



1769

Investigatio accuratior phaenomenorum quae in motu terrae diurno a viribus coelestibus produce possunt

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Investigatio accuratior phaenomenorum quae in motu terrae diurno a viribus coelestibus produce possunt" (1769). *Euler Archive - All Works*. 373.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/373>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

INVESTIGATIO ACCVRATIONIS
 PHAENOMENORVM
 QVAE IN MOTV TERRAE DIVRNO A
 VIRIBVS COELESTIBVS PRODVCI
 POSSVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Motum terrae diurnum a viribus Solis et Lunae ita affici vt inde aequinoxiorum praecessio et axis terrestris nutatio exoriat. *Newtonus* iam erat suspicatus, *Acutiss.* vero *Alembertus* dilucide demonstravit. Quod Specimen sagacitatis humanae eo pluris est aestimandum, quod illo tempore subsidia dynamica, quibus haec inuestigatio innititur, nequam adhuc satis erant euoluta, ex quo summas et grauissimas calculi difficultates superari erat necesse. Principium autem harum perturbationum in eo est situm, quod telluris corpus a figura sphaerica recedit, ac diameter aequatoris aliquantum superat axis quantitatem; quodsi enim eius figura perfecte esset sphaerica, motus vertiginis ipsi semel impressus perpetuo eadem celeritate continuaretur, axisque eandem directionem conseruaret; neque vires externae vllam immutationem in hoc motu efficere valerent. Statim autem ac terrae figura a sphaerica discrepat,

ex

ex viribus Solis ac Lunae nascitur momentum ad axem de situ suo deturbandum tendens, quatenus quidem hae vires oblique in axem agunt. Quocirca in hac inuestigatione, postquam vera terrae figura esset constituta, ex lege attractionis vires Solis et Lunae singula terrae elementa sollicitantes definiri, indeque momenta positionem axis afficientia colligi oportuit; tum vero summa adhuc difficultas in effectu determinando residebat, quem illa virium momenta in situm axis exercere debeant, quod sine profundissima cum Dynamicae tum Analyseos scientia nullo modo praestari poterat.

Cum autem non ita pridem haec dynamicae pars maxime abstrusa, quae in motu corporum gyriorio circa axem mobilem definiendo est occupata, a me sit satis prospero successu ita pertractata, ut in genere corporum quacunque figura praeditorum motus dum a viribus quibuscunque sollicitantur, ad formulas analyticas satis simplices reduci queat; haud incongruum fore arbitror, si ope huius methodi omnes inaequalitates, quibus motus terrae diurnus perturbatur, ita accuratius determinauero, ut non solum verus motus, quo terra cietur, inde innotescat, sed etiam inde aliorum motuum, qui in terram cadere potuissent, siquidem initio aliter fuisset impulsus, indolem perspicere liceat. Quae igitur de hoc argumento sum meditatus, sequentibus propositionibus sum complexurus.

I. Quaecunque figura terra sit praedita ad praefens institutum non opus est veram compositionis rationem, qua singulae partes inter se sunt distributae et ordinatae, nosse; verum sufficit vt ex principiis, quae circa motum corporum rigidorum in genere stabiliui, terni axes principales se mutuo in centro grauitatis seu potius inertiae normaliter decussantes notentur, momentaque inertiae respectu singulorum explorata habeantur. Hinc posita terrae massa tota $= M$, si ex centro inertiae I educti sint axes principales IA, IB, IC , eorum respectu momenta inertiae his formulis Maa, Mbb, Mcc designabo. His enim tribus momentis inertiae vniuersae internae structurae ratio, quatenus quidem inde motus determinatio pendet, continetur, ita vt iam taediosissimis illis calculis, quos alias figura et structura terrae exigere solet, supersedere queamus.

II. Quodsi haec tria momenta inertiae inter se essent aequalia, omnes plane axes per centrum terrae ducti pari gauderent proprietate, omnesque aequae pro principalibus haberi possent, ita vt terra, circa quemcunque axem initio gyron coepisset, hunc motum perpetuo sine vlla axis et celeritatis alteratione esset prosecutura, neque etiam a viribus peregrinis vlla perturbatio esset pertimescenda. Perinde scilicet terra se esset habitura, ac si eius figura perfecte esset sphaerica, omnisque materia aequabiliter circa centrum distributa; vbi imprimis est notandum

tandum hanc insignem proprietatem etiam in figuras maxime irregulares competere posse, dummodo terna illa momenta inertiae fuerint inter se aequalia, hoc autem in figuris maxime irregularibus euenire posse minime dubitare licet.

III. Eatenus ergo tantum motus terrae diurnus perturbationes pati potest, quatenus terna eius momenta inertiae principalia inter se non sunt aequalia. Verum etiam si terra initio fuisset sphaerica statim atque circa certum axem gyrari coepisset, ob fluiditatem circa aequatorem intumescere debuisset, unde respectu axis gyrationis momentum inertiae incrementum accepisset. In hoc autem negotio fluiditatis rationem minime habere licet, cum principia dynamica nequiquam adhuc ad hunc scopum sint euoluta; ob quem defectum utique cogimur terram tanquam corpus solidum spectare, cuius figura nullis viribus sollicitantibus cedere queat. Quamobrem quae de eius motu diurno sum traditurus, ita sunt accipienda, ut ob maris mobilitatem, qua actioni virium quodammodo obsequitur, aliquam correctionem admittere intelligantur.


IV. Terram igitur tanquam eiusmodi corpus solidum considero, cuius trium axium principalium vnus puta IA cum eius axe proprie sic dicto, qui ab altero polo ad alterum per centrum porrigitur conueniat, et cuius respectu momentum inertiae sit $=Ma a$. Bini ergo reliqui axes principales in
C c 3 ipsum

ipsum aequatorem cadent, et quoniam omnium meridianorum par esse ratio videtur, momenta inertiae eorum respectu tanquam inter se aequalia spectari poterunt, ita ut sit $cc = bb$. Hoc autem admissio omnes diametri aequatoris axium principalium proprietate aequae erunt praediti ita ut terra circa unumquemque eorum liberè gyrari possit. Vnde cum puncta B et C in aequatore pro lubitu accipi queant, dum 90° a se invicem distent, alterum B in eo meridiano, qui pro primo habetur, assumere licebit; ita in superficie terrae arcus AB primum meridianorum designabit.

V. Quoniam motus terrae diurnus potissimum ab eo motu qui terrae initio fuerit impressus, pendet, quanta varietas inde proficisci potuerit, ante omnia perpendi conueniet, ac primo quidem mentem ab actione Solis et Lunae abstrahendo. Iam satis perspicuum est si terrae in rerum principio motus gyratorius vel circa axem vel quempiam diametrum aequatoris fuisset impressus, hunc motum ita perpetuo vniformiter duraturum fuisse, ut axis gyrationis constanter idem coeli punctum respexisset. Sin autem terra circa aliam quamcunque lineam per centrum transeuntem gyrari coepisset, tum motus quidem gyratorius vniformis mansisset, sed ipse axis gyratorius interea circa quodpiam coeli punctum per circulum quendam minorem vniformiter fuisset circumlatus, quemadmodum alibi de huius-

huiusmodi corporibus, quae momentorum inertiae principalium bina habent inter se aequalia, suscitatus demonstrari et hic nouo modo sum demonstraturus.

VI. Statim autem ac vires perturbatrices siue Solis siue Lunae accedunt, utrumque motus genus ita afficitur, ut vel gyrationis celeritas immutetur, vel axis, circa quem terra gyratur motu magis irregulari feratur. Ad hanc perturbationem inuestigandam quaestionem latiori sensu acceptam tractari conuenit, ut solutio etiam ad eos casus pateat, quibus forte terrae ab initio motus circa axem a principalibus diuersum fuerit impressus. Cum enim a viribus sollicitantibus axis gyrationis de situ suo deturbetur, omnino necesse est, ut etiam si hae vires abessent gyratio circa axem mobilem definiri queat. Tum vero etiam ad scientiae incrementum non parum conducere videtur, si etiam indolem eorum motuum, qui in terram cadere possent, etiam si re vera in ea non insint assignare valeamus. Quocirca formulas generales ita sum instructurus, ut etiam ad casum quo bina momenta inertiae principalia non forent aequalia accommodari queant.

VII. Cum ob vires perturbatrices omnia phaenomena ad coelum immotum referri oporteat, sit circulus $\gamma \delta$  ecliptica, et E eius polus; et quo inuestigatio aequae ad lunam ac solem pateat, sit O δ R orbita astri perturbantis eclipticam secans in nodo ascendente δ , et nunc quidem hoc astrum
hae-

Tab. II.
Fig. 3.

haereat in S , per quod punctum ducto latitudinis circulo ESQ erit $\angle Q$ longitudo et QS latitudo astri, tum vero $\angle O$ longitudo nodi. Ponamus ergo haec elementa $\angle O = \omega$, ang. $\angle O = \varepsilon$, arcus $\angle Q = q$ et $ES = p$

atque ex trigonometria constat fore $\cotang. p = \tan. \varepsilon \sin. (q - \omega)$. Haec proprie ad lunam sunt accommodata, pro sole autem inclinatio seu angulus $\angle O = \varepsilon$ evanescens est sumendus, et ob latitudinem nullam arcus $ES = p$ constanter manet 90° .

VIII. Pro actionis autem, quam astrum S in terram exerit, quantitate, fit v eius distantia a centro terrae at e ea distantia in qua astri vis attractrix ipsi gravitati naturali est aequalis ita vt eius vis centrum terrae sollicitans sit ad gravitatem vt $\frac{e}{v^2}$ ad 1. Porro autem fit g altitudo, ex qua grauia in terrae superficie libere delabuntur tempore vnius minuti secundi, quibus positis quantitas actionis astri in terram hac formula $\frac{2g e^2}{v^3}$ continetur, quam breuitatis gratia littera $V = \frac{2g e^2}{v^3}$ denotabo. Vbi obseruandum est si corpus ab astro attractum ad distantiam $= v$ in circulo reuolueretur, id singulis minutis secundis angulum esse percursum, qui fit $= V \frac{2g e^2}{v^3} = V \cdot V$. Ex quo si astrum sit sol $V \cdot V$ denotat motum terrae medium vni minuto secundo conuenientem; si autem astrum fuerit luna, ac massa lunae aequalis statuatur massae telluris, fore $V \cdot V$ motum medium lunae vni minuto secundo

do conuenientem. Quoties autem massa lunae minor fuerit massa terrae, motum illum medium in ratione subduplicata diminui oportet; unde ex cognito motu medio valor litterae V facile definitur.

IX. His praemissis teneat iam elapso tempore t in minutis secundis exprimendo terra situm in figura repraesentatum, vt axis eius seu polus boreus sit in A, primus meridianus AB, et BC quadrans aequatoris, vbi B et C spectantur tanquam bini reliqui axes principales terrae. Ponantur ergo arcus et anguli statum terrae definientes:

1°. Distantia poli A a polo eclipticae E seu $EA = l$

2°. Longitudo poli A seu angulus $\angle E A = \psi$

3°. Situs primi meridiani seu angulus $E A B = \phi$.

Hincque colligantur sequentes arcus:

$SA = \zeta$, $SB = \eta$ et $SC = \theta$

qui per trigonometriam sphaericam ita definiuntur vt sit:

$$\cos. \zeta = \sin. p (\sin. l \cos. (q - \psi) + \tan. \epsilon \cos. l \sin. (q - \omega))$$

$$\cos. \eta = \sin. p (-\sin. \phi \sin. (q - \psi) - \cos. l \cos. \phi \cos. (q - \psi) + \tan. \epsilon \sin. l \cos. \phi \sin. (q - \omega))$$

$$\cos. \theta = \sin. p (-\cos. \phi \sin. (q - \psi) + \cos. l \sin. \phi \cos. (q - \psi) - \tan. \epsilon \sin. l \sin. \phi \sin. (q - \omega))$$

vbi notetur fore $\cos. \zeta^2 + \cos. \eta^2 + \cos. \theta^2 = 1$.

X. Nunc cum respectu ternorum axium principalium A, B, C momenta inertiae terrae sint $Ma a$, $Mb b$, $Mc c$ quaerantur primo tres quantitates x, y, z ex his aequationibus:

$$dx + \frac{cc - bb}{a a'} dt (yz - 3 V \cos. \eta \cos. \theta) = 0$$

$$dy + \frac{aa - cc}{b b'} dt (xz - 3 V \cos. \zeta \cos. \theta) = 0$$

$$dz + \frac{bb - aa}{c c'} dt (xy - 3 V \cos. \zeta \cos. \eta) = 0$$

tum vero reliqua elementa situm terrae determinantia ex his aequationibus colligi oportet:

$$dl = -dt (y \sin. \Phi + z \cos. \Phi)$$

$$d\Phi = x dt - \frac{dt (y \cos. \Phi - z \sin. \Phi)}{\tan. l}$$

$$d\Psi = \frac{dt (y \cos. \Phi - z \sin. \Phi)}{\sin. l}$$

quarum aequationum ratio ex iis, quae de motu corporum gyratorio circa axem mobilem alibi tradidi, haud difficulter deducitur.

XI. Quoniam vero momenta inertiae pro axibus B et C aequalia statuimus ut sit $cc = bb$, primo quidem ob $dx = 0$ habebimus $x = f$ quantitati nempe constanti; tum vero ponendo breuitatis gratia $\frac{aa - bb}{bb} = \alpha$ seu $\frac{aa}{bb} = 1 + \alpha$, quinque sequentes aequationes resolui oportet:

$$dy + a dt (fz - 3 V \cos. \zeta \cos. \theta) = 0$$

$$dz - a dt (fy - 3 V \cos. \zeta \cos. \eta) = 0$$

$$dl = -dt (y \sin. \Phi + z \cos. \Phi)$$

$d\Phi$

$$d\Phi = fdt - \frac{dt(y \cos. \Phi - z \sin. \Phi)}{\tan. l}$$

$$d\psi = \frac{dt(y \cos. \Phi - z \sin. \Phi)}{\sin. l}$$

ex quibus binis posterioribus eliminatis y et z colligitur:

$$d\Phi + d\psi \cos. l = fdt$$

ita vt formula $d\Phi + d\psi \cos. l$ sit temporis elemento proportionalis.

XII. Quo nunc has aequationes distinctius euoluam, a simplicioribus ad difficiliora ita ordine ascendam, vt primo vires perturbatrices tanquam euanescentes spectans motum terrae diurnum, quomodo tum se effet habiturus, definiam, deinde astrum perturbans in ipsa ecliptica motu vniformi circa terram reuolui assumam, vt eandem perpetuo seruet distantiam v , et V sit quantitas constans. Deinde astrum etiam vniformiter ad distantiam constantem sed in orbita ad eclipticam parumper inclinata circumferri ponam. Denique vero astro motum inaequabilem secundum leges *Keplerianas* tribuam, orbitam vero eius in ipsam eclipticam incidentem considerabo; qui bini posteriores effectus coniuncti ad motum lunae verum accommodari possunt.

I. Euolutio casus, quo vires perturbatrices euanescent.

XIII. Posito ergo pro hoc casu $V=0$, binae priores aequationes fiunt:

$D d z$

$d y$

$$dy + afzdt = 0 \quad \text{et} \quad dz - afydt = 0$$

vnde colligitur $ydy + zdz = 0$, et $yy + zz = bb$, ad quam aequationem cum reliquis commodissime construendam, notari conuenit, in coelo dari punctum fixum L, circa quod polus A vniformiter gyretur, dum interea terra circa hunc polum etiam vniformiter reuoluitur. Hoc ergo punctum L in calculum introducentes ponamus:

$\angle EL = \gamma$, $EL = m$, $LA = n$, existente $EA = l$ tum vero etiam angulos in triangulo sphaerico EAL

$$\angle LA = \lambda, \angle AL = \mu \quad \text{et} \quad \angle EL = \nu$$

vt sint elementa γ , m et n constantia, angulus vero $\angle LA = \lambda$ tempori proportionalis. Vocetur porro etiam angulus $\angle AB = \sigma$, eritque

$$\angle EA = \psi = \gamma - \nu \quad \text{et} \quad \angle AB = \phi = \sigma - \mu.$$

XIV. His positis ex trigonometricis habetur:

$$\cos. l = \cos. m \cos. n + \sin. m \sin. n \cos. \lambda$$

vnde ob m et n constantes differentiatio praebet:

$$d \sin. l = d \lambda \sin. m \sin. n \sin. \lambda$$

et quia $\frac{\sin. \lambda}{\sin. l} = \frac{\sin. \mu}{\sin. m} = \frac{\sin. \nu}{\sin. n}$ erit

$$dl = d \lambda \sin. n \sin. \mu = d \lambda \sin. m \sin. \nu.$$

Deinde cum sit simili modo:

$$\cos. m = \cos. l \cos. n + \sin. l \sin. n \cos. \mu \quad \text{et}$$

$$\cos. n = \cos. l \cos. m + \sin. l \sin. m \cos. \nu$$

erit

erit quoque differentiando:

$$0 = -dl \sin. l \cos. n + d \cos. l \sin. n \cos. \mu - d \mu \sin. l \sin. n \sin. \mu$$

$$0 = -dl \sin. l \cos. m + d \cos. l \sin. m \cos. \nu - d \nu \sin. l \sin. m \sin. \nu$$

vnde colligitur:

$$d \mu = \frac{dl(\cos. l \sin. n \cos. \mu - \sin. l \cos. n)}{\sin. l \sin. n \sin. \mu} = \frac{d \lambda}{\sin. l} (\cos. l \sin. n \cos. \mu - \sin. l \cos. n)$$

$$d \nu = \frac{dl(\cos. l \sin. m \cos. \nu - \sin. l \cos. m)}{\sin. l \sin. m \sin. \nu} = \frac{d \lambda}{\sin. l} (\cos. l \sin. m \cos. \nu - \sin. l \cos. m)$$

XV. Ex trigonometria iam recordemur esse:

$$\cos. \mu = \frac{\sin. n \cos. m - \sin. m \cos. n \cos. \lambda}{\sin. l}; \cos. \nu = \frac{\sin. m \cos. n - \sin. n \cos. m \cos. \lambda}{\sin. l}$$

similique modo etiam

$$\cos. \mu = \frac{\sin. l \cos. m - \cos. l \sin. m \cos. \nu}{\sin. n}; \cos. \nu = \frac{\sin. l \cos. n - \cos. l \sin. n \cos. \mu}{\sin. m}$$

vnde concinnius posteriora differentialia ita definiuntur:

$$d \mu = -\frac{d \lambda \sin. m \cos. \nu}{\sin. l} \text{ et } d \nu = -\frac{d \lambda \sin. n \cos. \mu}{\sin. l}$$

ficque pro elementis prius adhibitis habebimus:

$$d \psi = \frac{d \lambda \sin. n \cos. \mu}{\sin. l} \text{ et } d \phi = d \sigma + \frac{d \lambda \sin. m \cos. \nu}{\sin. l}$$

vbi loco $\cos. \mu$ et $\cos. \nu$ priores valores scribi conueniet, vt omnia ad elementa m, n et λ reuocentur:

XVI. Nunc igitur statuamus:

$$y = b \cos. \sigma \text{ et } z = -b \sin. \sigma$$

qui valores in prioribus aequationibus substituti dant:

$$-b d \sigma \sin. \sigma - a f b d t \sin. \sigma = 0 \text{ seu } d \sigma = -a f d t.$$

Tum vero ob

$$y \sin. \Phi + z \cos. \Phi = b \sin. (\Phi - \sigma) = -b \sin. \mu \text{ et}$$

$$y \cos. \Phi - z \sin. \Phi = b \cos. (\Phi - \sigma) = b \cos. \mu$$

ternae posteriores aequationes has induent formas :

$$dl = d\lambda \sin. n \sin. \mu = b dt \sin. \mu, \text{ seu } d\lambda = \frac{b dt}{\sin. n}$$

$$d\Phi = -\alpha f dt + \frac{d\lambda \sin. m \cos. \nu}{\sin. l} = f dt - \frac{b dt \cos. \mu}{\tan. l}$$

$$d\psi = \frac{b dt \cos. \mu}{\sin. l} = \frac{b dt (\sin. n \cos. m - \sin. m \cos. n \cos. \lambda)}{\sin. l^2}$$

Antepenultima autem ob $d\lambda = \frac{b dt}{\sin. n}$ per dt diuifa dat

$$(1 + \alpha) f = \frac{b \sin. m \cos. \nu}{\sin. l \sin. n} + \frac{b \cos. l \cos. \mu}{\sin. l^2} = \frac{b (\cos. l \cos. \mu \sin. n + \sin. m \cos. \nu)}{\sin. l \sin. n}$$

$$\text{Verum cum sit } \cos. \mu = \frac{\cos. m - \cos. l \cos. n}{\sin. l \sin. n} \text{ et } \cos. \nu = \frac{\cos. n - \cos. l \cos. m}{\sin. l \sin. m}$$

obtinetur :

$$(1 + \alpha) f = \frac{b (\cos. n - \cos. l^2 \cos. n)}{\sin. l^2 \sin. n} = \frac{b \cos. n}{\sin. n}$$

ita vt etiam quantitas $b = (1 + \alpha) f \tan. n$ determinetur, sitque adeo constans, vt rei natura postulat.

XVII. Ex dato ergo coeli puncto L, ad quod motus terrae est referendus, ab eoque axis distantia $LA = n$, motus terrae ita se habebit, vt primo axis A circa illud punctum L vniformiter reuoluatur celeritate angulari $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{b}{\sin. n} = \frac{(1 + \alpha) f}{\cos. n}$, quippe qua singulis minutis secundis angulus $= \frac{(1 + \alpha) f}{\cos. n}$ absoluitur ita vt hoc motu angulus ELA continuo increseat. Tum vero interea ipsa terra circa axem A gyrabitur

tur celeritate angulari $\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha f$, qua angulus LAB continuo imminuetur; vbi notandum, quantitatem f a motu terrae primum impresso perinde atque arcum n pendere, litteram α vero rationem compositionis terrae inuoluere. In motu autem quem terra reuera est initio adepta, arcus $LA = n$ euanescit, sicque sine viribus perturbantibus, ipse arcus LA cum polo A fixus maneret, totusque motus ex angulo $LAB = \Phi$ ita definiretur, vt ob $b = 0$ esset celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt} = f$, vnde patet quantitatem f exprimere celeritatem angularem motus terrae diurni.

XVIII. Si terra eiusmodi motum vertiginis accepisset vt arcus $LA = n$ valorem haberet notabilem, polus A maiori celeritate circa coeli punctum L reuolueretur, siquidem constans f eundem retineret valorem, ipsa vero terra lentissime interea circa axem A in plagam contrariam conuerteretur, ob fractionem α minimam, ita vt hoc motu neglecto terra circa axem per coeli punctum L transeuntem reuolui videretur, spatio saltem temporis non nimis magno tempore autem labente quia sensim alia terrae puncta coeli punctum L subeunt, terra alium axem gyrationis recipere videbitur, ex quo etiam aequator et locorum latitudines mutationem patientur, sicque tam coeli quam terrae phaenomena ingentibus perturbationibus forent obnoxia, etiam si nullae vires perturbatrices externae accederent.

XIX. Hoc casu si pro quouis tempore t fitum terrae respectu eclipticae definire velimus; primum ad hoc tempus angulum $\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{\cos n} t + \text{Const.}$ colligi oportet, pro quo facile tabula conderetur. Tum vero hoc angulo inuento statim habebitur axis A a polo eclipticae E distantia $EA = l$ ope formulae $\cos l = \cos m \cos n + \sin m \sin n \cos \lambda$ vbi m et n sunt certi anguli dati. Porro pro situ arcus EA quaeratur angulus ν vt fit $\cotang. \nu = \frac{\sin m \cos n - \cos m \sin n \cos \lambda}{\sin n \sin \lambda}$, eritque angulus $\angle E A = \psi = \gamma - \nu$, denotante γ angulum quendam constantem. Denique pro situ primi meridiani AB seu angulo $\angle A B = \phi = \sigma - \mu$, primo angulus σ temporis proportionalis ex formula $\sigma = \text{Const.} - \alpha f t$ facile colligitur, tum vero angulus μ ex hac formula capiat:ur:

$$\cotang. \mu = \frac{\sin n \cos m - \cos n \sin m \cos \lambda}{\sin m \sin \lambda}$$

ficque status terrae ad tempus propositum erit determinatus omnem autem hunc calculum commode tabulis complecti liceret. Hoc casu expedito ad vires perturbantes progredior, quae tractatio praeparationem postulat, reliquis casibus quos suscepi praemittendam.

Praeparatio ad effectus virium perturbantium euoluendos.

XX. Quoniam hic effectus est minimus, ex casu praecedente facile intelligitur, quomodo hanc tracta-

tractationem aptissime suscipi conueniat. Vniuersus scilicet motus quoque ad coeli quoddam punctum L referatur, quod autem non amplius tanquam fixum spectetur, sed ita pro variabili habeatur, vt tam angulus $\angle E L = \gamma$ quam arcus $E L = m$ et $L A = n$ a viribus perturbantibus parumper immutari censeantur, neque etiam anguli $E L A = \lambda$ et $L A B = \sigma$ incrementa tempori exacte proportionalia capere sunt censenda; quamobrem quoque quantitas b tanquam variabilis erit tractanda. Ponamus deinde vt supra; $E A = l$, angulos $E A L = \mu$, $A E L = \nu$ tum vero angulos $\angle E A B = \psi$ et $E A B = \phi$ vt sit $\psi = \gamma - \nu$ et $\phi = \sigma - \mu$.

XXI. Statuamus ergo etiam nunc quoque

$$y = b \cos. \sigma \quad \text{et} \quad z = -b \sin. \sigma$$

et quia quantitatem b quoque vt variabilem spectamus, binæ priores aequationes differentiales fient:

$$\begin{aligned} db \cos. \sigma - b d\sigma \sin. \sigma - \alpha f b d t \sin. \sigma - 3 \alpha V d t \cos. \zeta \cos. \theta &= 0 \\ -db \sin. \sigma - b d\sigma \cos. \sigma - \alpha f b d t \cos. \sigma + 3 \alpha V d t \cos. \zeta \cos. \eta &= 0 \end{aligned}$$

unde per combinationem elicimus:

$$\begin{aligned} -b d\sigma - \alpha f b d t - 3 \alpha V d t \cos. \zeta (\sin. \sigma \cos. \theta - \cos. \sigma \cos. \eta) &= 0 \\ db - 3 \alpha V d t \cos. \zeta (\cos. \sigma \cos. \theta + \sin. \sigma \cos. \eta) &= 0. \end{aligned}$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\cos. \sigma \cos. \eta - \sin. \sigma \cos. \theta = P \quad \text{et} \quad \cos. \sigma \cos. \theta + \sin. \sigma \cos. \eta = Q$$

vt habeamus has aequationes:

$$d\sigma = -\alpha f d t + \frac{3 \alpha V P d t \cos. \zeta}{b} \quad \text{et} \quad db = 3 \alpha V Q d t \cos. \zeta.$$

218 DE PHAEN. MOTVS TERRAE DIVRNI

Verum ex formulis supra §. IX. ob $\Phi = \sigma - \mu$ seu $\sigma - \Phi = \mu$ colligimus :

$$P = \sin.p(\sin.\mu \sin.(q-\psi) - \cos.l \cos.\mu \cos.(q-\psi) + \text{tang.} \varepsilon \sin.l \cos.\mu \sin.(q-\omega))$$

$$Q = \sin.p(-\cos.\mu \sin.(q-\psi) - \cos.l \sin.\mu \cos.(q-\psi) + \text{tang.} \varepsilon \sin.l \sin.\mu \sin.(q-\omega))$$

$$\text{existente } \cos.Z = \sin.p(\sin.l \cos.(q-\psi) + \text{tang.} \varepsilon \cos.l \sin.(q-\omega)).$$

Reliquae vero aequationes erunt :

$$dl = b dt \sin.\mu$$

$$d\Phi = d\sigma - d\mu = f dt - \frac{b dt \cos.\mu}{\text{tang.} l}$$

$$d\psi = d\gamma - d\nu = \frac{b dt \cos.\mu}{\sin.l}$$

XXII. Haec iam differentialia dl , $d\mu$ et $d\nu$ ad differentialia $d\lambda$, dm et dn reduci oportet ; ac primo quidem cum fit $\cos.l = \cos.m \cos.n + \sin.m \sin.n \cos.\lambda$ erit differentiando :

$$d\sin.l = dm \sin.m \cos.n + dn \cos.m \sin.n + d\lambda \sin.m \sin.n \sin.\lambda - dm \cos.m \sin.n \cos.\lambda - dn \sin.m \cos.n \cos.\lambda$$

quae forma ob

$$\sin.n \cos.m - \sin.m \cos.n \cos.\lambda = \sin.l \cos.\mu \quad \text{et} \quad \sin.m \cos.n - \sin.n \cos.m \cos.\lambda = \sin.l \cos.\nu$$

transit in hanc simpliciore :

$$dl \sin.l = dm \sin.l \cos.\nu + dn \sin.l \cos.\mu + d\lambda \sin.m \sin.n \sin.\lambda$$

seu

seu cum fit $\frac{\sin. \lambda}{\sin. l} = \frac{\sin. \mu}{\sin. m} = \frac{\sin. \nu}{\sin. n}$ in hanc

$$dl = dm \cos. \nu + dn \cos. \mu + d\lambda \sin. n \sin. \mu.$$

XXIII. Deinde vero simili modo elicitur:

$$dm = dl \cos. \nu + dn \cos. \lambda + d\mu \sin. n \sin. \lambda$$

vbi si loco dl valor modo inuentus substituatur, prodit

$$dm = dm \cos. \nu^2 + dn \cos. \mu \cos. \nu + d\lambda \sin. n \sin. \mu \cos. \nu + d\mu \sin. n \sin. \lambda + dn \cos. \lambda$$

seu ob $\cos. \lambda + \cos. \mu \cos. \nu = \cos. l \sin. \mu \sin. \nu$

$$dm \sin. \nu^2 = dn \cos. l \sin. \mu \sin. \nu + d\lambda \sin. n \sin. \mu \cos. \nu + d\mu \sin. n \sin. \lambda$$

Est vero $\sin. n \sin. \mu = \sin. m \sin. \nu$ et $\sin. n \sin. \lambda = \sin. l \sin. \nu$, vnde per $\sin. \nu$ diuidendo habetur:

$$dm \sin. \nu = dn \cos. l \sin. \mu + d\lambda \sin. m \cos. \nu + d\mu \sin. l$$

$$\text{ita vt fit } d\mu = \frac{dm \sin. \nu}{\sin. l} - \frac{dn \cos. l \sin. \mu}{\sin. l} - \frac{d\lambda \sin. m \cos. \nu}{\sin. l}.$$

Verum quia elementum dl tam commodè exprimitur, vt fit $dl = bdt \sin. \mu$ praestabit hunc valorem statim introduci vnde prodit

$$d\mu = \frac{-bdt \sin. \mu \cos. \nu + dm - dn \cos. \lambda}{\sin. n \sin. \lambda} \quad \text{similique modo}$$

$$d\nu = \frac{-bdt \sin. \mu \cos. \mu + dn - dm \cos. \lambda}{\sin. m \sin. \lambda}$$

XXIV. Ex prima ergo aequatione adipiscimur:

$$bdt \sin. \mu = dm \cos. \nu + dn \cos. \mu + d\lambda \sin. n \sin. \mu$$

$$\text{vnde fit } d\lambda = \frac{bdt}{\sin. n} - \frac{dm \cos. \nu + dn \cos. \mu}{\sin. n \sin. \mu}$$

E c 2

at

at tertia aequatio praebet

$$d\gamma = \frac{b \, dt \, \cos. \mu}{\sin. l} - \frac{b \, dt \, \sin. \mu \, \cos. \mu}{\sin. m \, \sin. \lambda} + \frac{dn - d m \, \cos. \lambda}{\sin. m \, \sin. \lambda}$$

$$\text{feu } d\gamma = \frac{dn - d m \, \cos. \lambda}{\sin. m \, \sin. \lambda}$$

secunda vero aequatio ad $d\Phi$ spectans dat

$$d\sigma = f \, dt - \frac{b \, dt \, \cos. \mu \, \cos. l}{\sin. l} - \frac{b \, dt \, \sin. \mu \, \cos. v}{\sin. h \, \sin. \lambda} + \frac{dm - dn \, \cos. \lambda}{\sin. n \, \sin. \lambda}$$

vbi notandum terminos elemento $b \, dt$ affectos, cum sint

$$- \frac{b \, dt (\sin. \mu \, \cos. v + \sin. v \, \cos. \mu \, \cos. l)}{\sin. l \, \sin. v}$$

$$\text{ob cot. } n = \frac{\sin. \mu \, \cos. v + \sin. v \, \cos. \mu \, \cos. l}{\sin. l \, \sin. v} \text{ abire in } - \frac{b \, dt \, \cos. n}{\sin. n}$$

ita vt fit

$$d\sigma = f \, dt - \frac{b \, dt \, \cos. n}{\sin. n} + \frac{dm - dn \, \cos. \lambda}{\sin. n \, \sin. \lambda} = -\alpha f \, dt + \frac{\alpha V P \, dt \, \cos. \zeta}{b}$$

$$\text{hincque } (1 + \alpha) f \, dt - \frac{b \, dt \, \cos. n}{\sin. n} + \frac{dm - dn \, \cos. \lambda}{\sin. n \, \sin. \lambda} = \frac{\alpha V P \, dt \, \cos. \zeta}{b}$$

XXV. Nunc igitur sumamus $b = (1 + \alpha) f \, \text{tang. } n$ vt viribus euanescentibus, arcus m et n prodeant constantes, et postrema aequatio dabit

$$dm - dn \, \cos. \lambda = \frac{\alpha V P \, dt \, \cos. n \, \sin. \lambda \, \cos. \zeta}{(1 + \alpha) f}$$

arcus vero n ex hac integratione est definiendus

$$\text{tang. } n = \frac{\alpha}{(1 + \alpha) f} \int V Q \, dt \, \cos. \zeta$$

$$\text{feu } dn = \frac{\alpha V Q \, dt \, \cos. \zeta \, \cos. n^2}{(1 + \alpha) f}$$

$$\text{vnde fit } dm = \frac{\alpha V \, dt \, \cos. n \, \cos. \zeta}{(1 + \alpha) f} (P \, \sin. \lambda + Q \, \cos. n \, \cos. \lambda)$$

hinc-

hincque porro

$$dm \cos \nu + dn \cos \mu = \frac{3\alpha \sqrt{d} \cos \nu \cos \mu}{(1+\alpha)f} \sin \lambda (P \cos \nu + Q \cos m \cos n \sin \nu).$$

Inuentis autem variationibus dm et dn , erit

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)f dt}{\cos n} - \frac{dm \cos \nu - dn \cos \mu}{\sin n \sin \mu} \text{ feu}$$

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)f dt}{\cos n} - \frac{dm(\sin m \cos n - \sin n \cos m \cos \lambda)}{\sin m \sin n \sin \lambda} - \frac{dn(\sin n \cos m - \sin m \cos n \cos \lambda)}{\sin m \sin n \sin \lambda}$$

et anguli ν E L variatio simul innotescit, quae est

$$d\nu = \frac{dn - dm \cos \lambda}{\sin m \sin \lambda} = \frac{3\alpha \sqrt{d} \cos n \cos \mu}{(1+\alpha)f \sin m} (Q \cos n \sin \lambda - P \cos \lambda)$$

substitutis autem pro dm et dn valoribus reperitur

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)f dt}{\cos n} - \frac{3\alpha \sqrt{d} \cos n \cos \mu}{(1+\alpha)f \sin m \sin n} (P(\sin m \cos n - \sin n \cos m \cos \lambda) + Q(\sin n \cos m \cos n \sin \lambda)).$$

Denique pro angulo $EAB = \Phi$ habebimus:

$$d\Phi = f dt - \frac{(1+\alpha)f dt \sin n \cos \mu \cos l}{\cos n \sin l} \text{ et } d\psi = \frac{(1+\alpha)f dt \sin n \cos \mu}{\sin l \cos n}$$

ita vt sit $d\Phi + d\psi \cos l = f dt$, in quibus integrationibus arcus m et n tanquam constantes spectare licet, simul vero erit proxime $d\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{\cos n} dt$, si quidem perturbatio fuerit minima.

XXVI. Quo haec nunc propius ad praesens institutum accommodemus, obseruandum est in motu vertiginis terrae arcum n quam minimum esse statuendum, ita vt ob $d\Phi = f dt$ iam f denotet angulum vno minuto secundo confectum, et angulus ψ in integrationibus pro constanti haberi poterit.

E c 3

Dein-

222 DE PHAEN. MOTVS TERRAE DIURNI

Deinde ob $\cot. \mu = \frac{n \cos. m - \sin. m \cos. \lambda}{\sin. m \sin. \lambda}$, colligitur fore
angulum $\mu = 180^\circ - \lambda - \frac{n \sin. \lambda}{\tan. m}$, ita vt sit.

$$\sin. \mu = \sin. \lambda + \frac{n \sin. \lambda \cos. \lambda}{\tan. m}; \quad \sin. (\lambda + \mu) = \frac{n \sin. \lambda}{\tan. m}$$

$$\cos. \mu = -\cos. \lambda + \frac{n \sin. \lambda^2}{\tan. m}; \quad \cos. (\lambda + \mu) = 1$$

neglectis terminis vbi n ad altiores potestates ex-
furgit.

Porro ob $\cos. l = \cos. m + n \sin. m \cos. \lambda$ erit $l = m - n \cos. \lambda$
hincque

$$n = \frac{3 \alpha}{(1 + \alpha) f} \int V Q dt \cos. \zeta; \quad m = \frac{3 \alpha}{(1 + \alpha) f} \int V dt \cos. \zeta (P \sin. \lambda + Q \cos. \lambda)$$

$$d\lambda = (1 + \alpha) f dt - \frac{3 \alpha}{(1 + \alpha) f} \frac{V dt \cos. \zeta (P \sin. m - n \cos. m (P \cos. \lambda - Q \sin. \lambda))}{n \sin. m}$$

$$= (1 + \alpha) f dt - \frac{3 \alpha V P dt \cos. \zeta}{(1 + \alpha) n f} - \frac{3 \alpha V dt \cos. \zeta \cos. m (Q \sin. \lambda - P \cos. \lambda)}{(1 + \alpha) f \sin. m}$$

$$d\gamma = \frac{3 \alpha \zeta}{(1 + \alpha) f} \frac{V dt \cos. \zeta (Q \sin. \lambda - P \cos. \lambda)}{\sin. m}$$

$$d\Phi = f dt + \frac{n (1 + \alpha) f dt \cos. m \cos. \lambda}{\sin. m}$$

$$d\psi = -\frac{n (1 + \alpha) f dt \cos. \lambda}{\sin. m}$$

XXVII. Cum sit proxime $\mu = 180^\circ - \lambda$, et
 $l = m$ in quantitativibus P et Q his valoribus vti licet,
ex quo erit:

$$P = \sin. p (\sin. \lambda \sin. (q - \psi) + \cos. m \cos. \lambda \cos. (q - \psi) - \tan. e \sin. m \cos. \lambda \sin. (q - \omega))$$

$$Q = \sin. p (\cos. \lambda \sin. (q - \psi) - \cos. m \sin. \lambda \cos. (q - \psi) + \tan. e \sin. m \sin. \lambda \sin. (q - \omega))$$

$$\text{existente } \cos. \zeta = \sin. p (\sin. m \cos. (q - \psi) + \tan. e \cos. m \sin. (q - \omega))$$

vnde

vnde colligitur :

$$P \sin. \lambda + Q \cos. \lambda = \sin. p \sin. (q - \psi)$$

$$Q \sin. \lambda - P \cos. \lambda = \sin. p (-\cos. m \cos. (q - \psi) + \frac{\text{tang. } \epsilon}{\sin. m \sin. (q - \omega)})$$

Hinc totum calculum satis expedite absolvere licebit; valor tantum anguli λ moram facessere videtur, ob terminum $\frac{-\alpha V P d t \cos. \varphi}{(1 + \alpha) J n}$, quantitatem minimam n in denominatore inuoluentem; quae si euanesceret, hic terminus adeo in infinitum excresceret. Quod cum in motu terrae eueniat, manifestum est hanc appropinquandi rationem nostro casu locum habere non posse ex quo aliam methodum ingredi conueniet, quam nunc accuratius sum expositurus.

Alia methodus formulas inuentas euol-
vendi, ad motum vertiginis terrae
magis accommodata.

XXVIII. Resumamus nostras formulas pro
motu vertiginis supra expositas :

$$1^{\circ}. \frac{dy}{dt} + \alpha f z - 3 \alpha V \cos. \zeta \cos. \theta = 0$$

$$2^{\circ}. \frac{dz}{dt} - \alpha f y + 3 \alpha V \cos. \zeta \cos. \eta = 0$$

$$3^{\circ}. dl = -dt (y \sin. \Phi + z \cos. \Phi)$$

$$4^{\circ}. d\Phi = f dt - \frac{dt}{\tan. l} (y \cos. \Phi - z \sin. \Phi)$$

$$5^{\circ}. d\psi = \frac{dt}{\sin. l} (y \cos. \Phi - z \sin. \Phi)$$

vbi primum obseruo, si vires perturbatrices littera $V = \frac{2g \cdot e \cdot e}{v^2}$ contentae euanescerent, biniis prioribus aequationibus satisfacere has formulas $y = b \cos. \alpha f t$ et $z = b \sin. \alpha f t$ praesenti autem casu quantitatem b euanescentem accipi debere. Quare cum ob quantitatem V particulae quaedam ad hos valores y et z accedant, has ipsas particulas inuestigari conuenit, quibus deinceps reiectis illis membris litteram b inuoluentibus; erit vtendum.

XXIX. Hunc in finem autem opus est ante omnia formulas $\cos. \zeta \cos. \eta$ et $\cos. \zeta \cos. \theta$ euolui, unde facta reductione reperitur:

$$\cos. \zeta \cos. \eta = \frac{1}{2} \sin. p^2 \left\{ \begin{array}{l} -\sin. l \sin. \Phi \sin. 2(q - \psi) - \sin. l \cos. l \cos. \Phi - \sin. l \cos. l \cos. \Phi \\ \cos. 2(q - \psi) \\ + \tan. \epsilon \sin. l^2 \cos. \Phi \sin. (2q - \psi - \omega) + \tan. \epsilon \sin. l^2 \cos. \Phi \sin. \\ (\psi - \omega) + \tan. \epsilon \cos. l \sin. \Phi \cos. (2q - \psi - \omega) \\ - \tan. \epsilon \cos. l^2 \cos. \Phi \sin. (2q - \psi - \omega) - \tan. \epsilon \cos. l^2 \cos. \Phi \sin. \\ (\psi - \omega) - \tan. \epsilon \cos. l \sin. \Phi \cos. (\psi - \omega) \end{array} \right\}$$

omissis terminis quadratum $\tan. \epsilon^2$ implicantibus vtpote minimis; quam ob causam pro $\sin. p^2$ $= \frac{1}{1 + \tan. \epsilon^2 \sin. (q - \omega)^2}$ etiam vnitatem scribere licet. Hinc etiam angulo Φ in sinus et cosinus simplices inuoluto, adipiscimur:

$$\begin{aligned} 4 \cos. \zeta \cos. \eta = & -\sin. 2l \cos. \Phi - \sin. l \cos. (\Phi - 2q + 2\psi) + \sin. l \cos. (\Phi + 2q - 2\psi) \\ & - \sin. l \cos. l - \sin. l \cos. l \\ & - \tan. \epsilon \cos. 2l \sin. (\Phi + 2q - \psi - \omega) + \tan. \epsilon \cos. 2l \sin. (\Phi - 2q + \psi + \omega) \\ & + \tan. \epsilon \cos. l - \tan. \epsilon \cos. l \\ & + \tan. \epsilon \cos. 2l \sin. (\Phi - \psi + \omega) - \tan. \epsilon \cos. 2l \sin. (\Phi + \psi - \omega) \\ & - \tan. \epsilon \cos. l - \tan. \epsilon \cos. l \end{aligned}$$

vbi

vbi notandum est ψ esse longitudinem puncti solstitialis aestiui a termino fixo v puta prima stella arietis. Quodsi ergo longitudo primae stellae arietis a puncto aequinoctiali verno computata ponatur $=x$, erit $\psi+x=90^\circ$ et $\psi=90^\circ-x$, indeque $q-\psi=q+x-90^\circ$, vbi $q+x$ denotabit astri longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam quae ex tabulis habetur. Hinc ergo per meros co-

$$\begin{aligned} 4\cos.\zeta\cos.\eta &= -\sin 2l\cos.\Phi + \sin.\lambda(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q-2x) \\ &\quad -\sin.\lambda(1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q+2x) \\ &\quad -\tan g.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+2q+x-\omega) + \tan g.\varepsilon \\ &\quad (\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-2q+\omega-x) \\ &\quad +\tan g.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+\omega+x) - \tan g.\varepsilon \\ &\quad (\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-\omega-x) \end{aligned}$$

vbi $\omega+x$ denotat longitudinem nodi ascendentis Ω a puncto aequinoctiali verno computatam.

XXX. Quodsi ergo pro vsu tabularum q denotet ipsam astri perturbantis longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam, similique modo ω longitudinem nodi ascendentis, erit

$$\begin{aligned} 4\cos.\zeta\cos.\eta &= -\sin 2l\cos.\Phi + \sin.\lambda(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q) - \sin.l \\ &\quad (1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q) \\ &\quad +\tan g.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+\omega) - \tan g.\varepsilon(\cos.l \\ &\quad +\cos.2l)\cos.(\Phi-\omega) \\ &\quad -\tan g.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+2q-\omega) + \tan g.\varepsilon(\cos.l \\ &\quad +\cos.2l)\cos.(\Phi-2q+\omega) \end{aligned}$$

vbi si loco Φ scribatur $\Phi + 90^\circ$ oritur valor alterius formulae $4 \cos. \zeta \cos. \theta$, quam ergo seorsim euolui non est opus. Deinde obseruo si astrum non in circulo aequabiliter circa terram circumferatur, vt longitudinis η incrementa non sint tempori proportionalia, tamen ex cognita inaequalitate motus, hos cosinus, in cosinus aliorum angulorum tempori proportionalium euolui posse, quod etiam de ipsa forma $V = \frac{2g\eta\epsilon}{v^2}$ est intelligendum, quae cum illa coniuncta pariter ad cosinus angulorum tempori proportionalium reuocabitur, quoniam ipse angulus Φ celeritatem angularem motus diurni terrae designans, in his integrationibus vt tempori proportionalis spectari potest. Quocirca certum est has formulas ita semper expressum iri vt fit

$$3\alpha V \cos. \zeta \cos. \eta = A \cos. \Phi + B \cos. (\Phi - \xi t) + C \cos. (\Phi - \gamma t) + D \cos. (\Phi - \delta t) \\ + \mathfrak{B} \cos. (\Phi + \xi t) + \mathfrak{C} \cos. (\Phi + \gamma t) + \mathfrak{D} \cos. (\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

$$3\alpha V \cos. \zeta \cos. \theta = -A \sin. \Phi - B \sin. (\Phi - \xi t) - C \sin. (\Phi - \gamma t) - D \sin. (\Phi - \delta t) \\ - \mathfrak{B} \sin. (\Phi + \xi t) - \mathfrak{C} \sin. (\Phi + \gamma t) - \mathfrak{D} \sin. (\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

vbi pro quolibet astro anguli ξt , γt , δt etc. quotcunque fuerint, cum coefficientibus facile exhibentur.

XXXI. Statuamus iam $d\Phi = m dt$ et $\alpha f = n$, fitque pro quantitibus y et z non omissis partibus ante commemoratis;

$$y = b$$

$$y = b \cos nt + O \cos \Phi + P \cos (\Phi - \xi t) + Q \cos (\Phi - \gamma t) + R \cos (\Phi - \delta t) \text{ etc.} \\ + \mathfrak{P} \cos (\Phi + \xi t) + \Omega \cos (\Phi + \gamma t) + \mathfrak{R} \cos (\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

$$z = b \sin nt - O \sin \Phi - P \sin (\Phi - \xi t) - Q \sin (\Phi - \gamma t) - R \sin (\Phi - \delta t) \text{ etc.} \\ - \mathfrak{P} \sin (\Phi + \xi t) - \Omega \sin (\Phi + \gamma t) - \mathfrak{R} \sin (\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

ac facta substitutione in prioribus aequationibus fiet

$$\begin{aligned} -nb \sin nt - mO \sin \Phi - (m - \xi)P \sin (\Phi - \xi t) - (m + \xi)\mathfrak{P} \sin (\Phi + \xi t) \text{ etc.} \\ + nb \quad - nO \quad - nP \quad - n\mathfrak{P} \\ + A \quad + B \quad + \mathfrak{B} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -nb \sin nt - mO \sin \Phi - (m - \xi)P \sin (\Phi - \xi t) - (m + \xi)\mathfrak{P} \sin (\Phi + \xi t) \text{ etc.} \\ + nb \quad - nO \quad - nP \quad - n\mathfrak{P} \\ + A \quad + B \quad + \mathfrak{B} \end{aligned}} \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} nb \cos nt - mO \cos \Phi - (m - \xi)P \cos (\Phi - \xi t) - (m + \xi)\mathfrak{P} \cos (\Phi + \xi t) \text{ etc.} \\ - nb \quad - nO \quad - nP \quad - n\mathfrak{P} \\ + A \quad + B \quad + \mathfrak{B} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} nb \cos nt - mO \cos \Phi - (m - \xi)P \cos (\Phi - \xi t) - (m + \xi)\mathfrak{P} \cos (\Phi + \xi t) \text{ etc.} \\ - nb \quad - nO \quad - nP \quad - n\mathfrak{P} \\ + A \quad + B \quad + \mathfrak{B} \end{aligned}} \right\} = 0$$

quae cum congruant, consequimur has determinatio-
nes:

$$O = \frac{A}{m+n}; \quad P = \frac{B}{n+m-\xi}; \quad Q = \frac{C}{n+m-\gamma}; \quad R = \frac{D}{n+m-\delta} \text{ etc.} \\ \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{A}}{n+m+\xi}; \quad \Omega = \frac{\mathfrak{C}}{n+m+\gamma}; \quad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{n+m+\delta} \text{ etc.}$$

ficque quotcunque fuerint termini haec integralia fa-
cile formantur.

XXXII. His autem valoribus pro y et z in-
ventis colligimus sequentes formas:

$$y \sin \Phi + z \cos \Phi = b \sin (\Phi + nt) + (P - \mathfrak{P}) \sin \xi t + (Q - \Omega) \sin \gamma t \\ + (R - \mathfrak{R}) \sin \delta t \text{ etc.}$$

$$y \cos \Phi - z \sin \Phi = b \cos (\Phi + nt) + O + (P + \mathfrak{P}) \cos \xi t + (Q + \Omega) \\ \cos \gamma t + (R + \mathfrak{R}) \cos \delta t \text{ etc.}$$

F f 2

ex

228 DE PHAEN. MOTVS TERRAE DIVRNI

ex quibus primo veram poli aequatoris a polo eclipticae distantiam $EA = l$ elicimus; cum enim sit:

$$dl = -b dt \sin.(\Phi + nt) - (P - \mathfrak{P}) dt \sin. \xi t - (Q - \Omega) dt \sin. \gamma t - \text{etc.}$$

si haec distantia media ponatur $= l$, erit integrando

$$l = l + \frac{b}{m+n} \cos.(\Phi + nt) + \frac{P-\mathfrak{P}}{\xi} \cos. \xi t + \frac{Q-\Omega}{\gamma} \cos. \gamma t + \frac{R-\mathfrak{R}}{\delta} \cos. \delta t \text{ etc.}$$

Deinde pro angulo $EAB = \Phi$, quo motus gyratorii celeritas definitur, accuratius cognoscendo habemus:

$$\frac{d\Phi}{dt} = f - \frac{b \cos.(\Phi + nt)}{\tan. l} - \frac{0}{\tan. l} - \frac{(P + \mathfrak{P})}{\tan. l} \cos. \xi t - \text{etc.}$$

vnde per integrationem elicimus:

$$\Phi = ft - \frac{b \sin.(\Phi + nt)}{(m+n) \tan. l} - \frac{0 t}{\tan. l} - \frac{(P + \mathfrak{P}) \sin. \xi t}{\xi \tan. l} - \frac{(Q + \Omega) \sin. \gamma t}{\gamma \tan. l} - \text{etc.}$$

Denique pro vera longitudine primae stellae arietis $x = 90^\circ - \psi$, colligimus:

$$x = C - \frac{b \sin.(\Phi + nt)}{(m+n) \sin. l} - \frac{0 t}{\sin. l} - \frac{(P + \mathfrak{P}) \sin. \xi t}{\xi \sin. l} - \frac{(Q + \Omega) \sin. \gamma t}{\gamma \sin. l} - \frac{(R + \mathfrak{R}) \sin. \delta t}{\delta \sin. l} \text{ etc.}$$

qua aequatione praecessio aequinoctiorum cum omnibus inaequalitatibus determinatur.

XXXIII. Hic denotat m celeritatem motus diurni, vbi loco vnus minuti secundi aliud quodvis tempus datum accipere licet, dummodo reliquae celeritates ad idem tempus referantur. Sumto ergo tempore vnus diei, erit $m = 360^\circ$ cui etiam littera f aequalis est censenda, tum vero erit $n = am$ vbi

vbi notandum, esse $\alpha = \frac{aa-bb}{bb}$ fractionem minimam ita vt n prae m quasi euanescat. Reliquae celeritates angulares nunc etiam ad tempus vnius diei referendae ex motu et vi astri perturbantis peti debent, cuius locum cum vel Sol vel Luna occupare possit, pro vtroque seorsim has anomalias in motu et axe terrae scrutari conueniet. Vnde mox patebit non opus esse ad horum astrorum inaequalitatem motus respicere cum anomaliae ex eorum motu medio resultantes iam adeo sint exiguae, vt quae insuper ex orbitae excentricitate nascerentur, tuto negligi queant.

De perturbatione motus diurni a vi solis producta.

XXXIV. Pro sole ergo inclinatio ε euanescit, ac posito solis motu diurno $= \mu$ est vt supra vidimus $V = \mu \mu$ et celeritas solis $\frac{dq}{dt} = \mu$; existente q longitudine solis media. Cum ergo sit

$$4 \cos. \zeta \cos. \eta = -\sin. 2l \cos. \Phi + \sin. l(1 + \cos. l) \cos. (\Phi - 2q) \\ - \sin. l(1 - \cos. l) \cos. (\Phi + 2q)$$

erit $\zeta t = 2q$, et $\zeta = 2\mu$ tum vero

$$A = -\frac{3}{4} \alpha \mu \mu \sin. 2l, B = \frac{3}{4} \alpha \mu \mu \sin. l(1 + \cos. l), \mathfrak{B} = -\frac{3}{4} \alpha \mu \mu \sin. l(1 - \cos. l)$$

hincque

$$O = \frac{-3 \alpha \mu \mu \sin. 2l}{4(1 + \alpha)m}; P = \frac{3 \alpha \mu \mu \sin. l(1 + \cos. l)}{4((1 + \alpha)m - 2\mu)}; \mathfrak{P} = \frac{-3 \alpha \mu \mu \sin. l(1 - \cos. l)}{4((1 + \alpha)m + 2\mu)}$$

F f 3

et

et sequentes litterae Q , Ω etc. evanescent:

XXXV. Quare primo pro distantia polorum aequatoris et eclipticae $EA = l$, posita hac distantia media $= 1$, erit

$$l = 1 + \frac{b}{(1+\alpha)m} \cos(\Phi + \alpha m t) + \frac{P-\mathfrak{P}}{2\mu} \cos 2q.$$

Deinde pro angulo $EAB = \Phi$ colligimus

$$\Phi = \left(f + \frac{\frac{3}{2}\alpha\mu\mu \cos l^2}{2(1+\alpha)m} \right) t - \frac{(P+\mathfrak{P}) \sin 2q}{2\mu \tan g. l} - \frac{b \sin(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha)m \tan g. l}$$

vbi iam tempus t in diebus est exprimendum; critque $f = m - \frac{\frac{3}{2}\alpha\mu\mu \cos l^2}{2(1+\alpha)m}$; seu potius denotante f motum terrae diurnum primo impressum is ob vim solis censendus est acceleratus particula $\frac{\frac{3}{2}\alpha\mu\mu \cos l^2}{2(1+\alpha)m}$. Denique pro longitudine primae stellae arietis obtinemus:

$$\alpha = C - \frac{b \sin(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha)m \sin l} + \frac{\frac{3}{2}\alpha\mu\mu \cos l}{2(1+\alpha)m} t - \frac{(P+\mathfrak{P}) \sin 2q}{2\mu \sin l}$$

unde patet primam stellam arietis quotidie per spatium $\frac{\frac{3}{2}\alpha\mu\mu \cos l}{2(1+\alpha)m}$ promoueri.

De perturbatione motus diurni a vi lunae producta.

XXXVI. Hic constat pro ε angulum circiter 5° capi oportere; quodsi iam q denotet longitudinem lunae mediam, ν eius motum diurnum; ω longitudinem nodi ascendentis et ϕ eius motum diurnum retrogradum et $\frac{dq}{dt} = \nu$ et $\frac{d\omega}{dt} = -\phi$. Tum vero si massa lunae aequalis effet terrae foret

$$V = \nu \nu;$$

$V = \nu\nu$; si ergo statuatur massa terrae ad massam lunae ut 1 ad λ , ut posita terrae massa = M . futura sit massa lunae = λM erit $V = \lambda \nu\nu$. Consideremus iam formam:

$$\begin{aligned} 4\cos.2\cos.\nu &= \sin.2\cos.\Phi + \sin.l(1 + \cos.l)\cos.(\Phi - 2q) - \text{tang.}\varepsilon(\cos.l \\ &\quad + \cos.2l)\cos.(\Phi - \omega) \\ &\quad - \sin.l(1 - \cos.l)\cos.(\Phi + 2q) + \text{tang.}\varepsilon(\cos.l \\ &\quad - \cos.2l)\cos.(\Phi + \omega) \\ &\quad + \text{tang.}\varepsilon(\cos.l + \cos.2l)\cos.(\Phi - 2q + \omega) \\ &\quad - \text{tang.}\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)\cos.(\Phi + 2q + \omega) \end{aligned}$$

atque hinc consequimur hos valores:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.2l; & B &= \frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1 + \cos.l) \\ & & & \left. \begin{aligned} B &= -\frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1 - \cos.l) \end{aligned} \right\} \varepsilon = 2\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -\frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\text{tang.}\varepsilon(\cos.l + \cos.2l) \\ & \left. \begin{aligned} C &= +\frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\text{tang.}\varepsilon(\cos.l - \cos.2l) \end{aligned} \right\} \nu = -\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= -C \\ & \left. \begin{aligned} D &= +\frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\text{tang.}\varepsilon(\cos.l + \cos.2l) \\ D &= -\frac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\text{tang.}\varepsilon(\cos.l - \cos.2l) \end{aligned} \right\} \delta = 2\nu + \sigma \end{aligned}$$

XXXVII. Ex his porro sequentes valores eliciuntur:

$$O = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\sin.2l}{4(1 + \alpha)m}; \quad P = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1 + \cos.l)}{4((1 + \alpha)m - 2\nu)}$$

$$Q = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1 - \cos.l)}{4((1 + \alpha)m + 2\nu)}$$

$$R = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\text{tang.}\varepsilon(\cos.l + \cos.2l)}{4((1 + \alpha)m + \omega)}$$

$$S = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\text{tang.}\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)}{4((1 + \alpha)m - \omega)}$$

$$R =$$

$$R = \frac{+3\alpha\lambda v v \tan g. \varepsilon (\cos. l + \cos. 2l)}{1 + ((1 + \alpha)m - 2v - o)}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{-3\alpha\lambda v v \tan g. \varepsilon (\cos. l - \cos. 2l)}{1 + ((1 + \alpha)m + 2v + o)}$$

vnde pro obliquitate eclipticae oritur

$$l = l \dots + \frac{P - \mathfrak{P}}{2v} \cos. 2q - \frac{Q + D}{o} \cos. \omega + \frac{R - \mathfrak{R}}{2v + o} \cos. (2q - \omega)$$

pro celeritate rotationis seu angulo $EAB = \Phi$ vero

$$\Phi = \dots + \frac{3\alpha\lambda v v \cos. l^2}{2(1 + \alpha)m} t - \frac{(P + \mathfrak{P}) \sin. 2q}{2v \tan g. l} + \frac{(Q + D) \sin. \omega}{o \tan g. l} - \frac{(R + \mathfrak{R}) \sin. (2q + \omega)}{(2v + o) \tan g. l}$$

et pro longitudine $1^* v$

$$x = \dots + \frac{3\alpha\lambda v v \cos. l}{2(1 + \alpha)m} t - \frac{(P + \mathfrak{P}) \sin. 2q}{2v \sin. l} + \frac{(Q + D) \sin. \omega}{o \sin. l} - \frac{(R + \mathfrak{R}) \sin. (2q + \omega)}{(2v + o) \sin. l}$$

sicque a vi lunae motus diurnus primum impressus terrae augetur particula $\frac{3\alpha\lambda v v \cos. l^2}{2(1 + \alpha)m}$.

Euolutio numerica harum formularum.

XXXVIII. Primo cum l denotet distantiam polorum aequatoris et eclipticae, erit nunc quidem eius valor medius $= 23^\circ, 29'$, quo in his formulis vti poterimus. Deinde ex tabulis astronomicis colligimus:

motum solis diurnum medium $\mu = 3548'$

motum lunae diurnum medium $v = 47435$

motum nodorum diurnum medium $o = 190\frac{1}{2}$

inclinationem orbitae lunae mediam $\varepsilon = 5^\circ$

et

et pro motu diurno medio ipsius terrae circa axem
sumamus $(1+a)m = 360^\circ = 1296000''$ quandoqui-
dem in terminis minimis valores proxime veros ad-
hibuisse sufficit. Hinc pro formulis ex vi solis na-
tis erit :

$$\begin{aligned} O &= -7'', 2849 \alpha \sin. 2l; \frac{P}{2\mu} = +0,001032 \alpha \sin. l (1 + \cos. l) \\ &0,8624235 \qquad \qquad \qquad 7,0137954 \\ &\frac{q}{2\mu} = -0,001021 \alpha \sin. l (1 - \cos. l) \\ &\qquad \qquad \qquad 7,0090374. \end{aligned}$$

Pro formulis autem ex vi lunae natis :

$$\begin{aligned} O &= -1302'', 13 \alpha \lambda \sin. l; \frac{P}{2v} = +0,014809 \alpha \lambda \sin. l (1 + \cos. l) \\ &3,1146541 \qquad \qquad \qquad 8,1705403 \\ &\frac{q}{2v} = -0,012777 \alpha \lambda \sin. l (1 - \cos. l) \\ &\qquad \qquad \qquad 8,1064437 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\sigma} &= -0,59792 \alpha \lambda (\cos. l + \cos. 2l) \\ &9,7766439 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\sigma} &= +0,59811 \alpha \lambda (\cos. l - \cos. 2l) \\ &9,7767779 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{2\gamma + \sigma} &= +0,00129 \alpha \lambda (\cos. l + \cos. 2l) \\ &7,1116918 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{2\gamma + \sigma} &= -0,00112 \alpha \lambda (\cos. l - \cos. 2l) \\ &7,0478673. \end{aligned}$$

XXXIX. Si porro loco l valorem $23^\circ, 29'$
substituamus hi valores ita se habebunt

Tom. XIII. Nou. Comm.

G g

pro

pro vi solis.

$$O = - 5'', 3249 \alpha$$

$$0,7263152$$

$$\frac{P}{2\mu} = + 0,0007886 \alpha$$

$$\frac{P}{2\mu} = - 0,0000337 \alpha$$

$$\frac{P - \mu}{2\mu} = + 0,0008223 \alpha$$

$$\frac{P + \mu}{2\mu} = + 0,0007549 \alpha$$

pro vi lunae

$$O = - 951'', 80 \alpha \lambda$$

$$2,9785458$$

$$\frac{P}{2v} = + 0,011313 \alpha \lambda$$

$$\frac{P}{2v} = - 0,000422 \alpha \lambda$$

$$\frac{P - \mu}{2v} = + 0,011735 \alpha \lambda$$

$$\frac{P + \mu}{2v} = + 0,010891 \alpha \lambda$$

$$\frac{O}{o} = - 0,95643 \alpha \lambda$$

$$\frac{D}{o} = + 0,14043 \alpha \lambda$$

$$\frac{O - D}{o} = - 1,09686 \alpha \lambda$$

$$\frac{O + D}{o} = - 0,81600 \alpha \lambda$$

$$\frac{R}{2v + o} = + 0,00207 \alpha \lambda$$

$$\frac{R}{2v + o} = - 0,00026 \alpha \lambda$$

$$\frac{R - \mu}{2v + o} = + 0,00233 \alpha \lambda$$

$$\frac{R + \mu}{2v + o} = + 0,00181 \alpha \lambda$$

XL. Quodsi iam longitudinem solis littera p designemus, vt a longitudine lunae q distinguatur, ternae nostrae formulae pro motu terrae diurno inventae ita se habebunt tempore t in diebus expressio:

$$= 1 + k \cos(\phi + \alpha mt) + 0,0008223 \alpha \cos. 2p + 1,09686 \alpha \cos. \omega$$

$$+ 0,011735 \alpha \cos. 2q + 0,00233 \alpha \cos. (2q - \omega)$$

$$x = C$$

$$\begin{aligned} x = C - \frac{k \sin.(\Phi + \alpha m t)}{\sin. l} &+ \frac{5'', 3249 \alpha t}{\sin. l} - \frac{0,0007549 \alpha}{\sin. l} \sin. 2p \\ &+ \frac{951'', 80 \alpha \lambda t}{\sin. l} - \frac{0,010891 \alpha \lambda}{\sin. l} \sin. 2q \\ &- \frac{0,81600 \alpha \lambda}{\sin. l} \sin. \omega \\ &- \frac{0,00181 \alpha \lambda}{\sin. l} \sin. (2q + \omega) \\ \Phi = ft - \frac{k \sin.(\Phi + \alpha m t)}{\tan g. l} &+ \frac{5'', 3249 \alpha t}{\tan g. l} - \frac{0,0007549 \alpha}{\tan g. l} \sin. 2p \\ &+ \frac{951'', 80 \alpha \lambda t}{\tan g. l} - \frac{0,010891 \alpha \lambda}{\tan g. l} \sin. 2q \\ &- \frac{0,81600 \alpha \lambda}{\tan g. l} \sin. \omega \\ &- \frac{0,00181 \alpha \lambda}{\tan g. l} \sin. (2q + \omega). \end{aligned}$$

XLI. Quodsi hic coefficientes finuum et cosinuum in minuta secunda conuertamus reperiemus:

$$\begin{aligned} I = k \cos.(\Phi + \alpha m t) &+ 170 \alpha \cos. 2p + 226230 \alpha \lambda \cos. \omega \\ &+ 2421 \alpha \lambda \cos. 2q + 480 \alpha \lambda \cos. (2q + \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = C - \frac{k \sin.(\Phi + \alpha m t)}{\sin. l} &+ 13'', 363 \alpha t - 391'' \alpha \sin. 2p \\ &+ 2388'', 5 \alpha \lambda t - 5637 \alpha \lambda \sin. 2q \\ &- 422383 \alpha \lambda \sin. \omega \\ &- 937 \alpha \lambda \sin. (2q + \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = ft - \frac{k \sin.(\Phi + \alpha m t)}{\tan g. l} &+ 12'', 256 \alpha t - 358'' \alpha \sin. 2p \\ &+ 2190, 7 \alpha \lambda t - 5170 \alpha \lambda \sin. 2q \\ &- 387400 \alpha \lambda \sin. \omega \\ &- 859 \alpha \lambda \sin. (2q + \omega) \end{aligned}$$

vbi loco $\frac{b}{(1+\alpha)^m}$ scripsi k . In statu autem, quo terra versatur haec constans k evanescit, quod nisi eueniret, motus quidam oscillatorius ipsi diurno foret admixtus, cuius oscillationes absoluerentur tot diebus, quoties fractio α in unitate continetur.

De obliquitate eclipticae eiusque variatione.

XLII. Posito l pro obliquitate eclipticae media, ea erit maxima, si longitudes solis $= p$ et Lunae $= q$ vel sint 0 vel 6 signorum, simulque nodus ascendens in ipsum punctum aequinoctiale vernum incidat, vt sit $\omega = 0$; tum enim erit maxima eclipticae obliquitas $= l + 170\alpha + 229131\alpha\lambda$ min. sec. Minima autem reperietur, si nodus descendens incidit in principium arietis vt sit $\omega = 180^\circ$, simul vero Sol et Luna in punctis solstitialibus versentur; tum autem erit minima obliquitas $= l - 170\alpha - 228171\alpha\lambda$ min. sec. sicque tota variatio, quatenus a viribus Solis et Lunae efficitur erit $340\alpha + 457302\alpha\lambda$ min. sec. quae ex observationibus aestimatur quasi $18''$.

XLIII. Quo autem hinc veros valores quantitatum α et λ definire queamus perpendamus promotionem mediam primae stellae arietis, quae inter-

teruallo vnus diei fit per spatium $13\frac{1}{2}\alpha + 2388\frac{1}{2}\alpha\lambda$ min. sec. hincque interuallo vnus anni per $4870\alpha + 872400\alpha\lambda$ min. sec. quod ex obseruationibus aestimatur $50\frac{1}{3}''$. Prior autem valor $18''$ ob paruitatem non tam certus videtur, vt nulla correctione egeat. Factis ergo aliquot hypothesibus pro nutatione numeri λ indeque fractionis α valor ita prodit

si nutatio	$18''$	$18\frac{1}{3}''$	$18\frac{1}{2}''$	$19''$
erit	$\lambda = \frac{1}{104}$	$\frac{5}{57}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{43}$
et	$\alpha = \frac{1}{203}$	$\frac{1}{273}$	$\frac{1}{218}$	$\frac{1}{200}$

vnde patet vt phaenomenis satisfiat, massam lunae vix maiori terrae parti quam $\frac{1}{87}$ aequari posse. Neque ergo sententia *Newtoni* subsistere potest, qui lunae massam parti quadragesimae terrae aequalem aestimauit; et sententia *Cel. Dan. Bernoulli* multo propius ad veritatem accedere est censenda, qua lunae tantum pars terrae septuagesima tribuitur. Ac si nutationem axis terrae non vltra $19''$ per obseruationes statuere licet, massa lunae adhuc est minor, neque partem octogesimam quintam terrae superare potest.

XLIV. Ponamus ergo $\alpha = \frac{1}{200}$ et $\lambda = \frac{1}{55}$, hincque $\alpha\lambda = \frac{1}{27500}$ et variationes in obliquitate eclipticae ita a longitudine solis p , longitudine lunae q et longitudine nodi ascendantis ω pendebunt, vt fit

$$l = 1 + 0,57 \cos. 2p + 0,095 \cos. 2q + 8,87 \cos. \omega + 0,019 \cos. (2q + \omega)$$

G g 3 coeffi-

coefficientibus in minutis secundis expressis. Cum igitur secunda et quarta aequatione decimam quidem minuti secundi partem conficiant, iis omissis erit

$$l = 1 + 0,57 \cos. 2p + 8,87 \cos. \omega$$

quarum aequationum prior cosinui duplae longitudinis solis est proportionalis vixque semiminutum secundum superat posterior vero cosinui longitudinis nodi ascendentis est proportionalis, et fere ad 9'' ascendere potest, quod egregie cum observationibus consentire videtur.

De praecessione aequinoctiorum seu longitudine primae stellae arietis.

XLV. Hic primo consideranda est huius stellae longitudo media, quae ad quodvis tempus ex praecessione annua facile determinatur. Sit ergo γ longitudo media ad datum quodvis tempus, ac pro eius longitudine vera inuenienda, positis ad hoc tempus longitudine solis $= p$, lunae $= q$ et nodi ascendentis $= \omega$ erit eius longitudo vera:

$$x = \gamma - 1,30 \sin. 2p - 0,22 \sin. 2q - 16,56 \sin. \omega$$

omissa postrema aequatione, utpote partem trigessimam minuti secundi non superante. Hinc patet si nodus ascendens fuerit in $\gamma 0^\circ$, longitudinem mediam imminui $16\frac{1}{2}$ min. sec., sin autem sit in $\gamma 0^\circ$, tantundem augeri, tum vero si sol versetur in $\gamma 15^\circ$, vel $\mathcal{M} 15^\circ$, eam minui $1\frac{1}{2}$ sec. tantundem
vero

vero augeri, si versetur in $\Omega 15^\circ$ vel $\approx 15^\circ$; correctio a loco lunae pendens negligi potest. Ex quo perspicitur longitudinem veram stellarum fixarum a media vsque ad $18''$ discrepare posse.

De inaequalitate in ipso motu diurno terrae a viribus solis ac lunae producta.

XLVI. Haec inaequalitas ab angulo Φ pendet, quem videmus non exacte tempori esse proportionalem; cum sit reuera:

$$\Phi = 360^\circ t - 1,20 \sin. 2p - 0,20 \sin. 2q - 15,20 \sin. \omega - 0,03 \sin. (2q + \omega).$$

Est autem Φ angulus EAB , quo primus meridianus terrae AB a circulo coelesti AE , qui est colurus solstitiorum ab occidente in orientem recedit, quod etiam de quouis alio meridiano terrestri, et coluro aequinoctiorum est intelligendum. Ita si secundum motum aequabilem colurus aequinoctiorum, seu punctum aequinoctiale vernum iam per nostrum meridianum, occasum versus angulo f processisset eius vera elongatio a nostro meridiano esset $\Phi = f - 1,20 \sin. 2p - 0,20 \sin. 2q - 15,20 \sin. \omega$ omissa vltima inaequalitate vt insensibili.

XLVII. Quoniam culminatio puncti aequinoctialis verni in ephemeridibus quotidie assignari solet,

let, nunc quidem cognoscimus illis temporis momentis punctum aequinoctiale vernum si summa harum aequationum sit negatiua ad meridianum nondum appulisse, sed ab eo etiamnunc esse remotum tot minutis secundis, quot aequationes illae praebent. Sin autem tota aequatio fiat positiua, indicio id est punctum aequinoctiale vernum iam per meridianum transiisse, totidemque minutis secundis ab eo occidentem versus esse remotum. Illo igitur casu serius culminabit temporis interuallo, quo per motum diurnum aequatio illa conficitur, hoc vero casu, iam ante tantum temporis interual- lum culminauit.

XLVIII. Manifestum autem est hanc motus diurni inaequalitatem tantum in punctis aequinoctia- libus et solstitialibus cerni, cum ea proxime sit ae- qualis inaequalitati in praecessione aequinoctiorum; ita vt in stellis fixis nulla huiusmodi inaequalitas locum sit habitura, sed interualla temporum, qui- bus eadem stella fixa ad meridianum appellit, tuto pro aequalibus haberi queant. Respectu ergo stellarum fixarum motus vertiginis terrae perfecte est aequabilis, neque vllam perturbationem a viri- bus solis et lunae patitur, sicque illa motus irregu- laritas vnice ab inaequabili aequinoctiorum praeces- sione proficisci est censenda, neque ergo variatio illa in longitudine stellarum fixarum effecta vllam variationem in earum culminatione gignit; ex quo
neceffe

neceſſe eſt, ut punctorum aequinoctialium culmina-
tio totam illam irregularitatem perſentiat.

XLIX. Hi effectus a viribus ſolis ac lunae in
motu terrae diurno producti probe ſunt diſtinguendi
ab iis, quos a viribus planetarum in terram agen-
tibus naſci olim demonſtraui, qui etiamſi quoque
puncta aequinoctialia et obliquitatem eclipticae affi-
ciant, tamen ex fonte prorsus diuerſo proſeunt,
dum iis ipſum planum eclipticae immutatur, ae-
quatore manente inuariato. Atque ex his binis
cauſis coniunctis omnes irregularitates, quibus ſtellae
fixae obnoxiae videntur, explicari oportet; quae
phaenomena nunc quidem ab Aſtronomis eo maiori
cura ſunt obſeruanda, cum ad ea perpetuo omnes
illae minimae aberrationes in coelo, ad quas maxi-
me ſunt attenti, referri debeant.