



1768

Corrections nécessaires pour la théorie de la déclinaison magnétique, proposée dans le XIII volume des Mémoires

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Corrections nécessaires pour la théorie de la déclinaison magnétique, proposée dans le XIII volume des Mémoires" (1768). *Euler Archive - All Works*. 362.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/362>



CORRECTIONS NÉCESSAIRES

POUR

LA THÉORIE DE LA DÉCLINAISON MAGNÉTIQUE,
PROPOSÉE DANS LE XIII VOLUME DES
MÉMOIRES.

PAR M. L. EULER.

Mon but principal, dans l'essai que j'avois proposé sur la déclinaison magnétique, a été de faire voir, que pour expliquer les phénomènes bizarres que la mappemonde de feu Mr. Halley nous présente, il suffit de supposer dans la terre deux pôles magnétiques, & qu'on n'est nullement obligé de recourir à quatre, comme ce grand homme se l'étoit imaginé. Aussi mon sentiment paroît-il suffisamment confirmé par les lignes analogues à celles de Halley pour les différentes déclinaisons, que j'y ai déduites de l'hypothèse de deux pôles magnétiques seulement, quoique d'ailleurs la théorie elle-même, sur laquelle j'ai fondé ces conclusions, soit sujette à des difficultés très embarrassantes. Pour trouver la déclinaison magnétique en chaque lieu de la terre, je concevois un plan qui passoit par ce lieu & les deux pôles magnétiques, & je regardois l'intersection de ce plan avec l'horizontal comme la direction de l'aiguille aimantée. On ne sauroit douter que la véritable direction magnétique ne tombât dans ce plan, & partant, si cette direction étoit horizontale, il seroit bien certain que la boussole montreroit ladite intersection. Mais il faut bien distinguer la véritable direction magnétique, de celle que la boussole indique, puisque celle-là est souvent fort inclinée à l'horizon, pendant que celle-ci est toujours horizontale. Pour connoître la véritable direction magnétique,



que, il faut principalement avoir égard à l'inclinaison de l'aiguille aimantée, ou bien à cette situation dans laquelle l'aiguille reposeroit, si elle étoit librement mobile autour de son centre de gravité, en sorte que la gravité n'y eût aucune influence. Cette situation se trouvera donc sans contredit dans le plan qui passe par le lieu proposé de la terre & les deux poles magnétiques; mais, quand elle est inclinée à l'horizon, & qu'on en charge le bout élevé d'un petit poids pour la rendre horizontale, son mouvement se fera dans un plan vertical, y étant déterminé par l'action de la gravité; & partant, quand l'aiguille sera parvenue à la direction horizontale, elle ne se trouvera plus dans le plan qui passe par les deux poles magnétiques, à moins que ce plan ne soit aussi vertical. De là il est évident, que la direction horizontale de l'aiguille aimantée pourra s'écarter très considérablement de l'intersection du dit plan, tiré par les poles magnétiques avec l'horizon, & cela d'autant plus dans l'obliquité de ce plan à l'horizon, que l'inclinaison de l'aiguille sera grande.

Planch. XIV.

Fig. 1.

Pour mettre cela dans tout son jour, concevons une sphere décrite autour du lieu proposé de la terre C, où le grand cercle NS représente l'horizon, & le diametre NCS la ligne méridienne, dont le point N marque le Nord & S le Sud. Ensuite, le plan qui passe par le lieu C & les deux poles magnétiques, soit représenté par le grand cercle PIQ, qui coupe l'horizon en I: & puisque la véritable direction magnétique se trouve dans le plan PIQ, supposons qu'elle soit dirigée au point L, de sorte qu'une aiguille librement suspendue par son centre de gravité en C, prenne la situation CL, son bout boréal étant dirigé vers le point L. Tirons maintenant par ce point L le cercle vertical ZLY, qui coupe l'horizon au point M, & l'arc ML, ou l'angle MCL, nous marquera l'inclinaison de l'aiguille aimantée, dirigée par le bout boréal au dessous de l'horizon. Cela posé, il est clair qu'en réduisant cette aiguille au plan horizontal, en chargeant son bout élevé d'un poids suffisant, elle y prendra la situation CM, qui est par conséquent celle que la boussole doit indiquer, & partant l'arc NM, ou l'angle NCM, en marquera la déclinaison.

Or,



Or, dans mon Mémoire sur ce sujet, inféré dans le XIII Volume des Mémoires de l'Académie, j'avois supposé que la ligne CI marquerait toujours la direction de la boussole, & que l'arc NI seroit la mesure de la déclinaison; d'où il est évident que cette hypothèse ne sauroit avoir lieu que dans les endroits dans lesquels, ou l'inclinaison ML est nulle, ou le plan PIQ tiré par les magnétiques verticaux. Dans tous les autres lieux de la terre, la véritable déclinaison magnétique sera différente de celle que j'avois supposée dans mon Mémoire, & partant aussi les lignes que j'avois tirées par tous les lieux où la déclinaison devoit être la même, s'écarteront de la vérité. Cependant, puisque le plan PIQ est presque partout à peu près vertical, l'aberration marquée par l'arc IM ne sauroit être assez grande pour changer tout à fait la figure desdites lignes; ce qui peut suffire en gros pour prouver qu'il n'y a que deux poles magnétiques dans la terre.

Pour mieux juger de cette erreur, commise dans la déclinaison de la boussole, on fait par la Trigonométrie sphérique, que connoissant dans le triangle sphérique IML, rectangle en M, l'angle LIM, avec l'inclinaison magnétique ML, on trouve par-là $\sin IM = \frac{\text{tag} \cdot LM}{\text{tag} \cdot LIM}$.

Il s'agit donc de corriger cette erreur dans les recherches que j'avois entreprises dans mon Mémoire précédent; ce qui est d'autant plus nécessaire, que sans cette correction il seroit impossible, ou de conclure par plusieurs observations les deux poles magnétiques de la terre, ou en les supposant connus, d'en déterminer les lignes Halleyennes par tous les lieux où la déclinaison est la même. Or c'est de là que dépendent tous les avantages qu'on a lieu d'attendre d'une connoissance plus parfaite de la déclinaison magnétique. Mais à présent il n'y a aucun doute que ces mêmes recherches ne deviennent incomparablement plus difficiles, puisqu'il faut aussi avoir égard à l'inclinaison magnétique, dont on n'a encore presque aucune connoissance pour la bien observer, quoique les instrumens inventés par feu Mr. Dieterich de

de Bâle, sur les idées de Mr. Daniel Bernoulli, foyent très propres pour cet effet. A cause de ce défaut, je serai obligé de recourir encore à une autre hypothèse pour établir la véritable direction magnétique, que je tâcherai pourtant d'approcher de la vérité, autant que les expériences faites sur les aimans le permettront. Par cette raison je ne donne ces recherches que comme un essai, pour pénétrer tant soit peu dans la véritable Théorie de la Déclinaison magnétique, qui est sans doute une des plus épineuses matières qu'on ait traitées jusqu'ici.

DÉFINITION 1.

1. *L'axe magnétique de la terre est la ligne droite tirée d'un pôle magnétique de la terre à l'autre.*

Fig. 1.

Que la sphere, représentée dans la figure 2. autour du centre C, soit la terre, dont les poles magnétiques se trouvent aux points A & B de sa surface, & la ligne droite AB sera l'axe magnétique de la terre.

COROLLAIRE 1.

2. Lorsque les deux poles magnétiques A & B sont diamétralement opposés sur la surface de la terre, l'axe magnétique AB passera par le centre de la terre C, & en fera un diamètre.

COROLLAIRE 2.

3. Mais si les deux poles magnétiques ne sont pas diamétralement opposés, l'axe magnétique AB, ne passant point par le centre C, sera plus petit que le diamètre, & cela d'autant plus, qu'il se trouvera plus éloigné du centre de la terre C.

DÉFINITION 2.

4. *Le centre magnétique est le point D, qui se trouve au milieu de l'axe magnétique AB, de sorte que les distances AD & BD foyent égales entr'elles.*



COROLLAIRE 1.

5. En tirant donc du centre de la terre C au centre magnétique D la droite CD, elle sera perpendiculaire sur l'axe magnétique AB, & marquera la distance de l'axe magnétique au centre de la terre C.

COROLLAIRE 2.

6. Plus cette distance CD sera grande, plus sera petit l'axe magnétique AB. Qu'on tire la ligne CA, qui étant un rayon de la terre, le demi-axe magnétique sera $DA = \sqrt{AC^2 - CD^2}$, & partant l'axe magnétique $AB = 2\sqrt{AC^2 - CD^2}$, ou bien on aura $AB^2 = EF^2 - 4CD^2$, la ligne EF représentant un diamètre de la terre.

DÉFINITION 3.

7. *L'équateur magnétique est un grand cercle de la terre perpendiculaire à l'axe magnétique AB.*

COROLLAIRE 1.

8. L'équateur magnétique passe donc, tant par le centre de la terre C, que par le centre magnétique D. Or, comme on peut tirer une infinité de grands cercles par les deux centres C & D, celui au plan duquel l'axe magnétique AB est perpendiculaire, sera l'équateur magnétique.

COROLLAIRE 2.

9. Étant que l'axe magnétique AB ne passe point par le centre de la terre C, les poles magnétiques A & B seront différens des poles de l'équateur magnétique, & ils en seront éloignés de part & d'autre d'un arc de grand cercle, dont le sinus est égal à la distance CD de l'axe magnétique au centre de la terre.

COROLLAIRE 3.

10. Pour avoir les poles de l'équateur magnétique, on n'a qu'à tirer par le centre de la terre C le diamètre *ab*, parallèle à l'axe



magnétique AB , lequel étant aussi perpendiculaire à l'équateur magnétique, ses extrémités a & b en marqueront les poles: & il est évident que la distance des centres CD est le sinus des arcs Aa & Bb .

DÉFINITION 4.

11. *Le diamètre magnétique de la terre est celui qui passe par le centre magnétique D de la terre.*

COROLLAIRE 1.

12. Le diamètre magnétique est donc la ligne EF , tirée par le centre de la terre C , qui est perpendiculaire à l'axe magnétique AB , & qui passe par conséquent par son milieu D , ou le centre magnétique.

COROLLAIRE 2.

13. Le diamètre magnétique EF se trouve donc aussi dans l'équateur magnétique, & y marque les points E & F , qui sont des termes fixes, & propres pour compter de là les autres points.

DÉFINITION 5.

14. *Le premier méridien magnétique est le grand cercle de la terre tiré par l'axe magnétique AB .*

COROLLAIRE 1.

15. C'est dans ce premier méridien magnétique que se trouvent, tant les poles magnétiques A & B , que les poles a & b de l'équateur magnétique, auquel ledit méridien est perpendiculaire.

COROLLAIRE 2.

16. Ce premier méridien magnétique n'est déterminé, qu'autant que l'axe magnétique AB n'est pas un diamètre. Car, si les deux poles magnétiques A & B étoient diamétralement opposés l'un à l'autre, tout grand cercle passant par ces poles n'auroit aucune préférence.



COROLLAIRE 3.

17. Le premier méridien magnétique est composé de deux parties AEB & AFB, inégales entr'elles lorsque l'axe magnétique AB ne passe point par le centre de la terre. L'une de ces parties sera plus grande qu'un demi grand cercle, & l'autre d'autant plus petite: l'une & l'autre peuvent être regardées comme deux méridiens magnétiques opposés.

DÉFINITION 6.

18. *Toute section plane du globe de la terre, faite par l'axe magnétique AB, sera nommée un méridien magnétique.*

COROLLAIRE 1.

19. Il est donc possible de faire passer par chaque lieu de la terre un méridien magnétique; on n'a qu'à concevoir un plan qui passe par le lieu proposé & par les deux pôles magnétiques A & B.

COROLLAIRE 2.

20. Tous ces méridiens magnétiques seront donc de petits cercles de la sphere, à l'exception du premier méridien magnétique, qui est un grand cercle, supposé que l'axe magnétique AB ne passe point par le centre de la terre.

REMARQUE.

21. Pour se former une idée juste de la position de chaque méridien magnétique, le moyen le plus naturel est sans doute d'en faire voir l'inclinaison au premier méridien magnétique. La 2. figure représente un tel méridien quelconque AEB, qui ne passant point par le centre de la terre C, fera un petit cercle de la sphere, duquel il est d'abord clair, que son plan est toujours perpendiculaire à l'équateur magnétique, & qu'il en sera partagé en deux parties égales. Soit donc *e* le point où ce méridien est traversé par l'équateur magnétique, & que Ee représente l'arc de cet équateur compris entre le premier méridien



ridien AEB & celui-ci A ϵ B, & il est clair que cet arc donnera une autre détermination pour la position de ce méridien A ϵ B, puisque cet arc n'est pas la mesure de l'angle dont ce méridien est incliné au premier AEB. Ensuite, on peut aussi considérer l'angle EA ϵ , que ces deux cercles ou leurs tangentes font entr'elles aux points A ou B, où ils concourent ensemble, & cet angle donnera une troisième détermination pour la position du méridien A ϵ B, aussi différente des deux autres. Cependant une de ces trois déterminations étant donnée, on peut trouver par-là les deux autres, comme je le ferai voir dans les problèmes suivans, où il est aussi fort important de déterminer pour chaque méridien son rayon, & le nombre des degrés qu'il contient.

PROBLEME I.

Fig. 2.

22. *Les deux poles magnétiques A & B de la terre étant donnés, avec l'inclinaison d'un méridien quelconque A ϵ B au premier méridien magnétique AEB, trouver le rayon de ce méridien A ϵ B, & le nombre des degrés qu'il contient.*

SOLUTION.

Soit c le rayon de la terre ou de la sphere représentée dans la figure, & d la distance de l'axe magnétique AB au centre de la terre C, de sorte que $CD = d$, & partant la moitié de l'axe magnétique $AD = BD = \sqrt{cc - dd}$; d'où nous voyons que pour le premier méridien magnétique AEB, sa moitié ou l'arc AE surpasse le quart d'un grand cercle Ea de l'arc Aa, dont le sinus est $CD = d$, rapporté au rayon $CA = c$. Donc, si nous posons l'angle $ACa = \alpha$, qui marque l'éloignement des poles magnétiques A & B aux poles de l'équateur magnétique a & b , nous aurons $CD = d = c \sin \alpha$ & $AD = BD = c \cos \alpha$, & partant pour le diamètre magnétique EF, ses parties $DE = c + c \sin \alpha$, & $DF = c - c \sin \alpha$. Maintenant, pour le méridien magnétique proposé A ϵ B, soit son inclinaison au premier méridien $AEB = \phi$, & la ligne De son intersection avec l'équateur magnétique. Cela posé, le plan de l'équateur EDe étant perpendiculaire au
plan



plan du méridien AeB , l'angle EDe sera la mesure de son inclinaison au premier méridien, & partant $EDe = \phi$. Qu'on tire du centre de la terre C sur Ce la perpendiculaire Cc , qui étant perpendiculaire au plan même du méridien AeB , le point c sera son centre. Or le triangle DcC , rectangle à c à cause de $DC \perp Cc$, donne $Cc = c \sin \alpha \sin \phi$, & $Dc = c \sin \alpha \cos \phi$, d'où nous trouvons le rayon du petit cercle, dont notre méridien AeB est une partie, $cA = c \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}$. Enfin, la tangente de l'angle AeD étant $= \frac{AD}{Dc} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \phi}$, son complément à deux angles droits sera la mesure de l'arc Ae , qui est la moitié du méridien AeB .

COROLLAIRE 1.

23. Puisque le rayon du méridien magnétique AeB est $cA = c \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi}$, son inclinaison au premier méridien AEB étant $EDe = \phi$, il est évident, que si cette inclinaison évanouit, ou devient égale à deux angles droits, le rayon est $= c$, ou bien dans ce cas le méridien sera un arc de grand cercle.

COROLLAIRE 2.

24. De là il est aussi clair, que parmi tous les méridiens magnétiques celui-là sera une partie du plus petit cercle, dont le plan est perpendiculaire au premier méridien; son rayon sera alors $= c \cos \alpha = AD$ à cause de $\phi = 90^\circ$. Dans ce cas, à cause de $Dc = 0$ & de l'angle $AeD = 90^\circ$, ce méridien sera précisément un demi-cercle.

COROLLAIRE 3.

25. L'arc de l'équateur magnétique Ee , compris entre le premier méridien AEB & le proposé AeB , est la mesure de l'angle ECe . Or $ECe = EDe + DcC$; mais $EDe = \phi$ & $\sin DcC = \frac{Cc}{Cc} = \sin \alpha \sin \phi$; donc, si nous posons l'angle $ECe = \psi$, nous aurons $\sin \alpha \sin \phi = \sin DcC = \sin (\psi - \phi)$.



COROLLAIRE 4.

26. Ainsi, connoissant l'inclinaison $EDe = \Phi$, on trouve aisément l'angle $ECe = \psi$; mais réciproquement, l'angle ψ étant donné à cause de $\sin \alpha \sin \Phi = \sin \psi \cos \Phi - \cos \psi \sin \Phi$, on trouve $\tan \Phi = \frac{\sin \psi}{\sin \alpha + \cos \psi}$.

PROBLEME II.

Fig. 2.

27. Les poles magnétiques de la terre A & B étant donnés, avec l'inclinaison d'un méridien magnétique quelconque AeB au premier méridien AEB , trouver l'angle EAc , que font ces deux méridiens entr'eux à leur concurrence dans les poles magnétiques.

SOLUTION.

Poſons comme auparavant l'angle $ACa = \alpha$, & l'inclinaison $EDe = \Phi$, il s'agit ici de trouver l'angle EAc , que font entr'elles les tangentes des deux méridiens au point A . Pour cet effet, j'observe que, dans le plan du premier méridien, l'angle DAE est $= ACE = 90^\circ + \alpha$, & dans le plan du méridien proposé AeB l'angle DAe est $= Ace = 90^\circ + DAe$. Soit l'angle $DAe = \epsilon$, de sorte que $\tan \epsilon = \frac{Dc}{AD} = \frac{\sin \alpha \cos \Phi}{\cos \alpha}$, ou $\sin \epsilon = \frac{Dc}{Ac} = \frac{\sin \alpha \cos \Phi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \Phi^2)}}$ & $\cos \epsilon = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \Phi^2)}}$, &

Planche XV.

Fig. 3.

nous aurons l'angle $Ace = 90^\circ + \epsilon$. Qu'on pose maintenant dans la 3. figure sur le plan de la table l'angle $DAE = 90^\circ + \alpha$, & dans un autre plan incliné à celui-là de l'angle $= \Phi$, en le coupant par la ligne D l'angle $DAe = \epsilon$, de sorte qu'il faille trouver l'angle EAc . Pour cet effet, qu'on prenne à volonté les lignes $Ae = f$ & $Ac = g$; qu'on tire du point E sur la droite DA prolongée la perpendiculaire EP , & du point e premièrement sur le plan de la table la perpendiculaire eg , & ensuite de g sur DA la perpendiculaire gp , afin que la droite



droite epy soit aussi perpendiculaire. Maintenant les angles $EAP = 90^\circ - \alpha$ & $eAp = 90^\circ - \epsilon$, donnent d'abord

$$AP = f \sin \alpha; PE = f \cos \alpha; Ap = g \sin \epsilon; pe = g \cos \epsilon.$$

Or l'inclinaison de nos deux plans ayant pour mesure l'angle epq , nous aurons $epq = \Phi$, & partant $pq = g \cos \epsilon \cos \Phi$, & $qe = g \cos \epsilon \sin \Phi$; donc $Pp = f \sin \alpha - g \sin \epsilon$, & $PE - pq = f \cos \alpha - g \cos \epsilon \cos \Phi$. Tirons la droite Ee , & puisque

$$Ee^2 = Pp^2 + (PE - pq)^2 + qe^2, \text{ nous aurons}$$

$$Ee^2 = (f \sin \alpha - g \sin \epsilon)^2 + (f \cos \alpha - g \cos \epsilon \cos \Phi)^2 + gg (\cos \epsilon \sin \Phi)^2,$$

laquelle formule étant développée donne

$$Ee^2 = ff + gg - 2fg \sin \alpha \sin \epsilon - 2fg \cos \alpha \cos \epsilon \cos \Phi.$$

Or, par la matière du triangle $E Ae$, on fait qu'il y a

$$Ee^2 = AE^2 + Ae^2 - 2AE \cdot Ae \cdot \cos EAe = ff + gg - 2fg \cos EAe,$$

d'où l'on tire

$$\cos EAe = \sin \alpha \sin \epsilon + \cos \alpha \cos \epsilon \cos \Phi.$$

Substituons maintenant pour $\sin \epsilon$ & $\cos \epsilon$ les valeurs données ci-dessus, & nous obtiendrons

$$\cos EAe = \frac{\sin \alpha^2 \cos \Phi + \cos \alpha^2 \cos \Phi}{V(1 - \sin \alpha^2 \sin \Phi^2)} = \frac{\cos \Phi}{V(1 - \sin \alpha^2 \sin \Phi^2)};$$

$$\text{de là nous concluons } \sin EAe = \frac{V(\sin \Phi^2 - \sin \alpha^2 \sin \Phi^2)}{V(1 - \sin \alpha^2 \sin \Phi^2)} = \frac{\cos \alpha \sin \Phi}{V(1 - \sin \alpha^2 \sin \Phi^2)},$$

$$\& \text{ par conséquent } \tan EAe = \frac{\cos \alpha \sin \Phi}{\cos \Phi} = \cos \alpha \tan \Phi.$$

Donc l'angle que les deux méridiens $AE B$ & $Ae B$ font entr'eux aux Planch. XIV. poles A & B sur la surface de la terre, savoir l'angle $E Ae$ ou $E Be$, est Fig. 2. tel, que sa tangente est $= \cos \alpha \tan \Phi$.

COROLLAIRE 1.

28. Nommant donc l'inclinaison du méridien $A \epsilon B$ au premier méridien $AEB = \phi$, l'arc de l'équateur compris entr'eux, ou plutôt l'angle $EC\epsilon = \psi$, & l'angle qu'ils font entr'eux aux poles $E A \epsilon = \omega$, ces trois angles dépendent en sorte les uns des autres que $\sin(\psi - \phi) = \sin \alpha \sin \phi$, & $\tan \omega = \cot \alpha \tan \phi$.

COROLLAIRE 2.

29. Or nous avons vu dans l'article 26. que $\tan \phi = \frac{\sin \psi}{\sin \alpha + \cot \psi}$, d'où nous tirons entre les angles ψ & ω cette relation, $\tan \omega = \frac{\cot \alpha \sin \psi}{\sin \alpha + \cot \psi}$; d'où l'on voit que, si $\psi = 0$, il y aura aussi $\omega = 0$, & si $\cot \psi = -\sin \alpha$, ou $\psi = 90 + \alpha$, l'angle ω devient droit, de même que l'angle ϕ , ce qui arrive dans le méridien perpendiculaire au premier, dont la courbure est la plus grande.

COROLLAIRE 3.

30. Puisque $\tan \omega = \frac{\cot \alpha \sin \psi}{\sin \alpha + \cot \psi}$, il s'ensuit $\sin \omega = \frac{\cot \alpha \sin \psi}{\sqrt{(\sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cot \psi + \cot \psi^2 + \cot \alpha^2 \sin \psi^2)}}$; or $\sin \alpha^2 + \cot \psi^2 + \cot \alpha^2 \sin \psi^2 = 1 - \sin \alpha^2 \cot \psi^2$; donc $\sin \omega = \frac{\cot \alpha \sin \psi}{1 + \sin \alpha \cot \psi}$ & $\cot \omega = \frac{\sin \alpha + \cot \psi}{1 + \sin \alpha \cot \psi}$, d'où l'on tire $\cot \psi = \frac{\cot \omega - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha \cot \omega}$, & $\sin \psi = \frac{\cot \alpha \sin \omega}{1 - \sin \alpha \cot \omega}$, pour trouver l'angle ψ , l'angle ω étant donné.



PROBLEME III.

31. Les deux poles magnétiques de la terre A & B étant donnés pour un lieu quelconque de la terre L, trouver l'inclinaison du méridien magnétique à l'horizon de ce même lieu.

SOLUTION.

Par le lieu proposé de la terre L & par les poles magnétiques A & B, qu'on tire le petit cercle BLA, qui sera un méridien magnétique, dont je suppose qu'on sache l'inclinaison au premier méridien magnétique AEB, ou bien l'angle $EDe = \Phi$, prenant le point e dans l'équation magnétique. Soit c le centre de ce petit cercle, & qu'on tire au centre de la terre C le rayon LC, qui étant perpendiculaire à l'horizon du lieu L, il s'agit de déterminer l'angle, dont ce rayon CL est incliné au plan du méridien magnétique AclB; or la droite Cc étant perpendiculaire à ce même plan, il est évident que l'angle CLc est la mesure de ladite inclinaison, & partant son complément à 90° , ou bien l'angle LCc donnera l'inclinaison cherchée du méridien à l'horizon du lieu L. Or, posant l'angle $ACa = CAB = \alpha$, qui est déterminé par les deux poles magnétiques, nous avons vu ci-dessus que la ligne Cc est $= c \sin \alpha \sin \Phi$; donc le rayon de la terre étant $CL = c$, le cosinus de l'angle cherché LCc sera $= \sin \alpha \sin \Phi$, ou bien au lieu L le méridien magnétique sera incliné à l'horizon d'un angle, dont le cosinus est $= \sin \alpha \sin \Phi$.

Fig. 1.

COROLLAIRE I.

32. De là il est clair que, dans tous les lieux situés sur le même méridien magnétique, l'inclinaison de ce méridien à l'horizon est aussi par tout la même, le cosinus de cette inclinaison étant $= \sin \alpha \sin \Phi$: & l'intersection du méridien magnétique avec l'horizon se fera suivant le méridien magnétique.

COROLLAIRE 2.

33. Le méridien magnétique n'est donc perpendiculaire à l'horizon, que là où l'angle $\Phi = 0$, c'est à dire, sous le premier méridien



magnétique. Cependant il faut remarquer que, si l'axe magnétique AB passoit par le centre de la terre C, partout le méridien magnétique seroit vertical, ou perpendiculaire à l'horizon.

COROLLAIRE 3.

34. Si nous nommons l'inclinaison du méridien magnétique à l'horizon de quelque endroit $= \eta$, l'inclinaison au premier méridien $EDe = \phi$, l'angle $ECe = \psi$ & l'angle $EAc = \omega$, on aura les rapports suivans:

$$\cos \eta = \sin \alpha \sin \phi; \tag \eta = \frac{1 + \sin \alpha \cos \psi}{\sin \alpha \sin \phi}; \tag \eta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \omega}.$$

REMARQUE.

35. De toutes les expériences faites sur la nature magnétique, il semble qu'on puisse conclure hardiment, que la direction magnétique se trouve toujours dans un plan qui passe par les poles magnétiques, ou bien dans un méridien magnétique. Une aiguille aimantée suspendue précisément par son centre de gravité, de sorte qu'à l'égard de la pesanteur elle soit indifférente à toutes les directions, prend toujours par la force magnétique de la terre une certaine situation, que je nomme la direction magnétique; & il est certain que cette direction tombe toujours dans le plan du méridien magnétique, qui passe par le point de suspension de l'aiguille. Mais il n'est pas encore décidé sur quelle ligne de ce plan la direction magnétique tombe. On sait bien que, dans l'axe magnétique même, cette direction y tombe aussi; & ensuite on ne sauroit douter que, partout dans l'équateur magnétique, elle ne soit parallèle à l'axe magnétique. Cela pourroit encore paroître douteux, si l'équateur magnétique, où cela arrive, passe précisément par le milieu de l'axe magnétique, comme je l'ai supposé jusqu'ici. Mais quand même cela arriveroit dans la terre, on me dispensera d'y avoir égard; premièrement, parce que cela est encore inconnu, & ensuite il est toujours bon de commencer ses recherches par des cas réguliers. Or, pour les lieux hors de l'axe & de l'équateur magnétique, je me
voi



voi obligé de recourir à une nouvelle hypothèse, que j'établirai telle, qu'elle ne paroît pas s'écarter sensiblement de la vérité.

HYPOTHESE.

36. *Pour trouver la direction magnétique à un endroit quelconque L de la terre, situé dans un méridien magnétique quelconque A e L B, qu'on y tire du centre magnétique D la droite DL, & qu'on fasse l'angle DLM égal à l'angle LDB; & la ligne DM marquera la direction magnétique à l'endroit proposé L.*

Fig. 4.

COROLLAIRE 1.

37. Si l'endroit L est pris au point *e*, où le méridien est traversé par l'équateur magnétique, puisqu'alors la ligne *De* est perpendiculaire à l'axe magnétique AB, la direction magnétique y sera aussi parallèle à cet axe AB, & devenant une tangente du méridien magnétique, elle sera horizontale.

COROLLAIRE 2.

38. Mais, plus le lieu L approche de l'un ou l'autre pôle magnétique, plus la direction magnétique LM s'approchera de la ligne LD, & dans les poles mêmes, elle tombera dans l'axe magnétique. L'un & l'autre cas est donc d'accord avec l'expérience.

COROLLAIRE 3.

39. Donc, partout dans l'équateur magnétique sur la terre, la direction magnétique est horizontale, & puisque l'inclinaison évanouit, le méridien magnétique, comparé à la méridienne du même endroit, montrera la véritable déclinaison magnétique. Dans ces cas donc, ma théorie précédente est d'accord avec les principes que je viens d'établir ici.

PROBLEME IV.

40. *Pour un lieu quelconque de la terre L, déterminer la direction magnétique LM, & l'angle qu'elle fait avec la ligne horizontale, tirée dans le plan du méridien magnétique.*

Fig. 4.



SOLUTION.

Ayant tiré par le lieu proposé L le méridien magnétique ALB , qui étant un cercle soit son centre en c , & posant le demi-axe magnétique $DA = DB = a$, & le rayon de ce cercle $cL = r$, nous aurons l'éloignement du centre c à l'axe magnétique $Dc = \sqrt{rr - aa}$, qui soit pour abrégé $Dc = s$. Cela posé, soit de plus l'angle $ecL = \lambda$, qui marque l'éloignement du lieu proposé L de l'équateur magnétique cL . Maintenant, pour trouver l'angle LDB , auquel est égal l'angle DLM , nous aurons d'abord la ligne $DL = \sqrt{rr + ss + 2rs \cos \lambda}$, qui soit $DL = u$, & de là nous trouvons

$$\sin LDc = \frac{r \sin \lambda}{u}; \quad \cos LDc = \frac{r \cos \lambda + s}{u};$$

$$\sin DLc = \frac{s \sin \lambda}{u}; \quad \cos DLc = \frac{r + s \cos \lambda}{u}.$$

Donc l'angle DLM sera le complément de l'angle LDc à 90° , & partant

$$\sin DLM = \frac{r \cos \lambda + s}{u}, \quad \& \quad \cos DLM = \frac{r \sin \lambda}{u}.$$

Or, le rayon cL étant perpendiculaire à la tangente du méridien magnétique en L , qui est horizontale & la même avec laquelle la direction magnétique LM fait l'angle que nous cherchons TLM , ayant tiré la dite tangente LT , cet angle TLM sera le complément de l'angle $cLM = DLM + DLc$, d'où la composition des angles nous fournit

$$\sin TLM = \cos cLM = \frac{rr \sin \lambda - ss \sin \lambda}{uu}, \quad \&$$

$$\cos TLM = \sin cLM = \frac{rr \cos \lambda + 2rs + ss \cos \lambda}{uu}.$$

De là nous déduisons

fin



$$\sin \frac{1}{2} \text{TLM} = \frac{(r-s) \sin \frac{1}{2} \lambda}{u} \quad \& \quad \cos \frac{1}{2} \text{TLM} = \frac{(r+s) \cos \frac{1}{2} \lambda}{u}.$$

Par conséquent l'angle cherché TLM se trouvera le plus aisément par cette formule,

$$\tan \frac{1}{2} \text{TLM} = \frac{r-s}{r+s} \tan \frac{1}{2} \lambda.$$

COROLLAIRE 1.

41. Nous voyons donc que l'angle TLM, que fait la direction magnétique LM avec la tangente du méridien magnétique, n'évanouit que dans l'équateur magnétique, où l'angle $\lambda = 0$. Car la distance $Dc = s = \sqrt{(rr - aa)}$ ne sauroit devenir égale au rayon $cL = r$, à moins que l'axe magnétique AB n'évanouisse lui-même.

COROLLAIRE 2.

42. Sous le méridien magnétique, qui est perpendiculaire au premier méridien magnétique, nous avons vu que l'intervalle $Dc = s$ évanouit. Donc, pour ces lieux de la terre, nous aurons $\tan \frac{1}{2} \text{TLM} = \tan \frac{1}{2} \lambda$, & partant l'angle $\text{TLM} = \lambda = eL$.

PROBLEME V.

43. *Les deux poles magnétiques de la terre A & B étant donnés, trouver pour un lieu quelconque de la terre L l'inclinaison de l'aiguille aimantée.* Fig. 2.

SOLUTION.

Soit AEB le premier méridien magnétique, c le rayon de la terre, & l'angle $ACa = CAD = \alpha$, de sorte que le demi-axe magnétique soit $AD = BD = c \cos \alpha$, & la distance $CD = c \sin \alpha$. Ensuite, qu'on tire par le lieu proposé L le méridien magnétique AEB, dont le centre soit en c , & son inclinaison au premier méridien, ou l'angle $EDc = \phi$; & nous avons vu que $Cc = c \sin \alpha \sin \phi$, $Dc = c \sin \alpha \cos \phi$, & le rayon du méridien magnétique $cL = c \sqrt{(1$



— $\sin \alpha^2 \sin \phi^2$). Soit de plus dans ce méridien l'angle $\angle CL = \lambda$, le point c étant pris dans l'équateur magnétique, & soit aussi LM la direction magnétique déterminée dans le problème précédent. Donc, pour ramener la solution à ce cas, nous aurons

$DA = a = c \cos \alpha$; $r = c \sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)}$ & $s = c \sin \alpha \cos \phi$, & de là $uu = cc(1 + \sin \alpha^2 (\cos \phi^2 - \sin \phi^2) + 2 \sin \alpha \cos \phi \cos \lambda \sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)})$. Cela posé, nous venons de trouver dans le plan du méridien magnétique AeB l'angle $\angle CLM$ exprimé de cette sorte,

$$\cos \angle CLM = \frac{(rr - ss) \sin \lambda}{uu} = \frac{cc \cos \alpha^2 \sin \lambda}{uu} \text{ \& }$$

$$\sin \angle CLM = \frac{(rr + ss) \cos \lambda + 2rs}{uu}.$$

Maintenant, le rayon CL étant perpendiculaire à l'horizon du lieu L , nous n'avons qu'à chercher l'angle CLM , pour avoir le complément de l'inclinaison magnétique. Pour cet effet, qu'on tire dans le plan du méridien magnétique AeB , de son centre c sur LM , la perpendiculaire cM ; & on aura $LM = \frac{ccr \cos \alpha^2 \sin \lambda}{uu}$. Or, si l'on tiroit

la ligne CM , elle seroit aussi perpendiculaire à LM , d'où la fraction $\frac{LM}{GL}$ donnera le cosinus de l'angle CLM , & partant le sinus de l'in-

clinaison magnétique cherchée; ce sinus sera donc $= \frac{cr \cos \alpha^2 \sin \lambda}{uu} =$

$$\frac{\cos \alpha^2 \sin \lambda \sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)}}{1 + \sin \alpha^2 \cos \phi^2 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2 + 2 \sin \alpha \cos \phi \cos \lambda \sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)}},$$

$$\text{ou bien, par nos dénominations précédentes, } = \frac{r(rr - ss) \sin \lambda}{cuu},$$

où $uu = rr + ss + 2rs \cos \lambda$.



COROLLAIRE 1.

44. Sous l'équateur magnétique, où $\lambda = 0$, l'inclinaison magnétique est partout nulle, ou bien la direction magnétique y est horizontale, & partout perpendiculaire à l'équateur magnétique.

COROLLAIRE 2.

45. Sous le premier méridien magnétique, où l'angle $\phi = 0$, le sinus de l'inclinaison magnétique sera $= \frac{\cos \alpha^2 \sin \lambda}{1 + \sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cos \lambda}$, & partant son cosinus $= \frac{2 \sin \alpha + (1 + \sin \alpha^2) \cos \lambda}{1 + \sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cos \lambda}$. La direction magnétique sera donc verticale là où $\cos \lambda = -\frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2}$ & $\sin \lambda = \frac{1 - \sin \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$, ou bien $\tan \frac{1}{2} \lambda = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

COROLLAIRE 3.

46. Sous le méridien magnétique, qui est perpendiculaire au premier méridien, où $\phi = 90^\circ$, le sinus de l'inclinaison magnétique sera $= \frac{\cos \alpha^3 \sin \lambda}{\cos \alpha^2} = \cos \alpha \sin \lambda$; & puisque ce méridien est un demi-cercle, posant $\lambda = 90^\circ$, on aura sous les poles magnétiques mêmes l'inclinaison $= 90^\circ - \alpha$.

REMARQUE.

47. Notre formule trouvée pour le sinus de l'inclinaison magnétique, deviendra plus simple, si, au lieu de l'angle $EDc = \phi$, nous introduisons dans le calcul l'angle ecB , qui détermine la moitié du méridien magnétique. Posons donc cet angle $EcB = 90^\circ + \sigma$, de sorte que σ exprime l'angle DBc ou DAc . Ayant donc $\cos \sigma = \frac{a}{r} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)}}$, & $\tan \sigma = \frac{Dc}{DA} = \frac{\sin \alpha \cos \phi}{\cos \alpha}$, nous en

en tirerons $\sqrt{(1 - \sin \alpha^2 \sin \phi^2)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \sigma}$; $\sin \phi^2 = \frac{\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2}{\sin \alpha^2 \cos \sigma^2}$
 & $\cos \phi = \frac{\cos \alpha \sin \sigma}{\sin \alpha \cos \sigma}$, lesquelles valeurs étant substituées, nous
 aurons le sinus de l'inclinaison magnétique $= \frac{\cos \alpha \cos \sigma \sin \lambda}{1 + 2 \sin \sigma \cos \lambda + \sin \sigma^2}$.

Or cette même substitution nous donne outre cela

$$r = \frac{c \cos \alpha}{\cos \sigma}; s = \frac{c \cos \alpha \sin \sigma}{\cos \sigma} \text{ \& } u = \frac{c \cos \alpha}{\cos \sigma} \sqrt{(1 + 2 \sin \sigma \cos \lambda + \sin \sigma^2)},$$

& les angles que nous avons nommés ci-dessus $ECe = \psi$ & $EBe = \omega$, sont déterminés ainsi,

$$\cos \psi = \frac{\cos \alpha^2 - \cos \sigma^2 (1 - \sin \sigma)}{\sin \alpha \cos \sigma^2} \text{ \& } \cos \omega = \frac{\sin \sigma}{\sin \alpha}.$$

Mais, par rapport à l'angle $DAe = \sigma$, il faut remarquer qu'il ne sauroit jamais devenir plus grand que l'angle $DAC = \alpha$; or, pour le premier méridien magnétique, on aura $\sigma = \alpha$, & pour celui qui y est perpendiculaire $\sigma = 0$. La formule trouvée nous montrera les lieux où la direction magnétique devient verticale, en posant le sinus de l'inclinaison égal à l'unité; de là nous aurons

$$\cos \lambda = \frac{-2 \sin \sigma (1 + \sin \sigma^2) + \cos \alpha \cos \sigma^2 \sqrt{(\sin \sigma^2 - \sin \alpha^2)}}{4 \sin \sigma^2 + \cos \alpha^2 \cos \sigma^2}.$$

Or, puisque l'angle σ ne sauroit surpasser l'angle α , cette formule est toujours imaginaire, à moins qu'on ne prenne $\sigma = \alpha$, c'est-à-dire sous le premier méridien. Posons donc $\sigma = \alpha$, & nous au-

rons $\cos \lambda = \frac{-2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha^2)}{4 \sin \alpha^2 + \cos \alpha^4} = \frac{-2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2}$, comme ci-

dessus, où je remarque, puisque $\frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2} > \sin \alpha$, que ces lieux tombent dans la moindre partie AFB du premier méridien, comme

dans les points i, i , en sorte que $\cos Fi = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2}$ & $\sin Fi =$



$Fi = \frac{1 - \sin \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$; donc, puisque l'arc $FA = FB = 90^\circ - \alpha$, on aura $\cos Ai = \cos Bi = \frac{2 - 2 \cos \alpha^2 + \cos \alpha^3}{1 + \sin \alpha^2}$ & $\sin Ai = \sin Bi = \frac{\sin \alpha \cos \alpha (2 - \cos \alpha)}{1 + \sin \alpha^2}$; d'où nous voyons que, si l'angle α est fort petit, l'arc Ai & Bi devient à peu près égal à $ACa = \alpha$, & plus exactement $= \alpha - \alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^5 - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\alpha^7$. Il n'y a donc que deux points où la direction magnétique est verticale.

PROBLEME VI.

48. Si l'on connoissoit les deux endroits sur la terre, où la direction magnétique est verticale, déterminer la position de l'axe magnétique AB , & les deux poles magnétiques sur la surface de la terre.

SOLUTION.

Soyent i & i les deux lieux sur la terre, où la direction magnétique est verticale, ou bien l'inclinaison de 90° , qu'on découvrira d'autant plus aisément, que dans ces lieux la boussole doit être absolument indifférente à toutes les directions horizontales; ainsi, si l'on pouvoit faire partout des expériences avec la boussole, on connoitroit facilement ces deux lieux i, i , où la direction magnétique est verticale. Alors on n'aura qu'à tirer par ces deux points un grand cercle sur la terre pour avoir le premier méridien magnétique; ensuite, on divisera l'arc ii au point F en deux parties égales, & le grand cercle tiré par F perpendiculairement sur le premier méridien sera l'équateur magnétique. Enfin, posant l'arc $Fi = \epsilon$, & pour les poles magnétiques A & B , qui sont aussi également éloignés du point F , l'arc $FA = 90^\circ - \alpha$, les équations trouvées ci-dessus $\cos \epsilon = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2}$, ou $\sin \epsilon = \frac{1 - \sin \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$, donneront $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin \epsilon}{1 + \sin \epsilon}} = \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\epsilon)$,



ou bien $\cos Fi = \tan(45^\circ - \frac{1}{2} Fi)$. C'est donc par cette formule qu'on définira aisément la position de l'axe magnétique AB avec les deux poles magnétiques A & B sur la terre.

COROLLAIRE 1.

49. En prenant le plus petit arc de grand cercle entre les points i & i , les poles magnétiques A & B tombent toujours hors de cet arc, ou bien ils seront plus éloignés entr'eux que les points i & i . Dans le seul cas où les points i & i seroient éloignés de 180° entr'eux, les poles magnétiques A & B conviendroient avec les deux points i & i .

COROLLAIRE 2.

50. Si l'arc Fi ne diffère que fort peu de 90° , qu'on pose $Fi = 90 - \gamma$, & on aura $\sin \alpha = \tan \frac{1}{2} \gamma$; & puisque γ est un angle fort petit, on en déduit $\alpha = \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{16} \gamma^3 + \frac{1}{256} \gamma^5$ &c., où il faut remarquer, qu'après avoir tiré le diamètre ab parallèle à la corde ii , il y aura $aA = \alpha$ & $ai = \gamma$, de sorte que si l'angle γ est très petit, le pole A tombe dans le milieu de l'arc ai .

REMARQUE.

51. Il est ici très remarquable, que deux seules observations fussent pour établir l'état magnétique de la terre, & que pour cet effet il n'est pas même nécessaire de pouvoir observer l'inclinaison magnétique, puisque c'est un caractère infallible de l'inclinaison verticale, que la boussole n'y est plus déterminée à aucune direction. Pourvu donc qu'on parvint à ces lieux de la terre, rien ne seroit plus aisé que de s'assurer de cette propriété; cependant il arrivera déjà à une étendue considérable autour de ces points, que la boussole ne marquera plus une direction fixe; mais d'un côté il ne sera pas difficile de prendre le milieu d'une telle contrée, & de l'autre côté il ne s'agit point ici du plus haut degré de précision. Toutes les autres observations ne nous sauroient jamais conduire à un tel degré de précision, & s'il étoit possible de bien distinguer les lieux où l'inclinaison est nulle, ou la direc-



direction magnétique horizontale, nous n'en pourrions conclure que la position de l'équateur magnétique, pendant que celle de l'axe magnétique nous demeureroit entièrement inconnue. Je regarderai donc les poles magnétiques comme connus, & je m'en vais développer les phénomènes qui regardent la déclinaison magnétique, où il faut d'abord ramener à l'horizon l'aiguille aimantée, avant qu'on la compare avec la ligne méridienne de chaque lieu.

PROBLEME VII.

52. Dans un lieu quelconque de la terre L, trouver sur l'horizon le point vers lequel la boussole sera dirigée.

Fig. 2.
& fig. 5.

SOLUTION.

Qu'on conçoive une sphere décrite autour du lieu L, dont le rayon soit exprimé par l'unité (fig. 5.); que le point Z marque le zénith de ce lieu, & C le nadir, de sorte que la droite LC fera dirigée vers le centre de la terre, & que le grand cercle HTN en représente l'horizon, sur lequel soit T le point par où passe le méridien magnétique BTA, qui étant un plan tiré par le lieu L fera dans cette sphere un grand cercle, incliné à l'horizon de l'angle HTA ou BTN, dont le cosinus est $\sin \alpha \sin \phi = \frac{V(\cos^2 \sigma - \cos^2 \alpha)}{\cos \sigma}$, & $\sin \phi = \frac{\cos \alpha}{\cos \sigma}$.

Soit maintenant LM la direction magnétique, & nous avons trouvé dans le §. 40.

$$\sin TLM = \frac{(rr - ss) \sin \lambda}{uu} \quad \& \quad \cos TLM = \frac{2rs + (rr + ss) \cos \lambda}{uu}.$$

Or, par les angles α , σ & λ , dont je me suis servi pour marquer le lieu L par rapport aux poles magnétiques de la terre, nous avons

$$r = \frac{c \cos \alpha}{\cos \sigma}; \quad s = \frac{c \cos \alpha \cos \sigma}{\cos \sigma} \quad \& \quad u = \frac{c \cos \alpha}{\cos \sigma} V(1 + 2 \cos \sigma \cos \lambda + \cos^2 \sigma),$$

& ces valeurs nous fourniront



$$\sin TM = \frac{\cos \sigma^2 \sin \lambda}{1 + 2 \sin \sigma \cos \lambda + \sin \sigma^2} \quad \& \quad \cos TM = \frac{2 \sin \sigma + \cos \lambda (1 + \sin \sigma^2)}{1 + 2 \sin \sigma \cos \lambda + \sin \sigma^2}.$$

Qu'on tire à présent par le point M le cercle vertical ZMC, coupant l'horizon en E, & ce sera le point vers lequel la boussole sera dirigée. Le triangle sphérique TME, rectangle en E, nous donnera donc d'abord l'inclinaison magnétique EM, par la formule $\sin EM = \sin TM \cdot \sin BTN$, & pour le lieu du point E dans l'horizon, $\tan TE = \tan TM \cos BTN$, d'où nous tirons

$$\sin ME = \frac{\cos \alpha \cos \sigma \sin \lambda}{1 + 2 \sin \sigma \cos \lambda + \sin \sigma^2} \quad \&$$

$$\tan TE = \frac{\cos \sigma \sin \lambda \sqrt{(\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2)}}{2 \sin \sigma + \cos \lambda (1 + \sin \sigma^2)}.$$

Mais, pour mieux connoître le point T, où l'horizon est coupé par le méridien magnétique, concevons la sphere disposée en sorte, que le point B réponde dans le ciel au point vers lequel l'axe magnétique est dirigé; donc cet arc TB mesurera l'angle que fait dans la fig. 2. la tangente du méridien magnétique en L avec l'axe AB; or, puisque LC est perpendiculaire à ladite tangente, & CD perpendiculaire à l'axe magnétique, cet angle-là sera égal à l'angle $CL = \lambda$, qui sera donc la mesure de l'arc BT dans la fig. 5, & le cercle HZBN fera le cercle vertical, qui passe par les poles magnétiques marqués dans le ciel. Par-là on connoitra d'abord l'élévation du pole magnétique, ou l'arc BN, par la formule, $\sin BN = \sin BT \cdot \sin BTN = \frac{\cos \alpha \sin \lambda}{\cos \sigma}$, & ensuite la déclinaison du point T depuis le point N par la formule,

$$\tan NT = \tan BT \cos BTN = \frac{\sin \lambda \sqrt{(\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2)}}{\cos \lambda \cos \sigma}.$$

COROLLAIRE I.

53. Si le pole magnétique B au ciel étoit le même que le pole boréal du monde, le grand cercle HZN seroit le méridien du lieu L, &



& le point N marqueroit le vrai Nord dans l'horizon. Ce cas auroit lieu, si l'axe magnétique étoit parallèle à l'axe du monde, sans qu'il fût nécessaire qu'il passât par le centre de la terre.

COROLLAIRE 2.

54. Dans ce cas donc, l'arc N ϵ marqueroit la véritable déclinaison magnétique, qui étant la somme des arcs NT & T ϵ , on auroit pour la déclinaison,

$$\text{tag N}\epsilon = \frac{2 \sin \lambda (\sin \sigma + \cos \lambda) \sqrt{(\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2)}}{\cos \sigma (\cos \alpha^2 (\lambda^2 + 2 \cos \lambda^2 + 2 \sin \sigma \cos \lambda - \cos \sigma^2))}, \text{ ou}$$

$$\text{tag N}\epsilon = \frac{2 \sin \lambda (\sin \sigma + \cos \lambda) \sqrt{(\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2)}}{\cos \sigma (\sin \sigma 2 \cos \lambda)^2 + \sin \alpha^2 \sin \lambda^2 \cos \sigma}.$$

PROBLEME VIII.

55. La position d'un lieu sur la terre étant déterminée par les angles σ & λ , qui ont été introduits dans les problèmes précédens, trouver tant la longitude que la latitude magnétique du même lieu, par rapport à l'équateur & au premier méridien magnétique.

SOLUTION.

Dressons pour cet effet la fig. 6. semblable à la fig. 2, où AB Planch. XV.
soit l'axe magnétique, EAFB le premier méridien, & le cercle EQF Fig. 6.
l'équateur magnétique. Qu'on conçoive tiré le diamètre ab parallèle à l'axe magnétique AB, & soyent les angles $ACa = Bcb = \alpha$, de sorte que α marque l'éloignement de l'axe magnétique AB de l'axe de la terre ab , qui lui est parallèle. Soit L le lieu proposé de la terre, par lequel on tire le méridien magnétique ALB coupant l'équateur en e , & dont l'inclinaison au premier méridien est l'angle $EDe = \phi$, pour lequel nous avons $\cos \phi = \frac{\cos \alpha \sin \sigma}{\sin \alpha \cos \sigma}$ & $\sin \phi = \frac{\sqrt{(\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2)}}{\sin \alpha \cos \sigma}$.

Qu'on tire dans le plan de l'équateur, du centre de la terre C sur la droite De, la perpendiculaire Cc, & le point c sera le centre du méridien

Gg 3 ridien



ridien magnétique, & cL son rayon. Or, posant le rayon de la terre $CE = CF = CL = c$, nous avons trouvé

$$CD = c \sin \alpha; DA = DB = c \cos \alpha; Dc = c \sin \alpha \cos \phi; Cc = c \sin \alpha \sin \phi$$

$$\& cL = c \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi)}, \text{ ou bien } Dc = \frac{c \cos \alpha \sin \phi}{\cos \sigma}; Cc =$$

$$\frac{c \sqrt{(\cos^2 \sigma - \cos^2 \alpha)}}{\cos \sigma} \& cL = \frac{c \cos \alpha}{\cos \sigma}. \text{ Ensuite, pour le lieu } L,$$

nous avons posé l'angle dans le petit cercle $cL = \lambda$; donc, si nous abaïssons du lieu L sur l'équateur magnétique la perpendiculaire LP , nous aurons

$$LP = \frac{c \cos \alpha \sin \lambda}{\cos \sigma} \& cP = \frac{c \cos \alpha \cos \lambda}{\cos \sigma},$$

$$\text{donc } DP = \frac{c \cos \alpha (\sin \sigma + \cos \lambda)}{\cos \sigma}.$$

Qu'on tire maintenant du pôle de l'équateur magnétique b par le lieu L le grand cercle bLQ , & le rayon CQ passera par le point P ; & il est clair que la latitude magnétique du lieu L sera exprimée par l'angle

LCQ ; donc le sinus étant $= \frac{LP}{LC}$, le sinus de la latitude sera

$\frac{\cos \alpha \sin \lambda}{\cos \sigma}$, qui est en même tems celui de l'élévation magnétique

BN dans la fig. 5, comme nous avons déjà trouvé précédemment.

Or, pour la longitude magnétique du lieu L , comptée depuis le premier méridien magnétique aEb , la mesure sera l'angle ECQ . Pour trouver cet angle, nous avons dans le triangle DCP les côtés $CD =$

$c \sin \alpha$, & $DP = \frac{c \cos \alpha (\sin \sigma + \cos \lambda)}{\cos \sigma}$, avec l'angle compris

entr'eux $CDP = \phi$, d'où nous tirons

$$\text{tag } ECQ = \frac{\cos \alpha \sin \phi (\sin \sigma + \cos \lambda)}{c \cos \alpha \cos \phi (\sin \sigma + \cos \lambda) - c \sin \alpha \cos \sigma},$$

ou



$$\text{ou tag ECQ} = \frac{\text{cof } a (\sin \sigma + \text{cof } \lambda) \sqrt{(\text{cof } \sigma^2 - \text{cof } a^2)}}{\text{cof } a^2 \sin \sigma \text{cof } \lambda + \text{cof } a^2 - \text{cof } \sigma^2};$$

$$\text{ou bien le triangle LCP donne CP} = c \sqrt{\left(1 - \frac{\text{cof } a^2 \sin \lambda^2}{\text{cof } \sigma^2}\right)},$$

d'où nous trouvons

$$\text{f ECQ} = \frac{\text{DP f } \phi}{\text{CP}} = \frac{\text{cof } a (\sin \sigma + \text{cof } \lambda) \sqrt{(\text{cof } \sigma^2 - \text{cof } a^2)}}{\text{f } a \text{cof } \sigma \sqrt{(\text{cof } \sigma^2 - \text{cof } a^2 \text{f } \lambda^2)}}.$$

COROLLAIRE 1.

56. Si $\lambda = 0$, ce qui arrive dans l'équateur magnétique, la latitude du lieu évanouit; or, pour la longitude du point e , où le méridien magnétique passe par l'équateur, on aura

$$\text{tag ECe} = \frac{\text{cof } a (1 + \text{f } \sigma) \sqrt{(\text{cof } \sigma^2 - \text{cof } a^2)}}{\text{cof } a^2 (1 + \sin \sigma) - \text{cof } \sigma^2} = \frac{\text{cof } a \sqrt{(\text{cof } \sigma^2 - \text{cof } a^2)}}{\sin \sigma - \sin a^2},$$

$$\& \text{ le cof ECe} = \frac{\text{f } \sigma - \text{f } a^2}{\text{f } a (1 - \text{f } \sigma)}; \text{ donc tag } \frac{1}{2} \text{ ECe} = \sqrt{\frac{(1 + \text{f } a) (\text{f } a - \text{f } \sigma)}{(1 - \text{f } a) (\text{f } a + \text{f } \sigma)}}$$

$$= \frac{\text{tag } \frac{a - \sigma}{2}}{\text{tag } \frac{90 - a}{2}}.$$

COROLLAIRE 2.

57. Pour le méridien magnétique, qui est perpendiculaire au premier, on a $\sigma = 0$, & la latitude du lieu L est telle que son sinus =

$$\text{cof } a \sin \lambda, \& \text{ la tangente de la longitude} = \frac{\sin a \text{cof } a \text{cof } \lambda}{- \sin a^2} =$$

$$- \frac{\text{cof } \lambda}{\text{tag } a}, \text{ ou bien la longitude comptée du point E surpasse } 90^\circ, \&$$

si $\lambda = 0$, la longitude fera $= 90^\circ + a$, & si $\lambda = 90^\circ$, elle fera $= 180^\circ$.

PRO.



PROBLEME IX.

Fig. 6.

58. *La latitude & la longitude magnétique d'un lieu de la terre L étant données, trouver la direction magnétique dans cet endroit, & la direction de la boussole.*

SOLUTION.

Ayant pris le diamètre ab parallele à l'axe magnétique AB , pour avoir le premier méridien magnétique $EAFB$ avec l'équateur magnétique EF , soyent les arcs $Aa = Bb = \alpha$, supposant le rayon de la sphere $= 1$, de sorte que $CD = \sin \alpha$, & $DA = DB = \cos \alpha$. Par le lieu donné L , qu'on tire du pole de l'équateur b le grand cercle cercle bLQ , & posons la latitude magnétique $LQ = \mu$ & la longitude $EQ = \nu$; de là nous aurons

$$LP = \sin \mu; CP = \cos \mu, \text{ \& } DP = \sqrt{(\sin \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \mu \cos \nu + \cos \mu^2} = p,$$

$$\text{ensuite } \sin EDP = \frac{\cos \mu \sin \nu}{p}, \text{ \& } \cos EDP = \frac{\sin \alpha + \cos \mu \cos \nu}{p};$$

or EDP est l'angle qui est nommé ci-dessus $= \phi$, de sorte que $\tan \phi = \frac{\cos \mu \sin \nu}{\sin \alpha + \cos \mu \cos \nu}$. Après avoir tiré du centre C sur DP la perpendiculaire Cc , on aura $Cc = \frac{\sin \alpha \cos \mu \sin \nu}{p}$ & $DC = s = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \mu \cos \nu)}{p}$, & de là le rayon du petit cercle ALB tiré

$$\text{des poles magnétiques par le lieu } L, cL = \sqrt{\left(1 - \frac{\sin \alpha^2 \cos \mu^2 \sin \nu^2}{pp}\right)}$$

$= r$. Or, l'angle σ étant celui que fait le rayon du petit cercle cA avec l'axe magnétique, nous aurons $\tan \sigma = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \mu \cos \nu)}{p \cos \alpha}$

$$\sin \sigma = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \mu \cos \nu)}{pr} \text{ \& } \cos \sigma = \frac{\cos \alpha}{r}.$$

Enfin pour l'angle $cL = \lambda$ nous aurons

fin



$$\sin \lambda = \frac{LP}{cL} = \frac{f\mu}{r}; \quad \cos \lambda = \frac{\cos \mu (f\alpha \cos v + \cos \mu)}{pr} \quad \& \quad \tan \lambda = \frac{p \sin \mu}{\cos \mu (f\alpha \cos v + \cos \mu)}.$$

Donc, puisque $r = \frac{\cos \alpha}{\cos \sigma}$, nous aurons

$$V\left(1 - \frac{\cos \alpha^2}{\cos \sigma^2}\right) = \frac{V(\cos \sigma^2 - \cos \alpha^2)}{\cos \sigma} = V(1 - rr) = \frac{\sin \alpha \cos \mu \sin v}{p},$$

& partant pour la fig. 5. nous obtiendrons par le §. 52,

1°. l'élévation du pôle magnétique $BN = \mu$,

2°. l'angle BTN , dont le méridien magnétique $BT\Lambda$ est incliné à l'horizon,

$$\sin BTN = \frac{\cos \alpha}{\cos \sigma} = r, \quad \& \quad \cos BTN = \frac{\sin \alpha \cos \mu \sin v}{p},$$

3°. l'arc de l'horizon NT , ou l'angle NLT ,

$$\tan NT = \tan \lambda V\left(1 - \frac{\cos \alpha^2}{\cos \sigma^2}\right) = \frac{\sin \alpha \sin \mu \sin v}{\sin \alpha \cos v + \cos \mu},$$

4°. l'arc TM dans le méridien magnétique depuis l'horizon T jusqu'à la direction magnétique LM , à cause de $uu = DL^2 = pp + f\mu^2 = \sin \alpha^2 + 2f\alpha \cos \mu \cos v + 1$ & $rr - ss = \cos \alpha^2$

$$\sin TM = \frac{\cos \alpha^2 f\mu}{r(f\alpha^2 + 2f\alpha \cos \mu \cos v + 1)}, \quad \&$$

$$\tan TM = \frac{p \cos \alpha^2 \sin \mu}{pp(1 + f\alpha \cos \mu \cos v) + f\alpha f\mu^2 (f\alpha \cos \mu \cos v)}.$$

De là on trouve l'inclinaison magnétique ζM ,

$$\sin \zeta M = \frac{\cos \alpha^2 \sin \mu}{\sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cos \mu \cos v + 1},$$



& ensuite l'arc de l'horizon T ζ ,

$$\text{tag } T\zeta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha^2 \sin \mu \cos \mu \sin \nu}{p p (1 + \sin \alpha \cos \mu \cos \nu) + \sin \alpha \sin^2 \mu (\sin \alpha + \cos \mu \cos \nu)}, \text{ ou}$$

$$\text{tag } T\zeta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha^2 \sin \mu \cos \mu \sin \nu}{(\sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cos \mu \cos \nu + 1) (1 + \sin \alpha \cos \mu \cos \nu) \cdot \cos \alpha^2 \sin^2 \mu},$$

& en ajoutant ensemble les arcs NT & T ζ , on trouve

$$\text{tag } N\zeta = \frac{2 \sin \alpha \sin \mu \sin \nu}{(\sin \alpha^2 + 1) \cos \mu + 2 \sin \alpha \cos \nu}.$$

Maintenant, transportons dans la fig. 6. ce que nous venons de trouver pour la figure 5, & d'abord il est clair que sur la surface de la terre l'arc L ζ marque la méridienne magnétique, ou la même qui est indiquée par la droite LN dans la fig. 5. Ensuite, le petit cercle LB marque sur la terre la même ligne, qui est indiquée par la droite LT dans la fig. 5. Enfin, tirons sur la surface de la terre la ligne $a\zeta$, sur laquelle la boussole sera disposée, & nous aurons l'angle $bL\zeta$, ou la déclinaison de la boussole de la méridienne magnétique L b déterminée de cette sorte,

$$\text{tag } bL\zeta = \frac{2 \sin \alpha \sin \mu \sin \nu}{(1 + \sin \alpha^2) \cos \mu + 2 \sin \alpha \cos \nu}.$$

COROLLAIRE I.

59. Si, au lieu des poles magnétiques A & B, nous considérons les points i & i , où la direction magnétique devient verticale, & que nous nommions l'arc $bi = \gamma$, à cause de $\sin \gamma = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha^2}$

& $\cos \gamma = \frac{\cos \alpha^2}{1 + \sin \alpha^2}$, nous aurons pour la déclinaison de la

boussole $\text{tag } bL\zeta = \frac{\sin \gamma \sin \mu \sin \nu}{\cos \mu + \sin \gamma \cos \nu}.$



COROLLAIRE 2.

60. La même considération nous conduira aussi à une expression plus simple pour l'inclinaison de l'aiguille aimantée au dessous de l'horizon, dont le sinus sera
$$= \frac{\cos \gamma \sin \mu}{1 + \sin \gamma \cos \mu \cos \nu} = \sin \angle M$$
 (fig. 5.) &, par la combinaison de ces deux formules,
$$\frac{\sin \angle L \angle M}{\tan \angle M} = \tan \gamma \sin \nu.$$

REMARQUE 1.

61. En cherchant la tangente de la somme des deux arcs NT & T∠ par les tangentes de chacun, le calcul devient fort embarrassé; mais on découvre un diviseur commun pour le numérateur & le dénominateur, par le moyen duquel on parvient à la formule que j'ai trouvée. Or cette formule est d'autant plus remarquable qu'en introduisant l'arc $bi = \gamma$, elle ne diffère de celle qui exprime $\tan NT = \tan \angle LB$, que par l'arc γ , qui est ici au lieu de l'arc α , d'où nous comprenons, que si l'on coupoit la sphère par un plan, qui passât par le lieu L & les deux points i & i , le petit cercle qui en résulteroit sur la surface, marqueroit précisément en L la direction de la boussole L∠; ou bien la déclinaison $\angle L \angle M$ est égale à l'angle, que fait le petit cercle, tiré par les points i , i & F, avec l'arc du grand cercle bL .

REMARQUE 2.

62. Comme la Théorie de la déclinaison magnétique que j'avois donnée autrefois étoit fondée sur ce faux principe, que la direction de la boussole étoit partout marquée par les tangentes des petits cercles tirés par les deux poles magnétiques sur la surface de la terre, il est à présent aisé de corriger cette erreur, en substituant au lieu des deux poles magnétiques les deux points i & i , où la direction magnétique est verticale. Maintenant donc je puis assurer hardiment, que la méthode que j'y ai donnée pour trouver la déclinaison de la boussole à tous les endroits de la surface de la terre, est entièrement d'accord



avec les principes que je viens d'établir ici, pourvu qu'on entende par les points que j'y avois nommés les poles magnétiques de la terre, les points où la direction magnétique est verticale. Donc, puisque cette correction ne change rien dans la description des lignes que j'y ai marquées à la maniere de Halley, la méthode même que j'y ai enseignée est très juste & ne demande aucune correction. Mais celle que je viens de développer ici, a cet avantage sur la précédente, qu'elle nous découvre en même tems l'inclinaison de l'aiguille aimantée en chaque lieu de la terre, pendant que dans la premiere l'article de l'inclinaison n'a point été considéré. Cependant tout cela doit s'entendre

Planch. XIV. conformément à l'hypothese qui me sert ici de fondement, par laquelle je suppose, qu'à un lieu quelconque on trouve la direction magnétique LM, en tirant de L au milieu D de l'axe magnétique AB la droite LD, & prenant l'angle DLM égal à l'angle LDB; & si cette hypothese étoit fausse, il ne faudroit pas être surpris que mes déterminations ne fussent pas d'accord avec la vérité.

DÉFINITION 7.

63. *Les routes magnétiques sont des lignes tirées sur la surface de la terre, dont les tangentes marquent en chaque lieu la direction de la boussole.*

COROLLAIRE 1.

64. Donc, si en partant d'un lieu on marchoit toujours suivant la direction de la boussole, le chemin parcouru seroit une route magnétique, & il est évident que par chaque lieu de la terre il doit passer une telle route magnétique.

COROLLAIRE 2.

65. Il est clair aussi que, sur la surface de la terre, il doit y avoir une infinité de telles routes magnétiques; & comme il y a une infinité de lieux situés dans une même route, il y en a aussi une infinité qui se trouvent dans des routes différentes.



REMARQUE.

66. Il semble qu'un grand nombre de telles routes magnétiques décrites sur la surface de la terre donneroit une idée plus nette de la direction de la boussole, que les lignes Halleyennes, puisque ces routes marqueroient presque la marche de la matiere magnétique, qui dirige la boussole. Il n'y a aussi aucun doute, que ces lignes ne soient beaucoup plus simples & plus aisées à tracer sur la surface de la terre, que les lignes Halleyennes, quand même nous n'aurions pas déjà observé, que toutes ces routes sont de petits cercles tirés par les deux points i, i de la terre, où l'inclinaison magnétique est de 90° . Mais, puisque cette observation n'est due qu'à quelque hazard, qui nous a porté à comparer la tangente de l'angle $bL\epsilon$ avec celle de l'angle bLB , il sera bon de trouver cette même vérité par l'analyse.

PROBLEME X.

67. Déterminer la route magnétique, qui passe par un lieu proposé quelconque sur la surface de la terre. Planch. XV.
Fig. 7.

SOLUTION.

Soit L le lieu proposé de la terre, par lequel on tire du pôle b de l'équateur magnétique l'arc de grand cercle bLQ , tombant perpendiculairement en Q sur l'équateur EF ; & puisque ce lieu est supposé connu, on aura sa latitude magnétique $LQ = \mu$, & sa longitude EQ , on l'angle $EbQ = \nu$. Soient de plus dans le premier méridien magnétique $EaFb$, les points i, i , où la direction magnétique est verticale, & posons l'arc $bi = \gamma$: cela posé, il s'agit de tirer par L une ligne $L\epsilon$ sur la surface de la terre, qui fasse avec l'arc bL un angle $bL\epsilon$ tel, qu'il soit $\text{tag } bL\epsilon = \frac{\sin \gamma \sin \mu \sin \nu}{\cos \mu + \sin \gamma \cos \nu}$. Pour cet effet, posons l'angle $ibL = x$ & l'arc $bL = y$, de sorte que $\mu = 90^\circ - \gamma$ & $\nu = 180^\circ - x$, & partant $\text{tag } bL\epsilon = \frac{\sin \gamma \cos \gamma \cos x}{\sin y \cdot \sin \gamma \cos x}$.

Hh 3

qu'on



qu'on tire l'arc bl infiniment proche de bL , pour avoir l'élément de la courbe cherchée Ll , & puisque l'angle $Lbl = dx$, en tirant Lm perpendiculaire à bL , nous aurons $Lm = dx \sin y$ & $ml = dy$, d'où résulte $\frac{dx \sin y}{dy} = \tan Llb = \tan bL\epsilon = \frac{\sin \gamma \cos y \sin x}{\cos y - \sin \gamma \cos x}$, & partant entre x & y cette équation différentielle,

$$dx \cos y^2 - dx \sin \gamma \cos y \cos x = dy \sin \gamma \cos y \sin x, \text{ ou bien}$$

$$dx = \frac{dx \sin \gamma \cos y \cos x + dy \sin \gamma \cos y \sin x}{\sin y^2} = \frac{\sin \gamma}{\cos y^2} d(\sin y \sin x).$$

Divisons par $\sin x^2$ pour avoir cette équation intégrable,

$$\frac{dx}{\sin x^2} = \sin \gamma \cdot \frac{d(\sin y \sin x)}{\sin y^2 \sin x^2},$$

dont l'intégrale est $-\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin \gamma}{\sin y \cos x} - \text{Const}$, ou

$$\cos x \cos y = \sin \gamma + C \sin x \sin y; \text{ donc } \sin y = \frac{\sin \gamma}{\cos x - C \sin x}.$$

Poſons cette conſtante $C = -\tan \epsilon$, pour avoir

$$\sin y = \frac{\sin \gamma \cos \epsilon}{\cos(x - \epsilon)}.$$

Maintenant, pour approfondir la nature de cette courbe, tirons le grand cercle bK , faiſant avec l'arc bL l'angle $LBK = \epsilon$, le point K étant ſitué dans l'équateur magnétique EF , & ſiſque l'angle $KLb = x - \epsilon$, nous aurons

$$\sin y = \sin bL = \frac{\sin \gamma \cos \epsilon}{\cos KL}; \text{ or joignant l'arc de grand cer-}$$

cle KL , le triangle KLb , dont le côté bK eſt un quart de cercle, donne $\cos KL = \sin bL \cos Klb$, de ſorte que $\cos KL = \sin \gamma \cos \epsilon$, & partant l'arc KL conſtant, d'où l'on voit que la route cherchée eſt un petit cercle, dont le centre K ſe trouve dans l'équateur mag-



magnétique; mais nous en connoissons aussi aisément le rayon KL , qui sera égal à l'arc de grand cercle Ki , puisque le triangle ibK , où le côté $bi = \gamma$, l'angle $ibK = \epsilon$, & le côté $bK = 90^\circ$, donne $\cos Ki = \sin \gamma \cos \epsilon$, & partant $KL = Ki$. Par conséquent, toutes les routes magnétiques sont des cercles décrits sur la surface de la terre, qui passent par les deux points i & i , où la direction magnétique est verticale, & pour avoir la route magnétique qui passe par le lieu donné L , on n'a qu'à décrire un cercle, qui passe par ce lieu & en même tems par les deux points i & i .

COROLLAIRE 1.

68. Un vaisseau donc qui cingleroit toujours selon la direction de sa boussole, au lieu de décrire une ligne loxodromique, décrirait un cercle sur la surface de la mer, & parviendroit enfin à l'un ou l'autre endroit i , où la direction magnétique est verticale & la boussole perd tout usage.

COROLLAIRE 2.

69. Ces routes magnétiques sont toutes de petits cercles de la sphere, dont pourtant les diametres ne sauroient être plus petits que l'intervalle ii ; il n'y en a qu'une seule qui soit un grand cercle, qui est le premier méridien magnétique, sous lequel la déclinaison $bL\epsilon$ est partout nulle.

PROBLEME XI.

70. *La position des poles magnétiques étant donnée par rapport aux poles du monde, si l'on connoit la longitude & la latitude géographique d'un lieu sur la terre, trouver la longitude & la latitude magnétique du même lieu.*

SOLUTION.

Soit Π le pole boréal du monde & le grand cercle ΠG un méridien fixe, duquel on compte la longitude des lieux sur la terre. Qu'on tire de Π au pole boréal de l'équateur magnétique b l'arc du grand cercle Πb , & le cercle $E b F$ étant le premier méridien magnétique,

Fig. 6.



que, & i le lieu où l'inclinaison est verticale, la position de l'état magnétique par rapport aux poles du monde sera déterminée par les quatre élémens suivans,

l'arc $bi = \gamma$; l'angle $ib\Pi = \delta$; l'arc $b\Pi = \epsilon$ & l'angle $G\Pi b = \zeta$.

Maintenant, pour un lieu proposé de la terre L , posons

1°. Sa distance au pole boréal $\Pi L = p$, qui est le complément de la latitude géographique,

2°. Sa longitude géographique, ou l'angle $G\Pi L = q$.

Cela posé, pour en trouver, tant la longitude magnétique ou l'angle $E b L = \nu$, que la latitude magnétique $LQ = \mu$, dont le complément est l'arc $bL = 90^\circ - \mu$, on n'a qu'à résoudre le triangle sphérique $\Pi b L$, dans lequel on connoit les deux côtés $\Pi b = \epsilon$, $\Pi L = p$, avec l'angle $b\Pi L = \zeta + q$, & de là on trouve

$$\cos bL = \sin \mu = \cos \epsilon \cos p + \sin \epsilon \sin p \cos (\zeta + q),$$

& ensuite l'angle $\Pi bL = 180^\circ - \delta - \nu$, par la formule

$$\tan \Pi bL = -\tan (\delta + \nu) = \frac{\sin p \sin (\zeta + q)}{\cos p \sin \epsilon - \sin p \cos \epsilon \cos (\zeta + q)},$$

$$\text{de sorte que } \tan (\delta + \nu) = \frac{\sin p \sin (\zeta + q)}{\cos \epsilon \sin p \cos (\zeta + q) - \sin \epsilon \cos p};$$

enfin le même triangle donne aussi à connoître l'angle $bL\Pi$ par cette formule

$$\tan bL\Pi = \frac{\sin \epsilon \sin (\zeta + q)}{\cos \epsilon \sin p - \sin \epsilon \cos p \cos (\zeta + q)}.$$

Cet angle $bL\Pi$ étant retranché de l'angle $bL\mathcal{E}$, déterminé ci-dessus, laissera l'angle $\Pi L\mathcal{E}$, qui est la véritable déclinaison de la boussole depuis la méridienne du lieu L . Or, ayant trouvé les angles μ & ν , on aura

$$\tan bL\mathcal{E} = \frac{\sin \gamma \sin \mu \sin \nu}{\cos \mu + \sin \gamma \cos \nu},$$

&



& pour le même lieu on obtient aussi aisément l'inclinaison de l'aiguille aimantée, dont le sinus est $= \frac{\cos \gamma \sin \mu}{1 + \sin \gamma \cos \mu \cos \nu}$.

COROLLAIRE 1.

$$71. \text{ Ayant trouvé } \tan(\delta + \nu) = \frac{\sin p \sin(\zeta + q)}{\cos \epsilon \sin p \cos(\zeta + q) - \sin \epsilon \cos p},$$

on en tire pour la longitude magnétique, ou l'angle $E b L = \nu$,

$$\tan \nu = \frac{\cos \delta \sin p \sin(\zeta + q) - \sin \delta \cos \epsilon \sin p \cos(\zeta + q) + \sin \delta \sin \epsilon \cos p}{\sin \delta \sin p \sin(\zeta + q) + \cos \delta \cos \epsilon \sin p \cos(\zeta + q) - \cos \delta \sin \epsilon \cos p},$$

& de là

$$\sin \nu = \frac{\cos \delta \sin p \sin(\zeta + q) - \sin \delta \cos \epsilon \sin p \cos(\zeta + q) + \sin \delta \sin \epsilon \cos p}{\cos \mu},$$

$$\cos \nu = \frac{\sin \delta \sin p \sin(\zeta + q) + \cos \delta \cos \epsilon \sin p \cos(\zeta + q) - \cos \delta \sin \epsilon \cos p}{\cos \mu}.$$

COROLLAIRE 2.

72. On n'a donc qu'à substituer ces valeurs de $\sin \mu$, $\sin \nu$ & $\cos \nu$ dans la formule $\tan b L \epsilon = \frac{\sin \gamma \sin \mu \sin \nu}{\cos \mu + \sin \gamma \cos \nu}$, & ensuite la tangente de la véritable déclinaison $\Pi L \epsilon = b L \epsilon = b L \Pi$ deviendra rationnelle, puisque $\cos \mu^2$ qui y entre est $= 1 - \sin \mu^2$.

COROLLAIRE 3.

73. Or, pour l'inclinaison magnétique, son sinus sera exprimé plus simplement, puisque, tant $\sin \mu$, que $\cos \mu \cos \nu$, sont des expressions rationnelles. Posant donc l'inclinaison de l'aiguille aimantée $= \theta$, on aura

$$\sin \theta = \frac{\cos \gamma (\cos \epsilon \cos p + \sin \epsilon \sin p \cos(\zeta + q))}{1 + \sin \gamma \sin \delta \sin p \sin(\zeta + q) + \sin \gamma \cos \delta (\cos \epsilon \sin p \cos(\zeta + q) - \sin \epsilon \cos p)}.$$



PROBLEME XII.

74. Pour un lieu quelconque de la terre, dont on connoit la longitude & la latitude géographique, trouver la déclinaison de la boussole depuis la méridienne de ce lieu.

SOLUTION.

Que toutes les dénominations demeurent les mêmes que dans le probleme précédent, mais qu'on pose pour abrégé,

$$\cos \epsilon \cos p + \sin \epsilon \sin p \cos (\zeta + q) = P,$$

$$\sin \epsilon \cos p - \cos \epsilon \sin p \cos (\zeta + q) = Q,$$

$$\cos \epsilon \sin p - \sin \epsilon \cos p \cos (\zeta + q) = R,$$

& on aura entre les lettres P, Q, R, ces relations,

$$P \cos \epsilon + Q \sin \epsilon = \cos p; \quad P \cos p + R \sin p = \cos \epsilon,$$

$$P \sin \epsilon - Q \cos \epsilon = \sin p \cos (\zeta + q); \quad P \sin p - R \cos p = \sin \epsilon \cos (\zeta + q),$$

$$PP + QQ = \cos^2 p + \sin^2 p \cos^2 (\zeta + q) = 1 - \sin^2 p \sin^2 (\zeta + q),$$

$$PP + RR = \cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon \cos^2 (\zeta + q) = 1 - \sin^2 \epsilon \sin^2 (\zeta + q),$$

$$Q + R = \sin (\epsilon + p) (1 - \cos (\zeta + q)),$$

$$Q - R = \sin (\epsilon - p) (1 + \cos (\zeta + q)).$$

Cela posé, nous aurons

$$\sin \mu = P; \quad \sin \nu \cos \mu = \cos \delta \sin p \sin (\zeta + q) + Q \sin \delta,$$

$$\& \quad \cos \nu \cos \mu = \sin \delta \sin p \sin (\zeta + q) - Q \cos \delta,$$

$$\& \text{ partant } \operatorname{tag} b L \epsilon = \frac{P \sin \gamma (\cos \delta \sin p \sin (\zeta + q) + Q \sin \delta)}{1 - PP + \sin \gamma (\sin \delta \sin p \sin (\zeta + q) - Q \cos \delta)}$$

$$\text{or } \operatorname{tag} b L \Pi = \frac{\sin \epsilon \sin (\zeta + q)}{R}, \text{ d'où l'on tire } \operatorname{tag} \Pi L \epsilon =$$

$$\frac{PR \sin \gamma (\cos \delta \sin p \sin (\zeta + q) + Q \sin \delta) - (1 - PP) \sin \gamma \sin (\zeta + q) (\sin \delta \sin p \sin (\zeta + q) - Q \cos \delta)}{P \sin \gamma \sin (\zeta + q) (\cos \delta \sin p \sin (\zeta + q) - Q \cos \delta) + R (1 - PP) + R \sin \gamma (\sin \delta \sin p \sin (\zeta + q) - Q \cos \delta)},$$

$$\text{ou bien } \operatorname{tag} \Pi L \epsilon =$$



$$\frac{\sin \gamma \cos \delta \sin (\zeta + q) (PR \sin p + Q \sin \epsilon) + \sin \gamma \sin \delta (PQR - \sin \epsilon \sin p \sin (\zeta + q)^2) - (1 - PP) \sin \epsilon \sin (\zeta + q)}{\sin \gamma \cos \delta (P \sin \epsilon \sin p \sin (\zeta + q)^2 - QR) + \sin \gamma \sin \delta \sin (\zeta + q) (PQ \sin \epsilon + R \sin p) + R (1 - PP)}$$

Or, en développant ces expressions, on trouve

$$PR \sin p + Q \sin \epsilon = (1 - PP) \cos p \sin (\zeta + q),$$

$$PQR - \sin \epsilon \sin p \sin (\zeta + q)^2 = -(1 - PP) (\sin \epsilon \sin p + \cos \epsilon \cos p \cos (\zeta + q)),$$

$$P \sin \epsilon \sin p \sin (\zeta + q)^2 - QR = (1 - PP) \cos (\zeta + q),$$

$$PQ \sin \epsilon + R \sin p = (1 - PP) \cos \epsilon,$$

d'où l'on voit qu'en divisant le numérateur & dénominateur par $1 - PP$, notre formule se réduira à celle-ci, $\tan \Pi L \zeta =$

$$\frac{\sin \gamma \cos \delta \cos p \sin (\zeta + q) - \sin \gamma \sin \delta (\sin \epsilon \sin p + \cos \epsilon \cos p \cos (\zeta + q)) - \sin \epsilon \sin (\zeta + q)}{\sin \gamma \cos \delta \cos (\zeta + q) + \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \sin (\zeta + q) + \cos \epsilon \sin p - \sin \epsilon \cos p \cos (\zeta + q)}$$

COROLLAIRE 1.

75. Puisque six angles ou arcs $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, & p, q , concourent à déterminer la déclinaison de la boussole, on ne sauroit espérer que cette formule pût être réduite à une plus grande simplicité.

COROLLAIRE 2.

76. Si le lieu proposé se trouve sous l'équateur, de sorte que l'arc p devienne $= 90^\circ$, notre formule devient beaucoup plus simple, & l'on aura

$$\tan \Pi L \zeta = \frac{\sin \gamma \sin \delta \sin \epsilon - \sin \epsilon \sin (\zeta + q)}{\sin \gamma \cos \delta \cos (\zeta + q) + \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \sin (\zeta + q) + \cos \epsilon}$$

PROBLEME XIII.

77. *Ayant observé en plusieurs lieux de la terre, & cela en même tems, la déclinaison de la boussole, déterminer la position des poles magnétiques, & de là la déclinaison pour tous les autres lieux de la terre.*

SOLUTION.

La formule que je viens de trouver pour la déclinaison de la boussole en général, suffit pour résoudre ce problème, en définissant

Fig. 6.



par plusieurs observations la juste valeur des quatre angles γ , δ , ϵ , ζ . Or, pour en faire l'application à des observations actuelles, il faut bien établir en quel sens sont pris les angles qui mesurent, tant la longitude des lieux, que la déclinaison de la boussole. Pour cet effet, je m'arrêterai à la représentation de la figure en supposant que le grand cercle EQF est dirigé de l'orient à l'occident. Donc, ayant pris un méridien fixe ΠG pour y rapporter la longitude de tous les lieux L, je suppose que cela se fasse de l'orient à l'occident, d'une manière contraire à celle dont on se sert dans la Géographie. Chaque observation nous fournit donc trois quantités connues,

- 1°. La distance du lieu L au pôle arctique Π , ou l'arc $\Pi L = p$,
- 2°. La longitude de ce lieu depuis le méridien fixe ΠG comptée de l'orient à l'occident, ou l'angle $G \Pi L = q$,
- 3°. La déclinaison de la boussole depuis la méridienne du lieu vers l'occident; soit cette déclinaison $\Pi L \epsilon = \omega$, qui marque combien le bout boréal de l'aiguille s'écarte du vrai nord vers l'occident.

Cela posé, nous avons trouvé cette équation, $\tan \omega =$

$$\frac{\sin \gamma \cos \delta \cos p \sin (\zeta + q) - \sin \gamma \sin \delta \sin \epsilon \sin p - \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \cos p \cos (\zeta + q) - \sin \epsilon \sin (\zeta + q)}{\sin \gamma \cos \delta \cos (\zeta + q) + \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \sin (\zeta + q) + \cos \epsilon \sin p - \sin \epsilon \cos p \cos (\zeta + q)},$$

où, pour séparer l'angle inconnu ζ du connu q , il faut développer les formules $\sin (\zeta + q)$ & $\cos (\zeta + q)$, d'où l'on obtiendra le numérateur =

$$\sin \gamma \cos \delta \sin \zeta \cos p \cos q + \sin \gamma \cos \delta \cos \zeta \cos p \sin q - \sin \gamma \sin \delta \sin \epsilon \sin p - \sin \epsilon \sin \zeta \cos q - \sin \epsilon \cos \zeta \sin q - \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \cos \zeta \cos p \cos q + \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \sin \zeta \cos p \cos q,$$

le dénominateur =

$$\sin \gamma \cos \delta \cos \zeta \cos q - \sin \gamma \cos \delta \sin \zeta \sin q + \cos \epsilon \sin p - \sin \epsilon \cos \zeta \cos p \cos q + \sin \epsilon \sin \zeta \cos p \sin q + \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \sin \zeta \cos q + \sin \gamma \sin \delta \cos \epsilon \cos \zeta \sin q.$$

Posons maintenant pour abrégé

$$\sin \gamma (\cos \delta \sin \zeta - \sin \delta \cos \epsilon \cos \zeta) = A \sin \epsilon,$$

$$\sin \gamma (\cos \delta \cos \zeta + \sin \delta \cos \epsilon \sin \zeta) = B \sin \epsilon,$$



& nous aurons $\text{tag } \omega =$

$$\frac{A \cos p \cos q + B \cos p \sin q - \sin \zeta \cos q - \cos \zeta \sin q - \sin \gamma \sin \delta \sin p}{B \cos q - A \sin q + \sin \zeta \cos p \sin q - \cos \zeta \cos p \cos q + \cot \epsilon \sin p},$$

où il faut remarquer que $\sin \gamma \sin \delta = (B \sin \zeta - A \cos \zeta) \text{tag } \epsilon$ & $\sin \gamma \cos \delta = (A \sin \zeta + B \cos \zeta) \sin \epsilon$, de sorte qu'il n'y a ici que quatre quantités inconnues A, B, ϵ & ζ , pour la détermination desquelles quatre observations sont suffisantes. Pour rendre cette forme encore plus commode, posons $A = C \cos \zeta$ & $B = D \cos \zeta$, ou

$$\sin \gamma (\cos \delta \sin \zeta - \sin \delta \cos \epsilon \cos \zeta) = C \sin \epsilon \cos \zeta \text{ & } \sin \gamma (\cos \delta \cos \zeta + \sin \delta \cos \epsilon \sin \zeta) = D \sin \epsilon \cos \zeta,$$

ensuite soit $\frac{\cot \epsilon}{\cos \zeta} = E$ & $\frac{C - D \text{tag } \zeta}{E} = F$, pour avoir

$$\text{tag } \omega = \frac{C \cos p \cos q + D \cos p \sin q - \sin q - \text{tag } \zeta \cos q + F \sin p}{D \cos q + C \sin q - \cos p \cos q + \text{tag } \zeta \cos p \sin q + E \sin p},$$

où nous avons 5 quantités inconnues C, D, E, F & $\text{tag } \zeta$; mais il y a

$$C - D \text{tag } \zeta = EF, \text{ ou } \text{tag } \zeta = \frac{C - EF}{D}.$$

Or, quoique quatre observations soient suffisantes pour nous découvrir les valeurs des lettres C, D, E & F , il sera bon d'y en employer plusieurs, à moins que les déclinaisons ne soient très exactes, afin qu'en prenant un milieu entre les différens résultats, on soit d'autant plus sûr de leurs justes valeurs. Ensuite, ayant trouvé ces valeurs avec l'angle ζ , la formule $\cot \epsilon = E \cos \zeta$ donnera l'angle ϵ , & de là on trouve

$$\text{tag } \delta = \frac{D \text{tag } \zeta - C}{(C \text{tag } \zeta + D) \cos \epsilon}, \text{ & } \sin \gamma = \frac{D \sin \zeta - C \cos \zeta}{E \sin \delta} = -\frac{F \cos \zeta}{\sin \delta}.$$

Enfin, pour connoître les poles magnétiques, ou plutôt les lieux où l'inclinaison est verticale, on prendra du méridien fixe ΠG vers l'orient l'angle $G \Pi b = \zeta$, & l'arc $\Pi b = \epsilon$, pour avoir le pole boréal b de l'équateur magnétique, & de l'arc $b \Pi$ on prendra vers l'occident l'angle $\Pi b B = \delta$, pour avoir le premier méridien magnétique, dans le-



quel prenant l'arc $bi = \gamma$, on aura le lieu boréal i , où la direction magnétique est verticale.

COROLLAIRE 1.

78. L'équation trouvée pour la déclinaison de la boussole peut être représentée de cette sorte,

$$\text{tag } \omega = \frac{a \sin p + f \cos p \cos q + g \cos p \sin q - h \sin q - k \cos q}{b \sin p - f \sin q + g \cos q - h \cos p \cos q - k \cos p \sin q},$$

où $ab = fh + gk$, & ayant trouvé ces coefficients, on aura

$$\text{tag } \zeta = \frac{-k}{h}; \cot \epsilon = \frac{b \cos \zeta}{h}; \text{tag } \delta = \frac{ab}{(fk - gh) \cos \epsilon} \text{ \& } \sin \gamma = \frac{-a \cos \zeta}{h \sin \delta}.$$

COROLLAIRE 2.

79. En employant les mêmes lettres a, b, f, g, h, k , l'inclinaison magnétique θ se trouvera exprimée ainsi, $\sin \theta =$

$$\frac{(b \cos p + b \sin p \cos q + k \sin p \sin q) \vee (bb - aa + bb + kk - ff - gg)}{bb + bb + kk + (ak + bg) \sin p \cos q - (ab + bf) \sin p \sin q + (fk + gb) \cos p},$$

à cause de

$$\sin \zeta = \frac{-k}{\vee(hh + kk)}; \sin \epsilon = \frac{\vee(hh + kk)}{\vee(bb + hh + kk)}; \sin \delta = \frac{a \vee(bb + hh + kk)}{\vee(hh + kk)(aa + ff + gg)};$$

$$\cos \zeta = \frac{h}{\vee(hh + kk)}; \cos \epsilon = \frac{b}{\vee(bb + hh + kk)}; \cos \delta = \frac{fk - gh}{\vee(hh + kk)(aa + ff + gg)},$$

$$\text{\& } \sin \gamma = \frac{-\vee(aa + ff + gg)}{\vee(bb + hh + kk)}.$$

COROLLAIRE 3.

80. Pourvu donc qu'on ait trouvé pour quelque tems proposé ces lettres a, b, f, g, h, k , cela suffit pour déterminer, tant la déclinaison de la boussole ω , que l'inclinaison θ , pour tous les lieux de la surface de la terre, sans qu'on connoisse en détail les poles magnétiques.



REMARQUE.

81. Pourvu qu'on ait quatre ou plusieurs bonnes observations sur la déclinaison de la boussole, faites en même tems & en des endroits fort éloignés les uns des autres, le calcul ne sera pas difficile pour trouver les valeurs des lettres a, b, f, g, h, k . Car chaque observation fournit une telle équation,

$$0 = a \sin p - b \sin p \tan \omega + f(\cos p \cos q + \sin q \tan \omega) - h(\sin q \cos p \cos q \tan \omega) + g(\cos p \sin q - \cos q \tan \omega) + k(\cos q + \cos p \sin q \tan \omega),$$

& puisque $ab = fh + gk$, quatre telles équations suffisent pour trouver toutes les lettres; mais on fera très bien d'y en employer au moins cinq, pour voir si, après en avoir calculé le rapport entre toutes les 6 lettres, il en résulte $ab = fh + gk$. Cette condition pourra servir à corriger les fautes qui pourroient s'être glissées dans les observations. De telles fautes ne sont que trop à craindre, surtout dans les observations faites sur mer, & il seroit à souhaiter qu'on fût aussi soigneux de faire de telles observations sur terre que sur mer, ce qui nous mettroit en état d'entreprendre ces déterminations avec beaucoup plus de confiance. Au reste, des observations faites dans une contrée médiocre, en remarquant la différence qui s'y trouve dans la déclinaison, peuvent servir à déterminer la route magnétique qui passe par cette contrée.

PROBLEME XIV.

82. *Ayant observé la déclinaison de la boussole 1°. en L, 2°. sous le même méridien en N, & 3°. sous le même parallèle en M, la différence de latitude & de longitude étant donnée, trouver sur la surface de la terre le centre K de la route magnétique qui passe par le lieu L.* Fig. 8.

SOLUTION.

Soit la distance du lieu proposé L au pôle boréal du monde $PL = p$, duquel le lieu M siué sous le même parallèle, soit éloigné en longitude vers l'orient de l'angle $PLM = m$; or, pour le lieu N
situé



situé sous le même méridien, soit l'arc $LN = n$, dont il est plus éloigné du pôle Π que L . Dans ces trois endroits, soit observée la déclinaison de la boussole vers l'occident 1° . en $L = \omega$; 2° . en $M = \omega + \mu$, & 3° . en $N = \omega + \nu$; où je suppose que les trois lieux L , M & N , n'étant point fort éloignés entr'eux, les différences dans la déclinaison μ & ν sont fort petites.

De là on connoitra la déclinaison de la boussole pour un lieu moyen quelconque I ; car, soit pour ce lieu la différence en longitude ou l'angle $L\Pi I = x$, & la distance du pôle $\Pi I = p + y$, & on conclura qu'en I la déclinaison sera $= \omega + \frac{\mu x}{m} - \frac{\nu y}{n}$. Qu'on considère maintenant $L I$ comme l'élément de la route magnétique qui passe par L , & son centre K sera situé quelque part sur l'arc du grand cercle $L K$, tiré perpendiculairement sur la direction de la boussole $L \mathcal{E}$, de sorte que l'angle $\Pi L K = 90^\circ + \omega$. Soit l'arc cherché $L K = z$, qu'on tire l'arc de grand cercle ΠK , & soit l'angle $K \Pi L = s$, pour avoir dans le triangle sphérique $\Pi L K$,

$$\cos \Pi K = \cos p \cos z - \sin p \sin z \sin \omega \text{ \& } \tan s = \frac{\sin z \cos \omega}{\sin p \cos z + \cos p \sin z \sin \omega},$$

$$\text{\& } \sin \Pi K \cdot \sin s = \sin z \cos \omega, \text{ \& } \sin \Pi K \cdot \cos s = \sin p \cos z + \cos p \sin z \sin \omega.$$

Maintenant, le triangle sphérique $\Pi I K$ différant infiniment peu du triangle $\Pi L K$, considérons les différences comme des différentiels, & posons $\Pi I = p + dp$, l'angle $K \Pi I = s + ds$, & la déclinaison de la boussole en I , ou l'angle $L I m = \omega + d\omega$, les quantités ΠK & $L K = z$ demeurant constantes. Cela remarqué, la première équation différentiée donne

$$0 = dp \sin p \cos z + dp \cos p \sin z \sin \omega + d\omega \sin p \sin z \cos \omega, \text{ ou } dp = \frac{-d\omega \sin p \sin z \cos \omega}{\sin p \cos z + \cos p \sin z \sin \omega},$$

& la troisième,

$$ds \sin \Pi K \cdot \cos s = -d\omega \sin z \sin \omega; \text{ donc } ds = \frac{-d\omega \sin z \sin \omega}{\sin p \cos z + \cos p \sin z \sin \omega}.$$

Or,



Or, en comparant ces valeurs avec la variation dans la déclinaison, nous aurons $x = ds$ & $y = dp$, & partant

$$\omega + d\omega = \omega + \frac{\mu x}{m} + \frac{v y}{n}, \text{ ou } d\omega = \frac{\mu x}{m} + \frac{v y}{n} = \frac{\mu ds}{m} + \frac{v dp}{n}.$$

Substituons ici les valeurs trouvées, & nous obtiendrons

$$fp \cos z + \cos p fz f\omega = -\frac{\mu}{m} fz f\omega - \frac{v}{n} fp fz \cos \omega,$$

& par conséquent pour le rayon cherché $LK = z$,

$$\cot z = -\frac{\cos p fz f\omega}{\sin p} - \frac{\mu fz f\omega}{m fp} - \frac{v \cos \omega}{n},$$

$$\text{ou bien } \tan z = \frac{-mn \sin p}{mn \cos p f\omega + n\mu fz f\omega + mv fp \cos \omega}.$$

COROLLAIRE 1.

83. Par ce moyen on connoitra un point K dans l'équateur magnétique, & puisqu'une autre opération semblable nous découvrira une autre route magnétique, dont le centre est aussi dans cet équateur, on fera en état de tirer l'équateur magnétique sur le globe terrestre.

COROLLAIRE 2.

84. Ayant tracé sur le globe les deux petits cercles qui marquent des routes magnétiques, leurs intersections montreront les deux points i & i , où l'inclinaison est verticale; & de là on aura tous les élémens pour déterminer partout, tant la déclinaison de la boussole, que l'inclinaison magnétique.

REMARQUE.

85. Ayant tiré sur le globe de la terre une route magnétique, elle marquera dans tous les lieux par où elle passe la déclinaison de la boussole. Donc, si l'on connoit d'ailleurs quelque part dans ce cercle la déclinaison, cela servira, ou à confirmer la conclusion qu'on en a



tirée, ou à la corriger, en cas que cette dernière observation ne fût pas d'accord. Cependant on comprend aisément que cette opération exige des observations faites avec toute l'exactitude possible, puisque la moindre erreur y feroit de la plus grande conséquence; & par cette raison on ne sauroit appliquer cette méthode à des observations faites en mer. Il n'est pas aussi nécessaire que les trois observations foyent précisément faites en trois lieux L, M & N, tels que j'ai supposé; mais, pourvu que les trois lieux diffèrent d'une manière quelconque, tant en longitude qu'en latitude, on en tirera aisément la formule $\omega = \frac{\mu x}{m} + \frac{\nu y}{n}$, en regardant comme inconnues les fractions $\frac{\mu}{m}$ & $\frac{\nu}{n}$, pour les déterminer ensuite par les déclinaisons observées en M & N, de quelque manière que diffère l'un & l'autre, tant en longitude qu'en latitude, du lieu principal L.

APPLICATION DE CETTE THÉORIE

à la détermination de l'état magnétique de la terre pour l'an 1756.

86. Dans le L Volume des Transactions, on trouve une grande liste d'observations faites dans cette année sur la déclinaison de la boussole, que j'ai représentées dans la table ci-jointe. Pour déterminer par-là l'état magnétique de la terre, je commence par considérer quelques endroits où la déclinaison a été nulle, ce qui est arrivé dans la Mer Atlantique aux lieux suivans, dont la distance au pôle boréal est posée $= p$, & la longitude comptée du méridien de Londres $= q$.

Lieux où la déclinaison a été nulle en 1756.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$p = 60^\circ$;	$p = 65^\circ$;	$p = 70^\circ$;	$p = 75^\circ$;	$p = 80^\circ$;	$p = 85^\circ$;	$p = 90^\circ$;
$q = 75^\circ$;	$q = 55^\circ$;	$q = 47^\circ \frac{1}{2}$;	$q = 42^\circ$;	$q = 37^\circ \frac{1}{2}$;	$q = 33^\circ$;	$q = 31^\circ$;

VIII.



VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
$p = 95^\circ$; $q = 30^\circ$;	$p = 100^\circ$; $q = 28^\circ$;	$p = 105^\circ$; $q = 27^\circ$;	$p = 110^\circ$; $q = 25^\circ$;	$p = 115^\circ$; $q = 23^\circ$;	$p = 120^\circ$; $q = 21^\circ$;
XIV.			XV.		
$p = 125^\circ$; $q = 19^\circ$;			$p = 130^\circ$; $q = 17^\circ$;		

à quoi j'ajoute deux observations faites sous l'équateur aux Indes orientales, où la déclinaison étoit pareillement nulle :

$$\begin{array}{l} p = 90^\circ ; \quad p = 90^\circ ; \\ q = -79^\circ ; \quad q = -94^\circ . \end{array}$$

87. Puisque dans ces observations la déclinaison de la boussole a été nulle, ou $\omega = 0$, notre équation sera

$a \sin p + f \cos p \cos q + g \cos p \sin q - h \sin q + k \cos q = 0$,
dont il faut déterminer les lettres a, f, g, h, k . Pour cet effet, je commence par les observations faites sous l'équateur même, pour lesquelles ayant, à cause de $p = 90^\circ$;

$$a - h \sin q + k \cos q = 0,$$

les trois observations rapportées pour ce cas fournissent

$$\begin{array}{l} a - 0,515 \, h + 0,857 \, k = 0 \\ a + 0,981 \, h + 0,191 \, k = 0 \\ a + 0,997 \, h - 0,070 \, k = 0; \end{array}$$

de là en prenant les différences,

$$\begin{array}{l} 1496 \, h - 666 \, k = 0 \\ \& 1512 \, h - 927 \, k = 0, \end{array}$$

qui n'étant point d'accord, ce dont il ne faut pas être surpris, vu que les observations Indiennes paroissent sujettes à caution, j'ai lieu de soupçonner que la dernière est plus juste, & de là se tirent les déterminations suivantes,

$$a = -h \quad \& \quad k = 1\frac{1}{4} \, h,$$

qu'il faut rectifier par les autres observations.



88. J'appliquerai donc le calcul aux autres observations où la déclinaison a été nulle, qui fournissent les équations suivantes :

- I. $0,866a - 0,966h + 0,259k + 0,130f + 0,483g = 0$
- II. $0,906a - 0,819h + 0,574k + 0,242f + 0,346g = 0$
- III. $0,939a - 0,737h + 0,675k + 0,231f + 0,252g = 0$
- IV. $0,966a - 0,669h + 0,743k + 0,192f + 0,173g = 0$
- V. $0,985a - 0,609h + 0,793k + 0,138f + 0,106g = 0$
- VI. $0,996a - 0,544h + 0,838k + 0,073f + 0,047g = 0$
- VII. $1,000a - 0,515h + 0,857k = 0$
- VIII. $0,996a - 0,500h + 0,866k - 0,076f - 0,044g = 0$
- IX. $0,985a - 0,469h + 0,883k - 0,153f - 0,082g = 0$
- X. $0,966a - 0,454h + 0,891k - 0,231f - 0,118g = 0$
- XI. $0,939a - 0,422h + 0,906k - 0,310f - 0,145g = 0$
- XII. $0,906a - 0,391h + 0,920k - 0,389f - 0,165g = 0$
- XIII. $0,866a - 0,358h + 0,931k - 0,467f - 0,179g = 0$
- XIV. $0,819a - 0,325h + 0,945k - 0,542f - 0,187g = 0$
- XV. $0,766a - 0,292h + 0,956k - 0,615f - 0,188g = 0$

89. Il est extrêmement difficile de satisfaire à toutes ces conditions, de sorte que les erreurs ne deviennent assez considérables; mais il ne faut pas douter non plus, que les observations elles-mêmes ne soient très grossières. Après plusieurs essais, j'ai trouvé que les valeurs suivantes remplissent le mieux toutes ces conditions, pourvu qu'on excepte la première, qu'on ne sauroit accorder en aucune manière avec les autres;

$a = -366$; $h = 900$; $k = 1000$; $f = 200$ & $g = 1333$,
d'où, puisque $ab = fh + gk$, on tire $b = -4135$.

Mais on ne sauroit se fier assez à ces déterminations, tant à cause des observations, que parce que les coefficients des lettres h & k ont tous les mêmes signes, & que ceux de f & g sont trop petits. Il est donc nécessaire de développer encore plusieurs autres observations, pour obtenir des équations où il regne une plus grande variété parmi les coefficients.



90. Avant que d'appliquer notre équation générale

$$e = a \sin p - b \sin p \tan \omega + f(\cos p \cos q + \sin q \tan \omega) - b(\cos p \cos q \tan \omega - \sin q) \\ + g(\cos p \sin q - \cos q \tan \omega) + k(\cos p \sin q \tan \omega + \cos q)$$

à des observations où la déclinaison n'est pas nulle, il est bon de la résoudre dans une forme plus propre pour le calcul. Pour cet effet, par les trois angles p , q & ω , donnés pour chaque observation, je cherche deux angles nouveaux μ & ν par les formules suivantes:

$$\frac{\cos p}{\tan \omega} = \tan \mu \quad \& \quad \cos p \tan \omega = \tan \nu,$$

& alors notre équation deviendra

$$e = a \sin p - b \sin p \tan \omega + \frac{f \tan \omega}{\cos \mu} \sin(\mu + q) + \frac{h}{\cos \nu} \sin(\nu - q) \\ - \frac{g \tan \omega}{\cos \mu} \cos(\mu + q) + \frac{k}{\cos \nu} \cos(\nu - q),$$

qui, étant divisée par $\sin p$, donne

$$e = a - b \tan \omega + \frac{f \tan \omega \sec \mu}{\sin p} \sin(\mu + q) + \frac{h \sec \nu}{\sin p} \sin(\nu - q) \\ - \frac{g \tan \omega \sec \mu}{\sin p} \cos(\mu + q) + \frac{k \sec \nu}{\sin p} \cos(\nu - q),$$

& maintenant il sera aisé de développer cette forme par les logarithmes.

91. Outre le grand nombre des Observations rapportées ci-dessus, le même Mémoire dans les Transactions fournit encore quelques observations faites dans le Détroit & la Baye de Hudson; j'en ai tiré les suivantes,

$$\begin{array}{l} p = 30^\circ | 30^\circ | 30^\circ | 31^\circ | 28^\circ | 28^\circ | 27^\circ | 27^\circ | 29^\circ | 32^\circ | 31^\circ \\ q = 4^\circ | 10^\circ | 27^\circ | 45^\circ | 65^\circ | 71^\circ | 79^\circ | 83^\circ | 86^\circ | 92^\circ | 95^\circ \\ \omega = 18^\circ | 20^\circ | 25^\circ | 31^\circ | 41^\circ | 41^\circ | 43^\circ | 40^\circ | 35^\circ | 17^\circ | 8^\circ \end{array}$$

Comme ces observations paroissent plus exactes que les autres, & qu'elles contiennent des déclinaisons très considérables, elles doivent fournir des déterminations plus précises. Je mettrai donc ici quelques échantillons du calcul :

Kk 3

p =



$p = 30^\circ$	30°	31°	28°	27°
$q = 4^\circ$	27	45	65	79
$\omega = 18^\circ$	25	31	41	43
tag $\omega = 0,3249$	0,4663	0,6008	0,8693	0,9325
$l \sin p = 9,69897$	9,69897	9,71184	9,67161	9,65704
$l \cos p = 9,93753$	9,93753	9,93306	9,94593	9,94988
$l \tan \omega = 9,51177$	9,66867	9,77877	9,93916	9,96965
$l \tan \mu = 10,42576$	10,26886	10,15429	10,00677	9,98023
$l \tan \nu = 9,44930$	9,60620	9,71183	9,88519	9,91953
$\mu = 69^\circ, 26'$	$61^\circ, 42'$	$54^\circ, 58'$	$45^\circ, 27'$	$43^\circ, 42'$
$\mu + q = 73, 26$	88, 42	99, 58	110, 27	122, 42
$l \tan \omega = 9,51177$	9,66867	9,77877	9,93916	9,96965
$l \sec \mu = 10,45432$	10,32414	10,24105	10,15395	10,14088
$l \operatorname{cosec} p = 0,30103$	0,30103	0,28816	0,32839	0,34296
	0,26712	0,29384	0,30798	0,42150
$l \sin (\mu + q) = 9,98159$	9,99989	9,99339	+9,97173	9,92506
$l \cos (\mu + q) = 9,45504$	8,35578	-9,23823	-9,54331	-9,73259
	0,24871	0,29373	0,30137	+0,37855
	9,72216	8,64962	-9,54621	-0,18608
coëff $f = + 1,7730$	+1,9667	+2,0016	+2,4730	+2,3908
coëff $g = - 0,5274$	-0,0446	+0,3517	+0,9222	+1,5350
$\nu = 15^\circ, 43'$	$22^\circ, 0'$	$27^\circ, 15'$	$37^\circ, 31'$	$39^\circ, 43'$
$\nu - q = 11, 43$	-5°	-17°, 45	-27, 29	-39, 17
$l \sec \nu = 10,01655$	10,03283	10,05109	10,10063	10,11395
$l \operatorname{cosec} p = 0,30103$	0,30103	0,28816	0,32839	0,34296
	10,31758	10,33386	10,33925	10,42902
$l \sin (\nu - q) = 9,30765$	-8,94030	-9,48411	-9,66416	-9,80151
$l \cos (\nu - q) = 9,99085$	+9,99834	+9,97882	+9,94799	9,88875
	9,62523	-9,27416	-9,82336	-0,15318
	0,30843	0,33220	0,31807	0,37701
coëff $h = + 0,4219$	-0,1880	-0,6658	-1,4219	-1,8131
coëff $k = + 2,0344$	+2,0800	+2,1488	+2,3824	+2,2165.

92. Ajoutons à ces observations encore deux des autres rapportées dans la table ci-jointe, l'une où $p = 125^\circ$, $q = 35^\circ$ &
 $\omega =$



$\omega = -8^{\circ}, 15'$, & l'autre où $p = 125^{\circ}$, $q = -40^{\circ}$, $\omega = 27^{\circ}$,
& en choisissant les 5. suivantes,

$$\begin{array}{llllll} p = 90^{\circ}; & p = 30^{\circ}; & p = 27^{\circ}; & p = 125^{\circ}; & p = 125^{\circ}, \\ q = 31; & q = 4^{\circ}; & q = 79; & q = 35^{\circ}; & q = -40^{\circ}, \\ \omega = 0; & \omega = 18^{\circ}; & \omega = 43; & \omega = -8^{\circ}, 15'; & \omega = 27^{\circ}, \end{array}$$

on aura ces 5. équations à résoudre,

$$\begin{array}{l} 0 = 1000a - 0b - 515h + 857k \\ 0 = 1000a - 325b + 422h + 2034k + 1773f - 527g \\ 0 = 1000a - 932b - 1813h + 2216k + 2391f + 1535g \\ 0 = 1000a + 145b - 617h + 1058k - 663f - 248g \\ 0 = 1000a - 509b + 511h + 1165k - 936f - 26g, \end{array}$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes,

$$\begin{array}{l} a = -120; \quad b = 2466; \quad h = 1000; \quad k = 741; \quad f = -47; \\ g = 1752; \end{array}$$

mais il est aussi clair, que la valeur de b ne sauroit être telle qu'elle devint $ab = fh + gk$.

93. C'est sans doute un accident bien fâcheux pour la théorie que je viens de développer, & il semble qu'elle en feroit totalement renversée. Les partisans de feu Mr. Halley ne manqueront pas d'en tirer cette conséquence, que, pour expliquer les phénomènes de la déclinaison magnétique, il faut absolument avoir recours à quatre poles magnétiques. Mais les raisons alléguées ci-dessus me paroissent encore trop fortes, pour que je veuille entièrement renoncer à cette idée; & il se présente d'abord une source très naturelle, qui nous pourra fournir une correction suffisante. Pour cet effet, je crois qu'on n'aura qu'à employer cette rectification, que le centre magnétique ne doit pas être pris au milieu de l'axe magnétique. J'avois introduit cette supposition uniquement pour la commodité du calcul; mais



mais à présent je ne doute plus que ce centre ne soit considérablement éloigné du milieu de l'axe. Ainsi on n'aura qu'à entreprendre de nouveau toutes les recherches que j'ai développées ici, en regardant le centre magnétique D comme situé dans un point quelconque de l'axe magnétique AB, afin que le vrai lieu en puisse ensuite être déterminé par les observations. Cette correction est si naturelle, qu'il est même très probable que ce centre magnétique est très différent du milieu de l'axe magnétique, attendu que, quelle que soit la cause de la force magnétique, elle ne sera jamais également distribuée par toute la longueur de l'axe magnétique. Mais il est aussi certain que cette circonstance rendra le calcul beaucoup plus difficile; cependant la question est assez importante pour qu'on y apporte tous les soins imaginables.



	Ouest.										Londres.										Est.												Equateur.																			
	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120											
50°																																																				
45					18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0																													
40			12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0																																					
35		7	6	5	4	3	2	1	0																																											
30	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40										
25	-3	-3	-2	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40						
20	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
15	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
10				-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
5				-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
0				-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
5'																																																				
10																																																				
15																																																				
20																																																				
25																																																				
30																																																				
35																																																				
40																																																				

Fig. 1.

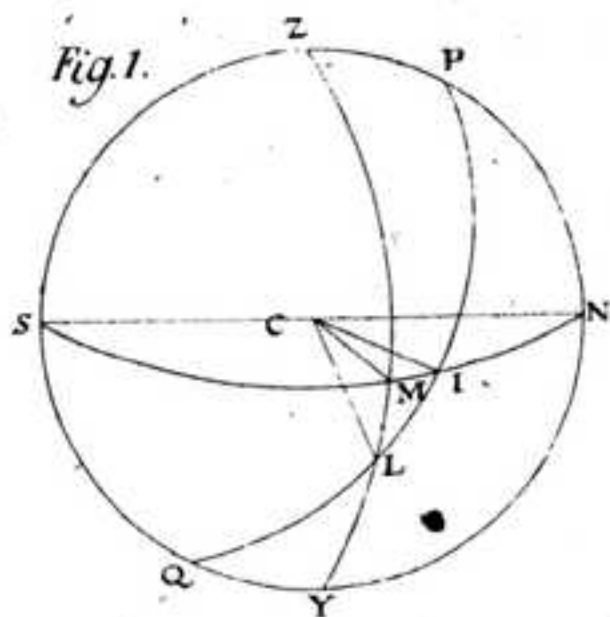


Fig. 2.

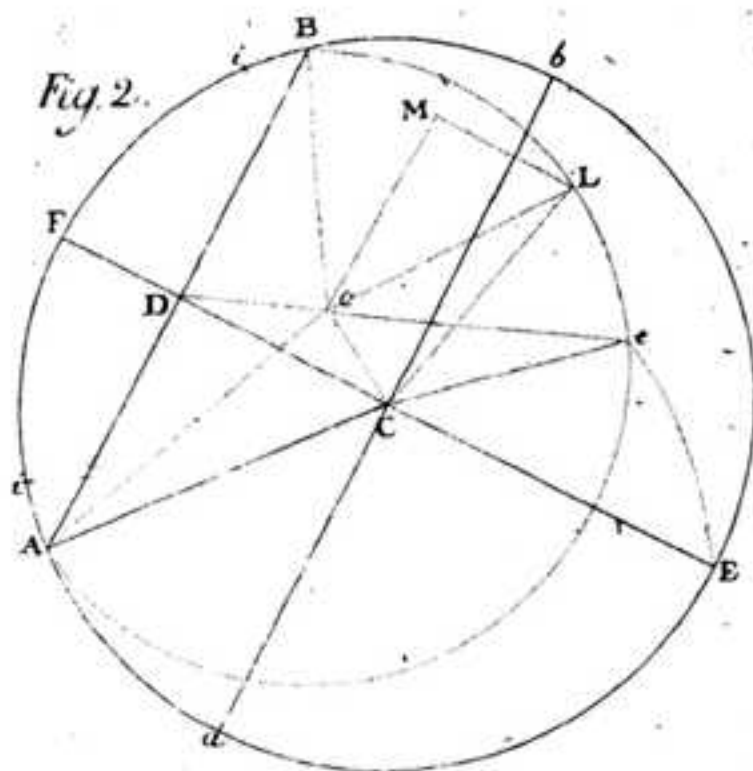


Fig. 5.

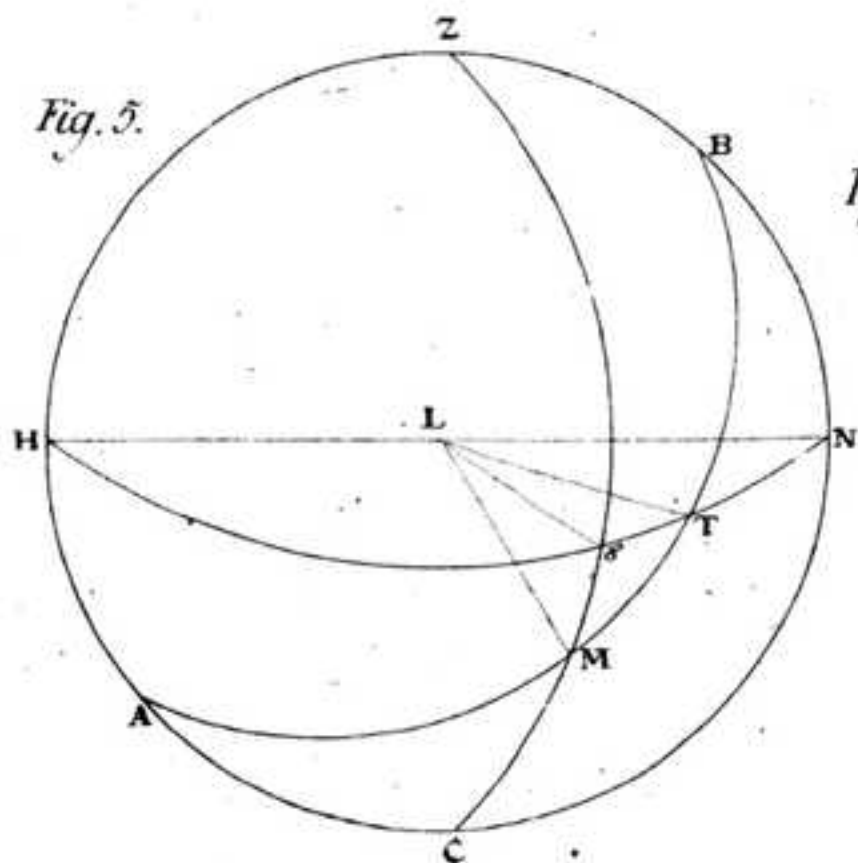


Fig. 4.

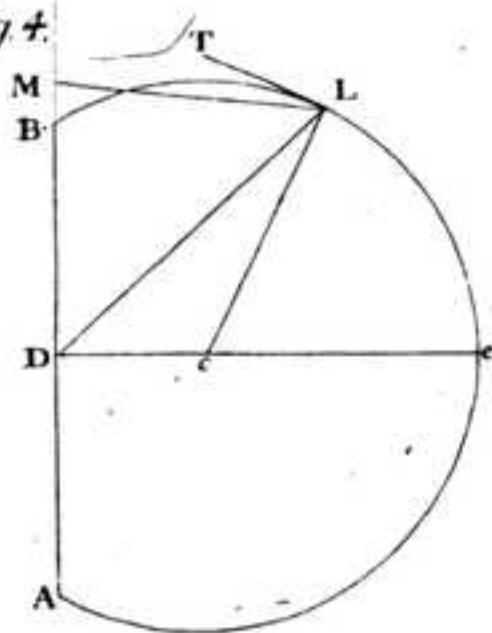


Fig. 6.

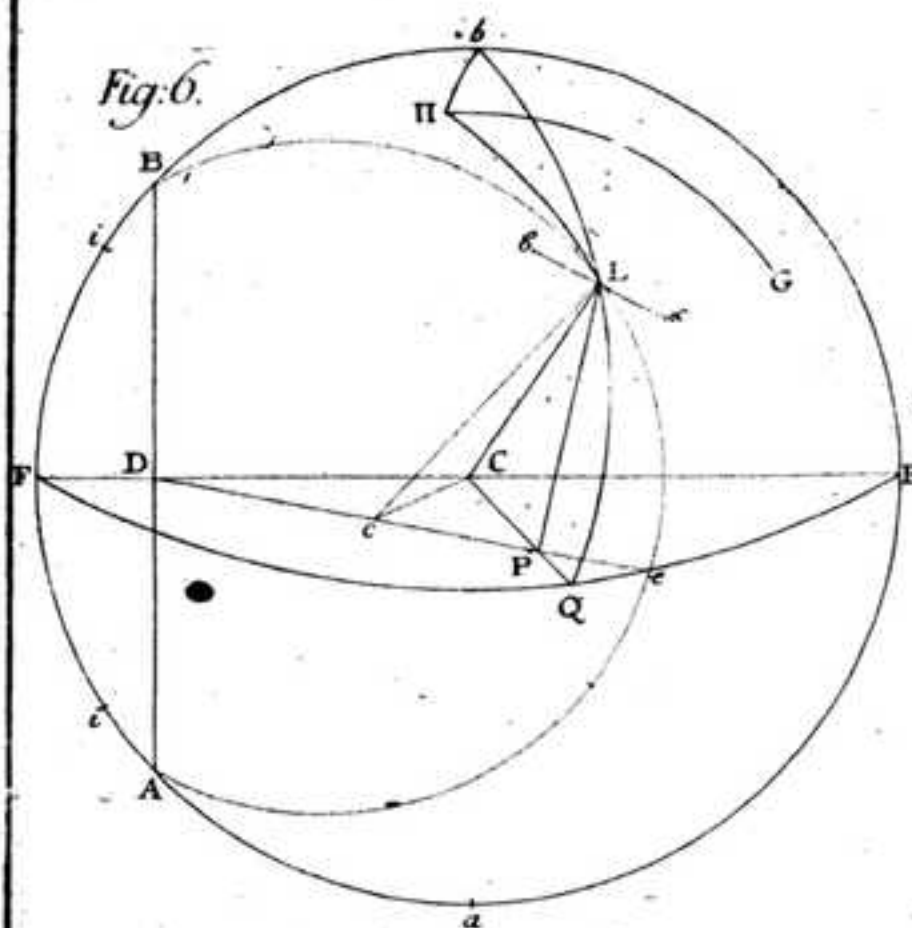


Fig. 7.

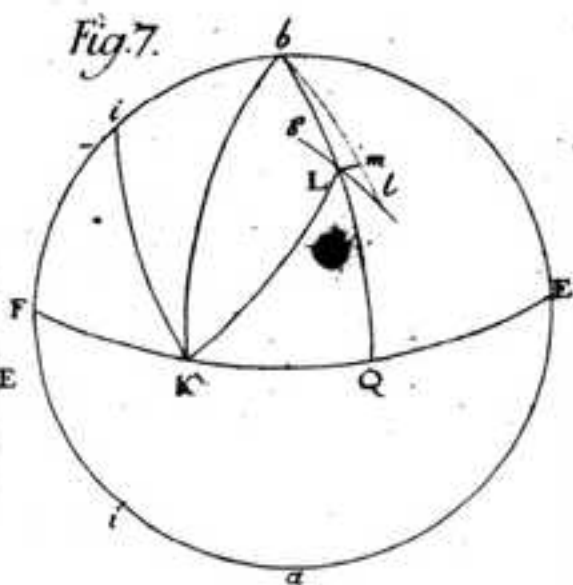


Fig. 3.

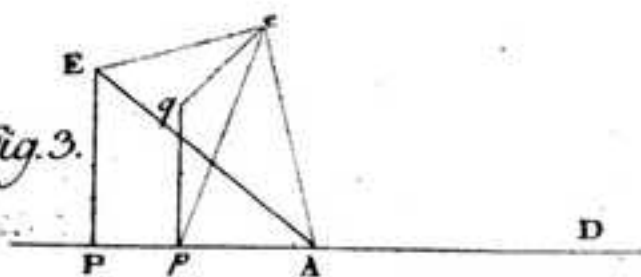


Fig. 8.

