1769

Nova criteria radices aequationum imaginarias discoscendi

Leonhard Euler

NOVA CRITERIA RADICES AEQVATIONVM IMAGINARIAS DIGNOSCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

Summus *Newtonus* et post eum plures alii Geometrae in eo elaborarunt, vt criteria seu signa inuenirent, quorum ope aequationum cuiuscunque gradus radices reales et imaginariae dignosci possent, simili modo quo radices positiuae et negatiuae dignosci solent. Verum cuncta illa criteria seu signa hoc defectu laborant vt quoties radices imaginarias indicant, inde certe quidem concludi possit, tales radices in aequatione reuera inesse; sed quando nullas radices imaginarias indicant neutiquam inde concludere licet, omnes radices esse reales, cum saepius euenire queat vt hoc non obstante omnes adeo aequationis radices sint imaginariae.

Hic defectus imprimis cernitur in aequationibus huius formae

$$+x^n+ax^{n-1}-bx^{n-2}-cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}-\text{etc.}=0$$

vbi continuo bina signa eiusdem naturae se mutuo insequuntur, tum enim omnia illa criteria quae hactenus sunt prolata, nullas plane radices imaginarias oſtendunt, cum tamen fieri poſſit vt plures atque adeo omnes ſint imaginariae.

Ad hoc dilucidandum in genere aequatio quarti ordinis huius formae $+x^4+ax^3-bxx-cx+d=0$ exhiberi poteſt cuius omnes radices ſint imaginariae; concipiatur ea enim conflata ex duobus huiusmodi factoribus $xx+px+q$ et $xx-rx+s$ in quibus ſit $pp<4q$ et $rr<4s$ vt omnes radices fiant imaginariae.

Tum igitur fieri opportet $a=p-r$; $b=pr-q-s$; $c=qr-ps$ et $d=qs$; ideoque $p>r:pr>q+s$: et $qr>ps$.

Statuamus ergo $p=\alpha r$ et $q=\beta s$ et conditiones adimplendae erunt ſequentes

I. $\alpha>1$; II. $\beta>\alpha$; III. $rr<4s$; IV. $rr<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$; V. $rr>\frac{\beta+1}{\alpha}s$:

Cum igitur ex quinta ſit $\frac{\beta+1}{\alpha}s<rr$

erit multo magis $\frac{\beta+1}{\alpha}s<4s$ et $<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$

vnde fit $\beta+1<4\alpha$ ſeu $\beta<4\alpha-1$ et

$\beta+1<\frac{4\beta}{\alpha}$ ſeu $\beta>\frac{\alpha}{4-\alpha}$.

Cum quibus nouis conditionibus iungatur ſecunda $\beta>\alpha$ et adipiſcimur cum

$4\alpha-1>\alpha$ tum $4\alpha-1>\frac{\alpha}{4-\alpha}$

inde fit $\alpha>\frac{1}{3}$ quod per ſe ſupponitur quia $\alpha>1$; hinc vero $4\alpha>\alpha^2+1$; per qua conditione implenplenda necesse est vt α intra hos limites $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ accipiatur vel potius intra limites $2+\sqrt{3}$ et 1 tum vero facile erit pro β idoneos valores inuenire; constitutis autem valoribus pro α et β aeque facile erit pro s et rr idoneos valores assumere.

Sumto enim exempli gratia $\alpha = 2$ debet esse $\beta > 2$ et > 1 et < 7 vnde intra limites 2 et 7 debet contineri; sit igitur $\beta = 3$ et habebimus has conditiones

$$rr > 2s \text{ et } < 4s \text{ et } < 3s$$

vnde rr intra limites $2s$ et $3s$ debet contineri; sumto ergo $s = 6$ capi poterit $r = 4$ hincque fit $p = 8$ et $q = 18$; quocirca ex binis factoribus $xx + 8x + 18$ et $xx - 4x + 6$ nascetur haec aequatio quarti ordinis

$$x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$$

cuius omnes radices certo sunt imaginariae, etiamsi criteria supra memorata hoc neutiquam innuant.

Hoc autem semper certum est, si cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, tum illa criteria perpetuo locum habere; propterea quod in illis certae proprietates continentur, quae huiusmodi aequationibus conueniunt, quae autem negotium non exhauriunt, sed quandoque etiam in eiusmodi aequationibus locum habent quae radices imaginarias inuoluunt.

Neque etiam adhuc aliud principium conſtat vnde talia criteria praeſertim pro aequationibus altiorum graduum peti poſſent; interim tamen numerum talium criteriorum pro lubitu augere licet, quo hoc commodi nanciſcimur vt dum quaedam nullas radices imaginarias indicant alia aduerſentur, quorum ſuffragium ſemper veritati conſentaneum eſt cenſendum.

Quod quo clarius appareat, methodos quibus memorati autores in hunc finem ſunt vſi breuiter hic exponam, tum vero oſtendam quomodo iisdem veſtigiis inſiſtendo plura alia imo infinita ſimilia criteria inueſtigari queant.

Primum principium inde petitur quod ſi cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, indeque alia aequatio formetur, cuius ſingulae radices ſint quadratis illarum aequales, tum huius nouae aequationis omnes radices non ſolum futurae ſint reales ſed adeo poſitiuae, ita vt in ea ſigna $+$ et $-$ ſe mutuo alternatim inſequi debeant.

Sumamus ergo huius aequationis:

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + d x^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices eſſe reales, indeque quaeramus nouam aequationem, cuius quaelibet radix z aequalis ſit quadrato xx, ſeu $z = xx$; hunc in finem illius aequationis alternos terminos ad alteram partem transferamus vt ſit

$$x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + \text{etc.} = -ax^{n-1} - cx^{n-3} - ex^{n-5} - \text{etc.}$$

capian-

capianturque vtrinque quadrata, quae iterum ad eandem partem diſpoſita dabunt hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{lllll} x^{2n} & +2b.x^{2n-2} & +2d.x^{2n-4} & +2f.x^{2n-6} & +2h.x^{2n-8} \\ -aa & +bb & +2bd & +2bf & \\ & -2ac & -2ae & +dd \text{ etc.} & \\ & & -cc & -2ag & \\ & & & -2ce & \end{array}\right\} = 0$$

In qua omnes exponentes ipſius x ſunt numeri pares.

Scribamus ergo vbique z loco xx et habebimus nouam illam aequationem quaeſitam, quae erit

$$\begin{array}{lllll} z^{n} & +2b.z^{n-1} & +2d.z^{n-2} & +2f.\ z^{n-3} & +2h.\ z^{n-4} \text{ etc.} = 0 \\ -aa & +bb & +2bd & +2bf & \\ & -2ac & -2ae & +dd & \\ & & -cc & -2ag & \\ & & & -2ce. & \end{array}$$

In qua cum coefficientes primi, tertii, quinti, etc. termini ſint poſitiui, ſecundi vero quarti, ſexti etc. negatiui, obtinebimus ſequentes conditiones pro coefficientibus a, b, c, d etc. aequationis propoſitae

$$\begin{array}{lll} 2b-aa<0 & & aa>2b \\ 2d+bb-2ac>0 & \text{ſeu} & bb>2ac-2d \\ 2f+2bd-2ae-cc<0 & & cc>2bd-2ae+2f \\ 2h+2bf+dd-2ag-2ce>0 \text{ etc.} & & dd>2ce-2bf+2ag-2h \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

 quarum

quarum formularum ordo facile perſpicitur.

En ergo iam inſignes proprietates, quae omnibus aequationibus, quarum radices ſunt reales, neceſſario conueniunt, ita vt aequationis propoſitae omnes radices reales eſſe nequeant, niſi ſimul hae conditiones inter eius coefficientes locum habeant. Neutiquam autem viciſſim inde ſequitur, ſi hae conditiones locum habeant, etiam omnes aequationis radices fore reales: quod exemplo aequationis biquadraticae ante allegatae $x^4+px^3-qx^2-rx+s=0$ fit manifeſtum, cum enim facta applicatione ſit $a=p$; $b=-q$; $c=-r$ et $d=s$; conditiones inuentae ſponte implentur quoniam vtique eſt $pp>-2q$; $qq>-2pr-2s$; $rr>-2qs$ hoc autem non obſtante nouimus, omnes huius aequationis radices eſſe poſſe imaginarias.

Scholion.

Quemadmodum hic ex data aequatione aliam elicuimus, cuius ſingulae radices ſint quadrata ſingularum radicum illius, ita etiam inde aliae aequationes inueniri poſſunt, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata vel aliae poteſtates altiores radicum aequationis propoſitae.

Poni ſcilicet oportet vel $z=x^3$, vel $z=x^4$, vel $z=x^5$ etc. et negotium huc redit vt quantitas x eliminetur: pro qua operatione regulae paſſim ſunt traditae.

Verum

Verum calculus plerumque tam fit intricatus et molestus, vt nemo facile hunc laborem fit susceptururs.

Quare haud abs re fore arbitror peculiarem methodum ostendisse, qua haec eliminatio facile effici queat.

Hunc in finem aequatio ordine inuerso exhibeatur vt fit

$$a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{etc.} = 0$$

et pro casu iam euoluto, quo esse debet $z = xx$, facta substitutione, quatenus licet, habebimus

$$a + bx + cz + dxz + ezz + fxzz + gz^3 + \text{etc.} = 0$$

vbi breuitatis gratia statuamus

$$a + cz + ezz + gz^3 + \text{etc.} = P \text{ et } b + dz + fzz + \text{etc.} = Q$$

vt fit $P + Qx = 0$, quae aequatio per x multiplicata loco xx, scribendo z, dabit aliam eiusdem formae

$$Px + Qz = 0$$

vnde iam facile x eliminatur; prodit enim

$$PP - QQz = 0$$

quae formula operationem supra vsurpatam complectitur.

Ponamus autem requiri vt fit $z = x^3$, factaque substitutione quatenus licet, habebitur

$$a + bx + cxx + dz + exz + fxxz + gzz + \text{etc.} = 0$$

quae

quae cum tribus partibus conſtet, ſtatuamus breuitatis gratia $a+dz+gzz+$ etc. $=P$

$$b+ez+hzz+\text{etc.}=Q$$
$$c+fz+izz+\text{etc.}=R$$

vt ſit $P+Qx+Rxx=0$ haec per x multiplicata dat nouam eiusdem formae

$$Rz+Px+Qxx=0;$$ haec denuo per x multiplicata dabit

$$Qz+Rzx+Pxx=0.$$

Iam vt ex his tribus aequationibus tam x quam xx eliminetur prima per L ſecunda per M et tertia per N multiplicetur, fiatque

$$LQ+MP+NRz=0$$ et inſuper
$$LR+MQ+NP=0.$$

eritque tum $LP+MRz+NQz=0$.

Ex duabus prioribus autem elicitur

$$L=\frac{-MP-NRz}{Q}=\frac{-MQ-NP}{R}$$

ideoque $MPR+NRRz=MQQ+NPQ$

vnde fit $\frac{M}{N}=\frac{PQ-RRz}{PR-QQ}$.

Statuatur ergo $M=PQ-RRz$

et $N=PR-QQ$ ac fiet $L=QRz-PP$

quocirca aequatio quaeſita erit

$$3PQRz-P^3-Q^3z-R^3zz=0.$$

Hinc

Hinc iam satis perspicuum est, quomodo eadem methodus etiam ad altiores potestates sit accommodanda.

Secundum principium: ponamus aequationis propositae

$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} +$ etc. $= 0$ radices esse $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta, -$ etc. quarum numerus est n vt sit $a = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

et $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ etc.

Et quia omnes radices sunt reales erit sequens forma $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^2 +$ etc. certe numerus positiuus, facta autem euolutione, prodit $(n-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc.$) - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - 2\gamma\delta -$ etc. est vero vti constat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc. $= aa - 2b$ vnde haec forma $(n-1)(aa-2b) - 2b = (n-1)aa - 2nb$ quae quantitas cum certe sit positiua erit $aa > \frac{2n}{n-1} b$.

Quae iam insignem continet proprietatem huiusmodi aequationum quarum omnes radices sunt reales: etsi ea enim tantum ad tres terminos initiales se extendit, tamen mox patebit, quemadmodum ea ad ternos terminos quosuis successiuos applicari queat.

Tertium principium. Si aequationis cuiuscunque gradus:

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

 omnes

omnes radices fuerint reales, ſemper duae aequationes vno gradu inferiores inde formari poſſunt quarum radices itidem omnes ſunt reales; altera ita ſe habet

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex propoſita naſcitur ſi ſinguli eius termini per progreſſionem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc. multiplicentur; quia enim hoc modo vltimus terminus per 0 multiplicatur, tota aequatio diuiſionem per x admittet, ſicque vno gradu deprimetur: altera vero aequatio eſt

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

quae ex propoſita naſcitur, ſi ſinguli eius termini per progreſſionem arithmeticam 0, 1, 2, 3, 4 etc. multiplicentur.

Cuius demonſtratio ex conſideratione linearum curuarum eſt petenda: ſi enim x denotet abſciſſam et applicata ſtatuatur $y=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\text{etc.}$ euidens eſt applicatam fieri nullam quoties abſciſſa x radici aequationis propoſitae aequalis capitur.

Cum igitur noſtra aequatio n habeat radices reales, in totidem locis applicata y euaneſcet, ibique curua axem interſecabit. Inter binas igitur interſectiones certo dabitur applicata maxima, vbi erit $\frac{dy}{dx}=0$, vnde tales applicatae maximae erunt numero

mero $n-1$ ad minimum; quodsi ergo valor formulae $\frac{dy}{dx}$ quaeratur qui erit

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + \text{etc.}$$

hic $n-1$ casibus euanescere poterit, siue haec aequatio $nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + \text{etc.} = 0$ certe habebit $n-1$ radices, hoc est, omnes suas radices reales, quae est demonstratio prioris formae.

Pro altera statuamus $x = \frac{1}{y}$ et aequatio hinc resultans $1 + ay + byy + cy^3 + \text{etc.} = 0$ itidem omnes habebit radices reales, quippe quae sunt reciprocae radicum illius; quocirca aequatio per differentiationem hinc simili modo formata

$$a + 2by + 3cyy + 4dy^3 + \text{etc.} = 0$$

etiam omnes radices habebit reales; restituamus nunc pro y valorem $\frac{1}{x}$, ac manifestum erit etiam huius aequationis

$$ax^{n-1} + 2bx^{n-2} + 3cx^{n-3} + 4dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices futuras esse reales.

Quemadmodum hinc duae aequationes vno gradu inferiores sunt erutae, ita porro ex his tres nouae duobus gradibus inferiores deriuantur, quae sunt

$$n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)ax^{n-3} + (n-2)(n-3)bx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

$$1.(n-1)ax^{n-2} + 2.(n-2)bx^{n-3} + 3\,(n-3)cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

$$1.2.bx^{n-2} + 2.\,3.\,cx^{n-3} + 3.\,4.\,dx^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

Simili modo ex his elicientur quatuor aequationes tribus gradibus inferiores, scilicet:

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)bx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)(n-2)ax^{n-3}+2.(n-2)(n-3)bx^{n-4}+3.(n-3)(n-4)cx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.(n-2)bx^{n-3}+2.3.(n-3)cx^{n-4}+3.4.(n-4)dx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.3.cx^{n-3}+2.3.4.dx^{n-4}+3.4.5.ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

sicque continuo vlterius progredi licet: quoniam igitur omnes istae aequationes radices habent reales, quae criteria pro his aequationibus deriuatis habentur, eadem quoque in ipsa aequatione proposita locum habere debent.

Applicatio ad criteria primi principii.

Faciamus ergo applicationem ad criteria, ex primo principio eruta: et prima aequatio deriuata dabit:

$$(n-1)^2a^2 > 2n(n-2)b$$
$$(n-2)^2b^2 > 2(n-1)(n-3)ac-2n(n-4)d$$
$$(n-3)^2c^2 > 2(n-2)(n-4)bd-2(n-1)(n-5)ae+2n(n-6)f$$

etc. etc.

ex

ex fecunda autem aequatione deriuata nafcuntur haec criteria

$$4bb > 2.6ac$$
$$9cc > 2.8bd - 2.5ae$$
$$16dd > 2.3.5ce - 2.2.6bf + 2.7ag$$
$$25ee > 2.4.6df - 2.3.7cg + 2.2.8bh - 2.8ai$$

etc. etc.

Si tantum primum criterium $aa > 2b$ ad vltimas aequationes cuiusque ordinis applicetur, fequentia criteria emergent:

$$aa > 2b \qquad\qquad aa > 2b$$
$$4bb > 2.3.ac \qquad \text{fiue} \qquad bb > \tfrac{3}{2}ac$$
$$4.9.cc > 2.1.2.3.4bd \qquad\qquad cc > \tfrac{4}{3}bd$$
$$4.9.16\,dd > 2.1.2.3^2.4.5ce \qquad\qquad dd > \tfrac{5}{4}ce$$

etc.

Applicatio ad criterium fecundi principii

$$aa > \frac{2n}{n-1}b.$$

Cum fecundum hoc principium pro aequatione quacunque $px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} +$ etc. $= 0$ habeatur $qq > \frac{2m}{m-1}pr$ binae aequationes vno gradu inferiores dabunt

$$(n-1)^2 aa > \frac{2(n-1)}{n-2}.n.(n-2)b \text{ feu } aa > \frac{2nb}{n-1}$$

deinde $4bb > \frac{2.(n-1)}{n-2}.3ac$ feu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}.ac.$

Tres aequationes duobus gradibus inferiores autem dabunt

I. $(n-1)^2(n-2)^2 aa > \frac{2.\,n-2}{n-3}.\,n.(n-1)(n-2)(n-3)b$

seu $aa > \frac{2n}{n-1}\,b$

II. $4\,(n-2)^2\,bb > \frac{2.\,n-2}{n-3}.\,3.(n-1)(n-3)ac$

seu $bb > \frac{3}{2}.\,\frac{n-1}{n-2}\,ac$

III. $4.\,9.\;cc > \frac{2.\,n-2}{n-3}.\,1.\,2.\,3.\,4.\,bd$ seu

$cc > \frac{4}{3}.\,\frac{n-2}{n-3}\,b\,d.$

Cum igitur ex quolibet ordine vltima aequatio ſola praebeat nouum criterium; omnia criteria hinc nata ita ſe habebunt

$$aa > \frac{2}{1}.\,\frac{n}{n-1}\,b$$
$$bb > \frac{3}{2}.\,\frac{n-1}{n-2}\,ac$$
$$cc > \frac{4}{3}.\,\frac{n-2}{n-3}\,bd$$
$$dd > \frac{5}{4}.\,\frac{n-3}{n-4}\,ce$$

etc.

Hinc euoluamus iſta criteria pro aequationibus ſingulorum graduum.

I°. Pro $xx+ax+b=0$ erit criterium

$$aa > 4b$$

quod ita eſt perfectum, vt ſi ſit $aa > 4b$, radices certe ſint reales.

II°.

II°. Pro $x^3 + axx + bx + c = 0$

erunt criteria

$aa > 3b$; $bb > 3ac$.

III°. Pro $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{8}{3}b$; $bb > \frac{9}{4}ac$; $cc > \frac{8}{3}bd$

IV°. Pro $x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{5}{2}b$; $bb > 2ac$; $cc > 2bd$; $dd > \frac{5}{2}ce$.

V°. Pro $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$

erunt criteria

$aa > \frac{12}{5}b$; $bb > \frac{15}{8}ac$; $cc > \frac{16}{9}bd$; $dd > \frac{15}{8}ce$; $ee > \frac{12}{5}df$.

Scholion.

Omnia haec criteria a *Newtono* in Arithmetica vniuerſali ſunt prolata et deduci poſſunt ex criterio aequationum quadratarum, quod ſi aequatio $pxx + qx + r = 0$ ambas radices habeat reales neceſſario ſit $qq > 4pr$.

Cum enim cuiuscunque ordinis propoſita fuerit aequatio, ope tertii principii ex ea tandem plures aequationes quadraticae formae $pxx + qx + r = 0$ erui queant quae omnes radices habent reales, ſiquidem propoſitae aequationis omnes radices fuerit reales:

les: hoc principium ad aequationes cuiuscunque gradus extendi poterit.

Ita ex aequatione cubica $x^3 + axx + bx + c$ nascuntur hae duae quadraticae

$$3xx + 2ax + b = 0 \quad \text{et} \quad axx + 2bx + 3c = 0$$

vnde concluditur vt ante

$$aa > 3b \quad \text{et} \quad bb > 3ac.$$

Simili modo aequatio quarti ordinis

$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$ praebet has tres quadraticas

$$4.3.\ xx + 3.2.ax + 2.1.b = 0$$
$$1.3.axx + 2.2.bx + 3.1.c = 0$$
$$1.2.bxx + 2.3.cx + 3.4.d = 0$$

et aequatio quinti gradus

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ praebet has quatuor quadraticas

$$5.4.3.\ xx + 4.3.2.ax + 3.2.1.b = 0$$
$$1.4.3\ axx + 2.3.2.bx + 3.2.1.c = 0$$
$$1.2.3.bxx + 2.3.2.cx + 3.4.1.d = 0$$
$$1.2.3.cxx + 2.3.4.dx + 3\ 4.5.e = 0$$

quae supra allata criteria suppeditant.

Quoniam autem operosum foret has formas vlterius continuare rem generatim expediamus et ex aequa-

aequatione cuiuscunque gradus ſtatim aequationem quadraticam quamcunque eliciamus.

Aequationem generalem ita exhibeamus

$$\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px^{\lambda+2} + qx^{\lambda+1} + rx^{\lambda} + \dots + v = 0} \\
\hline
0 & 1 & 2 & \dots\dots & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda & \\
 & 0 & 1 & \dots\dots & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & \\
 & & 0 & \dots\dots & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda & \dots\dots 0 \\
 & & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 & \dots 0 \\
 & & & & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2 & \dots 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & 3 & 2 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+ 1.2.3 \dots n-\lambda-2 . 3.4.5 \dots \lambda+2 . pxx \\
+ 2.3.4 \dots n-\lambda-1 . 2.3.4 \dots \lambda+1 . qx \\
+ 3.4.5 \dots n-\lambda \,.\, 1.2.3 \dots \lambda r
\end{array}\right\} = 0$$

Vnde patet pro ternis coefficientibus p, q et r hanc obtineri aequationem quadraticam

quae primo diuiſa per $1.\ 2.\ 3.\ 4 \dots\dots n-\lambda-2$ dabit

$$3.4.5 \dots\dots \lambda+2 . pxx + \frac{n-\lambda-1}{1} . 2.3.4 \dots\dots \lambda+1 . qx + \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2} . 1.\ 2.\ 3 \dots \lambda r = 0$$

quae denuo per $1.\ 2.\ 3 \dots\dots \lambda$ diuiſa dabit

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\ 2} pxx + \frac{n-\lambda-1}{1} . \frac{\lambda+1}{1} qx + \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\ 2} r = 0$$

vnde pro radicibus realibus hoc habetur criterium

$$\frac{(n-\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{1.\quad 1} qq > 4.\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\quad 2\quad 1.\quad 2} pr$$

quod reducitur ad hoc

$$qq > \frac{\lambda+2}{\lambda+1}.\frac{n-\lambda}{n-\lambda-1} pr.$$

Quemadmodum haec criteria ex caractere aequationum quadraticarum ſunt deriuata, ita ſi caractere aequationum cubicarum, quarum omnes radices ſunt reales, ſimili modo vti velimus, alia noua criteria impetrabimus, ſicque certius circa radices imaginarias aequationum iudicium inſtituere licebit.

Problema.

Caracterem completum inueſtigare pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices ſunt reales.

Solutio.

Quoniam conſtat aequationis cubicae omnes radices eſſe reales, quoties regula *Cardani* ad formulas imaginarias perducit; ponamus aequationem cubicam $x^3+axx+bx+c=0$ ex hac forma naſci $(x+\frac{1}{3}a) = \sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ ſumtis igitur vtrinque cubis prodit

$$x^3+axx+\tfrac{1}{3}aax+\tfrac{1}{27}a^3=p+q+3(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})\times\sqrt[3]{pq}$$

vel $=p+q+(3x+a)\sqrt[3]{pq}$ ſeu

x^3+axx

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + axx + \tfrac{1}{3}aax + \tfrac{1}{27}a^3 \\ -3x\sqrt[3]{pq} - p \\ -q \\ -a\sqrt[3]{pq} \end{array}\right\} = 0$$

quae forma cum aequatione propoſita comparata praebet $b = \tfrac{1}{3}aa - 3\sqrt[3]{pq}$ et

$c = \tfrac{1}{27}a^3 - p - q - a\sqrt[3]{pq}$; cum ergo ſit

$\sqrt[3]{pq} = \tfrac{1}{9}aa - \tfrac{1}{3}b = \frac{aa-3b}{9}$ hincque

$pq = \frac{(aa-3b)^3}{729}$ et $p+q = \tfrac{1}{27}a^3 - \frac{a(aa-3b)}{9} - c = \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - c$

colligimus $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$

$$= \tfrac{1}{729}aa(9b-2aa)^2 - \tfrac{2}{27}ac(9b-2aa) + cc$$
$$- \tfrac{4}{729}(aa-3b)^3$$

quae quantitas ſi fuerit negatiua, formula $p-q$ ideoque ambae litterae p et q obtinebunt valores imaginarios; quod cum ſit ſignum radicum realium ſtatuamus

$$\left(\tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - c\right)^2 - \tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 = -\omega$$

hincque

$$\tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - c = \pm\sqrt{\left(\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$$

et $c = \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) \mp \sqrt{\left(\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$.

Vnde pro c deducuntur hi limites

$$c < \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) + \tfrac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$
$$c > \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - \tfrac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vel quoniam inde habetur $bb-3ac=\frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)\pm 3a\sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3-\omega)}$

pro $bb-3ac$ hi oriuntur limites

$$bb-3ac < \tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)+\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$

$$bb-3ac > \tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)-\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vnde deducimus

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b} < \frac{2aa-3b+2a\sqrt{(aa-3b)}}{9} \text{ seu}$$

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b} < \left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b} > \left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2.$$

Quoties ergo formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ valor intra hos limites $\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ et $\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ continetur certi sumus omnes radices nostrae aequationis cubicae esse reales. In quo adeo consistit caracter completus quem quaerimus.

Corollarium 1.

Quia limites inuenti locum habere nequeunt nisi $aa-3b$ sit quantitas positiua, hinc statim perspicuum est radices reales esse non posse nisi sit $aa>3b$: quod criterium iam in supra allatis continetur.

Corollarium 2.

Deinde cum ambo limites sint quadrata ideoque quantitates positiuae, valor formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ debet

debet esse positiuus; quare cum sit $aa > 3b$ necesse est vt fiat quoque $bb > 3ac$; quod est alterum criterium supra iam allatum.

Corollarium 3.

Videmus ergo non solum ambo criteria ante inuenta in hoc charactere contineri, sed hunc characterem praeterea aliam conditionem complecti, quae nisi impleatur, radices non futurae sint reales, etiamsi fuerit $aa > 3b$ et $bb > 3ac$.

Mirum igitur videri poterit quod vnicus character plura criteria in se complectatur.

Scholion 1.

Si in aequatione cubica sumamus esse $c = 0$ vt ea abeat in quadraticam, manifestum est ad realitatem radicum requiri vt sit $aa > 4b$, atque adeo in hoc contineri characterem completum. Interim tamen si in nostro charactere inuento statuamus $c = 0$, non tam facile patet inde sequi $aa > 4b$; prodit enim $\frac{bb}{aa-3b} \gtrless \left(\frac{a \mp \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ operae igitur erit pretium inuestigare, quomodo iste character ad simplicem formam $aa > 4b$ reducatur.

Reuertamur igitur ad conditionem primo inventam, quae posito $c = 0$ abit in hanc formam $aa(9b-2aa)^2 - 4(aa-3b)^3 < 0$

 quae

quae contrahitur in hanc $-27bb(aa-4b) < 0$ seu $bb(aa-4b) > 0$ vnde manifesto sequitur $aa > 4b$. Ceterum tamen memoratu dignum hic vsu venit quod conditio

$$\frac{bb}{aa-3b} \lessgtr \left(\frac{a \pm \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

prorsus conueniat cum ista $aa > 4b$, ita vt neutra plus inuoluat quam altera, sicque haec conuenientia tanquam insigne Theorema spectari possit.

Hoc quidem ostendi potest, quantitatem $\frac{bb}{aa-3b}$ alterutri limiti ipsi fore aequalem si fuerit vel $aa = 4b$ vel $aa = \infty$; intra quos casus extremos vtique cadit $aa > 4b$.

Scholion 2.

Iste caracter completus alio modo prorsus singulari inuestigari potest, vnde autem non patet eum esse completum, nisi de eo iam certiores essemus facti. Sequenti autem modo ratiocinium institui potest.

Si aequatio $x^3 + axx + bx + c$ omnes radices habet reales, tum posito $x = y + p$ aequatio resultans $y^3 + (a+3p)yy + (b+2ap+3pp)y + c + bp + app + p^3 = 0$ etiam habebit radices omnes reales; criteria autem iam cognita dant

I. $(a+3p)^2 > 3(b+2ap+3pp)$ hoc est $aa > 3b$

II. $(b+2ap+3pp)^2 > 3(a+3p)(c+bp+app+p^3)$ hoc est

$$bb + (ab-9c)p + (aa-3b)pp > 3ac$$

quae

quae conditio impletur tam ſi $p = 0$ quo fit $bb > 3ac$ quam ſi $p = \infty$ quia $aa > 3b$.

Tribuatur igitur ipſi p eiusmodi valor quo formula illa fit minima, atque etiam nunc illa erit $> 3ac$. Verum formula $A + Bp + Cpp$ fit minima ſumto $p = \frac{-B}{2C}$ eiusque valor minimus erit $A - \frac{BB}{4C}$; facta ergo applicatione habebimus

$$bb - \frac{(ab - 9c)^2}{4(aa - 3b)} > 3ac.$$

Quia $aa > 3b$ multiplicetur per $4(aa - 3b)$ et obtinebimus facta euolutione

$$3bb(aa - 4b) > 81cc + 6ac(2aa - 9b)$$

quod criterium completum ſupra inuentum continet.

Concluſio.

Pro Applicatione ergo ad aequationes altiorum graduum ſi methodo ante expoſita inde deriuentur aequationes cubicae huius formae

$$px^3 + qxx + rx + s = 0.$$

Criterium radicum realium in hoc conſiſtit vt ſit

$$\frac{rr - 3qs}{qq - 3pr} \lessgtr \left(\frac{q \pm \sqrt{(qq - 3pr)}}{3p}\right)^2$$

qua ſcribendi ratione indicatur quantitatem $\frac{rr - 3qs}{qq - 3pr}$ intra hos limites $\left(\frac{q + \sqrt{(qq - 3pr)}}{3p}\right)^2$ et $\left(\frac{q - \sqrt{(qq - 3pr)}}{3p}\right)^2$ contineri debere.

Appli-

Applicatio

ad aequationem quarti ordinis

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Hinc methodo ſupra oſtenſa deriuantur hae duae aequationes cubicae

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$$
$$ax^3 + 2bx^2 + 3cx + 4d = 0.$$

Vnde, ſi omnes radices ſunt reales, inueniuntur duo ſequentia noua criteria

$$\frac{4bb - 9ac}{9aa - 24b} \lessgtr \left(\frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 24b)}}{12}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{9cc - 24bd}{4bb - 9ac} \lessgtr \left(\frac{2b \pm \sqrt{(4bb - 9ac)}}{3a}\right)^2$$

Simili modo applicatio fieri poſſet ad aequationes quinti gradus, vnde tria criteria obtinerentur, et ita porro ad aequationes altiorum graduum.

Verum res adeo in genere praeſtari poteſt, ita vt propoſita aequatione cuiuscunque ordinis, inter quaternos eius coefficientes ſucceſſiuos tale criterium inueniri poſſit: eodem ſcilicet modo calculum inſtitui opportet, quo ſupra pro criteriis prioris ordinis ſumus vſi (vid. Scholion ante Probl.)

$$\begin{array}{llllllllll}
x^n+ax^{n-1}&+bx^{n-2}\dots&&+px^{\lambda+3}&+qx^{\lambda+2}&+rx^{\lambda+1}&+sx^{\lambda}\dots&+px^2&+qx&+v=0\\
0, & 1, & 2 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda\dots, & n-2 & n-1 & n\\
 & 0 & 1 & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1\dots & n-3 & n-2 & n-1\\
 & & 0 & n-\lambda-5 & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2\dots & n-4 & n-3 & n-2\\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda\dots\dots & 2 & 1 & 0\\
 & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1\dots\dots & 1 & 0 & \\
 & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2\dots\dots & 0 & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & 4 & 3 & 2 & 1 & & &
\end{array}$$

Hinc ergo per continuas differentiationes ad hanc aequationem cubicam peruenitur

$$\left.\begin{array}{l}1.2.3\dots(n-\lambda-3).4.5.6\dots(\lambda+3)px^3+2.3.4\dots(n-\lambda-2).3.4.5\dots(\lambda+2)qx^2\\ +3.4.5\dots(n-\lambda-1).2.3.4\dots(\lambda+1)rx+4.5.6\dots(n-\lambda).\,1.2.3\dots\dots\lambda\; s\end{array}\right\}=0$$

quae diuiſa per $1.\,2.\,3\dots\dots(n-\lambda-3).\,1.\,2.\,3\dots\dots\lambda$ reducitur ad hanc formam

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.\quad 2.\quad 3}px^3+\frac{(n-\lambda-2)}{1}.\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\quad 2}qxx\\ +\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)}{1.\quad 2}.\frac{(\lambda+1)}{1}rx+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)}{1.\quad 2.\quad 3}s\end{array}\right\}=0$$

ſeu

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)px^3+3.(\lambda+1)(\lambda+2)(n-\lambda-2)qxx\\ +3(\lambda+1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)rs+(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)s\end{array}\right\}=0$$

Quare ex aequatione generali quacunque

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}+fx^{n-6}+gx^{n-7}+hx^{n-8}\text{etc.}=0$$

 elicien-

elicientur ſequentes aequationes cubicae

I. Si $\lambda = n-3$ erit

$$n(n-1)(n-2)x^3 + 1.3\,(n-1)(n-2)axx + 1.2.3.(n-2)bx + 1.2.3\,c = 0$$

ſeu $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}axx + \frac{(n-2)}{1}bx + c = 0.$

II. Si $\lambda = n-4$ erit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}ax^3 + 2.\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}bxx + 3.\frac{(n-3)}{1}cx + 4d = 0$$

III. Si $\lambda = n-5$ erit

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}bx^3 + 3.\frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}cxx + 6.\frac{n-4}{1}dx + 10e = 0$$

IV. Si $\lambda = n-6$ erit

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}cx^3 + 4.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2}dxx + 10.\frac{n-5}{1}ex + 20f = 0$$

etc.

Quod ſi ergo aequatio propoſita omnes radices habet reales, ſingulae hae aequationes cubicae etiam ſuas radices habebunt reales; Vnde ſequentia oriuntur criteria

$$\frac{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac}{aa - \frac{2n}{n-1}b} \lessgtr \frac{1.(n-1)^2}{4.n^2}\left(a \pm \sqrt{\left(aa - \frac{2n}{n-1}b\right)}\right)^2$$

$$\frac{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd}{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac} \lessgtr \frac{4.(n-2)^2}{9.(n-1)^2 aa}\left(b \pm \sqrt{\left(bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac\right)}\right)^2$$

$$\frac{dd - \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4}ce}{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd} \lessgtr \frac{9.(n-3)^2}{16.(n-2)^2 bb}\left(c \pm \sqrt{\left(cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd\right)}\right)^2$$

$ce - \frac{6}{5}.$

$$\frac{ee-\frac{6}{5}\cdot\frac{n-4}{n-5}df}{dd-\frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce} \lessgtr \frac{16.(n-4)^2}{25.(n-3)^2cc}\left(d\pm\sqrt{\left(dd-\frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce\right)}\right)^2$$

etc. etc.

vnde lex progreſſionis clare perſpicitur.

Obſeruatio.

Quae hactenus attulimus praeter primum criterium ad duo genera reducuntur, quae proprietates aequationum quarum omnes radices ſunt reales in ſe complectuntur; primum genus eiusmodi relationes ſuppeditat, quae inter ternos quosque coefficientes ſucceſſiuos locum habent, et quae iam pridem ſunt cognitae. Alterum genus vero eiusmodi praebet relationes, quae inter quaternos quosque coefficientes ſucceſſiuos neceſſario ſubſiſtere debent, ſi quidem omnes radices fuerint reales. Circa vtrumque genus obſeruaſſe iuuabit, nullam accuratiorem relationem vel inter ternos vel quaternos coefficientes ſucceſſiuos exhiberi poſſe.

Quoties vel vnica harum relationum in quapiam aequatione locum non inuenit, certo concludere licet non omnes radices eſſe reales; vtrum autem duae tantum vel plures futurae ſint imaginariae, hinc non definitur. Ex defectu quidem vnici criterii concludi oportet ad minimum duas radices fore imaginarias, neque tamen hinc ſequitur duorum defectum quatuor radices imaginarias indicare.

 Si

Si enim aequatio propoſita fuerit tertii gradus, duo caracteres primi generis ad eam applicari poſſunt, qui etſi ambo deficiant, aequatio tamen non plures quam duas radices imaginarias habere poteſt.

Quemadmodum hos caracteres ex indole aequationum quadraticarum et cubicarum, quarum radices ſunt reales, deriuauimus, ita ſi commode aequationum biquadraticarum caracterem completum pro caſu quo omnes radices ſunt reales exprimere liceret, ſimili modo criteria tertii generis inde deducere poſſemus quibus relationes inter quinos quosque coefficientes ſucceſſiuos continerentur; verum cum formulae nimis prodirent prolixae, ad hunc vſum prorſus ineptae videntur.

Concluſio.

Cum hic plura principia in ſubſidium ſint vocata, coronidis loco oſtendam, quomodo omnia haec criteria ex duobus tantum principiis methodo ſatis ſingulari deduci queant.

Propoſita ſcilicet aequatione cuiuscunque gradus

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + d x^{m-4} \text{ etc.} = 0$$

cuius omnes radices ſint reales, pro priori principio aſſumo, ſemper eſſe $aa > 2b$, quod per ſe eſt manifeſtum, cum formula $aa - 2b$ exprimat ſummam quadratorum ſingularum radicum, alterum principium

pium in hoc confiftit, quod huius aequationis vno gradu inferioris

$$a x^{m-1} + 2 b x^{m-2} + 3 c x^{m-3} + 4 d x^{m-4} + \text{etc.} = 0$$

etiam omnes radices futurae fint reales; quod fupra eft demonftratum.

His iam duobus principiis conftitutis ratiocinium ita profequor.

I. Pro criteriis primi generis, ftatuo $x = y + p$ denotante p quantitatem realem, vt aequatio hinc refultans etiamnunc omnes fuas radices habeat reales, quae erit

$$\left.\begin{array}{lllll} y^m & + m p y^{m-1} & + \frac{m(m-1)}{2} pp y^{m-2} & + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} p^3 y^{m-3} & + \text{etc.} \\ & + a & + (m-1) a p & + \frac{(m-1)(m-2)}{2} a p p & + \text{etc.} \\ & & + b & + (m-2) b p & + \text{etc} \\ & & & + c & + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

per prius igitur principium neceffe eft vt hic fit

$$(mp + a)^2 > m(m-1) pp + 2(m-1) ap + 2b$$

feu facta euolutione $mpp + 2ap + aa > 2b$ quod cum de omnibus valoribus ipfius p valere debeat, neceffe eft vt etiam de eo valeat, quo ea formula fit minima, quod euenit fi fumatur $p = \frac{-a}{m}$, tum autem habebitur $aa > \frac{2m}{m-1} b$; quod eft primum criterium primi generis; ex quo reliqua per aequationes quas fecundum principium praebet fucceffiue deriuantur

Aequationes	Criteria
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0$	$aa > \frac{2m}{m-1} b$
$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$	$bb > \frac{3\cdot(m-1)}{2\cdot(m-2)} ac$
$bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 6dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$	$cc > \frac{4\cdot(m-2)}{3\cdot(m-3)} bd$
$cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + 10ex^{m-5} + \text{etc.} = 0$	$dd > \frac{5\cdot(m-3)}{4\cdot(m-4)} ce$
etc.	etc.

II. Pro criteriis secundi generis. Retenta substitutione $x = y + p$ aequationis inde resultantis, reiecto primo termino consideremus tres sequentes ad eosque criterium modo inuentum $bb > \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)}{(m-2)} ac$ applicemus, quod hanc aequationem praebebit

$$\left(\frac{m(m-1)}{2} pp + (m-1) ap + b\right)^2 > \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)}{(m-2)} (mp + a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{m(m-1)(m-2)}{6} p^3 \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{2} app \\ + (m-2) bp + c \end{array} \right\}$$

vnde facta euolutione peruenietur ad sequentem conditionem

$$\left(aa - \frac{2 \cdot m}{m-1} b\right) pp + \frac{2}{m-1} \left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right) p + \frac{4}{(m-1)^2} bb > \frac{6}{(m-1)(m-2)} ac$$

statuatur nunc $p = \frac{-\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right)}{(m-1)\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)}$ vt valor primi membri fiat minimus, obtinebimusque hanc conditionem, multiplicando per $\frac{(m-1)^2}{4}$

$$bb - \frac{\left(ab - \frac{3m}{m-2} c\right)^2}{4\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)} > \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)}{(m-2)} ac.$$

Quia iam $aa > \frac{2m}{m-1} b$, conditionem hanc per $4\left(aa - \frac{2m}{m-1} b\right)$ multiplicare licebit; tunc autem facta euolu-

euolutione obtinebimus hoc criterium fecundi generis

$$bb\left(3aa-\frac{8m}{m-1}b\right)>\frac{9mm}{(m-2)^2}cc+\frac{6ac}{m-2}((m-1)aa-3mb)$$

ex quo deinceps eruitur vt fupra inuenimus

$$\frac{bb-\frac{3}{2}\cdot\frac{(m-1)}{m-2}ac}{aa-\frac{2m}{m-1}b} \lessgtr \frac{1.(m-1)^2}{4.m^2}\left(a\pm\sqrt{\left(aa-\frac{2m}{m-1}b\right)}\right)^2.$$

Quae formula ad aequationes differentiales applicata dabit reliqua criteria huius fecundi generis.

Hinc concludere licet, fi quis fimili modo progredi, et fecundum criterium huius generis ad aequationem transformatam, pofito $x=y+p$, accommodare vellet, inde nouum criterium tertii ordinis deduci poffe, quod contineret relationem inter quinos coefficientes fucceffiuos: Verum tum in formula refultante littera p ad quartam dimenfionem effet afcenfurum, vnde eius valor eam formulam minimam reddens non applius commode definiri poffet; quamobrem hanc inueftigationem vlterius non profequor, eo contentus, quod criteria fecundi generis, quae adhuc noua videntur, exhibuerim.

CON-