1768

Détermination du champ apparent que découvrent tant les télescopes que les microscopes

Leonhard Euler

DÉTERMINATION

DU

CHAMP APPARENT QUE DÉCOUVRENT,

TANT LES TÉLESCOPES QUE LES MICROSCOPES.

PAR M. L. EULER.

I.

Les Téleſcopes & Microſcopes découvrent à la fois un eſpace circulaire, qu'on nomme leur champ apparent, & qu'on meſure par le demi-diametre dudit eſpace circulaire. Il y a pourtant une différence dans la meſure de ce champ, lorsqu'il s'agit des Téleſcopes & des Microſcopes. Dans ces derniers inſtrumens on meſure la quantité de la partie de l'objet, qu'on découvre à la fois en exprimant ſon demi-diametre en pouces & en parties de pouce: pendant que pour les Téleſcopes on meſure l'arc du Ciel, que le champ apparent renferme, en exprimant ſon demi-diametre par dégrés & minutes, comme il eſt de coûtume de faire dans l'Aſtronomie. Cependant l'une & l'autre maniere peut être compriſe ſous une même meſure: car, en ſuppoſant la diſtance des objets $= a$, & le demi-diametre de l'eſpace circulaire auquel s'étend la vûe, $= e$, cette quantité e donne le demi-diametre du champ apparent pour les Microſcopes: or la fraction $\frac{e}{a}$ donne celui pour les Téleſcopes.

2. La recherche du champ apparent renferme auſſi celle du lieu le plus propre pour l'oeil; qui eſt un point dans l'axe de l'inſtrument, d'où l'on découvre le plus grand champ, de ſorte que ſi l'oeil étoit placé hors de cet endroit, il verroit un moindre eſpace. Ainſi ces

ces deux recherches ſont tellement liées entr'elles, qu'on ne ſauroit déterminer le plus grand champ apparent, ſans aſſigner à l'oeil le lieu néceſſaire pour voir ce champ tout entier. Je vais donc déterminer l'un & l'autre, ſans aucune diſtinction tant pour les Téleſcopes que les Microſcopes, afin qu'on puiſſe enſuite appliquer le réſultat de mes recherches à l'une & à l'autre eſpece de ces inſtrumens. Puiſqu'un ſeul verre ne limite pas le champ apparent, je commencerai d'abord par les inſtrumens qui ſont compoſés de deux verres.

PROBLEME I.

3. *L'inſtrument dioptrique étant compoſé de deux verres* PP *&* QQ, *rangés ſur le même axe* EO, *trouver le champ apparent & le lieu de l'oeil* O.

SOLUTION.

Planche VII. Fig. 1. Soit $Ee = e$ le demi-diametre de l'eſpace viſible, & Ff ſon image préſentée par le premier verre PP. Nommons les diſtances: $EA = a$, $AF = \alpha$, $FB = b$, & $BO = k$; ſoit de plus la diſtance de foyer du verre $PP = p$, & du verre $QQ = q$, & l'on aura

$$p = \frac{a\alpha}{a + \alpha}, \ \& \ q = b; \ \& \ Ff = \frac{\alpha}{a} e.$$

Cela poſé j'obſerve que l'ouverture du verre objectif PP, ne contribue rien au champ apparent; car quoiqu'un point de l'objet au delà de e puiſſe être vu par des rayons qui ne paſſent pas par le centre A du verre objectif, il paroitra plus obſcurément, & par cette raiſon je n'étens le champ apparent que juſqu'à ce point e, qui eſt le dernier de ceux qu'on peut appercevoir par des rayons qui paſſent par le milieu A du verre objectif. Je regarderai donc ici l'ouverture du verre objectif PP, comme infiniment petite, mais pour le verre oculaire QQ, puiſque ſon ouverture dépend de ſa diſtance de foyer, j'en marquerai le demi-diametre par θq, qui ſera donc $= \theta b$. Le rayon donc qui paſſe du point e, par le milieu A du verre objectif, rencontrera le

verre

verre oculaire en Q de ſorte que $a : e = \alpha + b : BQ$, donc $BQ = \frac{\alpha + b}{a} e$; mais, ſi e eſt le dernier point de l'objet qui puiſſe être vu, il faut que BQ ſoit égal au demi-diametre de l'ouverture du verre QQ, qui eſt $= \theta b$, d'où nous trouvons le demi-diametre du champ apparent:

$$e = \frac{\theta a b}{\alpha + b}, \ \& \ \frac{e}{a} = \frac{\theta b}{\alpha + b}.$$

Mais le verre QQ repréſentera ce point dans la droite Bf à une diſtance infinie, & le rayon qui en eſt tranſmis, paſſant par le point Q, ſera parallele à la droite Bf, & rencontrera l'axe en O, de ſorte que $Ff : BF = BQ : BO$, d'où l'on tire $BO = BQ . \frac{ab}{\alpha e} = \frac{(\alpha + \beta) b}{\alpha}$.

Donc, pour que l'oeil reçoive ce rayon, puiſqu'il doit être placé dans l'axe BO derriere le verre oculaire QQ, ſon lieu ſera au point O, & partant ſa diſtance derriere le verre oculaire $BO = k = \frac{(\alpha + b) b}{\alpha}$, ou $\frac{k}{b} = \frac{\alpha + b}{\alpha}$.

PROBLEME II.

4. *L'inſtrument dioptrique étant compoſé de trois verres* PP, QQ *&* RR, *rangés ſur le même axe* EO, *trouver le champ apparent & le lieu de l'oeil* O. Fig 1.

SOLUTION.

Soit $Ee = e$ le demi-diametre viſible de l'objet, Ff ſa premiere image, & Gg la ſeconde. Nommons les diſtances:

$EA = a$; $AF = \alpha$; $BF = b$; $BG = \beta$; $GC = c$ & $CO = k$,

& de là nous aurons pour la grandeur des images:

$$Ff = \frac{\alpha}{a} e, \ \& \ Gg = \frac{\alpha \beta}{a b} e.$$

Soient de plus les distances de foyer des verres PP $= p$; QQ $= q$, & RR $= r$, & on aura

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta},\ \&\ r = c.$$

Que l'ouverture du verre objectif PP soit regardée comme évanouissante, mais soit le demi-diametre de l'ouverture du verre QQ $= \theta q$ $= \frac{\theta b\beta}{b+\beta}$, & du verre RR $= \theta' r = \theta' c$. Maintenant le rayon $eAfb$ du point e de l'objet rencontrera le second verre en b, de sorte que $Bb = \frac{\alpha+b}{a}e$, de là il passera par le point g & tombera sur le troisieme verre en R. Pour trouver ce point, on a cette proportion BG : $Bb + Gg =$ BC : $Bb +$ CK, d'où l'on tire:

$$CR + Bb = \frac{\beta+c}{\beta}(Bb + Gg),\ \text{ou bien}$$

$$CR = \frac{e}{\beta}\cdot\frac{\alpha+b}{\alpha}e + \frac{\beta+c}{\beta}\cdot\frac{\alpha\beta}{ab}e = \left(\frac{c(\alpha+b)}{\beta} + \frac{\alpha(\beta+c)}{b}\right)\cdot\frac{e}{a}.$$

Mais, si e est le dernier point qui puisse être vu, il faut qu'il soit ou $Bb = \frac{\theta b\beta}{b+\beta}$, ou CR $= \theta' c$; de ces deux équations on tirera deux valeurs pour e, lesquelles, si elles sont inégales, ce sera la plus petite qui donnera la juste valeur pour e, nous aurons donc pour le demi-diametre du champ apparent ces deux déterminations.

$$\text{I.}\quad \frac{e}{a}(\alpha+b) = \frac{\theta b\beta}{b+\beta}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{e}{a}\left(\frac{c(\alpha+b)}{\beta} + \frac{\alpha(\beta+c)}{b}\right) = \theta' c,$$

dont la plus petite doit être prise pour la juste valeur de e.

En-

Enſuite, le point g tenant lieu de l'objet par rapport au verre RR, ſera repréſenté dans la droite Cg prolongée à l'infini; donc le rayon qui paſſe par R étant parallele à Cg, concourra avec l'axe en O, de ſorte que

$$Gg : CG = CR : CO, \text{ donc } CO = \frac{abc}{\alpha\beta e} \cdot CR,$$

d'où nous tirons pour le lieu de l'oeil O

$$CO = k = \frac{bc}{\alpha\beta}\left(\frac{c(\alpha + b)}{\beta} + \frac{\alpha(\beta + c)}{b}\right).$$

PROBLEME III.

5. *L'inſtrument dioptrique étant compoſé de quatre verres* PP, QQ, RR *&* SS, *rangés ſur le même axe* EO, *trouver le champ apparent & le lieu de l'oeil.* Fig. 3.

SOLUTION.

Soit $Ee = e$, le demi-diametre viſible de l'objet: & Ff, Gg, Hh, ſes images ſucceſſivement repréſentées par les verres. Nommons les diſtances:

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d,$$

$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma, \ \&\ DO = k,$$

& la grandeur des images ſera

$$Ff = \frac{\alpha}{a}e;\ Gg = \frac{\alpha\beta}{ab}e;\ Hh = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}e.$$

enſuite les diſtances de foyer

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma}, \ \&\ s = d.$$

Poſons le demi-diametre de l'ouverture des verres

$$BQ = \theta q = \frac{\theta b\beta}{b+\beta};\ CR = \theta' r = \frac{\theta' c\gamma}{c+\gamma};\ DS = \theta'' s = \theta'' d,$$

&

& considérant le rayon eAb, qui par la réfraction est continué en bc, cS, nous aurons comme auparavant

$$Bb = \frac{e}{a}(\alpha + b);\ \&\ Cc = \frac{e}{a}\left(\frac{c(\alpha + b)}{\beta} + \frac{\alpha(\beta + c)}{b}\right),$$

& pour trouver DS cette proportion:

$$CH : Cc + Hh = CD : Cc + DS, \text{ d'où résulte}$$

$$DS = \frac{DH}{CH} . Cc + \frac{CD}{CH} . Hh, \text{ \& partant}$$

$$DS = \frac{e}{a}\left(\frac{cd}{\beta\gamma}(\alpha + b) + \frac{\alpha d}{b\gamma}(\beta + c) + \frac{\alpha\beta}{bc}(\gamma + d)\right).$$

Nous aurons donc, pour trouver le demi-diametre du champ apparent e, ces trois équations:

$$\text{I. } \frac{e}{a}(\alpha + b) = \frac{\theta b\beta}{b + \beta}.$$

$$\text{II. } \frac{e}{a}\left(\frac{c}{\beta}(\alpha + b) + \frac{\alpha}{b}(\beta + c)\right) = \frac{\theta' c\gamma}{c + \gamma}.$$

$$\text{III. } \frac{e}{a}\left(\frac{cd}{\beta\gamma}(\alpha + b) + \frac{\alpha d}{b\gamma}(\beta + c) + \frac{\alpha\beta}{bc}(\gamma + d)\right) = \theta'' d.$$

Or, des trois valeurs de e qu'on tire de ces trois équations, ce n'est que la plus petite qui aura lieu.

Pour le lieu de l'oeil O, la ligne SO étant parallele à Dh, nous aurons $Hh : HD = DS : DO$, & partant $DO = \frac{HD}{Hh} . DS = \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma} . \frac{a}{e} . DS$, d'où nous tirons:

$$DO = k = \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{cd}{\beta\gamma}(\alpha + b) + \frac{\alpha d}{\beta\gamma}(\beta + c) + \frac{\alpha\beta}{bc}(\gamma + d)\right).$$

PRO-

PROBLEME IV.

6. *L'instrument dioptrique étant composé de cinq verres* PP, QQ, RR, SS & TT, *rangés sur le même axe* EO, *trouver le champ apparent & le lieu de l'oeil* O. Fig. 4.

SOLUTION.

Soit $Ee = e$ le demi-diametre visible de l'objet; & Ff, Gg, Hh & Ii, les images présentées successivement par les verres. Posons donc les distances:

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d;\ IE = e,$$
$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma;\ DI = \delta,\ \&\ EO = k,$$

où il ne faut pas confondre la distance $IE = e$ avec l'espace $Ee = e$. De là la grandeur des images sera:

$$Ff = \alpha \cdot \frac{e}{a};\ Gg = \frac{\alpha\beta}{b} \cdot \frac{e}{a};\ Hh = \frac{\alpha\beta\gamma}{bc} \cdot \frac{e}{a};\ Ii = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd} \cdot \frac{e}{a}.$$

Ensuite, pour les distances de foyer des verres, nous avons:

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ s = \frac{d\delta}{d+\delta}\ \&\ t = e.$$

Or, pour les demi-diametres de l'ouverture de chacun, posons:

$$BQ = \theta q = \frac{\theta b\beta}{b+\beta};\ CR = \theta' r = \frac{\theta' c\gamma}{c+\gamma};\ DS = \theta'' s = \frac{\theta'' d\delta}{d+\delta};\ ET = \theta''' t = \theta''' e.$$

Cela posé, nous aurons pour les endroits, où le rayon du point e passe par chaque verre comme auparavant:

$$Bb = \frac{e}{a}(\alpha + b);\ Cc = \frac{e}{a}\left(\frac{c}{\beta}(\alpha + b) + \frac{\alpha}{b}(\beta + c)\right),$$

$$Dd = \frac{e}{a}\left(\frac{cd}{\beta\gamma}(\alpha + b) + \frac{\alpha d}{b\gamma}(\beta + c) + \frac{\alpha\beta}{bc}(\gamma + d)\right).$$

Or, pour le dernier verre, nous trouvons $ET = \frac{EI}{DI} \cdot Dd + \frac{DE}{DI} \cdot Ii$,

& partant

$$\mathrm{ET} = \frac{e}{a}\left(\frac{cde}{\beta\gamma\delta}(\alpha+b) + \frac{\alpha de}{b\gamma\delta}(\beta+c) + \frac{\alpha\beta e}{bc\delta}(\gamma+d) + \frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}(\delta+e)\right),$$

d'où nous tirons ces quatre équations pour trouver le demi-diametre du champ apparent e:

$$\text{I.}\quad \frac{e}{a}(\alpha + b) = \frac{\theta b \beta}{b + \beta}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{e}{a}\left(\frac{c}{\beta}(\alpha + b) + \frac{\alpha}{b}(\beta + c)\right) = \frac{\theta' c \gamma}{c + \gamma}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{e}{a}\left(\frac{cd}{\beta\gamma}(\alpha + b) + \frac{\alpha d}{b\gamma}(\beta + c) + \frac{\alpha\beta}{bc}(\gamma + d)\right) = \frac{\theta'' d\delta}{d + \delta}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{e}{a}\left(\frac{cde}{\beta\gamma\delta}(\alpha+b) + \frac{\alpha de}{b\gamma\delta}(\beta+c) + \frac{\alpha\beta e}{bc\delta}(\gamma+d) + \frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}(\delta+e)\right) = \theta''' e.$$

Or, de ces quatre équations il n'y a que celle qui donne pour e la plus petite valeur, qui aura lieu.

Enfin, pour le lieu de l'oeil O, on trouvera

$$k = \frac{bcde}{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{cde}{\beta\gamma\delta}(\alpha+b) + \frac{\alpha de}{b\gamma\delta}(\beta+c) + \frac{\alpha\beta e}{bc\delta}(\gamma+d) + \frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}(\delta+e)\right).$$

PROBLEME V.

7. *L'Instrument dioptrique étant composé d'autant de verres qu'on voudra, tous rangés sur le même axe* EO, *trouver tant le champ apparent, que le lieu de l'oeil* O.

SOLUTION.

Posons le demi-diametre de l'espace visible $Ee = z$, & supposant les images, qui en sont successivement représentées en Ff, Gg, Hh &c. soient les distances

$\mathrm{EA} = a$; $\mathrm{FB} = b$; $\mathrm{GC} = c$; $\mathrm{HD} = d$; $\mathrm{IE} = e$ &c.

$\mathrm{AF} = \alpha$; $\mathrm{BG} = \beta$; $\mathrm{CH} = \gamma$; $\mathrm{DI} = \delta$; $\mathrm{EK} = \varepsilon$ &c.

&

& la distance de l'oeil depuis le dernier verre soit $= k$. Ensuite, soient p, q, r, s, t &c. les distances de foyer des verres PP, QQ, RR, SS &c. & les demi-diametres de leurs ouvertures:

$$x;\ \theta q;\ \theta' r;\ \theta'' s;\ \theta''' t \text{ &c.}$$

dont celui du premier verre x n'entre pas ici en considération: & on aura

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ s = \frac{d\delta}{d+\delta};\ t = \frac{e\varepsilon}{e+\varepsilon} \text{ &c.}$$

Posons maintenant pour abréger:

$$\mathfrak{a} = \alpha + b,$$

$$\mathfrak{b} = \beta + c + \frac{bc}{\alpha\beta}\mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{c} = \gamma + d + \frac{cd}{\beta\gamma}\mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{d} = \delta + e + \frac{de}{\gamma\delta}\mathfrak{c},$$

&c.

& les verres, excepté l'objectif, fourniront les équations suivantes pour le champ apparent:

I. $\frac{z}{a}\cdot\mathfrak{a} = \frac{\theta b\beta}{b+\beta}$ ou $z = \frac{\theta b\beta}{b+\beta}\cdot\frac{a}{\mathfrak{a}}$,

II. $\frac{z}{a}\cdot\frac{\alpha}{b}\cdot\mathfrak{b} = \frac{\theta' c\gamma}{c+\gamma}$, ou $z = \frac{\theta' c\gamma}{c+\gamma}\cdot\frac{ab}{\alpha\mathfrak{b}}$,

III. $\frac{z}{a}\cdot\frac{\alpha\beta}{bc}\cdot\mathfrak{c} = \frac{\theta'' d\delta}{d+\delta}$, ou $z = \frac{\theta'' d\delta}{d+\delta}\cdot\frac{abc}{\alpha\beta\mathfrak{c}}$,

IV. $\frac{z}{a}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}\cdot\mathfrak{d} = \frac{\theta''' e\varepsilon}{e+\varepsilon}$, ou $z = \frac{\theta''' e\varepsilon}{e+\varepsilon}\cdot\frac{abcd}{\alpha\beta\gamma\mathfrak{d}}$,

& de ces valeurs de z celle qui sera la plus petite, donnera le véritable demi-diametre du champ apparent.

Or, pour la distance de l'oeil k depuis le dernier verre oculaire, il faut considérer séparément chaque nombre de verres, & il sera évident, que nous aurons

pour le cas d'un verre: $\frac{k}{a} = 0$,

pour le cas de 2 verres: $\frac{k}{b} = \frac{\mathfrak{a}}{\alpha}$,

pour le cas de 3 verres: $\frac{k}{c} = \frac{\mathfrak{b}}{\beta}$,

pour le cas de 4 verres: $\frac{k}{d} = \frac{\mathfrak{c}}{\gamma}$,

pour le cas de 5 verres: $\frac{k}{e} = \frac{\mathfrak{d}}{\delta}$,

pour le cas de 6 verres: $\frac{k}{f} = \frac{\mathfrak{e}}{\varepsilon}$.

Corollaire.

8. Les valeurs de ces lettres allemandes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ &c. seront donc:

$$\mathfrak{a} = \alpha + b,$$

$$\mathfrak{b} = \beta + c + \frac{bc}{\alpha\beta}(\alpha + b),$$

$$\mathfrak{c} = \gamma + d + \frac{cd}{\beta\gamma}(\beta + c) + \frac{bccd}{\alpha\beta\beta\gamma}\cdot(\alpha + b),$$

$$\mathfrak{d} = \delta + e + \frac{de}{\gamma\delta}(\gamma + d) + \frac{cdde}{\beta\gamma\gamma\delta}(\beta + c) + \frac{bccdde}{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta}(\alpha + b),$$

&c.

REG-

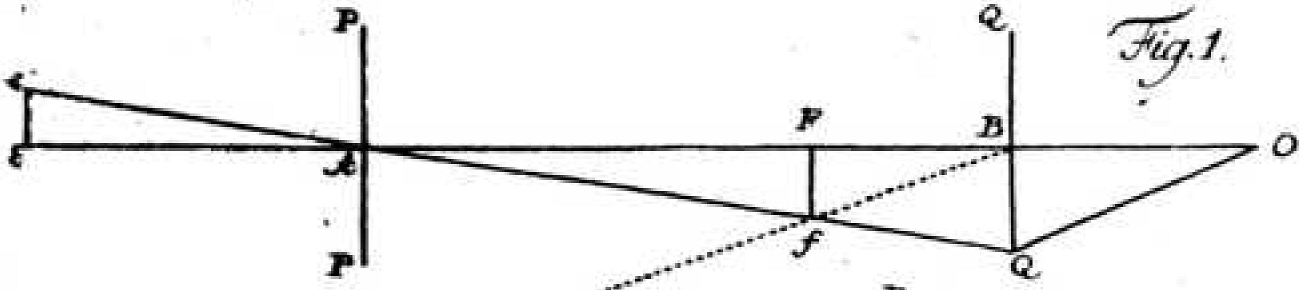

Fig. 1.

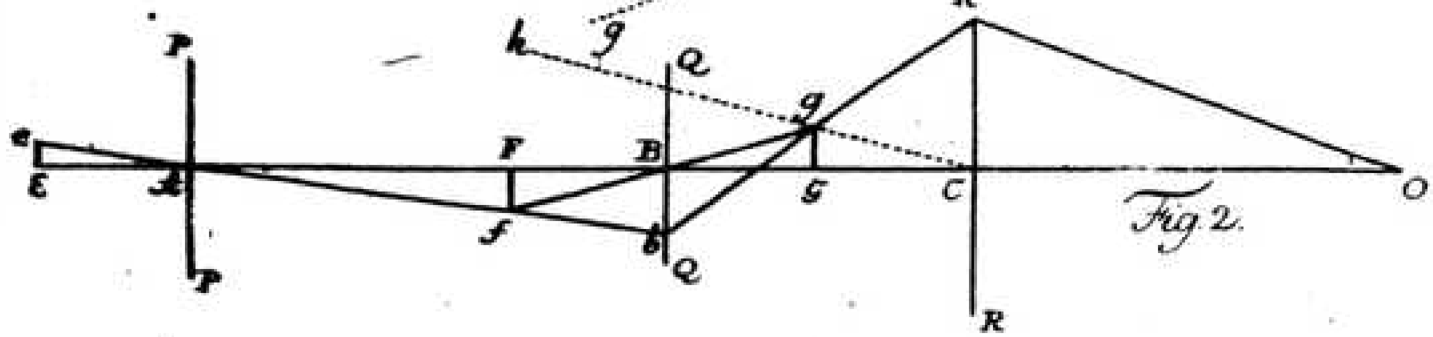

Fig. 2.

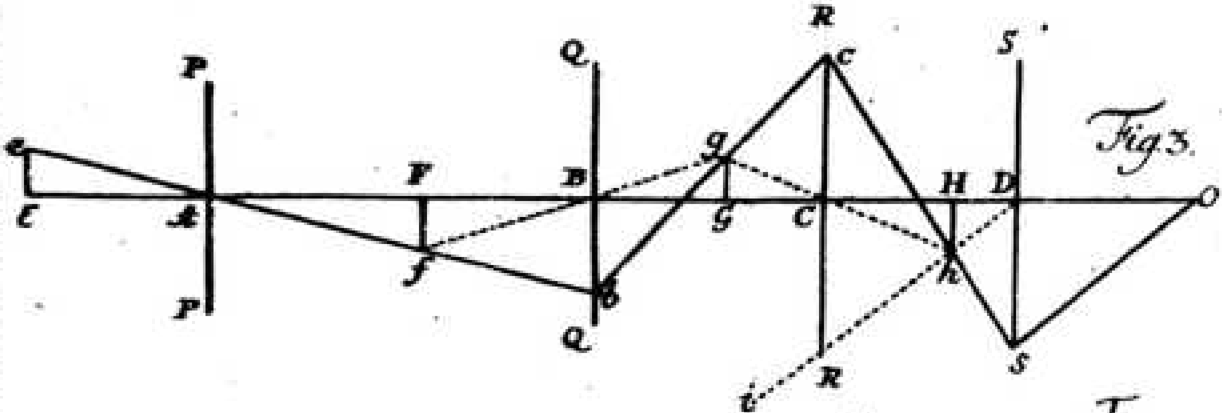

Fig. 3.

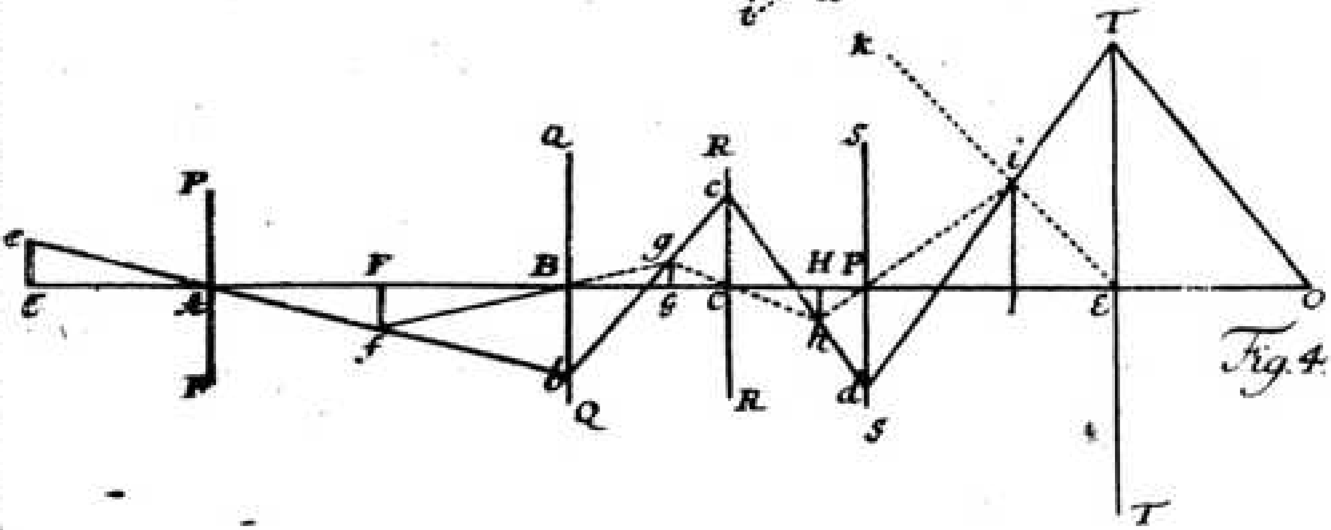

Fig. 4.

Mem. de l'Acad. 1761. Pl. VII. pag. 200.