1769

Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi necne

Leonhard Euler

QVOMODO NVMERI
PRAEMAGNI SINT EXPLORANDI, VTRVM SINT PRIMI, NEC NE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Ante omnia monendum eſt, me hic non eiusmodi methodum polliceri, cuius ope omnes omnino numeri, cuiuscunque ſint generis, examinari queant, vtrum ſint primi nec ne? Huiusmodi enim methodum vix aliam dari poſſe exiſtimo, niſi quae ad regulam redeat vulgarem, qua diuiſio per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minores eſt tentanda, quae operatio ſane, ſi numeri ſaltem mediocriter magni proponantur, nimis eſt moleſta, quam vt ſuſcipi queat. Quae igitur hic in medium afferre conſtitui, ad certum tantum numerorum genus ſunt reſtringenda, pro quo ſcilicet hoc examen, vtrum ſint primi nec ne? citra laborem tam operoſum inſtitui queat. Cum enim numerorum primorum natura adhuc maxime ſit abſcondita, quicquid in hoc negotio praeſtare licuerit, etiamſi alias arctiſſimis limitibus ſit circumſcriptum, vſu neutiquam deſtitui eſt cenſendum.

2. Numeros ergo tantum in hac forma $4n+1$ contentos sum contemplaturus, de quibus equidem post Fermatium demonstraui, si huiusmodi numerus fuerit primus, tum eum semper esse summam duorum quadratorum, idque vnico modo. Vnde proposito numero quocunque huius formae $4n+1$, examen vtrum sit primus nec ne? hoc modo instituetur. Ab eo successiue omnes numeri quadrati ipso minores auferantur, eaque notentur residua, quae pariter sint numeri quadrati; atque si vnico modo numerus propositus $4n+1$ in forma $aa+bb$ contineri deprehendatur, id certum erit criterium numerum propositum esse primum. Sin autem vel prorsus non in ea forma contineatur, vel plus vno modo, tum certe non erit primus; priori quidem casu quo numerus $4n+1$ non est summa duorum quadratorum plus concludere non licet, quam eum non esse primum neque inde eius diuisores innotescunt, sin autem plus vno modo fuerit duorum quadratorum summa veluti $4n+1=aa+bb=cc+dd$, tum hinc quaerantur eiusmodi bini numeri p et q vt sit $\frac{p}{q}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$ vel $\frac{p}{q}=\frac{a\pm d}{b\pm c}$, ac numeri $4n+1$ et $pp+qq$ certo habebunt diuisorem communem, qui ergo facile assignatur.

3. Proposito itaque huiusmodi numero $4n+1$ operationem ita institui conuenit, vt ab eo continuo numerii quadrati subtrahantur, eaque residua tantum notentur, quae etiam sint numeri quadrati; vbi

vbi quidem ſtatim apparet, hanc ſubtractionem non vltra quadrata ſemiſſi minora continuari opus eſſe. Si enim fuerit $4n+1 = aa+bb$, horum quadratorum alterum certe erit minus ſemiſſe $\frac{4n+1}{2}$. Vel cum horum binorum quadratorum alterum neceſſario ſit par, alterum impar, ſufficiet vel paria tantum, vel imparia quadrata ipſo numero propoſito minora ſubtrahi, quo pacto multitudo quadratorum ſubtrahendorum haud mediocriter imminuitur. Cum autem numerus omnium quadratorum ipſo numero propoſito minorum ſit $= \sqrt{(4n+1)}$, eorum autem quae eius ſemiſſe ſunt minora $= \sqrt{\frac{4n+1}{2}}$; erit quadratorum ſemiſſe maiorum numerus $= (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{4n+1}$ $= \frac{5}{17}\sqrt{(4n+1)}$ proxime; quae quoniam etiam ſubtrahi ſufficit, hoc modo numerus ſubtractionum ad trientem fere redigitur.

4. Maxime ergo expedire videtur hanc operationem ita inſtitui, vt a quadrato maximo infra numerum propoſitum $4n+1$ initium capiatur, indeque quadrata continuo minora ſubtrahantur, donec ad quadrata ſemiſſi minora perueniatur. Veluti ſi numerus propoſitus ſit 101, ſufficiet inde haec tria quadrata 100, 81, 64 ſubtraxiſſe, quia ſequens 49 iam foret ſemiſſi $50\frac{1}{2}$ minus, hoc modo cum inter tria reſidua 1, 20, 37 vnicum occurrat quadratum 1, hoc certum eſt ſignum, numerum 101 eſſe primum. Verumtamen ſi numerus propoſitus $4n+1$ fuerit praemagnus, etiam hae operationes

 nimis

nimis multiplicantur; ex quo in id potissimum erit incumbendum, vt harum subtractionum numerus imminuatur; quod fiet si eae excludantur, quae ad talia residua perducunt, quae a quadratorum natura abhorreant, cuiusmodi sunt residua in his formis contenta: $3m+2$; $5m+2$; $5m+3$; $8m+5$ etc. formae enim $8m+3$ et $8m+7$ ob indolem numeri propositi $4n+1$ nunquam occurrunt.

5. Dantur autem certae numerorum formae $4n+1$ species vnde plurima quadrata inde subtrahenda excluduntur. Veluti si sit $4n+1=3m+2$, ac ponatur hic numerus $=xx+yy$, vterque numerus x et y in forma $3p\pm 1$ contineatur necesse est, ita vt numeri formae $3p$ excludantur, simili modo si sit $4n+1=5m+2$, vtrumque numerum x et y in forma $5p\pm 1$ contineri oportet, et si $4n+1=5m+3$ in forma $5p\pm 2$. Denique si $8m+5=xx+yy$ numerorum quidem x et y alter est impar alter par, hic vero adeo impariter par seu formae $4p+2$. Quod si ergo simul fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+2$$

numeros x et y simul in his duabus formis $3p\pm 1$ et $5p\pm 1$ contineri oportet, vnde eorum forma concluditur:

$$x \text{ vel } y=15p\pm(1,4).$$

At si fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+3$$

forma

forma numerorum x et y eſt et $3p \pm 1$, et $5p \pm 2$, quae duplex forma in hanc vnam contrahitur

$$x \text{ vel } y = 15p \pm (2, 7).$$

6. Quoniam hoc modo duae tertiae partes omnium numerorum, quos tentari oporteret, excluduntur, hi caſus imprimis ſunt apti, quibus examen ſatis expedite inſtituere licebit. Quare numerorum $N = 4n + 1$ eas ſpecies potiſſimum contemplemur, quae vel in his duabus formis $3m + 2$ et $5m + 2$, vel in his $3m + 2$ et $5m + 3$ contineantur. Numeri autem prioris ſpeciei ad hanc formam $15m + 2$ reducuntur, qui cum inſuper in forma $4n + 1$ contineri debeant, haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species prima: $N = 60n + 17$

qui numerus alio modo ſumma duorum quadratorum eſſe nequit, niſi vtriusque quadrati radix ſit numerus formae $15p \pm (1, 4)$, ſcilicet vel $15p \pm 1$ vel $15p \pm 4$, vnde numeri tentandi ex his quatuor progreſſionibus ſunt capiendi:

1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121, 136 etc.

4, 19, 34, 49, 64, 79, 94, 109, 124, 139 etc.

11, 26, 41, 56, 71, 86, 101, 116, 131, 146 etc.

14, 29, 44, 59, 74, 89, 104, 119, 134, 149 etc.

et reliquos omnes in hoc negotio praetermittere licet.

7. Si-

7. Simili modo alteram ſpeciem euoluamus, quae duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ continetur, et propterea ad hanc vnam $15m+8$ reuocatur. Hinc autem tantum illi numeri ſunt vſui, qui ſimul ſunt formae $4n+1$, ex quo haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species ſecunda $N = 60n + 53$.

Huius ergo formae ſi fuerit numerus explorandus, vtrum ſit primus nec ne? ab eo alia quadrata ſubtrahi non eſt opus, niſi quorum radices in hac forma $15p \pm (2, 7)$ contineantur; quas ergo ex ſequentibus quaternis progreſſionibus arithmeticis ſumi oportet:

2, 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152 etc.
7, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, 127, 142, 157 etc.
8, 23, 38, 53, 68, 83, 98, 113, 128, 143, 158 etc.
13, 28, 43, 58, 73, 88, 103, 118, 133, 148. 163 etc.

hoc ergo modo multitudo quadratorum ſubtrahendorum fere ad trientem reducitur.

8. Neque vero his omnibus quadratis tentamen inſtitui opus eſt, prout enim numerus propoſitus N inſuper fuerit comparatus, inde praeterea multa excluduntur. Cum enim omnes numeri formae $N = 4n + 1$ in has quatuor reſoluantur:

$$16n+1,\ 16n+5,\ 16n+9,\ 16n+13$$

ſi

si statuatur $N = xx + yy$, et x denotet numerum parem, y vero imparem, pro his speciebus numeri x et y sequenti modo comparati reperiuntur:

si sit	erit	et
$N = 16n + 1$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 9$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 3$
$N = 16n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 3.$

9. Combinemus has quaternas species cum binis praecedentibus, et obtinebimus sequentes octo species, pro quibus formas tam radicis paris x quam imparis y exhibeamus:

si fuerit N	erit $x =$	et $y =$
$240n + 17$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 137$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 113$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$
$240n + 233$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$

10. Dantur autem in his numeris species, quibus adhuc plures numeri tentandi excluduntur, quae ita se habent

si sit	erit	et
$N = 32n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 1$
$N = 32n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 3$
$N = 32n + 21$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 7$
$N = 32n + 29$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 5$

quae cum binis principalibus combinatae praebent

si sit N	erit $x =$	et $y =$
$480n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (19, 29, 61, 109)$
$480n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (1, 31, 49, 79)$
$480n + 317$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (11, 59, 91, 101)$
~~$480n + 437$~~	~~$60m \pm (14, 26)$~~	~~$240p \pm (41, 71, 89, 119)$~~
$480n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (7, 23, 73, 103)$
$480n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (13, 67, 77, 83)$
$480n + 293$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (17, 47, 97, 113)$
$480n + 413$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (37, 43, 53, 107)$

Hic ergo ex valoribus ipsius y, quos praecedentes species admittunt, denuo semissis excluditur.

11. Quoniam hic valores radicis imparis y multo magis imminuuntur, quam radicis paris x, calculus multo euadet facilior et breuior, si a numero proposito N siquidem in vna postremarum specierum contineatur successiue omnia quadrata imparia ipso minora subtrahantur, residuaque examinentur an sint quadrata nec ne? harum operationum numerus satis erit modicus, etiamsi numerus propositus fuerit praemagnus et quoniam radices per differentiam 240 increscunt, insignia compendia in calculo vsurpari poterunt. Scilicet si quaecunque quatuor minimarum radicum dicatur $= a$, quia a nume-

numero proposito N, si modo in aliqua octo postremarum specierum contineatur, vel quod eodem redit si fuerit vel huius formae $120n+77$ vel huius $120n+53$, successiue subtrahi debent quadrata aa, $(240\pm a)^2$, $(480\pm a)^2$ etc. notetur differentias esse primas $57600\pm 480a$; $3 \cdot 57600 \pm 480a$ etc. secundas vero esse constantes $=115200$, quo pacto totum negotium ad meras additiones et subtractiones reducitur; et quia quaelibet radix simplex a tam positiue quam negatiue accipi potest, vtraque pari calculo expedietur.

Problema.

12. Proposito numero quantumuis magno N, qui vel in hac forma $120n+77$ vel in hac $120n+53$ contineatur, explorare vtrum is sit primus nec ne?

Solutio.

Statuatur $N=aa+zz$, et pro octonis formis ipsius N littera a quatuor habebit valores sequentes

si sit	erunt quaterni valores ipsius a
$N=480n+77$	19, 29, 61, 109
$N=480n+197$	1, 31, 49, 79
$N=480n+317$	11, 59, 91, 101
$N=480n+437$	41, 71, 89, 119
$N=480n+53$	7, 23, 73, 103
$N=480n+173$	13, 67, 77, 83
$N=480n+293$	17, 47, 97, 113
$N=480n+413$	37, 43, 53, 107.

Pro

Pro quolibet ergo numero N habebimus quatuor valores ipſius a, quorum ſinguli dabunt binas numerorum ſeries deſcendentes.

$$N-aa;\ N-(240+a)^2;\ N-(480+a)^2;\ N-(720+a)^2 \text{ etc.}$$
$$N-aa;\ N-(240-a)^2;\ N-(480-a)^2;\ N-(720-a)^2 \text{ etc.}$$

quarum illius differentia prima eſt $57600+480a$ huius vero $57600-480a$, vtriusque vero differentia ſecunda conſtans $=115200$. Ambae hae progreſſiones continuentur donec ad terminos negatiuos perueniatur, ex iisque ii notentur, qui ſunt numeri quadrati. Quodſi tum eueniat, vt vnicus occurrat numerus quadratus, hoc erit ſignum indubium, propoſitum numerum N eſſe primum; ſin autem vel nullus numerus quadratus occurrat, vel plures vno, certo hinc erit concludendum, numerum propoſitum N non eſſe primum, ſed ex factoribus componi.

Coroll. 1.

13. Quodſi ergo numerus propoſitus N in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ contineatur, tum ſatis expedite examen inſtitui poterit, vtrum is numerus ſit primus necne? cum quadrata, quae ſucceſſiue ſubtrahi oportet ſcilicet $(240\lambda \pm a)^2$ mox ipſum numerum N ſint ſuperatura.

Coroll. 2.

14. Si enim numerus propoſitus N vnum millionem non ſuperet, quadrata ſubtrahendo infra

(1200

$(1200+a)^2$ ſubſiſtent, eorumque ergo numerus pro quolibet numero a non ad 9 vsque aſcendet; et quoniam quaterni huiusmodi numeri a habentur, paucioribus quam 36 operationibus totum negotium conficietur.

Coroll. 3.

15. Si numerus N adeo decuplo fuerit maior, operationum numerus ad triplum tantum increſcet, et quoniam pro quouis numero a quadrata ſubtrahenda eiusmodi progreſſionem conſtituunt, quarum differentiae ſecundae ſunt conſtantes, hinc ingentia calculi compendia naſcuntur.

Scholion.

16. Etſi haec methodus ad nonnullas tantum numerorum ſpecies patet, quippe quae in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ ſint contentae, ea tamen neutiquam attentione indigna videtur. Cum enim eiusmodi methodum, quae ſe prorſus ad omnes numeros extendat, ne ſperare quidem liceat, quae ſcilicet a vulgari regula, qua diuiſionem per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minores tentari oportet, diſcrepet, eaque ſit multo expeditior; omnia compendia quae quidem in hoc negotio inuenire licet, neutiquam ſunt contemnenda, etiamſi ea ad pauciſſimas numerorum ſpecies extendantur, dummodo numeros quantumuis magnos in ſe complectantur.

Cum enim problema iam olim propositum, quo numerus primus dato numero maior desideratur, adhuc vires ingenii humani superare videatur, non parum praestitisse censendus est, qui numeros valde magnos, qui certo sint primi, in medium afferre valuerit. Vsum igitur methodi hic expositae aliquot exemplis declarabo.

Exemplum I.

17. Explorare vtrum hic numerus 481037 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $= 1002 . 480 + 77$ in prima forma continetur, vbi quatuor valores ipsius a sunt 19, 29, 61, 109, calculus ergo sequenti modo instituatur:

$a = \pm 19$		$a = \pm 29$	
481037	57600	481037	57600
361	9120	841	13920
−480676 −	480676 −	−480196	480196 −
66720	48480	71520	43680
1152	1152	1152	1152
−413956	432196 −	−408676	436516 −
181920	163680	186720	158880
1152	1152	−221956	277636 −
−232036	268516 −		274080
			3556 −.

$a =$

$a = +61$		$a = +109$	
481037	57600	481037	57600
3721	29280	11881	52320
−477316	477316 −	−469156	469156 −
86880	28320 −	109920	5280
−390436	448996 −	−359236	463876 −
202080	143520	225120	120480
□ 188356	305476 −	−134116	343396 □
	258720		235680
	46756 −		107716 −

In his reſiduis duo occurrunt quadrata ſigno □ notata dum reliqua non quadrata lineola — notaui; ex quo concludo numerum propoſitum non eſſe primum. Cum autem ſit duplici modo duorum quadratorum ſumma ſcilicet

$$481037 = 434^2 + 541^2 = 586^2 + 371^2$$

eius diuiſores, quos quoque ſummas eſſe duorum quadratorum neceſſe eſt, aſſignare licebit, ſit enim $pp + qq$ diuiſor, erit $\frac{p}{q} = \frac{434 \pm 586}{541 \pm 371}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{586 \pm 541}{434 \pm 371}$, hinc $\frac{p}{q} = \frac{6}{1}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{85}{76}$ ergo diuiſores ſunt 37 et 13001.

Exemplum 2.

18. Explorare vtrum hic numerus 829853 ſit primus nec ne?

Cum hic numerus ſit $= 1728 . 480 + 413$, ad vltimam ſpeciem pertinet, vbi valores ipſius a ſunt 37, 43, 53, 107 calculus ergo ſequenti modo inſtituatur.

$a =$

$a = \pm 37$

829853	57600
1369	17760
−828484	828484−
75360	39840
1152	1152
−753124	788644−
190560	155040
1152	1152
−562564	633604−
305760	270240
−256804	363364−

$a = \pm 43$

829853	57600
1849	20640
−828004	828004−
78240	36960
1152	1152
−749764	791044−
193440	152160
1152	1152
−556324	638884−
308640	267360
−247684	371524−

$a = \pm 53$

829853	57600
2809	25440
−827044	827044−
83040	32160
1152	1152
−744004	794884−
198240	147360
1152	1152
−545764	647524−
313440	262560
	1152
□..232324	384964−
	377760
	7204−

$a = \pm 107$

829853	57600
11449	51360
−818404	818404−
108960	6240
1152	1152
−709444	812164−
224160	121440
1152	1152
−485284	690724−
339360	236640
	1152
□..145924	454084−
	351840
	102244−

Quo-

Quoniam hic duo occurrunt quadrata, vnde fit

$$829853 = 482^2 + 773^2 = 382^2 + 827^2$$

hic numerus non est primus sed factores habet 257 et 3229.

Exemplum 3.

19. Explorare, vtrum hic numerus 2400317 sit primus nec ne? Ex huius numeri forma $= 5000 \cdot 480 + 317$ intelligitur, eum ad speciem tertiam pertinere, pro qua valores ipsius a sunt 11, 59, 91, 101, vnde calculus ita se habebit:

$a = \pm 11$		$a = \pm 59$	
2400317	57600	2400317	57600
121	5280	3481	28320
−2400196	2400196−	−2396836	2396836−
62880	52320	85920	29280
1152	1152	1152	1152
−2337316	2347876−	−2310916	2367556−
178080	167520	201120	144480
1152	1152	1152	1152
−2159236	2180356−	−2109796	2223076
293280	282720	316320	259680
1152	1152	1152	1152
□..1865956	1897636−	−1793476	1963396−
408480	397920	431520	374880
1152	1152	1152	1152
−1457476	1499716−	−1361956	1588516−
523680	513120	546720	490080
1152	1152	1152	1152
−933796	986596−	−815236	1098436−
638880	628320	661920	605280
−294916	358276−	−153316	493156−

 $a =$

$a = +91$		$a = +101$	
2400317	57600	2400317	57600
8281	43680	10201	48480
−2392036	2392036−	−2390116	2390116.□
101280	13920	106080	9120
1152	1152	1152	1152
−2290756	2378116−	−2284036	2380996−
216480	129120	221280	124320
1152	1152	1152	1152
−2074276	2248996−	−2062756	2256676−
331680	244320	336480	239520
1152	1152	1152	1152
−1742596	2004676−	−1726276	2017156−
446880	359520	451680	354720
1152	1152	1152	1152
−1295716	1645156−	−1274596	1662436−
562080	474720	566880	469920
1152	1152	1152	1152
−733636	1170436−	−707716	1192516−
677280	589920	682080	585120
−56356	580516−	−25636	607396−

Ex duobus quadratis, quae hic occurrunt, numerus propositus concluditur habere factores 53.45289.

Exemplum 4.

20. Explorare vtrum hic numerus 3861317 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $= 8044.480 + 197$ ad secundam speciem pertinet et calculus ita se habebit:

$a =$

$a = +1$

3861317	57600
1	480
— 3861316	3861316 —
58080	57120
1152	1152
— 3803236	3804196 —
173280	172320
1152	1152
— 3629956	3631876 —
288480	287520
1152	1152
— 3341476	3344356 —
403680	402720
1152	1152
— 2937796	2941636 —
518880	517920
1152	1152
— 2418916	2423716 —
634080	633120
1152	1152
— 1784836	1790596 —
749280	748320
1152	1152
— 1035556	1042276 —
864480	863520
— 171076	178756 —

$a = +31$

3861317	57600
961	14880
— 3860356	3860356 —
72480	42720
1152	1152
— 3787876	3817636 —
187680	157920
1152	1152
— 3600196	3659716 —
302880	273120
1152	1152
— 3297316	3386596 —
418080	388320
1152	1152
— 2879236	2998276 —
533280	503520
1152	1152
— 2345956	2494756 —
648480	618720
1152	1152
— 1697476	1876036 —
763680	733920
1152	1152
— 933796	1142116 —
878880	849120
— 54916	292996 —

$a =$

$a = \pm 49$

3861317	57600
2401	23520
—3858916	3858916—
81120	34080
1152	1152
—3777796	3824836—
196320	149280
1152	1152
—3581476	3675556—
311520	264480
1152	1152
—3269956	3411076—
426720	379680
1152	1152
—2843236	3031396—
541920	494880
1152	1152
—2301316	2536516—
657120	610080
1152	1152
—1644196	1926436—
772320	725280
	1152
—871876	1201156—
	840480
	—360676

$a = \pm 79$

3861317	57600
6241	37920
—3855076	3855076—
95520	19680
1152	1152
—3759556	3835396—
210720	134880
1152	1152
—3548836	3700516—
325920	250080
1152	1152
—3222916	3450436—
441120	365280
1152	1152
—2781796	3085156—
556320	480480
1152	1152
—2225476	2604676—
671520	595680
1152	1152
—1553956	2008996—
786720	710880
	1152
—767236	1298116—
	826080
	472036—

Quo-

Quoniam igitur in his residuis vnicum quadratum reperitur, numerus propositus certe est primus; aequatur autem summae horum duorum quadratorum $1714^2 + 961^2$.

Scholion.

21. Cum igitur iam certi simus numerum 3861317 esse primum, hic fortasse maximus est numerus primus quem nouimus; ac si quis hunc numerum secundum regulam vulgarem explorare voluerit, diuisionem per omnes numeros primos vsque ad 1965 tentare deberet, qui labor certe non solum maxime foret prolixus, sed etiam summopere taediosus; cum tamen hoc modo totum negotium breui temporis spatio facillime expediri possit. Simili modo tentaui numerum $3862997 = 8047 \cdot 480 + 437$, ad quartam speciem referendum, quem pariter primum esse deprehendi. Nisi autem numerus propositus in octo memoratis speciebus contineatur, etiamsi sit formae $4n+1$, examen laborem magis operosum postulat; quamuis negotium ita dirigi queat, vt non pluribus subtractionibus sit opus. Verum cum vniuersa haec inuestigatio plerisque omni vsu destituta videatur, hoc argumentum fusius non prosequar sed Theoremata tantum, quibus haec methodus innititur, breuiter subiungo.

Th. 1. Si sit $xx+yy=9n+1$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm1$

Th. 2. Si sit $xx+yy=9n+4$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm2$

Th. 3. Si sit $xx+yy=9n+7$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm4$

Th. 4. Si sit $xx+yy=3n+2$ erit $x=3p\pm1$

Th. 5. Si sit $xx+yy=5n+2$ erit $x=5p\pm1$

Th. 6. Si sit $xx+yy=5n+3$ erit $x=5p\pm2$

Th. 7. Si sit $xx+yy=25n+1$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm1$

Th. 8. Si sit $xx+yy=25n+4$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm2$

Th. 9. Si sit $xx+yy=25n+6$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm9$

Th. 10. Si sit $xx+yy=25n+9$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm3$

Th. 11. Si sit $xx+yy=25n+11$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm6$

Th. 12. Si sit $xx+yy=25n+14$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm8$

Th. 13. Si sit $xx+yy=25n+16$ erit vel $x=5p$ vel $x=25p\pm4$.

Th. 14. Si sit $xx+yy=25n+19$ erit vel $x=5p$ vel $x=25p\pm12$

Th. 15. Si sit $xx+yy=25n+21$ erit vel $x=5p$ vel $x=25p\pm11$.

Th. 16. Si sit $xx+yy=25n+24$ erit vel $x=5p$ vel $x=25p\pm7$.

Conclusio.

Ex his theorematibus sequitur si summa duorum quadratorum habuerit hanc formam $xx+yy=14400n+11401$ tum quadrati imparis xx radicem fore

vel I. $x=480m\pm(75, 195)$

vel II. $x=1440m\pm(85, 355, 445, 715)$

vel III. $x=2400m\pm(99, 501, 651, 1149)$

vel IV. $x=7200m\pm\begin{Bmatrix}149, & 949, & 1301, & 1949\\ 2101, & 2749, & 3101, & 3299\end{Bmatrix}$

Ex hoc numerorum ordine sumto $n=700$, exploraui hunc numerum 10091401, cuius resolutionem in duo quadrata vnico modo succedere deprehendi scilicet

ſcilicet $1251^2 + 2920^2$, quod certum eſt indicium hunc numerum eſſe primum. Habemus ergo numerum decem millionibus maiorem 10091401, quem certo nouimus eſſe primum; ſi quis autem alia quacunque methodo vti voluerit, nunquam profecto tantum numerum primum exhibebit.

NOVA