1768

Précis d'une théorie générale de la dioptrique

Leonhard Euler

PRÉCIS D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DE LA DIOPTRIQUE.

Par M. EULER.

1. UN nombre quelconque de surfaces réfringentes sphériques étant proposé PAP, QBQ, RCR, &c. dont les centres se trouvent sur le même axe EI, je conçois leurs convexités tournées en même sens vers l'objet $E\varepsilon$, & je nomme les rayons de leur courbure Fig. 1.

Rayons des surfaces p, q, r, s, &c.

de $PAP = p$, de $QBQ = q$, de $RCR = r$, de $SDS = s$, &c.

2. Je considère d'abord les rayons de lumière moyens, & je pose la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour ces surfaces

Raisons de réfraction n, n', n'', n''', &c.

$PAP = n : 1$, $QBQ = n' : 1$, $RCR = n'' : 1$, $SDS = n''' : 1$, &c.

or pour les rayons d'une autre espèce quelconque, j'augmente ou diminue ces nombres n, n', n'', n''', &c. de leurs différentielles dn, dn', dn'', dn''', &c. dont les valeurs doivent être tirées de la nature de chaque milieu réfringent, terminé par les surfaces proposées.

3. Que devant ces surfaces soit exposé un objet rayonnant $E\varepsilon$ dont les rayons moyens, infiniment proches de l'axe, représentent par chaque réfraction les images en $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$, $I\iota$, &c. & nommant les distances

I.^ere CONSIDÉRATION.

Explication des distances a, b, c, d, &c. & $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c.

$$EA = a,\quad FB = b,\quad GC = c,\quad HD = d,$$
$$\&\ AF = \alpha,\quad BG = \beta,\quad CH = \gamma,\quad DI = \delta,$$

les principes de la Dioptrique fournissent ces égalités

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha},\quad \frac{n'-1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{n'}{\beta},\quad \frac{n''-1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{n''}{\gamma},\ \&c.$$

Demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = \zeta$.

4. Enſuite poſant le demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = \zeta$, celui de chaque image ſe trouve déterminé de cette ſorte :

Images principales $F\zeta, G\eta, H\theta, I\iota$, &c.

$$F\zeta = \frac{\alpha\zeta}{na},\ G\eta = \frac{\alpha\beta\zeta}{nn'ab},\ H\theta = \frac{\alpha\beta\gamma\zeta}{nn'n''abc},\ I\iota = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\zeta}{nn'n''n'''abcd},\ \&c.$$

Explication des lettres A, B, C, D, &c.

ou bien ſi nous poſons pour abréger,

$$\alpha = \frac{a}{A},\ \beta = \frac{b}{B},\ \gamma = \frac{c}{C},\ \delta = \frac{d}{D},\ \&c.$$

nous aurons premièrement

$$p = \frac{(n-1)a}{nA+1},\ q = \frac{(n'-1)b}{n'B+1},\ r = \frac{(n''-1)c}{n''C+1},\ s = \frac{(n'''-1)d}{n'''D+1},\ \&c.$$

& enſuite

$$F\zeta = \frac{\zeta}{nA},\ G\eta = \frac{\zeta}{nn'AB},\ A\theta = \frac{\zeta}{nn'n''ABC};\ I\iota = \frac{\zeta}{nn'n''n'''ABCD}.$$

5. Ces images ſont alternativement renverſées & debout, ſelon que le nombre des ſurfaces eſt impair ou pair. Soit Z le demi-diamètre de la dernière image qu'un œil regarde à la diſtance $= k$, & il le verra ſous un angle $= \frac{Z}{k}$; mais ſi l'oeil voyoit directement le même objet à la diſtance $= h$, il le verroit ſous un angle $= \frac{\zeta}{h}$, d'où l'on pourra juger du groſſiſſement produit par les ſurfaces réfringentes.

...oſſiſſ...nt m.

6. Pour nous former une juſte idée de ce jugement, je ſuppoſe que k ſoit la diſtance à laquelle l'oeil voit le plus diſtinctement les objets ; mais h eſt une diſtance arbitraire à laquelle on rapporte le groſſiſſement que je nommerai la *diſtance d'eſtime*, qu'on prendra enſuite pour les téleſcopes égale à la diſtance même de l'objet $EA = a$, mais pour les microſcopes égale à 8 pouces : ainſi le groſſiſſement ſera $= \frac{hZ}{k\zeta}$.

...iſta... ...ſtime a.

7. J'indiquerai ce groſſiſſement par le nombre m, qui marque combien de fois le diamètre de l'objet eſt vu plus

grand par les surfaces réfringentes, qu'à la vue simple étant vu à la distance $= h$. Je remarque de plus que ce nombre m étant positif, indique que l'objet est vu debout, mais s'il est négatif, renversé; ainsi en supposant la dernière image debout, nous aurons $m = \frac{hZ}{kz}$.

Explication du nombre N.

8. Pour mieux développer le demi-diamètre Z de la dernière image, je remarque que posant le produit $n\,n'n''n'''$, &c. $= N$, la raison $N : 1$ définit la réfraction des rayons moyens, qui passeroient du milieu où se trouve l'objet immédiatement dans celui où est placé l'œil; & partant ayant $Z = \frac{z}{NABCD,\ \&c.}$, nous aurons pour le grossissement $m = \pm \frac{h}{Nk.ABCD,\ \&c.}$, où le signe $+$ a lieu quand le nombre des surfaces est pair: quand il est impair, il faut prendre le signe $-$.

Distance juste de l'œil k.

9. Or pour apercevoir ce grossissement, il faut que l'œil soit placé derrière la dernière image à la distance $= k$, comme je viens de le supposer; cette distance k étant presque appropriée à la nature de l'œil. On juge aussi aisément que la distance de l'œil derrière la dernière surface doit nécessairement être positive.

II.e Considération. Fig. 2.

Demi diamètre de l'ouverture de la première surface $AP = \chi$.

10. Maintenant, je vais considérer la route d'un rayon moyen EP, venant du centre de l'objet E qui entre par l'extrémité de l'ouverture de la première surface, & après les réfractions traverse les autres surfaces en β, γ, δ, &c. & coupe l'axe aux points f, g, h, i, &c. Je pose le demi-diamètre de l'ouverture de la première surface $AP = \chi$, en supposant l'arc AP si petit qu'on le puisse confondre avec son sinus sans erreur sensible.

Première condition pour l'ouverture des autres surfaces.

11. Je remarque d'abord que les points sur l'axe f, g, h, i, &c. seront différens des lieux des images principales F, G, H, I, &c. mais que les intervalles Ff, Gg, Hh, &c. seront fort petits. De-là je tire les déterminations suivantes, assez exactes pour notre dessein.

$$B\beta = \frac{b}{\alpha}\,\chi,\ C\gamma = \frac{bc}{\alpha\beta}\,\chi,\ D\delta = \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}\,\chi,\ E\varepsilon = \frac{bcde}{\alpha\beta\gamma\delta}\,\chi,\ \&c.$$

$$\text{ou } B\beta = Ab \,.\, \frac{\chi}{a},\ C\gamma = ABc \,.\, \frac{\chi}{a},\ D\delta = ABCd \,.\, \frac{\chi}{a},\ \&c.$$

Il eſt clair que les ouvertures des autres ſurfaces ne ſauroient être plus petites.

Inclinaiſon des rayons extrêmes.

12. En ſecond lieu, cette conſidération me fournit les angles que le rayon fait avec l'axe aux points f, g, h, i, &c. que je nomme l'inclinaiſon des rayons extrêmes,

$$AfP = \frac{\chi}{\alpha},\ Bg\beta = \frac{b\chi}{\alpha\beta},\ Ch\gamma = \frac{bc\chi}{\alpha\beta\gamma},\ Di\delta = \frac{bcd\chi}{\alpha\beta\gamma},\ \&c.$$

$$\text{ou } AfP = A \,.\, \frac{\chi}{a},\ Bg\beta = AB \,.\, \frac{\chi}{a},\ Ch\gamma = ABC \,.\, \frac{\chi}{a},\ Di\delta = ABCD \,.\, \frac{\chi}{a},\ \&c.$$

13. Ces angles ſervent à connoître le cône lumineux, qui eſt tranſmis du point E de l'objet par les ſurfaces réfringentes, dont les ſommets ſe trouvent aux points f, g, h, &c. De-là on pourra déterminer à chaque lieu l'épaiſſeur de ce cône lumineux, ce qui eſt un élément eſſentiel pour déterminer le degré de clarté.

14. La dernière image étant l'objet immédiat de la viſion, cet angle du cône lumineux y ſera $= ABCD$, &c. $\frac{\chi}{a}$; donc poſant la diſtance de l'œil derrière cette image $= k$, le demi-diamètre de la largeur du cône à l'entrée dans l'œil ſera $= \frac{k\chi}{a} \,.\, ABCD$, &c. qui étant comparé avec l'ouverture de la prunelle, montrera le degré de clarté dont l'objet ſera vu.

15. Si cette largeur du cône lumineux égaloit ou ſurpaſſoit la prunelle, la clarté ſeroit complète ou la même dont l'objet ſeroit vu à la vue ſimple; mais dans les inſtrumens de Dioptrique cette largeur eſt ordinairement plus petite, ce qui fournit donc une juſte meſure du degré de clarté, que j'indiquerai par la lettre v.

16. Ayant donc $v = \frac{h\chi}{a} \cdot ABCD$, &c. comparons cette formule avec celle qui a été trouvée pour le grossissement $m = \pm \frac{h}{Nk \cdot ABCD, \&c.}$, & leur produit donne $mv = \frac{h\chi}{Na}$; d'où, si l'on considère le degré de clarté v comme donné, on en tire d'abord l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre doit être $\chi = N \cdot \frac{mav}{h}$.

Beau rapport entre le degré de clarté, le grossissement & l'ouverture de la première surface.

17. Comme le demi-diamètre de la prunelle est estimé environ de $\frac{1}{12}$ pouce, pourvu que v ne soit plus petit que de $\frac{1}{12}$ pouce, on jouira d'une pleine clarté : or je remarque qu'en ne donnant à v que $\frac{1}{50}$ pouce, la clarté est encore très-suffisante, quoiqu'elle diminue en effet en raison du carré de la quantité v.

18. A présent, je vais considérer les petits écarts des points f, g, h, i, &c. des images principales F, G, H, I, &c. qui contiennent la source de la confusion attribuée à la figure sphérique des surfaces, mais qui dépend principalement de l'ouverture des surfaces ; ces écarts Ff, Gg, Hh, Ii, &c. seront nommés les espaces de confusion de chaque image, & je poserai

Recherches sur la confusion causée par l'ouverture des surfaces.

Espaces de confusion y, y', y''.

$$Ff = y,\ Gg = y',\ Hh = y'',\ Ii = y''', \&c.$$

19. Or, par les principes de la Dioptrique, on trouve

$$Ff = y = \frac{(a+\alpha)^2\chi\chi}{2(n-1)^2 aa}\left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(n+A)(A+1)^2}{2(n-1)^2 AA} \cdot \frac{\chi\chi}{\alpha},$$

& de-là, pour les autres réfractions, les suivans :

$$Gg = y' = \frac{y}{n'BB} + \frac{AA(n'+B)(B+1)^2}{2(n'-1)^2 BB} \cdot \frac{b\chi\chi}{aa},$$

$$Hh = y'' = \frac{y'}{n''CC} + \frac{AABB(n''+C)(C+1)^2}{2(n''-1)^2 CC} \cdot \frac{c\chi\chi}{aa},$$

$$Ii = y''' = \frac{y''}{n'''DD} + \frac{AABBCC(n'''+D)(D+1)^2}{2(n'''-1)^2 DD} \cdot \frac{d\chi\chi}{aa},$$

&c.

Eſpace de confuſion de la dernière image.

20. Soit à préſent Y l'eſpace de confuſion de la dernière image; & poſant, comme ci-deſſus, $nn'n''n'''$, &c. $= N$, on trouvera

$$2N.AABBCCDD, \&c.\ Y = \frac{n(n+A)(A+1)}{(n-1)^2} \cdot \frac{\chi\chi}{a} + \frac{nn'A^4(n'+B)(B+1)^2}{(n'-1)^2} + \frac{b\chi\chi}{aa}$$
$$+ \frac{nn'n''A^4B^4(n''+C)(C+1)^2}{(n''-1)^2} + \frac{c\chi\chi}{aa}$$
$$+ \frac{nn'n''n'''A^4B^4C^4(n'''+D)(D+1)^2}{(n'''-1)^2} + \frac{d\chi\chi}{aa},$$
$$\&c.$$

Donc s'il étoit poſſible de réduire à zéro cette valeur de Y, la confuſion cauſée par l'ouverture ſeroit entièrement détruite, au moins pour le milieu de l'objet qui eſt dans l'axe.

Confuſion qui en réſulte dans la viſion.

21. On voit bien que cet eſpace de confuſion eſt proportionnel au carré $\chi\chi$, mais la confuſion qui en réſulte dans la viſion même, eſt en raiſon du cube χ^3; car ſoit Hv la dernière image principale, & $Hn = Y$ ſon eſpace de confuſion, derrière laquelle l'œil ſe trouve dans ſa juſte diſtance $= k$, de ſorte que l'image principale y ſoit diſtinctement dépeinte, & il s'agit d'examiner quel effet y produiront les rayons qui viennent de l'extrémité n.

Fig. 3.

22. Pour cet effet, conſidérons les rayons qui ſortent du point n, leſquels étant inclinés à l'axe d'un angle $= ABCD$, &c. $\frac{\chi}{a}$; poſons cet angle $Nno = ABCD$, &c. $\frac{\chi}{a} = O$; de ſorte que $No = OY$, & l'œil verra le point n ſur l'image principale Nv comme un cercle dont le rayon $= No$, ou bien le centre de l'objet E auquel répondent les points H & n dans l'image, ſera vu comme une tache ronde, dont le demi-diamètre eſt $= No = OY$.

Confuſion ſentie, ou l'angle θ.

23. Soit θ l'angle ſous lequel le demi-diamètre de cette tache paroîtra à l'œil, & cet angle nous fournira la juſte meſure de la confuſion ſentie, & nous aurons $\theta = \frac{OY}{k}$:

puiſque

puiſque la diſtance de l'œil eſt ſuppoſée $= k$. Donc, puiſque l'angle O eſt proportionnel au demi-diamètre de l'ouverture $AP = \chi$ & l'eſpace de confuſion Y à ſon carré $\chi\chi$, la confuſion ſentie ſera comme ſon cube χ^3.

24. Mais cette confuſion eſt diminuée quand on place l'œil en ſorte qu'une image mitoyenne $P\pi$ en ſoit éloignée de ſa juſte diſtance k; car puiſque l'inclinaiſon des rayons en n eſt comme la racine carrée de l'eſpace Nn, & que cette raiſon a lieu pour tous les points entre n & N; on trouve que la confuſion ſentie ſera la plus petite en prenant l'intervalle $nP = \frac{1}{4} Nn$; alors donc la confuſion ſentie ſera $\theta = \frac{OY}{4k}$. Fig. 4.

Explication de la quantité ω.

25. Poſons maintenant, pour abréger,

$$\frac{(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2}a + \frac{nn'A^4(n'+B)(B+1)^2}{(n'-1)^2}b + \frac{nn'n''A^4B^4(n''+C)(C+1)^2}{(n''-1)^2}c$$
$$+ \frac{nn'n''n'''(A^4B^4C^4(n'''+D)(D+1)^2}{(n'''-1)^2}d, \text{ \&c.}$$

& puiſque nous avons trouvé

$$Y = \frac{\omega}{2\,N.AABBCCDD, \text{ \&c.}} \cdot \frac{\chi\chi}{aa}, \text{ \& } O = ABCD, \text{ \&c.} \frac{\chi}{a};$$

nous en tirerons $\theta = \frac{\omega}{8\,Nk.ABCD, \text{ \&c.}} \cdot \frac{\chi^3}{a^3}$.

Juſte meſure de la confuſion ſentie θ.

26. Introduiſons-y le groſſiſſement $m = \pm \frac{k}{Nk.ABCD, \text{ \&c.}}$; & puiſque le ſigne $+$ ou $-$ n'entre pas ici en conſidération, nous aurons pour la confuſion ſentie, cette expreſſion aſſez ſimple $\theta = \frac{m\omega}{8k} \cdot \frac{\chi^3}{a^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{m\omega}{a} \cdot \frac{\chi^3}{aak}$. Où il faut remarquer, que pourvu que l'angle θ ne ſurpaſſe pas deux ſecondes, la confuſion eſt encore très-ſupportable. Il faut donc faire en ſorte que la quantité $\frac{1}{8} \cdot \frac{m\omega}{a} \cdot \frac{\chi}{aak}$ ne ſurpaſſe pas cette fraction $\frac{1}{100000}$.

III.e CONSIDÉRATION.

27. Ces déterminations du degré de clarté & de la confuſion ſentie, ayant été tirées de la ſeconde conſidération, je paſſe à la troiſième conſidération où il s'agit de la route d'un rayon moyen qui venant de l'extrémité de l'objet ε, paſſe par le milieu A de la première ſurface, & en traverſant les autres ſurfaces en $b, c, d,$ &c. coupe l'axe aux points $q, r, s,$ &c. la première interſection devant être conçue au point même A.

Fig. 5.

Demi-diamètre du champ apparent $= \varphi$.

28. En conſidérant le point ε comme le dernier ou le plus éloigné de l'axe dont les rayons ſoient encore tranſmis par les ſurfaces réfringentes, l'angle $EA\varepsilon$ nous exprime ce qu'on nomme le demi-diamètre du champ apparent, & je poſerai cet angle $EA\varepsilon = \varphi$.

Seconde condition pour l'ouverture des ſurfaces.

29. Il faut donc bien que l'ouverture des ſurfaces ſuivantes s'étende au moins juſqu'aux points $b, c, d,$ &c. pour tranſmettre les rayons de l'extrémité ε qui paſſent par le milieu A de la première ſurface, mais puiſque ceux qui paſſent par toute l'ouverture PAP doivent auſſi être tranſmis en y ajoutant la condition du §. 2, nous aurons les demi-diamètres de l'ouverture entière de chaque face,

...ſte meſure de ...uverture de ...que ſurface.

$$AP = \chi,\ BQ = Ab\frac{\chi}{a} + Bb,\ CR = ABc\frac{\chi}{a} + Cc,\ DS = ABCd\frac{\chi}{a} + Dd, \text{\&c.}$$

en prenant toutes ces parties poſitivement, quand même elles ſeroient négatives.

30. Sans m'embarraſſer encore comment ces élémens ſont déterminés par les précédens; puiſque les eſpaces $Bb, Cc, Dd,$ &c. conſtituent ordinairement la plus grande partie de chaque ouverture, il eſt très-eſſentiel d'avertir que le demi-diamètre de chaque ouverture ne ſauroit ſurpaſſer la quatrième partie de ſon rayon de courbure afin que chaque ouverture n'embraſſe point un cercle au-delà de 30 degrés.

Explicat. de quantités π', π'', π''', &c.

31. Par cette raiſon, je rapporterai d'abord les eſpaces $Bb, Cc, Dd,$ &c. chacun à ſon rayon de courbure, en introduiſant les nouveaux élémens ſuivans :

$$Bb = \pi' q,\ Cc = \pi'' r,\ Dd = \pi''' s,\ \text{\&c.}$$

Ces lettres π', π'', π''', &c. ſignifient donc des fractions plus petites que $\frac{1}{4}$ ou même $\frac{1}{5}$, qui peuvent être priſes tant négatives que poſitives; on les pourroit nommer les expoſans des ouvertures.

32. Enſuite par rapport aux interſections avec l'axe $q, r, s,$ &c. puiſque tous les rayons de l'objet entier y concourent, ce n'eſt que dans ces points qu'un œil placé peut découvrir le champ apparent tout entier; c'eſt donc une condition très-eſſentielle, qu'on doit placer l'œil dans celui de ces points qui répond à la dernière ſurface réfringente; & il eſt évident que ce point doit tomber derrière ſa ſurface.

Condition néceſſaire pour le lieu de l'œil.

33. Il eſt auſſi très-important de bien connoître les angles que le rayon ϵA fait après chaque réfraction avec l'axe, ce qui me fournit encore de nouveaux élémens pour introduire dans le calcul, ſans le ſecours deſquels nous tomberions en des calculs extrêmement embrouillés; je nommerai donc ces angles :

Explication des angles ψ, ψ', ψ'', &c.

$$BAb = \psi,\ Bqb = Cqc = \psi',\ Crc = Drd = \psi'',\ Dsd = \epsilon s g = \psi''', \text{ \&c.}$$

34. De-là nous tirons d'abord les déterminations ſuivantes.

$$\pi' q = AB . \psi = Bq . \psi',\ \pi'' r = Cq . \psi' = Cr . \psi'',\ \pi''' s = Dr . \psi'' = Ds . \psi''', \text{ \&c.}$$

Or pour le premier de ces angles $BAb = \psi$, puiſqu'il eſt celui de réfraction, l'angle d'incidence étant $EA\epsilon = \varphi$ pour la première ſurface, nous avons d'abord $\varphi : \psi = n : 1$ & partant $\varphi = n\psi$.

35. Pour les autres, j'obſerve qu'en concevant en A un point rayonnant, ſes images, par les réfractions ſuivantes, tomberoient préciſément dans les points $q, r, s,$ &c. d'où la nature de la réfraction nous fournit ces équations.

$$\frac{n'-1}{q} = \frac{1}{BA} + \frac{n'}{Bq},\ \frac{n''-1}{r} = \frac{1}{qC} + \frac{n''}{Cr},\ \frac{n'''-1}{s} = \frac{1}{rD} + \frac{n'''}{Ds}, \text{ \&c.}$$

& en y ſubſtituant les valeurs données ci-deſſus, nous aurons:

$$(n'-1)\pi' = \psi + n'\psi',\ (n''-1)\pi'' = \psi' + n''\psi'',\ (n'''-1)\pi''' = \psi'' + n'''\psi''', \text{ \&c.}$$

Relation entre les quantités π', π'', π''', &c. & ψ, ψ', ψ'', &c.

36. Maintenant il faut chercher les rapports par leſquels ces

nouveaux élémens tiennent à ceux que les considérations précédentes nous ont fourni, & d'abord le champ apparent nous donne $z = a\phi$; ensuite considérant que la route du rayon $A\varepsilon$ passe les extrémités de toutes les images principales, on en conclut ces déterminations :

$$b = \frac{a\phi\,(n'B + 1)}{nn'A\,(\psi' - B\psi)};$$

$$c = \frac{a\phi\,(n''C + 1)}{nn'n''AB\,(\psi'' - C\psi')};$$

$$d = \frac{a\phi\,(n'''D + 1)}{nn'n''n'''ABC\,(\psi''' - D\psi'')};\ \&c.$$

D'où l'on déduit ensuite aussi les distances $\mathit{\beta}$, δ, γ, &c. avec les rayons q, r, s, &c.

Formules pour le lieu de l'oeil.

37. Ayant vu que l'oeil doit être placé au dernier des points q, r, s, &c. il faut se souvenir que l'oeil doit se trouver à la distance $= k$ derrière la dernière image; d'où nous tirons pour chaque nombre de surfaces les équations suivantes :

Nombre des surfaces.	*Distance de l'œil.*	
1	$Ap = 0 = \alpha + k$	d'où il s'ensuit
2	$Bq = \frac{\pi' q}{\psi'} = \mathit{\beta} + k$	$B\,(n' - 1)\,\psi' k + (\psi' - B\psi)\,q = 0$
3	$Cr = \frac{\pi'' r}{\psi''} = \gamma + k$	$C\,(n'' - 1)\,\psi'' k + (\psi'' - C\psi')\,r = 0$
4	$Ds = \frac{\pi''' s}{\psi'''} = \delta + k$	$D\,(n''' - 1)\,\psi''' k + (\psi''' - D\psi'')\,s = 0$
	&c.	&c.

38. Ces mêmes relations doivent revenir en considérant le dernier des angles ψ, ψ', ψ'', &c. qui étant celui même sous lequel le demi-diamètre de l'objet sera vu, doit produire le même grossissement m rapporté à la distance d'estime h; d'où il est clair que le dernier de ces angles doit être $= \pm \frac{ma\phi}{h}$;

le signe $+$ ayant lieu pour les nombres impairs des surfaces, & le signe $-$ pour les pairs.

39. Développons donc ces angles par les exposans π', π'', &c. & à cause de $\psi = \frac{\varphi}{n}$, nous obtiendrons

$$\psi' = \frac{(n'-1)\,\pi'}{n'} - \frac{\varphi}{n\,n'} \text{ à égaler à } -\frac{m\,a\,\varphi}{h}$$

$$\psi'' = \frac{(n''-1)\,\pi''}{n''} - \frac{(n'-1)\,\pi'}{n'\,n''} + \frac{\varphi}{n\,n'\,n''} \text{ à } +\frac{m\,a\,\varphi}{h}$$

$$\psi''' = \frac{(n'''-1)\,\pi'''}{n'''} - \frac{(n''-1)\,\pi''}{n''\,n'''} + \frac{(n'-1)\,\pi'}{n'\,n''\,n'''} - \frac{\varphi}{n\,n'\,n''\,n'''} \text{ à } -\frac{m\,a\,\varphi}{h}$$

&c.

& partant le dernier nous fournit cette équation.

Formule pour déterminer le champ apparent.

$$\left(N.\,\frac{m\,a}{h} - 1\right)\varphi = -n\,(n'-1)\,\pi' + n\,n'\,(n''-1)\,\pi'' - n\,n'\,n''\,(n'''-1)\,\pi''' + \text{\&c.}$$

40. Voilà une formule assez simple qui sert à déterminer le champ apparent par les seuls exposans d'ouverture π', π'', π''', &c. le grossissement m étant donné ; d'où l'on déduit aisément les conditions sous lesquelles on peut amplifier le champ apparent. Je remarque seulement que la valeur de φ doit être positive ; à quoi il est aisé de satisfaire, puisque les fractions π', π'', π''', &c. peuvent être prises tant négatives que positives : on voit aussi de-là que plus on veut amplifier le champ, & plus on doit employer de surfaces.

41. Les éclaircissemens que la troisième considération vient de nous fournir, sont sans doute de la plus grande importance, en nous ayant mis en état de mieux fixer le lieu de l'œil & d'assigner à chaque surface sa juste ouverture; mais principalement la dernière formule pour le champ apparent est un article très-essentiel pour perfectionner les instrumens de Dioptrique.

42. Jusqu'ici je n'ai considéré que les phénomènes qui sont produits par les rayons moyens; il ne reste donc plus

IV.e CONSIDÉRATION sur la différente réfraction des rayons.

que d'appliquer nos recherches aux rayons de toute autre espèce : comme les variations qui en résultent sont fort petites, on les pourra représenter par les différentielles des nombres n, n', n'', &c. qui expriment la réfraction des rayons moyens sans s'astreindre à aucune hypothèse sur la différente réfrangibilité des rayons.

Fig. 6.

43. Soient donc $f\zeta'$, $g\eta'$, $h\theta'$, $i\iota'$, &c. les images représentées par les rayons d'une autre espèce quelconque, & à cause de la variation des points F, G, H, I, &c. les distances

Quantités variables & constantes par rapport à la différente nature des rayons.

$AF = \alpha$, $BF = b$, $BG = \beta$, $GC = c$, $CH = \gamma$, $HD = d$, &c. doivent être traitées comme variables pendant que les rayons de courbure p, q, r, &c. demeurent constans ; mais puisque les intervalles entre les surfaces $AB = \alpha + b$, $BC = \beta + c$, $CD = \gamma + d$, &c. demeurent aussi invariables ; nous aurons d'abord ces rapports différentiels

$$\partial b = -\partial\alpha,\ \partial c = -\partial\beta,\ \partial d = \partial\gamma,\ \partial e = \partial\delta,\ \&c.$$

Déterminations des espaces de diffusion Ff, Gg, Hh, &c.

44. Nous n'avons donc qu'à différentier, selon ces principes, les équations rapportées au §. 3, pour en tirer les déterminations suivantes :

$$Ff = \partial\alpha = \frac{\alpha\,\partial n}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) = -\partial b$$

$$Gg = \partial\beta = \frac{\beta\beta\,\partial\alpha}{n'bb} + \frac{\beta\,\partial n'}{n'}\left(1 - \frac{\beta}{q}\right) = -\partial c$$

$$Hh = \partial\gamma = \frac{\gamma\gamma\,\partial\beta}{n''cc} + \frac{\gamma\,\partial n''}{n''}\left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) = -\partial d$$

$$Ii = \partial\delta = \frac{\delta\delta\,\partial\gamma}{n'''dd} + \frac{\delta\,\partial n'''}{n'''}\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) = -\partial e$$

&c.

N. B. Les images formées par les rayons de différente nature étant répandus par les intervalles Ff, Gg, Hh, &c. je nommerai ces intervalles les espaces de diffusion.

45. Introduisons les relations rapportées au §. 4, & à cause de $1 - \frac{\alpha}{p} = -\frac{A-1}{(n-1)A}$, nous aurons

$$Ff = \partial\alpha = -\frac{a(A+1)\partial n}{n(n-1)AA} = -\partial b$$

$$G g = \partial\beta = \frac{\partial\alpha}{n'BB} - \frac{b(B+1)\partial n'}{n'(n'-1)BB} = -\partial c$$

$$H h = \partial\gamma = \frac{\partial\beta}{n''CC} - \frac{c(C+1)\partial n''}{n''(n''-1)CC} = -\partial d$$

&c.

Dernier espace de diffusion $\partial\omega$.

46. Posant donc le dernier espace de diffusion $= \partial\omega$, en substituant les valeurs précédentes dans les suivantes, à cause de $N = n\,n'\,n''\,n'''$, &c. nous aurons

$$N.AABBCCDD,\&c.\,\partial\omega = -\frac{a(A+1)\partial n}{n-1} - \frac{nAAb(B+1)\partial n'}{n'-1} - \frac{nn'AABBc(C+1)\partial n''}{n''-1} - \frac{nn'n''AABBCCd(D+1)\partial n'''}{n'''-1}$$

&c.

& partant, si on pouvoit réduire à zéro cette expression, la confusion qui en rejaillit sur la vision, seroit anéantie.

Confusion en latitude.

47. Mais il faut aussi avoir égard au changement qui en résulte dans la grandeur des images qui doit produire une confusion plus sensible, que je nommerai la confusion en latitude, car il seroit inutile d'anéantir l'espace de diffusion, si les images de différentes couleurs différoient en grandeur.

48. Il faut donc aussi différentier les formules qui ont été assignées ci-dessus, §. 4, pour les demi-diamètres des images $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$, &c. ce qui se fait plus commodément en différentiant leurs logarithmes d'où nous tirons à cause de $\frac{z}{a} = \varphi =$ constante;

$$\partial . lF\zeta = -\frac{\alpha \partial n}{np},$$

$$\partial . lG\eta = \partial . lF\zeta + \frac{(n'-1)\beta\partial\alpha}{n'bq} - \frac{\beta\partial n'}{n'q};$$

$$\partial . lH\theta = \partial . lG\eta + \frac{(n''-1)\gamma\partial\beta}{n''cr} - \frac{\gamma\partial n''}{n''r};$$

$$\partial . lI\iota = \partial . lH\theta + \frac{(n'''-1)\delta\partial\gamma}{n'''ds} - \frac{\delta\partial n'''}{n'''s}.$$

49. Pour rendre l'application de ces formules plus facile, introduisons-y les lettres $A, B, C, D,$ &c. pour avoir

$$\partial . lF\zeta = -\frac{(nA+1)\partial n}{n(n-1)A},$$

$$\partial . lG\eta = \partial . lF\zeta + \frac{(n'B+1)\partial\alpha}{n'Bb} - \frac{(n'B+1)\partial n'}{n'(n'-1)B};$$

$$\partial . lH\theta = \partial . lG\eta + \frac{(n''C+1)\partial\beta}{n''Cc} - \frac{(n''C+1)\partial n''}{n''(n''-1)C},$$

$$\partial . lI\iota = \partial . lH\theta + \frac{(n'''D+1)\partial\gamma}{n'''Dd} - \frac{(n'''D+1)\partial n'''}{n'''(n'''-1)D}.$$

dont le développement nous précipiteroit en des calculs fort embrouillés.

Nouvelle condition pour le lieu de l'œil.

50. Une réflexion de la dernière importance nous servira à lever cette grande difficulté, sans qu'on ait besoin de réunir toutes les images formées par les rayons des différentes couleurs, il est toujours possible de rendre insensible la confusion en latitude, il ne s'agit que de placer l'œil dans un certain endroit, pour que la confusion causée par les différentes couleurs disparoisse entièrement.

Fig. 7.

51. En effet, soit Nv la dernière image principale représentée par les surfaces réfringentes, Nn son espace de diffusion, & nv' l'image d'une autre couleur quelconque. Qu'on tire par les extrémités v' & v, la droite $v'vO$ coupant l'axe en O, il est évident que plaçant l'œil en O, chaque point de l'objet sera dépeint sur le même point de la rétine par tous

tous les rayons différens, & partant la vision ne sera plus troublée par l'apparence des bords colorés.

52. On n'a donc qu'à chercher ce point O, & l'identifier avec le lieu de l'œil qui lui a déjà été assigné; or la distance NO étant $= \frac{Nn}{nv' - Nv} Nv = \frac{Nn . Nv}{d . Nv} = \frac{Nn}{d . l Nv}$, Fig. 6.

cherchons ces semblables points pour chacune des images $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$, &c. dont nous venons de considérer les variations, & supposant ces points en p, q, r, s, &c. nous aurons les déterminations suivantes:

$$Fp = \frac{d\alpha}{d . l F\zeta},\ Gq = \frac{d\beta}{d . l G\eta},\ Hr = \frac{d\gamma}{d . l H\theta},\ Is = \frac{d\gamma}{d . l I\iota},\ \&c.$$

53. Si nous voulions substituer ici les valeurs trouvées ci-dessus, nous tomberions en des formules plus compliquées, dont on ne sauroit espérer aucun secours; mais il arrive par un hasard aussi heureux qu'imprévu, qu'en identifiant ces points p, q, r, s, &c. avec ceux des mêmes dénominations de la *figure 5*, on parvient à des formules assez simples & même très-élégantes.

54. Ayant donc trouvé ci-dessus pour le cas de la *figure 5*

$$Ap = o,\ Bq = \frac{\pi' q}{\psi'},\ Cr = \frac{\pi'' r}{\psi''},\ Ds = \frac{\pi''' s}{\psi'''},\ \&c.$$

mais en regardant successivement chaque image comme la dernière, la juste distance de l'œil $= k$ donne aussi ces valeurs, $Ap = \alpha + k, Bq = \beta + k, Cr = \gamma + k, Ds = \delta + k$, &c. ensuite en considérant les images mêmes de la *figure 5*, avec les angles ψ, ψ', ψ'', &c. nous aurons

$$Fp = \frac{F\zeta}{\psi},\ Gq = \frac{G\eta}{\psi'},\ Hr = \frac{H\theta}{\psi''},\ I\iota = \frac{I\iota}{\psi'''},\ \&c.$$

& en substituant les valeurs du §. 4 à cause de $\zeta = a\,\phi$, Autres formules pour les points p, q, r, s, &c. de la *fig. 5*.

$$Fp = \frac{a\,\phi}{nA\psi},\ Gq = \frac{a\,\phi}{nn'AB\psi'},\ Hv = \frac{a\,\phi}{nn'n''ABC\psi''},\ \&c.$$

55. Égalons ces dernières formules à celles qui ont été

trouvées au §. 52, pour chaque nombre de surfaces, & nous aurons à résoudre les équations suivantes :

Nombre des surfaces.	Équations
1	$\frac{a\varphi}{nA\psi} = \frac{\partial\alpha}{\partial . lF\zeta} = - k,$
2	$\frac{a\varphi}{nn'AB\psi'} = \frac{\partial\beta}{\partial . lG\eta} = - k,$
3	$\frac{a\varphi}{nn'n''ABC\psi''} = \frac{\partial\gamma}{\partial . lH\theta} = - k,$
	&c.

56. Mais afin que nous puissions passer successivement à la dernière, posons

$$a\varphi\partial . lF\zeta - nA\psi\partial\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots = P$$
$$a\varphi\partial . lG\eta - nn'AB\psi'\partial\beta \ldots\ldots\ldots = Q$$
$$a\varphi\partial . lH\theta - nn'n''ABC\psi''\partial\gamma \ldots\ldots = R$$
$$a\varphi\partial . lI\iota - nn'n''n'''ABCD\psi'''\partial\delta \ldots = S, \text{ \&c.}$$

de sorte que pour une surface on aura $P = 0$, pour deux $Q = 0$ pour trois, $R = 0$, &c.

57. Pour la première formule, à cause de $dlF\zeta = -\frac{(nA+1)dn}{n(n-1)A}$ & $d\alpha = -\frac{n(A+1)dn}{n(n-1)AA}$; on a $P = -\frac{a\varphi dn}{n} = - a\psi dn$; pour les autres, cherchons leurs différences, & d'abord,

$$Q - P = \frac{a\varphi(n'B+1)d\alpha}{n'Bb} - \frac{a\varphi(n'B+1)dn'}{n'(n'-1)B} - nA(n'B\psi'd\beta - \psi d\alpha).$$

Or par le §. 36, nous aurons $a\varphi(n'B+1) = nn'Ab(\psi' - B\psi)$, & par le §. 45 . . . $n'B\psi'd\beta = \frac{\psi'd\alpha}{B} - \frac{b(B+1)\psi'dn'}{(n'-1)B}$, d'où l'on parvient à cette expression $Q - P = \frac{nAb(\psi'+\psi)dn'}{n'-1}$;

laquelle à cause de $\frac{\psi' + \psi}{n' - 1} = \pi' - \psi'$ se réduit à celle-ci :

$$Q - P = -nAb(\psi' - \pi')\,dn' \text{ ou } Q = P - nAb(\psi' - \pi')\,dn'.$$

58. Par une semblable réduction, on trouve,

$$R = Q - nn' \quad ABc \quad (\psi'' - \pi'')\,dn'',$$
$$S = R - nn'n'' \, ABCd\,(\psi''' - \pi''')\,dn''', \text{ \&c.}$$

de sorte qu'à présent toutes les difficultés qui nous menaçoient d'abord, sont heureusement surmontées.

Destruction des couleurs d'iris sur les bords des objets vus.

59. Maintenant, nous n'avons qu'à égaler à zéro la dernière de ces formules, pour procurer à la vision l'avantage, que les bords des objets soient vus bien terminés sans couleurs, pour cet effet on n'a qu'à satisfaire à cette équation,

$$0 = a\psi\,dn + nAb(\psi' - \pi')\,dn' + nn' \quad Abc \quad (\psi'' - \pi'')\,dn''.$$
$$+ nn'n'' \, ABCd(\psi''' - \pi''')\,dn'''.$$
$$\text{\&c.}$$

60. On conviendra aisément, que par ce moyen on délivrera déjà les instrumens de Dioptrique du plus grand inconvénient, de la part de la différente réfrangibilité des rayons, & ce moyen pourra toujours être mis en usage, quand même il ne feroit pas possible de réunir toutes les images des différentes couleurs; ainsi en ne se servant que de lentilles d'une seule espèce de verre, ce moyen procurera toujours de très-grands avantages.

Destruction entière des inconvéniens de la différente réfrangibilité des rayons.

61. Cependant, à moins qu'on ne puisse réussir à faire évanouir aussi le dernier espace de diffusion, il restera encore une espèce de confusion, mais d'une nature tout-à-fait différente, & qui n'est pas si nuisible à la distinction de la vision, mais on délivrera les instrumens aussi de celle-ci, en satisfaisant à cette équation.

Formule nommée $= \Omega$.

$$0 = \frac{a(A+1)\,dn}{n-1} + \frac{nA^2b(B+1)\,dn}{n'-1} + \frac{nn'A^2B^2c(C+1)\,dn''}{n''-1}$$
$$+ \frac{nn'n''A^2B^2C^2d(D+1)\,dn'''}{n'''-1}, \text{ \&c.}$$

Appréciation du degré de confusion de cette espèce.

62. Posons cette formule $= \Omega$, & pour les cas où il est impossible de la faire évanouir, il convient d'en apprécier le degré de confusion dont la vision sera troublée, ce qui se fera d'une manière semblable à celle dont je me suis servi pour la confusion de l'ouverture.

Fig. 4.

63. Pour ce cas, nous aurons donc l'espace de diffusion des images $Nn = d\Omega = \frac{-\Omega}{N . A^2 B^2 C^2 D^2, \&c.}$, & l'angle O dont les rayons sont inclinés à l'axe, sera ici pour tous les points $O = ABCD, \&c. \frac{\chi}{a}$. Or ici la confusion sentie deviendra la plus petite en plaçant le milieu de l'espace Nn à la juste distance de l'œil k, & alors le demi-diamètre apparent de la confusion sentie, ou des taches dont les points de l'objet seront représentés, sera $= \frac{O d\omega}{2k}$, que je nommerai $= \eta$.

Juste mesure de la confusion sentie par l'angle η.

64. On aura donc pour la juste mesure de cette confusion,

$$\eta = \frac{\Omega \chi}{2 Nak . ABCD, \&c.}.$$

Or par la condition du grossissement ayant $Nk . ABCD, \&c. = \frac{h}{m}$, cette mesure sera $\eta = \frac{m \Omega \chi}{2ah}$, ou bien

$$= \frac{m\chi}{2ah} \left(\frac{a(A+1)\partial n}{n-1} + \frac{nA^2 b(B+1)\partial n'}{n'-1} + \frac{nn'A^2B^2c(C+1)\partial n''}{n''-1} + \&c. \right)$$

Comparaison de l'une & de l'autre confusion.

65. De-là on voit que cette confusion est proportionnelle au diamètre même de l'ouverture de la première surface, pendant que la première confusion étoit proportionnelle au cube de ce diamètre; on tire de-là aussi une juste comparaison entre ces deux espèces de confusion, puisqu'on n'aura qu'à comparer entre eux les deux angles θ & η; or on aura $\theta : \eta = \frac{\omega \chi \chi}{4aa} : \Omega$.

66. Afin donc que cette confusion devienne impercep-

tible, il faudra faire en sorte que l'angle η ne surpasse point 2 secondes, ou que la valeur de η se trouve plus petite que $\frac{1}{100000}$. Il n'y a aucun doute que ce moyen ne puisse être employé avec succès, même dans les cas où il n'est pas possible de réduire cette confusion à zéro.

Juste mesure du lieu de l'œil.

Distance de l'œil derrière la dernière surface $= O$.

67. Considérons maintenant plus soigneusement le lieu de l'œil qui doit nécessairement se trouver derrière la dernière surface, ou bien posant sa distance de là $= O$, il est nécessaire que cette quantité O devienne positive, sans cette condition il seroit impossible que l'œil découvrit le champ apparent tout entier.

68. En rassemblant tout ce qui vient d'être rapporté sur le lieu de l'œil, nous aurons pour chaque nombre de surfaces,

Nomb. de surfaces.	Lieu de l'œil.
1	$O = 0 = \frac{a}{A} + k$,
2	$O = \frac{\pi' q}{\psi'} = \frac{-h\pi' q}{m a \varphi} = \frac{-h(n'-1)\pi'}{NmA(\psi' - B\psi)} = \frac{-B}{k} \cdot \frac{(n'-1)\pi'}{\psi' - B\psi} = \frac{b}{B} + k$,
3	$O = \frac{\pi'' r}{\psi''} = \frac{+h\pi'' r}{m a \varphi} = \frac{+h(n''-1)\pi''}{NmAB(\psi''-C\psi')} = \frac{-C}{k} \cdot \frac{(n''-1)\pi''}{\psi''-C\psi'} = \frac{c}{C} + k$,
4	$O = \frac{\pi''' s}{\psi'''} = \frac{-h\pi''' s}{m a \varphi} = \frac{-h(n'''-1)\pi'''}{NmABC(\psi'''-D\psi'')} = \frac{-D}{k} \cdot \frac{(n'''-1)\pi'''}{\psi'''-D\psi''} = \frac{d}{D} + k$,
	&c.

où j'ai mis plusieurs formules équivalentes, afin qu'en chaque cas proposé on puisse se servir de celle qu'on jugera la plus commode.

Conditions nécessaires à observer.

69. Comme c'est une condition absolument nécessaire que la distance O soit positive, il est également nécessaire que les intervalles entre les surfaces AB, BC, CD, &c. deviennent positives; c'est pourquoi dans la détermination des élémens pour un cas quelconque, il faut bien prendre garde qu'aucune de ces formules ne devienne négative.

$$AB = \alpha + b,\ BC = b + c,\quad CD = \gamma + d,\ D\varepsilon = \delta + e, \text{\&c.}$$

ou $$AB = \frac{\pi' q}{\psi},\ BC = \frac{\pi' q + \pi'' r}{\psi'},\ CD = \frac{\pi'' r + \pi''' s}{\psi''},\ D\varepsilon = \frac{\pi''' s + \pi'''' t}{\psi'''}.$$

70. Il me ſemble que les articles que je viens de développer, renferment tout ce à quoi il faut avoir égard dans la Dioptrique ; les formules que j'ai données ici, ſont en effet ſuffiſantes pour procurer aux inſtrumens de Dioptrique toutes les bonnes qualités qu'on peut ſouhaiter, & même pour les porter au plus haut degré de perfection dont ils ſont ſuſceptibles.

71. Peut-être trouvera-t-on quelque difficulté pour appliquer ces formules à des cas particuliers, mais je puis aſſurer qu'après quelques eſſais on ſurmontera aiſément toutes les difficultés, de ſorte qu'on ne ſauroit plus rien deſirer dans cette ſcience.

Avertiſſement ſur l'application de ces formules.

72. Ordinairement dans la conſtruction des inſtrumens de Dioptrique, on ſe règle ſur les yeux, dont la juſte diſtance k eſt infinie, & alors nos formules deviennent non-ſeulement plus ſimples, mais leur application auſſi ſe fait beaucoup plus aiſément, cependant ſans s'aſtreindre à cette condition, où $k = \infty$, on réuſſira preſqu'auſſi bien en introduiſant dans le calcul d'abord la diſtance de l'oeil derrière la dernière ſurface qui eſt égale à O, & alors il ſera bon de commencer les recherches par les formules ſuivantes.

Deux ſurfaces.

Pour le cas des deux ſurfaces, on a d'abord

$$B = \frac{b}{O - k} \ \& \ NmAbk = h(O - k),$$

d'où puiſque $ma\varphi = -\psi' h$, $O = \frac{\pi' q}{\psi'}$, & $q = \frac{(n' - 1)b}{n'B + 1}$,

à cauſe de $(n' - 1)\pi' = n'\psi' + \psi$, on aura

$$b = \frac{h(O - k)}{NmAk} \ \& \ \frac{\psi}{\psi'} = \frac{n'hk + O \cdot NmAk}{h(O - k)};$$

Trois ſurfaces.

Pour le cas des trois ſurfaces, on a d'abord

$$C = \frac{c}{O - k}, \ \& \ NmABck = -h(O - k);$$

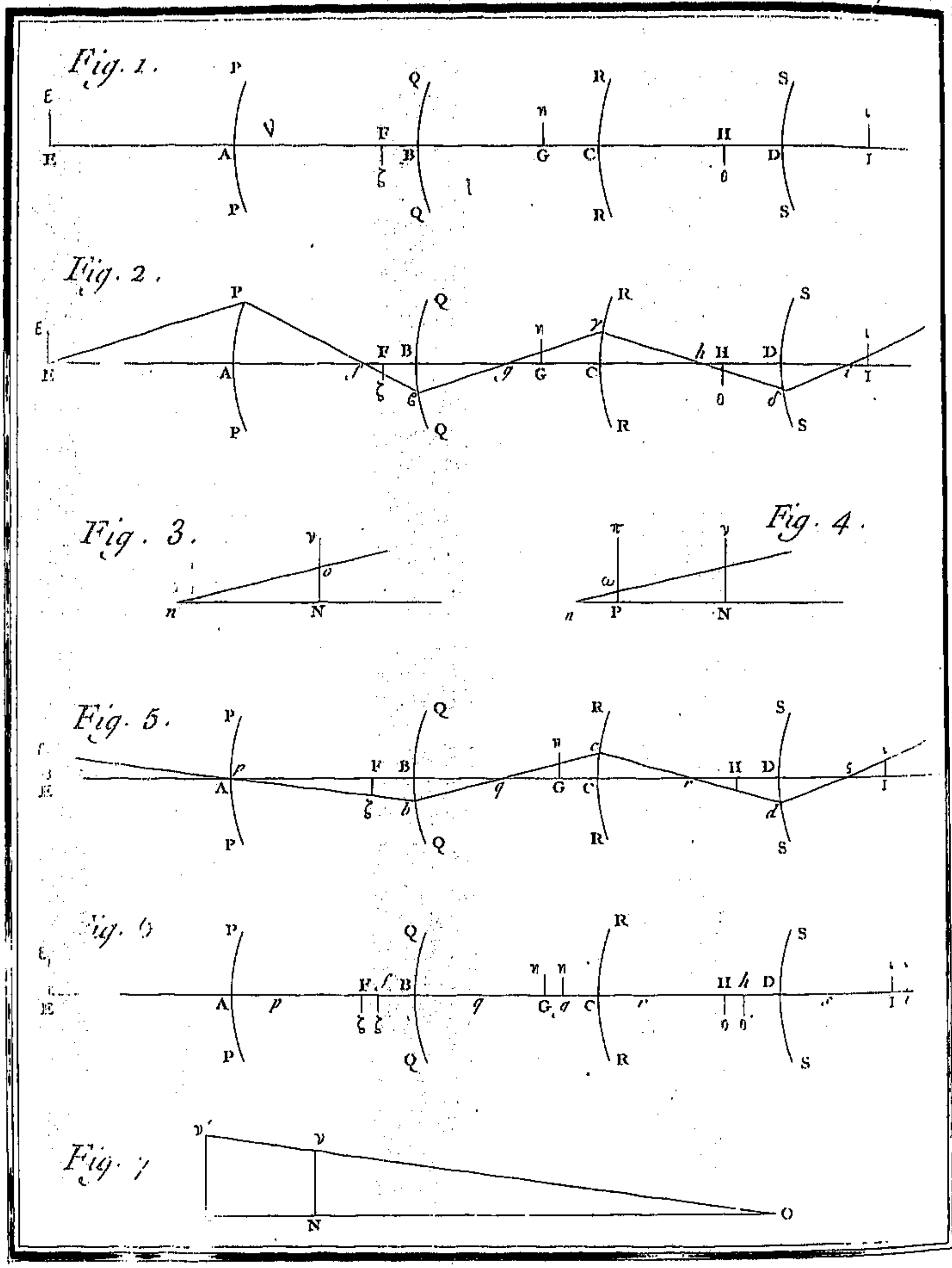
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7