



1768

Réflexions sur la manière d'examiner la réfraction du verre par le moyen des prismes

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Réflexions sur la manière d'examiner la réfraction du verre par le moyen des prismes" (1768). *Euler Archive - All Works*. 361.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/361>

R É F L É X I O N S

S U R

LA MANIERE D'EXAMINER LA RÉFRACTION DU
VERRE PAR LE MOYEN DES PRISMES.

P A R M. L. E U L E R.

I.

Les nouvelles especes de verre, que Mr. Zeiher vient de découvrir, fournissent une nouvelle carrière dans la Dioptrique, qui mérite à tous égards toute l'attention possible de ceux qui s'appliquent à cette science. Tant qu'on s'est imaginé, que tout le verre produisoit à peu près la même réfraction, il n'y avoit aucune espérance de délivrer les instrumens Dioptriques du défaut de la dispersion des rayons de diverses couleurs, & le grand Newton avoit raison de soutenir, que ce défaut étoit inséparable de la nature du verre, ce qui l'a conduit à la découverte des Téléscopes à réflexion. Ce même préjugé me fit croire autrefois qu'il n'y avoit point d'autre moyen de remédier à ce défaut, qu'en composant les objectifs des lunettes de différentes matieres réfringentes, comme de verre & d'eau. Cette idée m'ayant suscité une petite controverse avec Mr. Dollond, j'ai lieu d'être infiniment flatté, de ce que cette même controverse lui a donné occasion de découvrir deux especes de verre, dont la réfraction étoit assez différente pour produire le même effet que j'avois eu en vue; & les excellentes lunettes qu'il a faites depuis, prouvent suffisamment l'importance de cette découverte. Or celle de Mr. Zeiher, par laquelle il a trouvé moyen d'augmenter la force réfractive du verre beaucoup au delà de celle dont Mr. Dollond s'est servi, nous promet le plus haut degré de perfection dans les instrumens de Dioptrique, pourvu qu'on trouve moyen

d'y

d'y appliquer avec justesse la Théorie, & d'en mettre ensuite le résultat en exécution.

2. Mais une telle espèce de verre étant proposée, avant qu'on y puisse appliquer la Théorie, il est absolument nécessaire qu'on en connoisse exactement la nature, tant par rapport à la réfraction, qu'à la dispersion des différentes couleurs. Pour découvrir cette double force du verre, Newton a employé des prismes qui en étoient formés, & tant Mr. Dollond que Mr. Zeiher se sont servis du même moyen pour connoître la qualité des diverses especes de verre qu'ils ont mis en usage. Il s'agit donc d'abord de faire des prismes de ces nouvelles especes de verre, & d'en faire ensuite des expériences dans une chambre obscure sur l'image colorée du soleil, pour en conclure enfin, tant la réfraction des rayons moyens, que la divergence des extrêmes qui représentent les couleurs rouge & violette dans le spectre. Mais, ces expériences étant extrêmement délicates, surtout quand on en veut tirer des conclusions aussi exactes que la Théorie l'exige, il paroît tout à fait nécessaire de bien développer toutes les précautions qu'il y faut prendre, afin qu'il ne reste plus aucun doute sur la justesse des conclusions. Lorsque Newton fit de telles expériences sur le verre ordinaire, il avoua franchement que les déterminations qu'il en avoit tirées sur la diverse réfrangibilité des rayons, n'étoient justes qu'à peu près, ce qui suffisoit pour son dessein. Donc, puisque les recherches présentes demandent absolument le plus haut degré de précision, on ne sauroit être trop scrupuleux sur toutes les circonstances, auxquelles il faut avoir égard; & comme cet examen est de la dernière importance, il sera bien permis de douter, si l'on a pris toutes les précautions nécessaires dans les expériences qu'on a faites pour s'assurer de la réfraction de toutes les nouvelles especes de verre qu'on vient de découvrir.

3. Cet examen est à présent d'autant plus nécessaire que Mr. Zeiher vient d'envoyer à l'Académie un morceau d'une de ses nouvelles especes de verre, qui paroît très propre à perfectionner les lunettes.

tes. Il suppose que la réfraction moyenne de cette espèce est comme 5 à 3, & que la dispersion des couleurs est presque deux fois plus grande que dans le verre commun; mais il avertit positivement qu'on ne sauroit s'y fier, ayant observé, que diverses fontes de la même composition de verre différent quelquefois très considérablement par rapport à la réfraction. Ainsi nous devons regarder la nature de ce morceau de verre comme tout à fait inconnue, & il s'agit à présent de choisir les expériences, par lesquelles on sera en état de déterminer le plus sûrement la véritable réfraction de ce verre. S'il n'y avoit que ce seul morceau de la même fonte, cette entreprise pourroit paroître superflue, puisqu'il n'en restera point assez pour en faire un verre objectif; mais Mr. Zeiher me marque qu'il possède encore quelques morceaux de la même fonte, qu'il est prêt d'envoyer, dès que l'examen de celui-ci m'aura mis en état d'y appliquer la Théorie, & d'en tirer les justes mesures pour la construction des objectifs. Comme ce morceau est assez grand pour en faire quelques prismes, il faut d'abord voir quels angles il conviendra leur donner, afin qu'on ne les fasse, ni trop grands, ni trop petits: ensuite, ayant fait les prismes, il faut rechercher les expériences les plus propres, dont nous puissions conclure tant la réfraction moyenne que la dispersion des couleurs. Mais surtout il faudra bien peser toutes les précautions qu'on doit prendre, pour être assuré de la justesse de la conclusion; & puisqu'il est impossible qu'il ne s'y glisse quelque faute, il faut arranger les expériences en sorte, qu'il en réjaillisse la moindre erreur dans la conclusion.

Planch. XIII.

Fig. 1.

4. Soit donc l'angle du prisme $ACB = \gamma$, & considérons un rayon quelconque PQ , qui tombant sur la face AC en Q , soit rompu en QR , & de R en RS , & posons les angles,

$$PQA = p; \quad CQR = q; \quad CRQ = r \quad \& \quad BRS = s,$$

desquels nous savons que $q + r = 180^\circ - \gamma$. Supposons maintenant la raison du sinus d'incidence au sinus de réfraction $= n : 1$, pour le rayon PQ , lorsqu'il passe de l'air dans le verre dont le prisme est fait, & la route réfractée du rayon $PQRS$ sera déterminée par ces deux équations,

col

$\cos p = n \cos q$, & $\cos s = n \cos r$,
 d'où il est d'abord évident que tant $n \cos q$ que $n \cos r$ doit être plus petit que le sinus total exprimé par l'unité, de sorte que $\cos q < \frac{1}{n}$
 & $\cos r < \frac{1}{n}$, puisque sans cette condition le rayon ne sauroit pénétrer par le prisme, comme nous supposons. Pour cet effet, puisque la somme des angles $q + r$ est donnée $= 180^\circ - \gamma$, il est nécessaire, que le cosinus de la moitié de cette somme, ou bien $\cos(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = \sin \frac{1}{2}\gamma$, soit plus petit que $\frac{1}{n}$. Donc, si la raison de réfraction de l'air dans le verre est $= n : 1$, on n'a qu'à chercher un angle θ , de sorte que $\sin \theta = \frac{1}{n}$, & alors l'angle du prisme $ACB = \gamma$ doit être plus petit que 2θ . Ainsi, pour le verre en question, ayant $n : 1 = 5 : 3$, l'angle θ se trouve $36^\circ, 52'$, & partant l'angle du prisme ACB qu'on en voudra former, doit être nécessairement plus petit que $73^\circ, 44'$. Or il faut bien qu'il soit considérablement plus petit, afin, que tant les rayons plus réfrangibles, que ceux qui tombent moins obliquement sur le prisme, puissent le traverser après une double réfraction, d'où je conclus que cet angle doit à peine surpasser 60° .

5. Or il faut remarquer, que plus l'angle $ACB = \gamma$ approche de l'angle 2θ , déterminé par la raison de réfraction $n : 1$, moins le prisme transmettra de rayons; & il est important de savoir, lesquels de tous les rayons incidens seront transmis. Or d'abord les rayons, qui tombent sur la face AC sous un angle évanouissant $p = 0$, passent certainement par le prisme, pourvu qu'il soit $\gamma < 2\theta$, ce qui nous fournit une limite des rayons incidens qui sont transmis. Soit donc $p = 0$, & nous aurons $n \cos q = 1$, ou $\cos q = \frac{1}{n}$, d'où, puisque $\sin \theta = \frac{1}{n}$, nous tirons $\cos q = \sin \theta$, ou $q = 90^\circ - \theta$,



& de là nous trouvons $r = 180^\circ - \gamma - q = 90^\circ - \gamma + \theta$, ce qui fournit pour la seconde réfraction en R cette équation, $\text{cof } s = n \sin(\gamma - \theta) = \frac{\sin(\gamma - \theta)}{\sin \theta}$, d'où l'on voit que, si l'on faisoit l'angle du prisme γ plus grand que 2θ , cette seconde réfraction ne sauroit plus avoir lieu. Soit donc $\gamma = 2\theta - \omega$, pour que l'équation $\text{cof } s = \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin \theta}$ devienne possible, & nous en connoîtrons l'angle de la sortie $BRS = s$. Pour l'autre limite des rayons incidens, qui seront encore transmis par le prisme, nous n'avons qu'à mettre $s = 0$, & par-là nous trouverons d'une manière semblable $\text{cof } p = n \sin(\gamma - \theta)$, d'où il faut conclure que de tous les rayons incidens il n'y a que ceux qui seront transmis par le prisme, qui tombent sur la face AC sous un angle plus petit que celui de p , que nous venons de trouver. Ainsi supposant $n = \frac{3}{2}$, & l'angle du prisme $\angle CB = \gamma = 60^\circ$, à cause de $\theta = 36^\circ, 52'$, nous aurons $\text{cof } p = \frac{3}{2} \sin 23^\circ, 8' = 0,6548$, & partant $p = 49^\circ, 6'$. Dans ce cas donc tous les rayons incidens, qui font avec la face du prisme AC un angle plus petit que $49^\circ, 6'$, seront transmis par le prisme, & ceux qui y tombent sous un angle évanouissant, sortiront en R sous un angle $BRS = 49^\circ, 6'$.

6. Regardons maintenant comme inconnue la qualité réfractive du verre, dont le prisme est formé, & il est évident que, connoissant les deux angles $AQP = p$ & $BRS = s$, sous lesquels un rayon entre dans le prisme & en sort, on en pourra déterminer la raison de réfraction $n : 1$, que ce même rayon souffre en passant de l'air dans le verre. Car les deux équations fondamentales donnant $\text{cof } q = \frac{\text{cof } p}{n}$

& $\text{cof } r = \frac{\text{cof } s}{n}$, à cause de $r = 180^\circ - \gamma - q$, nous aurons,

$$\frac{\text{cof } s}{n} = -\text{cof}(\gamma + q) = -\text{cof } \gamma \text{cof } q + \sin \gamma \sin q;$$

or

$$\text{or } \cos q = \frac{\cos p}{n}, \text{ \& partant } \sin q = \frac{1}{n} \sqrt{(nn - \cos p^2)}; \text{ donc}$$

$$\cos s + \cos \gamma \cos p = \sin \gamma \sqrt{(nn - \cos p^2)}, \text{ \& par conséquent}$$

$$n = \frac{\sqrt{(\cos p^2 + \cos s^2 + 2 \cos \gamma \cos p \cos s)}}{\sin \gamma}.$$

Donc, pourvu qu'on soit en état de mesurer exactement les angles de l'entrée $AQP = p$ & de la sortie $BRS = s$, avec l'angle du prisme $ACB = \gamma$, on en pourra aisément conclure la raison de réfraction $n : 1$; & quand on réussit à faire cette opération, tant pour les rayons les plus réfrangibles, ou les violets, que pour les rouges, qui sont les moins réfrangibles, on aura une parfaite connoissance de la réfraction du verre, dont le prisme est fait. Car, prenant le milieu entre les deux réfractions extrêmes, on aura la réfraction moyenne, & leur différence donne ce qu'on nomme la dispersion des couleurs. Là-dessus je remarque en général, que les erreurs qu'on aura commises dans la mesure des angles p & s influenceront d'autant moins sur la conclusion, que ces mêmes angles seront plus petits: donc, puisque cela arrive lorsqu'on approche autant l'angle du prisme ACB de la limite assignée ci-dessus, que les circonstances le permettent, ce cas sera sans doute le plus avantageux.

7. Or, autant qu'il paroît par ce qui est publié sur ces nouvelles especes de verre, ceux qui en ont examiné la réfraction par des expériences faites avec des prismes, se sont très considérablement écartés de cette maxime, n'ayant fait l'angle de leurs prismes que tout au plus de 30° , ce qui doit nécessairement rendre fort incertaines les conclusions qu'ils en ont tirées. Il faut même croire qu'ils y ont employé la situation du prisme recommandée par Newton, où les deux réfractions à l'entrée & à la sortie deviennent égales entr'elles, ou l'angle $s = p$; or alors ces deux angles ensemble sont même les plus grands qu'il est possible. Cette situation est d'autant plus remarquable, qu'elle se découvre aisément par l'expérience, attendu que dans ce cas la réfraction entière, ou l'angle que fait le rayon sortant RS avec l'en-

trant

trant PQ , devient le plus petit. Cet angle est représenté dans la figure par ROV , dont la valeur est $= q - p + r - s = 180^\circ - \gamma - p - s$, à cause de $q + r = 180^\circ - \gamma$, d'où il est clair que pour rendre l'angle ROV le plus petit, il faut que la somme des angles $p + s$ devienne un maximum. D'où je conclus que cette situation n'est rien moins que propre pour le dessein dont il s'agit ici, outre quelle ne sauroit convenir qu'à une seule espece des rayons de lumiere. Il conviendra plutôt de choisir des situations tout à fait opposées, où l'un ou l'autre des angles p & s devienne aussi petit qu'il est possible; mais surtout il sera toujours fort avantageux de faire l'angle du prisme $ACB = \gamma$ aussi grand, que la réfraction du verre le permet. Ainsi, pour l'espece dont il s'agit, ayant égard aux rayons les plus réfrangibles, dont la raison de réfraction pourroit peut-être monter à $17 : 10$, on pourra bien faire l'angle du prisme de 70° , puisqu'il transmettroit encore les rayons, qui y tombent sous un angle de 18° , lequel paroît suffisant pour les expériences.

8. Par cette raison je ne balancerois pas à rejeter toutes les expériences, qui auront été faites avec des prismes d'un angle trop aigu, comme de 30° ; & si les propriétés bizarres, qu'on a attribuées à quelques especes de ce nouveau verre, comme que la dispersion puisse être très grande, pendant que la réfraction moyenne ne differe pas beaucoup de celle du verre commun, si ces propriétés, dis-je, ne sont fondées que sur de telles expériences, il sera bien permis d'en douter, du moins jusqu'à ce qu'elles soient mieux constatées. En effet, quand l'angle de prisme est si petit, & qu'on a même employé la situation du prisme recommandée par Newton, qui est précisément celle, où la diverse réfrangibilité devient le moins sensible, les plus petites erreurs, qu'on aura commises dans la mesure des angles dont on a besoin, influent très considérablement sur les conclusions qu'on en tire. Or ces erreurs sont absolument inévitables, soit qu'on regarde les faces du prisme en elles-mêmes, qu'il est presque impossible de faire parfaitement planes, soit qu'on veuille mesurer l'inclinaison des rayons
du



du soleil, tant incidens que réfractés, sur les faces du prisme. Aussi l'angle du prisme est assujetti à une incertitude d'autant plus grande, qu'il est plus petit, quand les faces ne sont pas parfaitement planes. Donc, pour parvenir à une connoissance aussi exacte que la Théorie l'exige, il est à tous égards absolument nécessaire qu'on fasse l'angle du prisme aussi grand que la nature de la réfraction le permet, c'est à dire, de 70° ou environ, & qu'on choisisse les situations, dans lesquelles l'angle évanouit à peu près, ou à l'entrée $AQP = p$, ou à la sortie $BRS = s$, puisque toutes ces circonstances concourent à rendre les conclusions moins douteuses.

Fig. 2.

9. Appliquons cela maintenant aux rayons du soleil, qui entrent dans une chambre obscure par un petit trou F, fait au volet de la fenêtre. Qu'auprès de ce trou on dispose le prisme ACB dans la chambre en sorte, que les rayons du soleil en passant par le prisme représentent, ou sur la muraille opposée, ou sur le plafond en haut, le spectre coloré aussi distinctement qu'il est possible. Dans ce spectre, qu'on distingue soigneusement les deux extrémités S & s, dont la supérieure S, qui est violette, est formée par les rayons les plus réfrangibles, qui viennent du bord inférieur du soleil, & qui entrent dans la chambre obscure par le bord inférieur du trou F, à quoi il est bon de faire attention, quand même le trou seroit extrêmement petit. Or le bord inférieur du spectre s est formé par les rayons les moins réfrangibles, ou bien les rouges, qui partent du bord supérieur du soleil & qui frisent le trou F en haut. Ainsi, pour trouver la réfraction des rayons violets, ou les plus réfrangibles, il faut comparer le rayon sortant RS avec les rayons du bord inférieur du soleil, & mesurer exactement, tant l'angle de l'entrée $AQP = p$, que celui de la sortie $BRS = s$, l'angle du prisme $ACB = \gamma$ étant déjà supposé connu; alors la raison de réfraction de ces rayons, en passant de l'air dans le verre, sera $= n : 1$, en sorte que,

$$n = \frac{\sqrt{(\cos p^2 + \cos s^2 + 2 \cos \gamma \cos p \cos s)}}{\sin \gamma}.$$



De la même manière on déterminera la réfraction des rayons rouges, ou les moins réfrangibles, en comparant le rayon rs avec ceux des rayons incidens qui viennent du bord supérieur du soleil. Que cette raison soit trouvée $= n' : 1$, & la réfraction moyenne sera en raison de $\frac{n + n'}{2} : 1$.

Pour la dispersion des couleurs, elle est parfaitement déterminée par le rapport des nombres n & n' , sans avoir besoin de la comparer avec celle du verre commun, comme ont fait Mrs. Dollond & Zeiher.

Fig. 3.

10. Le morceau de verre que Mr. Zeiher a envoyé, est assez grand pour en former un prisme ou triangle ACD , de la grandeur représentée dans la fig. 3, où selon une certaine échelle les côtés sont $AC = 400$, $BC = 350$ & $AB = 432\frac{1}{8}$, d'où l'angle ACB devient précisément de 70° , & les autres $ABC = 60^\circ, 26', 19'$ & $BAC = 49^\circ, 33', 41''$: or l'épaisseur de ce prisme pourra être 60 parties de la même échelle, qui est bien suffisante pour les expériences. Les côtés du triangle pourroient bien être plus petits, vu qu'un petit espace auprès de la pointe C suffiroit pour y faire passer les rayons; mais, puisque tout revient à déterminer exactement les angles que les rayons entrans & sortans font avec les deux faces AC & BC , un petit triangle seroit peu propre à ce dessein, & partant je voudrois le faire aussi grand que le morceau envoyé le permet, afin qu'il soit d'autant plus aisé d'en prolonger les côtés, pour y rapporter ensuite les angles, qu'il faut mesurer exactement. Pour cet effet, il sera bon d'enchasser ce prisme en sorte qu'on le puisse non seulement fixer dans une situation quelconque, que les expériences exigent, mais que le châssis même serve à déterminer les angles dont on a besoin. Le prisme sera donc enfermé dans un châssis ACB , dont les côtés AC & BC se trouvent parfaitement dans la direction des deux faces du prisme qui forment l'angle C . Au côté CB , à une distance aussi grande que les circonstances le permettent, je voudrois joindre à angles droits un autre châssis léger BD , pour le couvrir d'une tranche de papier huilé, afin que le spectre y puisse être représenté; de C en D

j'atta-

Fig. 4.



j'attacherois une regle CD, tant pour servir d'appui, que pour recevoir un pendule BG suspendu en B, dont l'interfection H servira à connoître l'inclinaison du côté BC, & partant aussi celle du côté AC. En C la machine reposera sur un trépié, où il faut qu'on la puisse affermir par une vis: cependant il sera aussi nécessaire de pratiquer quelque soutien à l'extrémité D, afin que la machine puisse être bien fixée dans toute situation.

11. Mais, avant que d'affermir le prisme dans le chassis, il faut s'assurer avec toute la précision possible de l'angle du prisme ACB. Pour cet effet il est nécessaire que les deux côtés du prisme soient paralleles entr'eux, ou bien son épaisseur partout la même, & que les trois faces du prisme AC, BC & AB, soient perpendiculaires aux côtés. S'il se trouvoit que l'angle ACB fût plus grand que 70° , il faudroit absolument le faire plus petit, pour que les expériences ne viennent pas à manquer, en cas que la réfraction moyenne fût un peu plus petite que je n'ai supposé; & par cette raison, il sera même bon de donner audit angle quelques degrés de moins. Je serois donc d'avis de former le triangle ABC en sorte qu'un de ses angles, comme C, fût de 68° , & un autre de 64° , pour pouvoir se servir ou de l'un ou de l'autre dans les expériences. Ensuite le chassis doit être tel, que la section du milieu passe par le milieu du prisme, & qu'elle soit perpendiculaire aux faces du prisme; car alors, quand le spectre tombe sur la ligne BD, on est assuré que les rayons du soleil passent aussi par le milieu du prisme. Pour faire les expériences dans la chambre obscure, puisqu'on y peut voir le trait lumineux des rayons solaires PFQ, il sera aisé de disposer le chassis en sorte, que les rayons tombent sur la face AC sous un assez petit angle de 10° ou 15° , & alors on tournera la machine horizontalement jusqu'à ce que le spectre tombe sur la bande du papier huilé BD, comme en Ss. Quand on sera content de la représentation, on fixera toute la machine en cet état, & on marquera les deux extrémités du spectre S & s, de même que les deux points R & r sur le prisme, que la lumiere des rayons rendra visibles. En même tems, on observera la hauteur du soleil, dont le diametre



apparent peut être regardé comme connu, & on marquera sur la regle CD l'interfection H du pendule BG: par-là on trouvera aisément tous les angles dont on a besoin pour calculer la raison de réfraction des rayons, tant les plus que les moins réfrangibles, par le moyen de la formule donnée ci-dessus.

12. Pour donner quelque idée du succès de ces expériences, supposons le verre du prisme tel, que la réfraction moyenne soit 1.66:1, la plus grande 1.68:1, & la plus petite 1.64:1, & que l'angle du prisme ACB soit de 69° . Ensuite, les rayons du centre du soleil tombent sur la face AC sous un angle de $12^\circ, 30'$, le diamètre du soleil étant $32'$, & les rayons du bord inférieur du soleil y tomberont sous un angle de $12^\circ, 46'$, qui étant supposés les plus réfrangibles pour trouver l'extrémité violette du spectre S, nous aurons $n = 1,68$, & $p = 12^\circ, 46'$, d'où nous tirons, $l \cos q = 9,7638192$, & $q = 54^\circ, 30', 45''$; donc $r = 56^\circ, 29', 45''$, & de là $l \cos s = 9,9673419$, & $s = 21^\circ, 57', 30'' = \text{BRS}$. De la même manière, pour l'autre extrémité rouge s, la raison de réfraction étant 1,64:1, il faut considérer les rayons les moins réfrangibles qui viennent du bord supérieur du soleil, d'où nous aurons $n = 1,64$ & $p = 12^\circ, 14'$, & partant $l \cos q = 9,7751809$; donc $q = 53^\circ, 25', 20''$ & $r = 57^\circ, 34', 40''$, de là $l \cos s = 9,9441335$, & $s = 28^\circ, 26', 35'' = \text{sCB}$. Pour la grandeur du spectre Ss, elle dépend de la distance BR, laquelle étant supposée de 50 pouces, puisqu'on peut bien négliger le petit intervalle Rr, on aura sur le bras BD, l'espace BS = 20,159 pouces & Bs = 27,083, de sorte que la longueur du spectre Ss sera presque de 7 pouces. Donc, si l'expérience montrait le même Ss pour la même inclinaison des rayons du soleil sur la face du prisme, on en trouveroit réciproquement la même réfraction du verre que je viens de supposer. Par le moyen d'une telle machine, il est aussi fort aisé de faire en peu de tems plusieurs expériences différentes, en changeant tant soit peu la situation du prisme par rapport aux rayons incidens; & tirant ensuite de chacune les conclusions selon la regle prescrite, leur accord nous fournira une parfaite certitude sur la véritable réfraction du verre proposé.

Fig. 1.

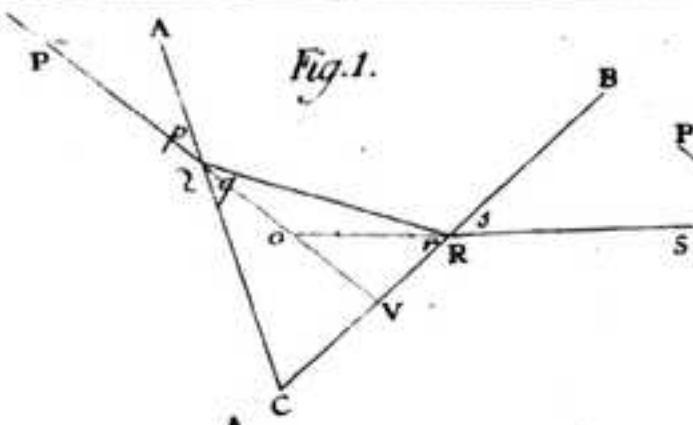


Fig. 2.

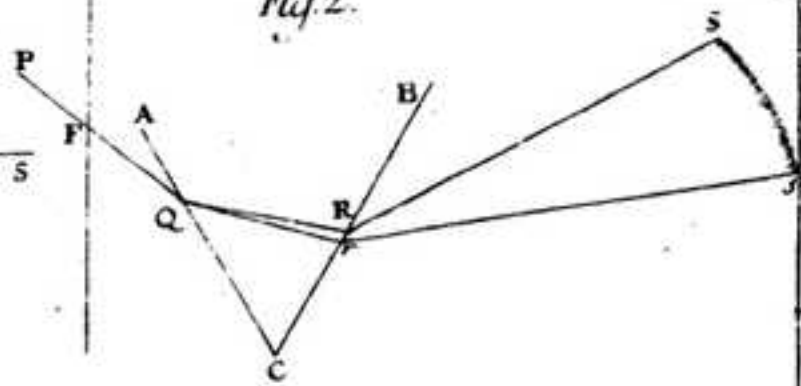


Fig. 3.

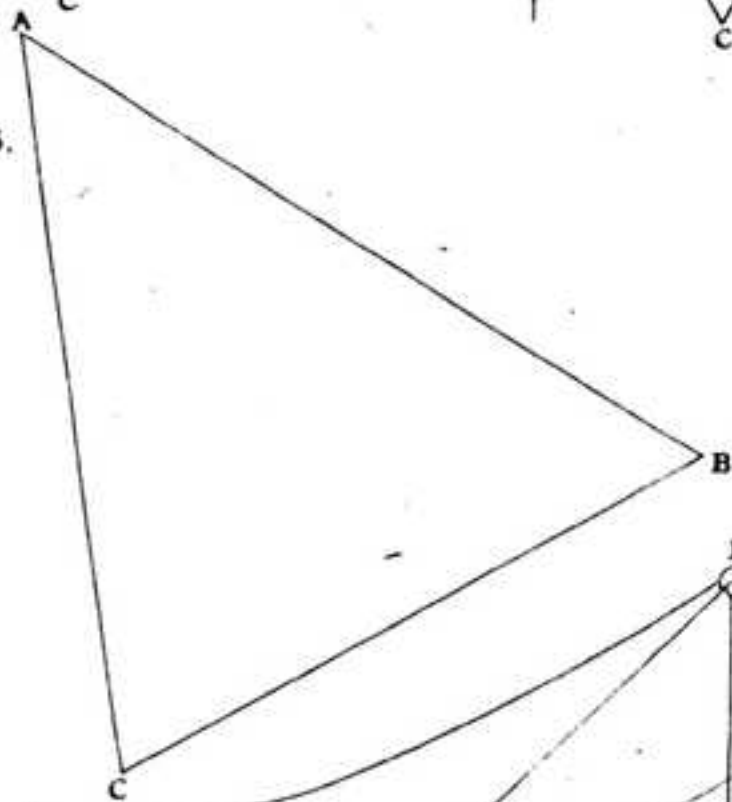


Fig. 4.

