ad trigonometriam sphaericam reduci videtur. Centro ergo I radio $= r$ sphaera descripta intelligatur, cuius superficies ab illis ternis axibus traiiciatur in punctis A, B, C, ita vt arcus AB, BC, CA sint quadrantes, in puncto O autem transeat axis obliquus IO, ad quod ducantur arcus circulorum maximorum AO, BO, CO. His positis sint virium sollicitantium momenta respectu

axis $IA = Lr$; in plagam BC

axis $IB = Mr$; in plagam CA

axis $IC = Nr$; in plagam AB.

Iam quaecunque sint istae vires, earum loco hic eiusmodi vires determinatae substituantur, quae eadem momenta gignant, iisque propterea sint aequivalentes. Quare in puncto B applicata concipiatur vis $BL = L$, cuius directio arcum BC in B tangat, quae cum sit normalis in radium BI axi IA perpendicularem, momentum dabit respectu axis $IA = Lr$ in plagam BC tendens, et quia haec vis cum reliquis axibus IB et IC in eodem plano iacet, eorum respectu nulla praebebit momenta. Simili modo in C applicata concipiatur vis $CM = M$ secundum tangentem arcus CA cuius momentum respectu axis IB erit $= Mr$ in plagam CA tendens, respectu reliquorum vero axium nullum producit

ducit momentum. Denique etiam in A concipiatur vis $AN = N$ fecundum directionem AB, vnde nafcitur momentum refpectu axis $IC = Nr$ in plagam AB. Cum igitur hae tres vires $BL = L$; $CM = M$ et $AN = N$ ipfa momenta propofita refpectu ternorum axium IA, IB et IC exhibeant, eas loco virium, quaecunque fuerint, vnde ifta momenta funt nata, fubftituere licebit, ita vt nunc tota quaeftio huc redeat, vt harum trium virium momenta refpectu axis obliqui IO definiantur. Pro fitu igitur axis IO ponantur anguli

$$AIO = \lambda, \; BIO = \mu \text{ et } CIO = \nu$$

qui a fe inuicem ita pendent vt fit $\operatorname{cof.} \lambda^2 + \operatorname{cof.} \mu^2 + \operatorname{cof.} \nu^2 = 1$ et cum ratio trium virium fit eadem, vis $BL = L$ ad arcum BO inclinata angulo OBL refoluatur in duas inter fe normales et in fuperficie fphaerae fitas, quarum altera in BO cadat, quae erit $= L \operatorname{cof.} OBL$, altera vero huic normalis $= L \operatorname{fin.} OBL$, quarum illa refpectu axis IO nullum praebet momentum quia eius directio cum hoc axe in eodem plano exiftit, haec vero cum fit ad planum IBO ideoque etiam ad rectam BS ex B in IO normaliter ductam perpendicularis dabit refpectu axis IO momentum $= L. \operatorname{fin.} OBL. BS$ in plagam BC. Eft vero $BS = r \operatorname{fin.} BIO = r \operatorname{fin.} BO$, ficque iftud momentum fit $= Lr \operatorname{fin.} BO. \operatorname{fin.} OBL$. Producatur arcus AO in P, vt fit AP quadrans et in arcum BC normalis; atque in triangulo fphaerico rectangulo BOP erit $\sin. OP = \sin. BO. \sin. OBL$. hincque momentum illud $= Lr \sin. OP = Lr \cos. AO = Lr \cos. \lambda$. Simili modo ex vi $CM = M$ respectu axis IO colligetur momentum $= Mr \cos. \mu$, in plagam CA, et ex vi $AN = N$ momentum $= Nr \cos. \nu$ in plagam AB. Quae plagae cum ratione motus circa axem IO generandi conueniant, ex viribus sollicitantibus, quarum momenta Lr, Mr, Nr respectu axium IA, IB, IC sunt cognita, concluditur fore momentum respectu axis obliqui IO $=$

$$Lr \cos. \lambda + Mr \cos. \mu + Nr \cos. \nu$$

in plagam ABC, quod ergo ex momentis datis facili negotio obtinetur.

Coroll. 1.

221. Si axis IO in aliquem principalium veluti IA incidat momentum ipsi Lr fiet aequale, quod inde est manifestum, quia arcus $AO = \lambda$ euanescit, et bini reliqui $BO = \mu$ et $CO = \nu$ euadunt quadrantes.

Coroll. 2.

222. Fieri potest vt momentum respectu axis IO euanescat, idque infinitis modis. Angulo enim $AIO = \lambda$ pro lubitu assumto, reliquos μ et ν ita assumere licet vt fiat $L \cos. \lambda + M \cos. \mu + N \cos. \nu = 0$ manente $\cos. \lambda^2 + \cos. \mu^2 + \cos. \nu^2 = 1$. Cum enim inde fit $\cos. \nu = \frac{-L \cos. \lambda - M \cos. \mu}{N}$ fit $NN \sin. \lambda^2 = (MM + NN) \cos. \mu^2 + 2LM \cos. \lambda \cos. \mu + LL \cos. \lambda^2$

hinc-

hincque $\cos.\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm \surd(NN(MM+NN)\sin.\lambda^2 - LLNN\cos.\lambda^2)}{MM+NN}$

vel $\cos.\mu = \frac{-LM\cos.\lambda \pm N\surd((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}{MM+NN}$

quod fieri poteſt dum ſit $\sin.\lambda > \frac{L}{\surd(LL+MM+NN)}$; eritque tum $\cos.\nu = \frac{-LN\cos.\lambda \mp M\surd((LL+MM+NN)\sin.\lambda^2 - LL)}{MM+NN}$

et anguli μ, et ν prodeunt reales.

Coroll. 3.

23. Caſus deinde imprimis notatu dignus occurrit, quo virium momentum reſpectu axis IO ſit omnium maximum; euenit hoc ſi hic axis ita capiatur, vt ſit

$\cos.\lambda = \frac{L}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$; $\cos.\mu = \frac{M}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$; $\cos.\nu = \frac{N}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$;

tum enim eius reſpectu erit momentum $= r\surd(L^2 + M^2 + N^2)$.

Coroll. 4.

24. Huius ergo problematis ope momentum virium corpus ſollicitantium reſpectu cuiusque flexurae cuius axis ſitum tenet vtcunque obliquum definire, ideoque ſequens problema reſoluere poterimus.

Problema 3.

25. *Si corpus ex partibus quotcunque, quae flexuris elaſticis ſint coniunctae, compoſitum a viribus* Tab. III. Fig. 7.

quibuscunque sollicitetur, earum momentum respectu vniuscuiusque flexurae N, *cuius axis* tNu *situm tenet vtcunque obliquum inuestigare.*

Solutio.

Locus flexurae N ternis coordinatis inter se normalibus definiatur quae sint $IL = l$, $LM = m$, et $MN = n$ et in N tres concipiantur axes Nl, Nm Nn istis coordinatis paralleli, ad quos axis flexurae tu ita inclinetur, vt sint anguli $lNu = \lambda$, $mNu = \mu$, $nNu = \nu$ ideoque $\text{cos}.\lambda^2 + \text{cos}.\mu^2 + \text{cos}.\nu^2 = 1$, reliquae vero flexurae rigescere concipiantur. Ita corpus in hac flexura in duas partes dispescitur, quarum vtraque circa axem flexurae, motum recipere potest altera manente immota. Virium ergo quae alteri tantum parti sunt applicatae, momentum respectu axis tu indagari oportet. Huius partis sit Z punctum quodcunque coordinatis $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ definitum, cui vires sint applicatae quaecunque, quae ad ternas directiones Zp, Zq, Zr reducantur, sitque vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$. Iam primo harum virium momenta colligantur respectu axium fictorum Nl, Nm, Nn, ac manifestum est fore earum momenta

respectu axis $Nl = q(n-z) - r(m-y)$ in plagam mn

respectu axis $Nm = r(l-x) - p(n-z)$ in plagam nl

respectu axis $Nn = p(m-y) - q(l-x)$ in plagam lm.

Quibus

Quibus inuentis ex problemate praecedente earundem virium respectu axis flexurae tu momentum concluditur fore in plagam lmn:

$$q(n-z)\cos.\lambda - r(m-y)\cos.\lambda + r(l-x)\cos.\mu - p(n-z)\cos.\mu$$
$$+ p(m-y)\cos.\nu - q(l-x)\cos.\nu.$$

Omnia ergo haec momenta per totam corporis partem colligendo ob quantitates l, m, n et angulos λ, μ, ν constantes impetramus totum momentum quaesitum:

$$(m\cos.\nu - n\cos.\mu)\int p + (n\cos.\lambda - l\cos.\nu)\int q + (l\cos.\mu - m\cos.\lambda)\int r$$
$$+ \cos.\lambda\int(ry - qz) + \cos.\mu\int(pz - rx) + \cos.\nu\int(qx - py).$$

Coroll. 1.

26. In statu ergo aequilibrii hoc momentum vi elasticae qua flexura in N est praedita, aequale poni oportet, siquidem vis elastica hanc corporis partem, ex qua momentum est collectum in plagam contrariam nml flectere conatur.

Coroll. 2.

27. Cum igitur quaelibet flexura huiusmodi aequationem suppeditet, omnes hae aequationes illis sex, quas supra indicauimus adiunctae statum aequilibrii corporis determinabunt.

Scho-

Scholion.

28. En ergo vera principia, ex quibus status aequilibrii corporum flexuris elasticis praeditorum, dum a viribus quibuscunque sollicitantur, definiri debet. Quae cum latissime pateant, omnia ea quae adhuc de aequilibrio corporum flexibilium et elasticorum sunt inuestigata, in se complectuntur. In his autem inuestigationibus omnium flexurarum axes inter se paralleli sunt assumti, quo calculi euolutio magis plana et facilis redderetur; sin autem isti axes inter se non fuerint paralleli, calculus non solum maiorem molestiam inuoluit, sed etiam summopere difficile est pro omnibus inflexionibus, quae huiusmodi corporibus induci possunt, singularum partium situm ad calculum reuocare, vt principia hic stabilita in vsum vocari queant. Quae difficultas quo clarius perspiciatur, casum satis simplicem euoluam, quo corpus ex tribus tantum constat partibus quarum iuncturae axes habeant inter se normales, et quae statu naturali in directum extendantur.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 8. 29. *Si tres virgae* AB, BC, CD *ita sint iunctae, vt in statu naturali in directum porrigantur, iuncturae autem* B *axis* $b\beta$ *ad planum tabulae sit normalis; iuncturae* C *vero axis* $c\gamma$ *in ipsum planum cadat et ad* BC *sit normalis; inuestigare vires extremitatibus*

tatibus A et D applicandas, quae has virgas in statu quocunque inflexo seruare valeant.

Solutio.

Positis $AB=a$, $BC=b$, et $CD=c$; sint hae virgae per inflexionem redactae in statum ABCD, qui ita repraesentetur, vt virgae AB et BC in plano tabulae iaceant, et BC rectae AG sit parallela, ita vt flexurae B axis Bb ad idem planum sit perpendicularis, flexurae C vero axis Cc in hoc plano ad BC ideoque etiam ad axem AG sit normalis, circa quem tertia virga CD sursum sit flexa, ex cuius termino D in planum demittatur perpendiculum DH, indeque ad AG normalis HG. Sit iam angulus inflexionis in iunctura $B=\zeta$, et elasticitatis momentum $=Ee\,\text{sin.}\,\zeta$, inflexionis autem in iunctura $C=\eta$ et elasticitatis momentum $=Ff\,\text{sin.}\,\eta$; eritque ob BC ipsi AG parallelam angulus $BAG=\zeta$, hinc $AE=a\,\text{cos.}\,\zeta$, et $BE=a\,\text{sin.}\,\zeta=CF=HG$, tum vero $EF=BC=b$. Porro habebitur $CH=c\,\text{cos.}\,\eta$ et $DH=c\,\text{sin.}\,\eta$. Iam vires ad hunc statum conseruandum requisitae sint in A ternae $AP=P$, $AQ=Q$, et $AR=R$ in D vero similiter ternae $Dp=p$, $Dq=q$, et $Dr=r$: vnde si corpus spectetur vt rigidum primo habemus:

1°. $P+p=0$; 2°. $Q+q=0$; 3°. $R+r=0$.

Deinde ob $AG=a\,\text{cos.}\,\zeta+b+c\,\text{cos.}\,\eta$; $GH=a\,\text{sin.}\,\zeta$, et $DH=c\,\text{sin.}\,\eta$ erit quoque ex problemate primo:

$4°\ ar\,\text{fin.}\zeta - cq\,\text{fin.}\eta = 0$; $5°.\ cp\,\text{fin.}\eta - (a\,\text{cof.}\zeta + b + c\,\text{cof.}\eta)r = 0$

$6°.\ (a\,\text{cof.}\zeta + b + c\,\text{cof.}\eta)q - ap\,\text{fin.}\zeta = 0$

quia pro viribus in A coordinatae x, y, z euanefcunt, vnde hae vires ita debent effe comparatae vt fit

$$p = (a\,\text{cof.}\zeta + b + c\,\text{cof.}\eta)s;\ q = as\,\text{fin.}\zeta \text{ et } r = cs\,\text{fin.}\eta.$$

et $P = -p$; $Q = -q$; et $R = -r$.

Nunc flexura in B confideretur, et pars BA a viribus fibi applicatis de ftatu naturali detorquetur momento $= P.\,BE - Q.\,AE$, quod elafticitati $Ee\,\text{fin.}\zeta$ aequale pofitum dat

$$-ap\,\text{fin.}\zeta + aq\,\text{cof.}\zeta = Ee\,\text{fin.}\zeta$$

feu $-(ab + ac\,\text{cof.}\eta)s = Ee$; hincque $s = \frac{-Ee}{a(b + c\,\text{cof.}\eta)}$.

Denique pro flexura C confideretur pars CD, cuius vires praebent momentum de ftatu naturali detorquens $= r.\,CH - p.\,DH$ momento elafticitatis $Ff.\,\text{fin.}\eta$ aequandum, vnde prodit

$$-c(a\,\text{cof.}\zeta + b)s = Ff \text{ feu } s = \frac{-Ff}{c(a\,\text{cof.}\zeta + b)}.$$

Ex quo patet inter ambas inflexiones certam relationem intercedere debere, vt a duabus tantum viribus in terminis A et D applicatis aequilibrium feruari poffit: oportet fcilicet fit $Eec(a\,\text{cof.}\zeta + b) = Ffa(b + c\,\text{cof.}\eta)$; ac tum vires ante affignatae huic ftatui inflexo conferuando erunt pares.

Coroll.

Coroll. 1.

30. Quia tres vires in A applicatae cum tribus in D applicatis in aequilibrio confiftere debent, vna vis illis aequiualens vni his aequiualenti aequalis et contraria effe debet; facile autem intelligitur ambas has vires in rectam AD extremitates iungentem cadere debere.

Coroll. 2.

31. Hoc etiam cum formulis inuentis egregie conuenit, fi enim extremitates A et D filo conftrictae concipiantur cuius tenfio fit $= T$, pofita recta $AD = k$, habebimus vires affumtas $P = \frac{a \cos. \zeta + b + c \cos. \eta}{k} T$; $Q = \frac{a \sin. \zeta}{k} T$, et $R = \frac{c \sin. \eta}{k} T$ ideoque $s = \frac{-T}{k}$.

Coroll. 3.

32. Hinc ergo interuallum $AD = k$ cum tenfione T in computum ducendo erit primo $a(b + c \cos. \eta) = \frac{Eek}{T}$ et $c(a \cos. \zeta + b) = \frac{Ffk}{T}$: deinde vero eft

$$kk = aa + bb + cc + 2ab \cos. \zeta + 2bc \cos. \eta + 2ac \cos. \zeta \cos. \eta.$$

Cum ergo fit $\cos. \zeta = \frac{Ffk}{Tac} - \frac{b}{a}$, et $\cos. \eta = \frac{Eek}{Tac} - \frac{b}{c}$, facta hac fubftitutione prodit:

$$kk = aa - bb + cc + \frac{2EFefkk}{TTac}$$

 vnde

vnde tenſio ad hanc inflexionem continendam fit

$$T = \frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}.$$

quae ergo per longitudinem fili AD et elaſticitates vtriusque iuncturae determinatur.

Coroll. 4.

33. Ex data ergo longitudine fili ſeu interuallo $AD = k$ cum vtraque elaſticitate non ſolum tenſio T ſed etiam inflexio in vtraque iunctura definitur, dummodo eueniat, vt anguli ζ et η prodeant reales; quod fieri nequit niſi eorum coſinus ſint vnitate minores.

Scholion.

34. Solutio autem hic data maxima incommoda atque adeo contradictionem inuoluere videtur. Cum enim nullum ſit dubium, quin pro qualibet longitudine fili ſeu interuallo AD certa tenſio T requiratur ad virgas in ſtatu inflexo continendas tamen ſi pro T valor inuentus ſubſtituatur, omnino euenire poteſt, vt alterutrius angulorum ζ et η coſinus prodeat vnitate maior, ideoque inflexio impoſſibilis. Conſideremus tantum caſum quo altera elaſticitas puta Ee ſit infinita, quod eodem redit, ac ſi iunctura in E rigeſceret, nullamque plane inflexionem admitteret. Hic ergo caſus vnicam flexuram in F habens conuenire deberet cum eo, qui ſupra §. 6. eſt euolutus, et pro cuius qualibet inflexi-

flexione tensio fili T est assignata. Verum si in forma hic inuenta ponatur $Ee=\infty$, tensio T prodit quoque infinita; hincque $\cos.\zeta = -\frac{b}{a}$ et $\cos.\eta = \infty$, quod manifesto est absurdum, praeterquam quod etiam angulus ζ fieret imaginarius si $b > a$. Hic certe aperta contradictio cernitur quae non solum huic casui, quo altera iunctura rigescit est propria, sed etiam vtraque flexura admissa saepenumero locum habere debet. Nullum tamen hic calculi vitium deprehenditur, ex quo maximi erit momenti in caussam huius discrepantiae a veritate diligentius inquirere.

Solutio difficultatis.

35. Analysin autem vniuersam accuratius contemplanti mox patebit solutionem inuentam non esse completam; sed in calculo quasdam solutiones, quae certis casibus solae locum habere possunt, per diuisionem aequationum esse sublatas. Scilicet cum sit $kk = aa + bb + cc + 2ab\cos.\zeta + 2bc\cos.\eta + 2ac\cos.\zeta\cos.\eta$ ob $s = \frac{-T}{k}$, binae reliquae aequationes reuera ita prodierunt expressae:

$$Ta(b + c\cos.\eta)\sin.\zeta = Eek\sin.\zeta \text{ et } Tc(a\cos.\zeta + b)\sin.\eta = Ffk\sin.\eta$$

ita vt illa etiam praebeat $\sin.\zeta = 0$ haec vero $\sin.\eta = 0$, quae quidem ambae solutiones simul consistere nequeunt, nisi sit $k = a + b + c$ hoc est in statu naturali. Verum quoties distantia $AD = k$

minor eſt quam $a+b+c$, toties euenire poteſt, vt ſit vel $\zeta=0$ vel $\eta=0$, hoc eſt vt altera flexura nullam vim patiatur. Quodſi nimirum ſit $\zeta=0$, et virgae AB et BC maneant in directum extenſae; altera aequatio praebet $Tc(a+b)=Ffk$, ideoque fit tenſio $T=\frac{Ffk}{c(a+b)}$; angulus autem η ex prima aequatione $kk=(a+b)^2+cc+2c(a+b)\cos.\eta$ definitur. Simili modo ſi $\eta=0$, quo caſu in F nulla inflexio oritur, fiet $T=\frac{Eek}{a(b+c)}$ et $kk=(b+c)^2+aa+2a(b+c)\cos.\zeta$, vnde angulus ζ cognoſcitur. Sicque ſemper pro quolibet interuallo $AD=k$ duae ſolutiones locum habent, quarum altera inflexione in E caret, altera in F, atque nunc demum intelligere licet, cur aequilibrium plane non detur, quod duplici inflexione gaudeat. Duplex nempe inflexio locum habere nequit, niſi ſub conditionibus in ſolutione contentis, quae huc redeunt, vt cum ſit $\cos.\zeta \lesssim 1$ et $\cos.\eta \lesssim 1$, fiat $Eek \lesssim Ta(b+c)$ et $Ffk \lesssim Tc(a+b)$; Quia vero tum eſt vti inuenimus $T=\frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$, hae conditiones dant $\frac{Ee}{Ff} \lesssim \frac{2a(b+c)^2}{c(kk+bb-aa-cc)}$ et $\frac{Ee}{Ff} > \frac{a(kk+bb-aa-cc)}{2c(a+b)^2}$, quorum quidem limitum ille manifeſto maior eſt hoc, cum ex comparatione inſtituta ſequatur

$$4ac(a+b)^2(b+c)^2 > ac(kk+bb-aa-cc)^2 \text{ ſeu}$$

$$2(a+b)(b+c) > kk+bb-aa-cc \text{ hincque}$$

$$(a+b+c)^2 > kk \text{ vti rei natura poſtulat.}$$

Niſi

Nisi ergo pro sumto interuallo $AD = k$ ratio elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ intra illos limites continеatur, tensione fili AD duplex inflexio produci nequit, vt aequilibrium oriatur.

Coroll. 1.

36. Hae ergo conditiones, ratione elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ vt data spectata, huc redeunt vt sit

$$1^\circ.\ kk < aa + cc - bb + \frac{2a(b+c)^2}{c} \cdot \frac{Ff}{Ee} \text{ et}$$

$$2^\circ.\ kk < aa + cc - bb + \frac{2c(a+b)^2}{a} \cdot \frac{Ee}{Ff},$$

quarum quantitatum minor si adhuc maior fuerit quam $(a+b+c)^2$, pro quouis interuallo $AD = k$, duplex inflexio in aequilibrium ingredi potest, sin autem ea minor fit quam $(a+b+c)^2$, tantum in maiore fili contractione tale aequilibrium obtineri potest.

Coroll. 2.

37. Quodsi tres virgae sint longitudine aequales, seu $b = c = a$ conditiones illae dant

$$1^\circ.\ kk < aa\left(1 + \frac{8Ff}{Ee}\right);\quad 2^\circ.\ kk < aa\left(1 + \frac{8Ee}{Ff}\right).$$

Quare si ambae elasticitates sint pares, vtraque dat $k < 3a$ et pro omni fili contractione tale aequilibrium dabitur, vnde fit tensio $T = \frac{Ee\,k\sqrt{2}}{a\sqrt{a}(kk - aa)}$ ob $Ff = Ee$, et inflexiones $\operatorname{cof.}\zeta = \frac{\sqrt{(kk - aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$ et $\operatorname{cof.}\eta = \frac{\sqrt{(kk - aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$, vt sit $\eta = \zeta$ seu $\operatorname{cof.}\frac{1}{2}\zeta = \operatorname{cof.}\frac{1}{2}\eta = \sqrt[4]{\frac{kk - aa}{8aa}}$, et $T = \frac{Eek}{aa(1 + \operatorname{cof.}\zeta)}$.

Coroll.

Coroll. 3.

38. Quodsi autem eodem casu $b = c = a$, ambae elasticitates sint inaequales puta $Ee = 2Ff$, seu $\frac{Ee}{Ff} = 2$, debet esse

$$1^{\circ}.\ kk < aa(1+4) \text{ et } 2^{\circ}.\ kk < aa(1+16)$$

vnde tale aequilibrium non datur nisi sit $k < a\sqrt{5}$. Tum autem erit tensio $T = \frac{2Ffk}{a\sqrt{(kk-aa)}}$ et inflexio vtraque

$$\text{cos}\,\zeta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{2a} - 1 \text{ et } \text{cos}\,\eta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a} - 1.$$

Vnde si $k = a\sqrt{5}$, inflexio in F etiamnunc est nulla et $\zeta = 90^{\circ}$ ac $T = \frac{Ff\sqrt{5}}{a}$ filo autem magis adstricto vt fiat $k = 2a$, tum prodit

$$\text{cos}\,\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \text{ et } \text{cos}\,\eta = \sqrt{3} - 1, \text{ atque } T = \frac{4Ff}{a\sqrt{3}}.$$

Coroll. 4.

39. Consideremus etiam casum, quo virgae sunt inaequales sitque $a = c$ et $b = 2a$, eritque

$$1^{\circ}.\ kk < aa\left(-2 + \frac{18.Ff}{Ee}\right) \text{ et } kk < aa\left(-2 + \frac{18.Ee}{Ff}\right).$$

Quare si fuerit vel $\frac{Ff}{Ee} < \frac{1}{9}$ vel $\frac{Ee}{Ff} < \frac{1}{9}$ nullo plane modo huiusmodi aequilibrium obtineri potest.

Scholion 1.

40. Euolutio huius casus vsu non carebit, cum inde pateat saepenumero pluribus modis aequilibrium existere posse. Quod cum eueniat in corpo-

corporibus gemina flexura praeditis, id multo magis contingere poterit, vbi adhuc plures flexurae admittuntur, quarum axes inter ſe non ſunt paralleli; haecque circumſtantia in doctrina aequilibrii ſine dubio maximi eſt momenti. Etſi autem haec praecepta tantum ad aequilibrium pertinere videntur, tamen etiam ad motum definiendum adhiberi poſſunt, dummodo iis ſequens principium ex natura motus petitum adiungatur.

Ex quotcunque partibus corpus fuerit compoſitum, vnicuique parti generaliſſime tribuatur motus quicunque, et inueſtigentur vires ad eius variationem producendam requiſitae: tum iſtae vires in contrarium vertantur, haeque cum viribus, quibus corpus actu ſollicitatur, in aequilibrio conſiſtere debent, ex quo praecepta pro aequilibrio definiendo tradita certum aequationum numerum ſuppeditabunt. Deinde vero motus vnicuique parti tributos ita temperari oportet, vt non ſolum ſingulae partes maneant contiguae, ſed etiam axes iuncturarum debitum ſitum conſeruent. Quae conditiones cum illis aequationibus coniunctae verum motum determinabunt.

Scholion 2.

41. Tametſi autem hac regula totum negotium conficitur, tamen in eius applicatione ſaepe inſignes adhuc difficultates obſtant, quo minus calculus expediri queat quod potiſſimum euenit, quando nec axes iuncturarum inter ſe ſunt paralleli,

nec motus, quasi in eodem plano fieret, considerari potest. Tum enim cuique parti motum quemcunque tribuendo, praeter motum progressiuum centri grauitatis in calculum induci debet motus gyratorius circa axem quemcunque per id centrum ductum; eumque adeo variabilem; cuiusmodi autem vires ad huiusmodi motum requirantur, nonnisi pluribus formulis non parum complicatis declarari potest. Deinde etiam in tali motu generalissime considerato non facile definitur, quomodo situs axium vtriusque iuncturae, quibus haec pars cum contiguis cohaeret, varietur, quod certe non sine taedioso calculo fieri potest. Ne igitur his tantis difficultatibus hic impediar, quas forte aliquando superare licebit, inuestigationes meas ad eum tantum casum adstringam, quo omnium iuncturarum axes inter se sunt paralleli, totusque motus ad idem planum reuocari patitur, quippe a quo casu semper est exordiendum, antequam difficiliores aggredi conueniat.

Problema 5.

42. *Si corpus quodcunque in eodem plano moueatur motu quomodocunque variato, inuenire vires ad motus variationem requisitas, earumque momentum respectu aliuscuiusque axis ad idem planum perpendicularis.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 10. Exhibeat tabula id planum, in quo motus fieri concipitur sitque M massa corporis, cuius centrum

trum inertiae iam verſetur in M puncto coordinatis orthogonalibus $IQ = x$ et $QM = y$ determinato; tum vero ſit Mmm momentum inertiae corporis reſpectu axis per ipſum centrum M tranſeuntis et ad planum normalis. Per punctum M ducatur recta EF ad iuncturas, quibus forte hoc corpus cum aliis cohaeret; etiamſi enim fieri poſſet, vt conſtitutis his iuncturis in E et F, recta EF non ſit tranſitura per corporis centrum inertiae, tamen ab hac irregularitate mentem abſtrahamus, quippe cuius ratio facillime in calculum induceretur. Ductis porro per M rectis Mm, $M\mu$ coordinatis x et y parallelis, vocetur angulus $FMm = \mu$. Cum iam quantitates x, y, et μ labente tempore, quod indicetur littera t varientur, quatenus haec variatio non eſt vniformis viribus opus eſt ad hanc motus mutationem in corpore efficiendam. Ac primo quidem pro motu centri inertiae requiruntur vires, altera in directione $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$, altera in directione $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$, ſumto temporis elemento dt conſtante; hic quidem eius quadratum dt^2 ſine coefficiente induco, quia notaſſe ſufficit, ſi tempora in minutis ſecundis exprimere velimus, loco dt^2 ſcribi oportere $2gdt^2$ denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, ſiquidem maſſae et vires ſollicitantes ad pondera reuocentur. Porro autem pro motu gyratorio corporis circa M requiritur virium momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$, in plagam Xx, Yy tendens, quo angulus $FM\mu$ magis

 ape-

aperiatur. Huius ergo momenti loco, si vtrinque capiantur interualla aequalia $MX = MY = m$, iis normaliter substitui possunt vires aequales et contrariae $Xx = Yy = \frac{Mmdd\mu}{2dt^2}$, quippe quae solum motum gyratorium afficiunt, dum in se spectatae se mutuo destruunt.

His viribus inuentis, quae ad motus variationem requiruntur videamus quantum momentum praebeant respectu puncti cuiusque V seu potius axis ad planum motus normalis ibi constituti, qui cum sit axi gyrationis in M considerato parallelus, a viribus Xx et Yy in eum exeretur par momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$ in eandem plagam $T\theta$ tendens. Tum vero si pro hoc puncto V statuamus coordinatas $IT = T$ et $TV = V$; a vi $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$ orietur in eandem plagam $T\theta$ momentum $= \frac{Mddx}{dt^2}(V-y)$, a vi autem $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$ momentum in plagam contrariam $Tt = \frac{Mddy}{dt^2}(T-x)$. Hinc ergo vniuersum momentum respectu axis V in plagam $T\theta$ erit $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx}{dt^2}(V-y) - \frac{Mddy}{dt^2}(T-x) = \frac{M}{dt^2}(mmdd\mu + xddy - yddx + Vddx - Tddy)$.

Coroll. 1.

43. Notari hic in genere meretur, quod virium momentum respectu axis M inuentum idem maneat pro omnibus aliis axibus illi parallelis; quod eatenus tantum locum habet, quatenus vires illae Xx

Xx et Yy ſunt aequales, et in contrarium directae. Quemadmodum enim earum momentum reſpectu axis M eſt $= Xx . MX + Yy . MY = Xx . XY$, ita etiam reſpectu axis F momentum in eandem plagam eſt $Xx . FX - Yy . FY = Xx . XY$, quod idem de omnibus aliis valet.

Coroll. 2.

44. Hactenus nulla ratio eſt habita punctorum E et F, vbi hoc corpus forte cum aliis ope flexurae eſt coniunctum; ita hic EF eſt recta quaecunque per M ducta, vt angulus $FMm = \mu$ in computum duci queat; quo quippe ratio motus gyratorii definitur.

Coroll. 3.

45. Quodſi ergo iuncturae E et F cum centro inertiae M non in directum iaceant, alterum tantum angulum FMm in computum expoſitum introduxiſſe ſufficit, quandoquidem alter EMl ab eo, angulo quodam conſtante differt, ita vt ſi ille fuerit $FMm = \mu$, hic futurus ſit $EMl = \mu \pm$ Conſt. et vtriusque differentiale quod in hunc calculum ingreditur, ſit idem.

Problema 6.

46. Si corpus ex tribus partibus AB, BC, CD in B et C flexura elaſtica iunctis compoſitum Tab. IV. Fig. 11.

 ſuper

ſuper plano vtcunque proiectum moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Vtriusque flexurae in B et C axis ſit ad planum tabulae perpendicularis vt ratio motus exigit; ſumta in plano directrice IR, in eam tum ex iuncturis B et C, tum ex vniuscuiusque partis centro inertiae L, M, N demittantur perpendicula, ac ponantur coordinatae:

$IP = x$; $PL = y$; $IQ = x'$; $QM = y'$; $IR = x''$; $RN = y''$

ſit porro maſſa partis $AB = L$, partis $BC = M$, partis $CD = N$ et momenta inertiae cuiusque partis reſpectu ſui centri inertiae pro parte $AB = Lll$, parte $BC = Mmm$, parte $CD = Nnn$.

Vocentur etiam anguli $BLl = \lambda$, $CMm = \mu$, $DNn = \nu$ vbi quidem aſſumo rectam BC per ipſum centrum inertiae M partis BC tranſire, et ponantur intervalla:

$$AL = a,\ LB = \alpha,\ BM = b,\ MC = \mathfrak{b},\ CN = c,\ ND = \gamma$$

eritque:

$$x' = x + \alpha \operatorname{coſ.}\lambda + b \operatorname{coſ.}\mu;\quad x'' = x' + \mathfrak{b} \operatorname{coſ.}\mu + c \operatorname{coſ.}\nu$$

$$y' = y + \alpha \operatorname{ſin.}\lambda + b \operatorname{ſin.}\mu;\quad y'' = y' + \mathfrak{b} \operatorname{ſin.}\mu + c \operatorname{ſin.}\nu.$$

His poſitis cuiusque partis motus progreſſiuus poſtulat vires vt vidimus ſequentes:

$$Ll = \frac{Lddx}{dt^2};\; Mm = \frac{Mddx'}{dt^2};\; Nn = \frac{Nddx''}{dt^2}$$
$$L\lambda = \frac{Lddy}{dt^2};\; M\mu = \frac{Mddy'}{dt^2};\; N\nu = \frac{Nddy''}{dt^2}.$$

Quoniam igitur corpus a nullis viribus extrinſecus ſollicitari aſſumitur, primo nanciſcimur has duas aequationes

1°. $Lddx + Mddx' + Nddx'' = 0$; ſeu $Lx + Mx' + Nx'' = At + \mathfrak{A}$

2°. $Lddy + Mddy' + Nddy'' = 0$; ſeu $Ly + My' + Ny'' = Bt + \mathfrak{B}$.

Porro neceſſe eſt vt virium requiſitarum omnium momenta reſpectu axis cuiusque, ideoque etiam pro axe I euaneſcant vbi $T = 0$ et $V = 0$; vnde ſequitur haec tertia aequatio:

3°. $Llldd\lambda + Mmmdd\mu + Nnndd\nu$
$+ L(xddy - yddx) + M(x'ddy' - y'ddx') + N(x''ddy'' - y''ddx'') = 0.$

Praeterea ad flexuram vtramque eſt reſpiciendum; cum igitur in B ſit inflexio facta per angulum $= \mu - \lambda$ in C vero per angulum $\nu - \mu$, ſiquidem in ſtatu naturali puncta A, B, C, D in directum iaceant, ponatur momentum elaſticitatis in $B = Ee$ ſin. $(\mu - \lambda)$ et in $C = Ff$ ſin. $(\nu - \mu)$.

Hinc pro flexura B ex altera totius corporis parte AB naſcitur virium requiſitarum momentum, ob $T = x + \alpha$ coſ. λ et $V = y + \alpha$ ſin. λ ita expreſſum

$\frac{Llldd\lambda}{dt^2}$

$\frac{Llld d\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}.\ \alpha\,\text{fin.}\,\lambda - \frac{Lddy}{dt^2}.\ \alpha\,\text{cof.}\,\lambda$, in plagam tQ tendens quod negatiue fumtum cum vi elaftica iuncturae quae in eandem plagam tendit in aequilibrio effe debet, ex quo obtinetur haec aequatio:

$$4^\circ.\ \frac{Llld d\lambda}{dt^2} + \frac{L\alpha(ddx\,\text{fin.}\,\lambda - ddy\,\text{cof.}\,\lambda)}{dt^2} = Ee\,\text{fin.}\,(\mu - \lambda).$$

Pro iunctura in C vero confiderandis viribus ex partibus AB et BC ortis nafcitur momentum in plagam cR tendens:

$$\frac{Llld d\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(Cc - y) - \frac{Lddy}{dt^2}\,Pc$$
$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}.\ Cm - \frac{Mddy'}{dt^2}\,Qc$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$5^\circ.\ \frac{Llld d\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(\alpha\,\text{fin.}\,\lambda + (b + \beta)\,\text{fin.}\,\mu) - \frac{Lddy}{dt^2}(\alpha\,\text{cof.}\,\lambda + (b+\beta)\,\text{cof.}\,\mu)$$
$$+ \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}\,\beta\,\text{fin.}\,\mu - \frac{Mddy'}{dt^2}.\ \beta\,\text{cof.}\,\mu = Ff\,\text{fin.}\,(\nu - \mu).$$

Ex his ergo quinque aequationibus ad quoduis tempus t definiri oportet has quinque quantitates x, y, λ, μ, ν, cum reliquae coordinatae x', y', x'', y'' ex his iam determinentur.

Coroll. 1.

42. Tertia aequatio per fe integrabilis praebet hoc integrale:

$$Llld\lambda + Mmmd\mu + Nnnd\nu + L(xdy - ydx) + M(x'dy' - y'dx')$$
$$+ N(x''dy'' - y''dx'') = Cdt$$

prima autem et fecunda geminam integrationem admiferunt vbi notandum eft, fi totius corporis centrum

trum inertiae quiescat, constantes A, B, et 𝔄, 𝔅 euanescere.

Coroll. 2.

48. Si aequatio quinta a tertia auferatur, remanebit:

$$\begin{aligned}Nnnddv &+ Lddy(x+\alpha\cos.\lambda+(b+\mathfrak{C})\cos.\mu)+Mddy'(x'+\mathfrak{C}\cos.\mu)\\ &-Lddx(y+\alpha\sin.\lambda+(b+\mathfrak{C})\sin.\mu)-Mddx'(y'+\mathfrak{C}\sin.\mu)\\ &+Nx''ddy''-Ny''ddx''\\ &= -Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)\end{aligned}$$

vbi si loco x, y, x'', y'' valores supra dati substituantur prodit

$$\begin{aligned}Nnnddv &+ (Lddy+Mddy'+Nddy'')(x+\mathfrak{C}\cos.\mu)+Ncddy'\cos.\nu\\ &-(Lddx+Mddx'+Nddx'')(y+\mathfrak{C}\sin.\mu)-Ncddx'\sin.\nu\\ &= -Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)\end{aligned}$$

quae ob aequat. n. 1 et 2 contrahitur in hanc

$$Nnnddv-Nc(ddx''\sin.\nu-ddy''\cos.\nu)=-Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)$$

quae eadem prodiisset statim, si elasticitatem flexurae in C cum momento virium ad alteram partem CD pertinentium comparauissem.

Coroll. 3.

49. Subtrahamus quartam aequationem a quinta, et fiet:

$$\begin{aligned}Mmmdd\mu &+ Lddx(b+\mathfrak{C})\sin.\mu+Mddx'.\mathfrak{C}\sin.\mu\\ &-Lddy(b+\mathfrak{C})\cos.\mu-Mddy'.\mathfrak{C}\cos.\mu\\ &= +Ffdt^2\sin.(\nu-\mu)-Eedt^2\sin.(\mu-\lambda)\end{aligned}$$

 sub-

substituantur hic isti valores:

$$Mddx' = -Lddx - Nddx'' \text{ et } Mddy' = -Lddy - Nddy''$$

ac resultabit

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx \sin.\mu - ddy \cos.\mu) = +Ffdt^2 \sin.(\nu-\mu)$$
$$-N\beta(ddx'' \sin.\mu - ddy'' \cos.\mu) - Eedt^2 \sin.(\mu-\lambda).$$

Coroll. 4.

50. Praeter aequationes ergo iam integratas, vel potius loco aequationum n°. 3. 4 et 5 has euolui conueniet:

$$Llldd\lambda + L\alpha(ddx \sin.\lambda - ddy \cos.\lambda) = Eedt^2 \sin.(\mu-\lambda)$$

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx \sin.\mu - ddy \cos.\mu) - N\beta(ddx'' \sin.\mu - ddy'' \cos.\mu) = +Ffdt^2 \sin.(\nu-\mu) - Eedt^2 \sin.(\mu-\lambda)$$

$$Nnndd\nu - Nc(ddx'' \sin.\nu - ddy'' \cos.\nu) = -Ffdt^2 \sin.(\nu-\mu)$$

ex quarum contemplatione insignem analogiam colligere licet.

Scholion.

51. Quodsi scilicet ponamus:

$\frac{Lddx}{dt^2} = p$; $\frac{Lddy}{dt^2} = q$; $\frac{Nddx''}{dt^2} = -p'$; $\frac{Nddy''}{dt^2} = -q'$ hincque

$$\frac{Mddx'}{dt^2} = p' - p \text{ et } \frac{Mddy'}{dt^2} = q' - q$$

tres postremae aequationes has induunt formas:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \alpha(p \sin.\lambda - q \cos.\lambda) = Ee \sin.(\mu-\lambda)$$

$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$

$$\frac{\mathfrak{M}mm\,dd\mu}{dt^2} + \mathfrak{b}(p\,\text{fin.}\,\mu - q\,\text{cof.}\,\mu) = + Ff\,\text{fin.}(\nu-\mu)$$
$$+ \mathfrak{E}(p'\,\text{fin.}\,\mu - q'\,\text{cof.}\,\mu) - Ee\,\text{fin.}(\mu-\lambda)$$
$$\frac{\mathfrak{N}nn\,dd\nu}{dt^2} + \mathfrak{c}(p'\,\text{fin.}\,\nu - q'\,\text{cof.}\,\nu) = - Ff\,\text{fin.}(\nu-\mu).$$

Ac fi in prioribus aequationibus hos valores affumtos fubftituamus, fequentes obtinebimus determinationes:

$$p = \frac{-L(M+N)\mathfrak{a}\,dd.\,\text{cof.}\,\lambda - L((M+N)\mathfrak{b} + N\mathfrak{E})\,dd.\,\text{cof.}\,\mu - LN\mathfrak{c}\,dd.\,\text{cof.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

$$q = \frac{-L(M+N)\mathfrak{a}\,dd.\,\text{fin.}\,\lambda - L((M+N)\mathfrak{b} + N\mathfrak{E})\,dd.\,\text{fin.}\,\mu - LN\mathfrak{c}\,dd.\,\text{fin.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

$$p' = \frac{-LN\mathfrak{a}\,dd.\,\text{cof.}\,\lambda - N(L\mathfrak{b} + (L+M)\mathfrak{E})\,dd.\,\text{cof.}\,\mu - N(L+M)\mathfrak{c}\,dd.\,\text{cof.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

$$q' = \frac{-LN\mathfrak{a}\,dd.\,\text{fin.}\,\lambda - N(L\mathfrak{b} + (L+M)\mathfrak{E})\,dd.\,\text{fin.}\,\mu - N(L+M)\mathfrak{c}\,dd.\,\text{fin.}\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

qui valores fi ibi fubftituantur, ternae tantum erunt variabiles λ, μ, ν quas ad datum tempus t definiri oportet, ad quod tres illae aequationes fufficiunt. Attendenti autem facile patebit quantitates p et q vires defignare quibus partes AB et BC in iuncturа B praeter elafticitatem cohaerent, feu quae eas a fe inuicem diuellere conantur.

Alia Solutio eiusdem Problematis.

52. Statim igitur vires, quibus partes in fe mutuo agunt praeter iuncturae cuiusque elafticitatem, in calculum introducere licet, vnde hoc commodi affequimur, vt motum cuiusque partis feorfim definire queamus neque amplius opus fit, prin-

 cipium

cipium aequilibrii in subsidium vocari. Factis ergo iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi, perpendendum est, binas partes contiguas ob nexum certis viribus in se mutuo agere, quibus efficitur, ne a se inuicem diuellantur. In iunctura igitur B sumamus partem AB ob nexum cum parte sequente BC sollicitari binis viribus $Bb' = p$ et $B\beta = q$ secundum directionem coordinatarum, atque ab iisdem viribus pars BC in plagas contrarias afficietur. Simili modo iunctura C exerat in partem BC vires $Cc' = p'$ et $C\gamma = q'$, quae ergo contrario modo agent in partem CD.

53. Iam singularum partium motum seorsim euoluamus, et cum pars prima AB sollicitetur viribus $Bb' = p$ et $B\beta = q$ praeter vim elasticitatis in iunctura B, quae motum progressiuum non afficit. Quare pro motu progressiuo huius partis habebimus:

$$\frac{L\,d\,d\,x}{d\,t^2} = p \quad \text{et} \quad \frac{L\,d\,d\,y}{d\,t^2} = q$$

vbi notandum est, si haec pars AB insuper extrinsecus a viribus quibuscunque sollicitaretur, earum rationem etiam in motus huius determinationem introduci oportere. Quod vero ad motum gyratorium huius partis AB circa suum centrum inertiae L attinet, quo angulum $BLl = \lambda$ augeri sumimus, euidens est virium p et q momentum ad hunc motum accelerandum esse $= \alpha q \operatorname{cos}. \lambda - \alpha p \operatorname{fin}. \lambda$. Elasticitatis autem in B momentum $Ee \operatorname{fin}. (\mu - \lambda)$ solum

motum

motum gyratorium afficit, huiusque quidem partis accelerando; dum eo sequentis BC motus gyratorius retardabitur, ex quo pro acceleratione motus gyratorii partis AB obtinemus $\frac{Llldd\lambda}{dt^2} = \alpha(q \operatorname{cof.} \lambda - p \operatorname{fin.} \lambda) + Ee \operatorname{fin.} (\mu - \lambda)$.

54. Secunda iam pars BC follicitatur in B a viribus $Bb' = -p$, $B\beta = -q$, in C vero a viribus $Cc' = p'$, $C\gamma = q'$ vnde pro motus progressiui acceleratione colligimus:

$$\frac{M\,ddx''}{dt^2} = p' - p \quad \text{et} \quad \frac{M\,ddy''}{dt^2} = q' - q.$$

Ex iisdem vero viribus nafcitur momentum pro motu gyratorio circa centrum inertiae M accelerando $= \beta q' \operatorname{cof.} \mu - \beta p' \operatorname{fin.} \mu + bq \operatorname{cof.} \mu - bp \operatorname{fin.} \mu$; praeterea vero etiam a momento elafticitatis in C, quod eft $Ff \operatorname{fin.} (\nu - \mu)$ acceleratur, a praecedente autem in B retardatur, vnde colligitur haec aequatio

$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} = (\beta q' + bq) \operatorname{cof.} \mu - (\beta p' + bp) \operatorname{fin.} \mu + Ff \operatorname{fin.} (\nu - \mu) - Ee \operatorname{fin.} (\mu - \lambda).$$

55. Tertia pars, quia eft vltima, tantum in C follicitatur a viribus $Cc' = -p'$ et $C\gamma = -q'$, tum vero etiam a momento elafticitatis in $C = Ff \operatorname{fin.} (\nu - \mu)$, quo motus tantum gyratorius retardatur. Pro motu ergo progreffiuo habebimus:

$$\frac{N\,ddx'''}{dt^2} = -p' \quad \text{et} \quad \frac{N\,ddy'''}{dt^2} = -q'$$

at quia ex his viribus nafcitur momentum ad motum gyratorium circa N accelerandum $= cq' \operatorname{cof.} \nu - cp' \operatorname{fin.} \nu$ ifta elicitur aequatio

$$\frac{Nnnddv}{dt^2} = c(q' \operatorname{cof.} \nu - p' \operatorname{fin.} \nu) - Ff \operatorname{fin.} (\nu - \mu).$$

56. Hae formulae egregie conueniunt cum ante inuentis, ex quo haec methodus foluendi eo maiore attentione videtur digna, quod non folum negotium multo commodius conficit, fed etiam ita eft comparata, vt nifi ante eius confenfum cum praecedente perfpexiffemus, vix audacter affeuerare effemus aufi, ab elafticitate iuncturarum motum centri inertiae fingularum partium prorfus non affici. Aequationibus autem ex his quafi nouis principiis erutis adiungi conuenit hafce

$$x' - x = \alpha \operatorname{cof.} \lambda + b \operatorname{cof.} \mu; \quad x'' - x' = \mathfrak{b} \operatorname{cof.} \mu + c \operatorname{cof.} \nu$$

$$y' - y = \alpha \operatorname{fin.} \lambda + b \operatorname{fin.} \mu; \quad y'' - y' = \mathfrak{b} \operatorname{fin.} \mu + c \operatorname{fin.} \nu.$$

Hincque fimul perfpicitur, fi plures tribus partes inter fe per flexuras elafticas effent coniunctae, atque adeo etiam fingulae inter mouendum a viribus quibuscunque follicitarentur, quomodo motus determinatio ad formulas analyticas perduci debeat.

Euolu-

Euolutio analytica formularum inuentarum.

57. Cum sit ex hoc lemmate:

$$\sin.\phi\, dd.\cos.\omega - \cos.\phi\, dd.\sin.\omega = -dd\omega \cos.(\omega-\phi) + d\omega^2 \sin.(\omega-\phi)$$

si ad contrahendas formulas supra §. 51. inuentas ponamus:

$$\frac{L(M+N)}{L+M+N} = P;\quad \frac{LN}{L+M+N} = Q \quad \text{et} \quad \frac{N(L+M)}{L+M+N} = R$$

aequationes illae motum continentes has induunt formas:

I. $$Llldd\lambda + P\alpha\alpha dd\lambda + (Pb+Q\beta)\alpha dd\mu \cos.(\mu-\lambda) - (Pb+Q\beta)\alpha d\mu^2 \sin.(\mu-\lambda) + Q\alpha c dd\nu \cos.(\nu-\lambda) - Q\alpha c d\nu^2 \sin.(\nu-\lambda) = Eedt^2 \sin(\mu-\lambda)$$

II. $$Mmmdd\mu + (Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)dd\mu + (Pb+Q\beta)\alpha dd\lambda \cos.(\mu-\lambda) + (Pb+Q\beta)\alpha d\lambda^2 \sin.(\mu-\lambda) + (Qb+R\beta)cdd\nu \cos.(\nu-\mu) - (Qb+R\beta)cd\nu^2 \sin.(\nu-\mu) = Ffdt^2 \sin.(\nu-\mu) - Eedt^2 \sin.(\mu-\lambda)$$

III. $$Nnndd\nu + Rccdd\nu + Q\alpha c dd\lambda \cos.(\nu-\lambda) + Q\alpha c d\lambda^2 \sin.(\nu-\lambda) + (Qb+R\beta)cdd\mu \cos.(\nu-\mu) + (Qb+R\beta)cd\mu^2 \sin.(\nu-\mu) = -Ffdt^2 \sin.(\nu-\mu)$$

quae

quae primum additae integrationem admittunt:

$$(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda+(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu+(Nnn+Rcc)\,d\nu$$
$$+(Pb+Q\beta)\alpha(d\lambda+d\mu)\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Q\alpha c(d\lambda+d\nu)\operatorname{cof.}(\nu-\lambda)$$
$$+(Qb+R\beta)c(d\mu+d\nu)\operatorname{cof.}(\nu-\mu)=C\,dt.$$

Tum fi prima per $d\lambda$ fecunda per $d\mu$ et tertia per $d\nu$ multiplicetur fumma itidem fit integrabilis datque:

$$\tfrac{1}{2}(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda^2+\tfrac{1}{2}(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu^2+\tfrac{1}{2}(Nnn+Rcc)d\nu^2$$
$$+(Pb+Q\beta)\alpha d\lambda d\mu\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Q\alpha c d\lambda d\nu\operatorname{cof.}(\nu-\lambda)+(Qb+R\beta)c d\mu d\nu\operatorname{cof.}(\nu-\mu)$$
$$=Eedt^2\operatorname{cof.}(\mu-\lambda)+Ffdt^2\operatorname{cof.}(\nu-\mu)+Ddt^2.$$

SECTIO