



1768

Recherches sur les moyens de diminuer ou de réduire même à rien la confusion causée par l'ouverture des verres

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

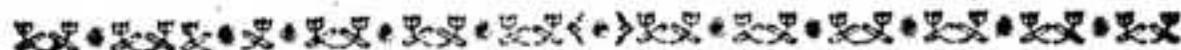
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur les moyens de diminuer ou de réduire même à rien la confusion causée par l'ouverture des verres" (1768). *Euler Archive - All Works*. 354.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/354>



RECHERCHES SUR LES MOYENS

D E

DIMINUER OU DE RÉDUIRE MEME A' RIEN
LA CONFUSION CAUSÉE PAR L'OUVERTURE
DES VERRES.

PAR M. EULER.

I.

Dans mon Mémoire précédent sur la confusion des verres dioptriques causée par leur ouverture, les premières recherches rouloient sur l'espace de diffusion FG , qui est produit par un verre quelconque PP , qui représente en F l'image du point lumineux E par les rayons, qui passent par le milieu du verre. J'y ai considéré d'abord comme données tant la distance du point lumineux E devant le verre $AE = a$, que la distance de l'image principale F derrière le verre $BF = \alpha$: ensuite j'ai remarqué que cette représentation peut être produite par une infinité de verres, dont j'ai déterminé la figure des deux faces PAP & FBP , en sorte que posant le rayon de courbure de la face antérieure $PA'P' = f$, & celui de la face postérieure $PBP = g$, ces deux rayons doivent avoir les grandeurs suivantes en négligeant l'épaisseur du verre

Planchie
Fig. 1.

$$f = \frac{(n-1) a \alpha}{v (a + \alpha)} \quad \& \quad g = \frac{(n-1) a \alpha}{\mu (a + \alpha)},$$

où n est $= \frac{c}{b}$, & μ & v sont deux nombres pris à volonté, en sorte que $\mu + v = 1$.

T 2

2. En-



2. Ensuite, pour trouver l'espace de diffusion FG, que ce verre produit à cause de son ouverture, je pose le demi-diamètre de son ouverture = x , & pour abrégé soit $va = \mu a = A$. Cela posé, j'ai trouvé que l'espace de diffusion sera

$$FG = \frac{(a + \alpha) xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha} (n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)A + (n+2)A^2),$$

lequel devient le plus petit, si l'on prend $A = \frac{n(2n+1)(a-\alpha)}{2(n+2)}$,

d'où il s'en suit :

$$\mu = \frac{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)a}{2(n+2)(a+\alpha)} \quad \& \quad v = \frac{n(2n+1)a + (4+n-2nn)\alpha}{2(n+2)(a+\alpha)}.$$

Or ces valeurs étant substituées donnent

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)a + (4+n-2nn)\alpha} \quad \& \quad g = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)a}$$

& alors l'espace de diffusion le plus petit sera :

$$FG = \frac{n(a+\alpha)xx}{8(n+2)(n-1)^2 a^3 \alpha} ((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha).$$

3. Il n'est donc pas possible de rendre cet espace de diffusion plus petit, que lorsqu'on donne aux faces du verre les courbures que je viens d'indiquer; & puisqu'il est très important, dans tous les instrumens dioptriques, de donner aux verres la figure qui produise le moindre espace de diffusion par rapport à leur ouverture, cette figure que j'ai assignée, sera celle qu'on doit tâcher de donner à tous les verres. Mais on peut combiner deux ou plusieurs verres en sorte que, tant dans la Théorie que dans la pratique, on les puisse regarder comme un verre simple, pourvu que les épaisseurs de ces verres prises ensemble soient encore assez petites, pour qu'on les puisse négliger à l'égard des autres quantités qui entrent dans le calcul. Je me propose donc de chercher l'espace de diffusion qui convient à de tels verres composés

lés, pour voir s'il n'est pas possible de joindre en sorte deux ou plusieurs verres, que l'espace de diffusion devienne encore plus petit, que dans le cas d'un verre simple; ce qui fourniroit sans doute les moyens les plus surs pour porter les verres à un plus haut degré de perfection.

4. Or je ferai voir, qu'en combinant deux ou plusieurs verres ensemble, on peut non seulement très considérablement diminuer l'espace de diffusion, mais aussi le réduire souvent absolument à rien. Pour entreprendre cette recherche, je commencerai par la combinaison de deux verres, & leur supposant d'abord une figure quelconque, pour satisfaire aux deux distances proposées tant du point lumineux E que de son image principale, je chercherai l'espace de diffusion; en suite j'enseignerai, quelles figures on doit donner à ces deux verres, pour que l'espace de diffusion devienne le plus petit, d'où je tirerai la construction des verres composés de deux, qui sera la plus parfaite. Ensuite je traiterai de la même manière les verres qui seront composés de trois ou quatre, pour en tirer tous les avantages pour la construction tant des Télescopes que des Microscopes.

PROBLEME I.

5. *Lorsque deux verres étant joints ensemble en A représentent le point lumineux E, par l'image principale en G, trouver l'espace de diffusion qui répond à leur ouverture.* Fig. 5.

SOLUTION.

Considérons d'abord les deux verres comme éloignés l'un de l'autre de l'intervalle AB, pour avoir le cas traité dans le septième problème du Mémoire précédent, & posant les distances

$$EA = a, AF = \alpha, FB = b, \text{ \& } AG = \beta,$$

nous aurons la distance de foyer du premier verre $p = \frac{a\alpha}{a + \alpha}$, &

celle de l'autre $q = \frac{b\beta}{b + \beta}$, & l'espace de diffusion



$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot \frac{xx}{aap} (Naa - \mathcal{E}.a + Maa) + \frac{xx}{a\alpha q} (N'bb - \mathcal{E}'l\beta + M'\beta\beta).$$

Mais introduisons plutôt la forme employée cy-dessus, & soyent f, g , les rayons des faces du premier verre PP, & f', g' , ceux de l'autre QQ; de sorte que nous ayons:

$$f = \frac{(n-1) a\alpha}{v(a+\alpha)}; \quad g = \frac{(n-1) a\alpha}{\mu(a+\alpha)},$$

$$f' = \frac{(n-1) l\beta}{v'(b+\beta)}; \quad g' = \frac{(n-1) l\beta}{\mu'(b+\beta)},$$

prenant $\mu + v = 1$ & $\mu' + v' = 1$. Soit ensuite $va - \mu\alpha = A$, & $v'b - \mu'l = B$, & marquant par x le demi-diametre de l'ouverture du verre PP, l'espace de diffusion sera

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot \frac{(a+\alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha} (n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a+\alpha)A + (n+2)AA)$$

$$+ \frac{(b+\beta)xx}{2n(n-1)^2 a\alpha b\beta} (n^3(bb - l\beta + \beta\beta) - n(2n+1)(b-\beta)B + (n+2)BB).$$

Faisons maintenant évanouir la distance des verres $AB = \alpha + b$, & posons $b = -\alpha$, & dans ce cas l'espace de diffusion sera:

$$Gg = \frac{(a+\alpha)\beta\beta xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha^3} (n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)A + (n+2)AA)$$

$$+ \frac{(a-\beta)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \beta} (n^3(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta) + n(2n+1)(\alpha+\beta)B + (n+2)BB).$$

Les quantités qui nous sont ici prescrites, sont 1°. la distance de l'objet devant le verre $AE = a$, & la distance de l'image principale derriere le verre, qui est $= \beta$; de sorte que nous ayons encore dans le calcul trois quantités arbitraires α, A , & B , qui recevant une infinité de déterminations, il y aura une infinité de combinaisons de deux verres, qui étant posés en A. représentent l'image principale de l'objet E,



au même point G: Mais l'espace de diffusion Gg dépend principalement des valeurs arbitraires a , A , B .

COROLLAIRE 1.

6. Si l'on prenoit $a = \beta$, ou $b + \beta = 0$, le second verre deviendrait plan des deux côtés, & ne changeroit rien dans la réfraction du premier verre. Nous aurions donc le cas d'un seul verre expliqué cy-dessus, & l'espace de diffusion seroit le même que j'y ai rapporté.

COROLLAIRE 2.

7. Nous parviendrons encore au cas d'un seul verre en prenant $a = -a$; car alors le premier verre PP deviendra plan des deux côtés: & l'espace de diffusion sera déterminé par le seul verre second par la formule rapportée cy-dessus.

COROLLAIRE 3.

8. Si l'on prenoit a fort petit, il est évident que l'espace de diffusion deviendrait fort grand, puisque le cube de a se trouve dans le dénominateur. Il n'est donc pas avantageux de prendre $a < \beta$, car, quoique le second membre de notre expression devienne négatif, le premier en devient d'autant plus grand.

COROLLAIRE 4.

9. Or posons $a = \infty$, & à cause de $A = -\mu a$ & $B = -v'a$, l'expression pour l'espace de diffusion deviendra

$$Gg = \frac{\beta\beta x x}{2n(n-1)^2 a^3} (n^3 - n(2n+1)\mu + (n+2)\mu\mu),$$

$$+ \frac{x x}{2n(n-1)^2 \beta} (n^3 - n(2n+1)v' + (n+2)v'v'),$$

laquelle fera la plus petite, quand on prendra les nombres μ & v' tels, que l'un & l'autre membre séparément obtienne la plus petite valeur; puisque aucun ne sauroit devenir négatif.

PROBLEME II.

10. *Trouver la figure des deux verres, qui étant joints ensemble en A représentent l'image principale du point E en G, & qui produisent en même tems le plus petit espace de diffusion Gg.*

SOLUTION.

Ayant déterminé dans le probleme précédent en général l'espace de diffusion Gg, de quelque figure que soient les deux verres, nous n'avons qu'à considérer l'expression qui y a été trouvée. Elle est composée de deux membres, & renferme trois quantités arbitraires α , A & B, qui ne dépendent point l'une de l'autre: d'où il est d'abord clair, qu'on peut séparément chercher les valeurs de A & de B, qui rendent cette expression la plus petite. Or cette détermination nous montre que chaque verre doit séparément avoir la figure la plus avantageuse, que j'ai décrite cy-dessus. Savoir le verre PP doit avoir une telle figure, qu'il soit

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)\alpha}{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)\alpha}; \quad g = \frac{2(n-1)(n+2)\alpha}{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)\alpha}$$

$$f' = \frac{2(n-1)(n+2)\beta}{n(2n+1)\beta + (4+n-2nn)\beta}; \quad g' = \frac{2(n-1)(n+2)\beta}{n(2n+1)\beta + (4+n-2nn)\beta}$$

où il faut remarquer qu'il est $b = -\alpha$: Alors l'espace de diffusion sera exprimé en sorte

$$Gg = \frac{n(n+\alpha)\beta\beta xx}{8(n+2)(n-1)^2\alpha^3\alpha^3} ((4n-1)(\alpha+\alpha)^2 + 4(n-1)^2\alpha\alpha)$$

$$+ \frac{n(\alpha-\beta)xx}{8(n+2)(n-1)^2\alpha^3\beta} ((4n-1)(\alpha-\beta)^2 - 4(n-1)^2\alpha\beta),$$

& maintenant il s'agit encore de déterminer la quantité α en sorte que cette expression devienne la plus petite.

Pour abrégér cette formule, posons suivant le §. 47 du Mém. précédent

$$\mu =$$

$$\mu = 0,93819 \quad \& \quad \nu = 0,23269,$$

sans confondre ces lettres avec celles qui sont employées au commencement; & l'espace de diffusion sera

$$Gg = \frac{\mu\beta\beta xx (a + \alpha)}{a^3\alpha^3} ((a + \alpha)^2 + \nu a\alpha) \\ + \frac{\mu xx (\alpha - \beta)}{a^3\beta} ((b + \beta)^2 + \nu b\beta), \text{ ou}$$

$$Gg = \mu xx \left(\frac{\beta\beta(a+\alpha)^3}{a^3\alpha^3} + \frac{\nu\beta\beta(a+\alpha)}{a\alpha a\alpha} + \frac{(\alpha-\beta)^3}{a^3\beta} - \frac{\nu(\alpha-\beta)}{a\alpha} \right)$$

Il faut donc déterminer α en sorte que cette quantité développée devienne un *minimum*

$$\frac{\beta\beta}{a^3} + \frac{3\beta\beta}{a\alpha a} + \frac{3\beta\beta}{a\alpha a} + \frac{1}{\beta} - \frac{3}{\alpha} + \frac{3\beta}{a\alpha} + \nu \left(\frac{\beta\beta}{a\alpha a} + \frac{\beta\beta}{a\alpha a} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{a\alpha} \right),$$

d'où par la différentiation résulte cette équation:

$$\frac{-3\beta\beta}{a\alpha a\alpha} - \frac{6\beta\beta}{a\alpha^2} + \frac{3}{\alpha\alpha} - \frac{6\beta}{\alpha^3} + \nu \left(\frac{-\beta\beta}{a\alpha a\alpha} - \frac{2\beta\beta}{a\alpha^2} + \frac{1}{\alpha\alpha} - \frac{2\beta}{\alpha^3} \right) = 0,$$

qui étant divisée par $\nu + 3$, donne

$$\frac{1}{\alpha\alpha} \left(1 - \frac{\beta\beta}{a\alpha} \right) = \frac{2\beta}{\alpha^3} \left(1 + \frac{\beta}{a} \right), \text{ ou}$$

$$\alpha \left(1 - \frac{\beta}{a} \right) = 2\beta, \text{ de sorte que } \alpha = \frac{2a\beta}{a-\beta}.$$

De là nous aurons: $a + \alpha = \frac{a(a+\beta)}{a-\beta}$, $\alpha - \beta = \frac{\beta(a+\beta)}{a-\beta}$,

& partant $\frac{ra}{a+\alpha} = p = \frac{2a\beta}{a+\beta}$; $\frac{\alpha^3}{\alpha-\beta} = \frac{2a\beta}{a+\beta} = q$.

Or puisque $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2a}$; la quantité, par laquelle μxx est multipliée sera

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon\epsilon}{a^3} + \frac{3\epsilon}{2aa} - \frac{3\epsilon\epsilon}{2a^3} + \frac{3}{4a} - \frac{3\epsilon}{2aa} + \frac{3\epsilon\epsilon}{4a^3} + \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2\epsilon} + \frac{3}{2a} \\ & + \frac{3}{4\epsilon} - \frac{3}{2a} + \frac{3\epsilon}{4aa} \\ & + \nu \left(\frac{\epsilon}{2aa} - \frac{\epsilon\epsilon}{2a^3} + \frac{1}{4a} - \frac{\epsilon}{2aa} + \frac{\epsilon\epsilon}{4a^2} - \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2a} + \frac{\epsilon}{4aa} \right) \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$\frac{\epsilon\epsilon}{4a^3} + \frac{3\epsilon}{4aa} + \frac{1}{4\epsilon} + \frac{3}{4a} + \nu \left(\frac{1}{4a} - \frac{1}{4\epsilon} + \frac{\epsilon}{4aa} - \frac{\epsilon\epsilon}{4a^3} \right),$$

ou bien à

$$\frac{(a + \epsilon)^3}{4a^3\epsilon} - \frac{\nu (a + \epsilon) (aa - 2a\epsilon + \epsilon\epsilon)}{4a^3\epsilon},$$

& partant l'espace de diffusion sera :

$$Gg = \frac{\mu (a + \epsilon) xx}{4a^3\epsilon} ((a + \epsilon)^2 - \nu (a - \epsilon)^2).$$

Mais, puisque $(a - \epsilon)^2 = (a + \epsilon)^2 - 4a\epsilon$, il sera

$$Gg = \frac{\mu (a + \epsilon) xx}{a^3\epsilon} \left(\frac{1 - \nu}{4} (a + \epsilon)^2 + \nu a\epsilon \right).$$

Or, posant $1,62740 = \sigma$, & $0,19078 = \tau$, nous avons

$$\frac{1}{f} = \frac{\sigma}{a} + \frac{\tau}{a}; \quad \frac{1}{g} = \frac{\sigma}{a} + \frac{\tau}{a}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{\sigma}{\epsilon} - \frac{\tau}{a}; \quad \frac{1}{g'} = \frac{\sigma}{a} + \frac{\tau}{\epsilon}.$$

Donc, à cause de $\frac{1}{a} = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{2a}$, nous aurons pour les rayons des faces de nos deux verres à joindre

$$\frac{1}{f} = \frac{\sigma}{2\beta} + \frac{2\tau\sigma}{2a}; \quad \frac{1}{g} = \frac{2\sigma\tau}{2a} + \frac{\tau}{2\beta}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{2\sigma\tau}{2\beta} + \frac{\tau}{2a}; \quad \frac{1}{g'} = \frac{\sigma}{2a} + \frac{2\tau\sigma}{2\beta},$$

ou



$$\text{ou } f = \frac{2a\beta}{\sigma a + (2\tau - \sigma)\beta}; \quad g = \frac{2a\beta}{\tau a + (2\sigma - \tau)\beta};$$

$$f' = \frac{2a\beta}{\tau\beta + (2\sigma - \tau)a}; \quad g' = \frac{2a\beta}{\sigma\beta + (2\tau - \sigma)a}.$$

COROLLAIRE 1.

11. Donc, si la distance de l'objet au verre est $= a$, & la distance de l'image derrière le verre $= \alpha$, qui est nommée β dans la solution, le verre composé de deux, qui produit le moindre espace de diffusion, doit être formé en sorte qu'il soit

le rayon de la face

	antérieure	postérieure
pour le premier verre	$\frac{2a\alpha}{1,62740a - 1,24584\alpha}$	$\frac{2a\alpha}{0,19078a + 3,06402\alpha}$
pour le second verre	$\frac{2a\alpha}{0,19078\alpha + 3,06402a}$	$\frac{2a\alpha}{1,62740a - 1,24584\alpha}$

& alors, le demi-diamètre de l'ouverture étant $= x$, l'espace de diffusion sera:

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha} \left(\frac{1-v}{4} (a+\alpha)^2 + v a \alpha \right) \text{ ou puisque } v = 0,23269$$

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha} (0,19183 (a+\alpha)^2 + v a \alpha).$$

COROLLAIRE 2.

12. Mais, pour les mêmes distances a & α , si l'on n'employoit qu'un verre simple, qui produit le moindre espace de diffusion, en prenant

le rayon de la face

	antérieure	postérieure
de ce verre	$\frac{a\alpha}{1,62740a + 0,19078\alpha}$	$\frac{a\alpha}{1,62740\alpha + 0,19078a}$

V 2 l'ef-



l'espace de diffusion sera

$$\frac{\mu (a + \alpha) x x}{a^3 \alpha} ((a + \alpha)^2 + v a \alpha),$$

d'où l'on voit qu'en employant le verre double, la confusion est très considérablement diminuée.

COROLLAIRE 3.

13. Il est remarquable que les deux verres, qui joints ensemble produisent la moindre confusion, doivent avoir la même distance de foyer, qui est double de celle qui convient à un verre simple, qui représenteroit l'objet au même endroit.

SCHOLIE I.

14. Pour rendre la recherche du *minimum* plus aisée, il sera à propos de comparer d'abord ensemble les distances de nos deux verres.

Pofons donc $\frac{a \alpha}{a + \alpha} = \frac{u \alpha \beta}{\alpha - \beta}$, & nous aurons $\alpha = \frac{(1+u) a \beta}{a - u \beta}$;

de là $a + \alpha = \frac{a (a + \beta)}{a - u \beta}$; d'où il suit $\frac{a \alpha}{a + \alpha} = \frac{(1+u) a \beta}{a + \beta}$

& $\frac{\alpha \beta}{\alpha - \beta} = \frac{(1+u) a \beta}{u (a + \beta)}$.

Or l'expression pour l'espace de diffusion étant réduite à cette forme

$$+ \frac{\mu \beta \beta x x (a + \alpha)}{u \alpha} \left(\frac{(a + \alpha)^2}{u a \alpha} + \frac{v}{a \alpha} \right),$$

$$+ \frac{\mu \beta \beta x x (a - \beta)}{a \beta} \left(\frac{(a - \beta)^2}{\alpha a \beta \beta} - \frac{v}{a \beta} \right),$$

notre substitution donne

$$\frac{\mu \beta x x (a + \beta)}{(1+u) a} \left(\frac{(a + \beta)^2}{(1+u)^2 a a \beta \beta} + \frac{v (a - u \beta)}{(1+u) a a \beta} \right) +$$

$$+ \frac{\mu \xi x x . u (a + \xi)}{(1 + u) a} \left(\frac{u u (a + \xi)^2}{(1 + u)^2 a a \xi \xi} - \frac{v (a - u \xi)}{(1 + u) a \xi \xi} \right),$$

qui se réduit à

$$\frac{\mu x x (a + \xi)}{a^3 \xi} \left(\frac{(1 + u^3) (a + \xi)^2}{(1 + u)^3} + \frac{v (a - u \xi) (\xi - u a)}{(1 + u)^2} \right).$$

Il faut donc chercher u , pour que cette quantité

$$\frac{(1 - u + uu) (a + \xi)^2 + v (a - u \xi) (\xi - ua)}{(1 + u)^2},$$

devienne un *minimum*; or cette recherche demeure la même, quoique nous ajoutions à cette quantité une constante quelconque: soustrayons donc $v a \xi$, pour avoir cette formule à rendre un *minimum*:

$$\frac{(1 - u + uu) (a + \xi)^2 - v u (a + \xi)^2}{(1 + u)^2},$$

ou, en divisant par $(a + \xi)^2$ celle-cy:

$$\frac{1 - u + uu - v u}{(1 + u)^2} = 1 - \frac{(v + 3) u}{(1 + u)^2}.$$

Tout revient donc à rendre un *maximum* cette formule $\frac{u}{(1 + u)^2}$, ce

qui arrive évidemment en prenant $u = 1$, tout comme nous l'avons trouvé.

SCHOLIE II.

15. On peut encore plus promptement arriver à ce *minimum* en remarquant que $(a - u \xi) (\xi - u a) = -u (a + \xi)^2 + (1 + u)^2 a \xi$, d'où l'espace de diffusion devient exprimé en forte:

$$\frac{\mu x x (a + \xi)}{a^3 \xi} \left(\frac{1 - (v + 1) u + uu}{(1 + u)^2} (a + \xi)^2 + v a \xi \right).$$

Or, si l'on n'employoit qu'un seul verre, l'espace de diffusion seroit:

$$\frac{\mu x x (a + \mathcal{E})}{a^3 \mathcal{E}} ((a + \mathcal{E})^2 + \nu a \mathcal{E}),$$

d'où l'on voit qu'en joignant deux verres, l'espace de diffusion ne devient plus petit, qu'entant que l'expression $\frac{1 - (\nu + 1)u + uu}{(1 + u)^2}$

ou $1 - \frac{(\nu + 3)u}{(1 + u)^2}$, pourra être rendue moindre que l'unité, ce qui

arrive, quand cette expression $\frac{u}{(1 + u)^2}$ fera un *maximum*, ou cel-

le - cy $\frac{(1 + u)^2}{u}$, ou bien $\frac{1}{u} + u$ un *minimum*. Or, pour cet

effet, il faut qu'il soit $u = 1$. Cette forme nous donne encore à

connoître, qu'il est impossible de rendre le coefficient $\frac{1 - (\nu + 1)u + uu}{(1 + u)^2}$

égal à zéro, puisque $\nu = 0,23269$: donc, à moins que \mathcal{E} ne soit une quantité négative, il est impossible que l'espace de diffusion évanouisse entièrement; en ne joignant que deux verres. Cette forme que nous venons de donner à l'expression pour l'espace de diffusion, nous rendra plus aisées les recherches suivantes sur les verres triples & quadruples.

PROBLEME III.

Fig. 6. 16. *Lorsque trois verres joints ensemble en A représentent l'objet E, par l'image principale en H, trouver l'espace de diffusion Hh, que produit une ouverture donnée de ces verres.*

SOLUTION.

Considérons d'abord les trois verres comme éloignés entr'eux, pour avoir le cas traité dans le VIII Probleme du Mémoire précédent; & posons comme là les distances

$$\begin{aligned} EA &= a; & FB &= b; & GC &= c; \\ AF &= a; & BG &= \mathcal{E}; & CH &= \gamma; \end{aligned}$$

&

& nous n'aurons qu'à supposer $a + b = 0$, & $\epsilon + c = 0$. Or, puisque nos recherches aboutissent principalement à chercher de tels verres, qui produisent le moindre espace de diffusion, il faut donner à chaque verre une telle figure, qu'il soit

Pour le verre	le rayon de la face antérieure	postérieure
PP . . .	$\frac{aa}{\sigma a + \tau a}$;	$\frac{aa}{\sigma a + \tau a}$,
QQ . . .	$\frac{b\epsilon}{\sigma b + \tau \epsilon}$;	$\frac{b\epsilon}{\sigma \epsilon + \tau b}$,
RR . . .	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau \gamma}$;	$\frac{c\gamma}{\sigma \gamma + \tau c}$;

soient de plus les distances de foyer du verre

$$PP = p = \frac{aa}{a + a}; \quad QQ = q = \frac{b\epsilon}{b + \epsilon}; \quad RR = r = \frac{c\gamma}{c + \gamma},$$

& posant le demi-diamètre de l'ouverture = x , l'espace de diffusion a été trouvé exprimé en sorte :

$$Hh = \mu x x \left(\frac{\epsilon\epsilon\gamma\gamma((a+a)^2 + \nu aa)}{aabbccp} + \frac{\gamma\gamma((b+\epsilon)^2 + \nu b\epsilon)}{aacccq} + \frac{bb((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{a\mu\epsilon\epsilon r} \right).$$

Posons maintenant la distance de foyer qui conviendrait à un seul verre rapporté aux distances a & γ . = π , de sorte que

$$\pi = \frac{a\gamma}{a + \gamma}, \quad \& \text{ supposons:}$$

$$p = A\pi; \quad q = B\pi; \quad \& \quad r = C\pi.$$

Ayant donc

$$\frac{aa}{a + a} = A\pi; \quad \frac{b\epsilon}{b + \epsilon} = B\pi; \quad \frac{c\gamma}{c + \gamma} = C\pi,$$

l'espace de diffusion sera exprimé en sorte

$$Hh = \frac{\mu r x}{aa\pi} \left(\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{E}\gamma\gamma((a+\alpha)^2 + v\alpha a)}{Abb\mathfrak{C}\mathfrak{C}} + \frac{a\alpha\gamma\gamma((b+\mathfrak{E})^2 + v b \mathfrak{E})}{Ba\alpha\mathfrak{C}\mathfrak{C}} + \frac{aabb((c+\gamma)^2 + v c \gamma)}{Ca\alpha\mathfrak{E}\mathfrak{E}} \right).$$

Mais, puisque $\alpha = -b$ & $\mathfrak{E} = -c$, nous aurons

$$\frac{-a b}{a - b} = \frac{A a \gamma}{a + \gamma}, \text{ donc } b = \frac{A a \gamma}{(A - 1) \gamma - a},$$

$$\frac{-bc}{b - c} = \frac{B a \gamma}{a + \gamma}, \text{ donc } c = \frac{B a \gamma b}{B a \gamma - ab - b \gamma} = \frac{AB a \gamma}{(AB - A - B) \gamma - (A + B) a}$$

$$\frac{c \gamma}{c + \gamma} = \frac{C a \gamma}{a + \gamma}, \text{ donc } c = \frac{C a \gamma}{\gamma - (C - 1) a},$$

& partant les nombres A, B, C, doivent être tels, qu'il soit:

$$ABC - AB - AC - BC = 0, \text{ ou } 1 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}.$$

Pofons donc $\frac{1}{A} = \mathfrak{A}$, $\frac{1}{B} = \mathfrak{B}$, & $\frac{1}{C} = \mathfrak{C}$, de forte que:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1; \text{ \& } b = \frac{a \gamma}{(1 - \mathfrak{A}) \gamma - \mathfrak{A} a}, \text{ } c = \frac{a \gamma}{\mathfrak{C} \gamma - (1 - \mathfrak{C}) a},$$

& à caufe de $\alpha = -b$; & $b = -c$, l'espace de diffusion fera

$$Hh = \frac{\mu r x}{aa\pi} \left(\frac{\mathfrak{A}\gamma\gamma((a-b)^2 - v b)}{bb} + \frac{\mathfrak{B}\gamma\gamma((b-c)^2 - v b c)}{bv\mathfrak{C}\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{C}aa((c+\gamma)^2 + v c \gamma)}{cc} \right).$$

Or ayant

$$\frac{a}{b} = 1 - \mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{A} a}{\gamma}, \frac{\gamma}{c} = \frac{\mathfrak{C} \gamma}{a} - 1 + \mathfrak{C}, \text{ \& } b - c = \frac{-\mathfrak{B} b c (a + \gamma)}{a \gamma},$$

notre expression prendra cette forme:

$$Hh = \frac{\mu r x}{aa\pi} \left(\mathfrak{A}\gamma\gamma \left(\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 - \frac{v \gamma}{b} \right) + \mathfrak{B}^2 (a + \gamma)^2 - \frac{v \mathfrak{B} b \gamma \gamma}{bc} + \mathfrak{C} a a \left(\left(1 + \frac{\gamma}{c} \right)^2 + \frac{v \gamma}{c} \right) \right),$$

qui

qui se réduit à celle-ci :

$$Hh = \frac{\mu x x}{aa \pi} \left((A^3 + B^3 + C^3) (a + \gamma)^2 + 2 (ABC + AA + AC + CC - A - C) (a + \gamma)^2 + va\gamma \right),$$

ou à cette autre

$$Hh = \frac{\mu x x}{aa \pi} \left((a + \gamma)^2 - (v + 3) (AA + AC - AA - 2AC - CC + A + C) (a + \gamma)^2 + va\gamma \right).$$

Mais, pour la construction des verres qui produisent cet espace de confusion, puisque nous avons

$$\frac{1}{a} = \frac{A}{\gamma} + \frac{A-1}{a}; \quad \frac{1}{b} = \frac{-A}{\gamma} - \frac{A+1}{a}; \quad \frac{1}{c} = \frac{1-C}{\gamma} - \frac{C}{a}; \quad \frac{1}{c} = \frac{C-1}{\gamma} + \frac{C}{a},$$

si nous nommons les rayons des faces antérieures de nos trois verres f, f', f'' , & des postérieures g, g', g'' , nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{\sigma A}{\gamma} + \frac{\sigma A - \sigma + \tau}{a}; & \frac{1}{g} &= \frac{\sigma + \tau A - \tau}{a} + \frac{\tau A}{\gamma}, \\ \frac{1}{f'} &= \frac{\sigma - \sigma C - \tau A}{\gamma} - \frac{\sigma C - \tau A + \tau}{a}; & \frac{1}{g'} &= \frac{\tau - \sigma A - \tau C}{\gamma} - \frac{\sigma A + \sigma - \tau C}{a}, \\ \frac{1}{f''} &= \frac{\sigma - \tau + \tau C}{\gamma} + \frac{\tau C}{a}; & \frac{1}{g''} &= \frac{\sigma C - \sigma + \tau}{\gamma} + \frac{\sigma C}{a}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE I.

17. Puisque $\pi = \frac{a\gamma}{a + \gamma}$, l'espace de diffusion pourra être exprimé de cette façon :

$$Hh = \frac{\mu x x (a + \gamma)}{a^3 g} \left((1 - (v + 3)(A + C)(AC - A - C + 1)) (a + \gamma)^2 + va\gamma \right),$$

ou bien

$$Hh = \frac{\mu_{yx}(a+\gamma)}{a^3 \gamma} ((1-(\nu+3)(1-\mathfrak{A})(1-\mathfrak{C})(\mathfrak{A}+\mathfrak{C}))(a+\gamma)^2 + \nu a \gamma),$$

d'où l'on voit, que si l'on prenoit ou $\mathfrak{A} = 1$, ou $\mathfrak{C} = 1$, ou $\mathfrak{A} = -\mathfrak{C}$, on auroit le même espace de diffusion que dans le cas d'un verre simple.

COROLLAIRE 2.

18. Or l'espace de diffusion deviendra plus petit que dans le cas d'un verre simple, si l'on prend pour \mathfrak{A} & \mathfrak{C} des nombres positifs moindres que l'unité: & dans ce cas ledit espace deviendra le plus petit, en prenant $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = \frac{1}{3}$, de sorte que $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$; & partant $p = q = r = 3\pi$. Or alors l'espace de diffusion sera

$$Hh = \frac{\mu_{xx}(a+\gamma)}{a^3 \gamma} \left(\left(\frac{1}{9} - \frac{8\nu}{27} \right) (a+\gamma)^2 + \nu a \gamma \right), \text{ ou}$$

$$Hh = \frac{\mu_{xx}(a+\gamma)}{a^3 \gamma} (0,04217 (a+\gamma)^2 + \nu a \gamma),$$

& partant plus petit que dans le cas de deux verres.

COROLLAIRE 3.

19. Mais, posant $\mathfrak{A} = \frac{1}{3}$ & $\mathfrak{C} = \frac{1}{3}$, nous aurons pour les rayons des faces de nos trois verres:

$$\frac{1}{f} = \frac{\sigma}{3\gamma} + \frac{3\tau - 2\sigma}{3a}, \text{ ou } f = \frac{3a\gamma}{\sigma a + (3\tau - 2\sigma)\gamma},$$

$$\frac{1}{g} = \frac{3\sigma - 2\tau}{3a} + \frac{\tau}{3\gamma}, \text{ ou } g = \frac{3a\gamma}{(3\sigma - 2\tau)\gamma + \tau a},$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{2\sigma - \tau}{3\gamma} + \frac{2\tau - \sigma}{3a}, \text{ ou } f' = \frac{3a\gamma}{(2\sigma - \tau)a + (2\tau - \sigma)\gamma},$$

$$\frac{1}{g'} = \frac{2\sigma - \tau}{3a} + \frac{2\sigma - \tau}{3\gamma}, \text{ ou } g' = \frac{3a\gamma}{(2\sigma - \tau)\gamma + (2\tau - \sigma)a},$$

$$\frac{1}{f''}$$

$$\frac{1}{f''} = \frac{3\sigma - 2\tau}{3\gamma} + \frac{\tau}{3a}, \text{ ou } f'' = \frac{3a\gamma}{(3\sigma - 2\tau)a + \tau\gamma},$$

$$\frac{1}{g''} = \frac{\sigma}{3a} + \frac{3\tau - 2\sigma}{3\gamma}, \text{ ou } g'' = \frac{3a\gamma}{\sigma\gamma + (3\tau - 2\sigma)a},$$

COROLLAIRE 4.

20. Donc, si la distance de l'objet avant le verre est $= a$, & celle de l'image derrière le verre $= a$, le verre triple qui produit la moindre confusion, doit être composé de trois verres simples, dont les faces soient formées en sorte :

	le rayon de la face	
	antérieure	postérieure
pour le premier verre	$\frac{3a\alpha}{1,62740a - 2,68246\alpha}$	$\frac{3a\alpha}{4,50064a + 0,19078\alpha}$
pour le second verre	$\frac{3a\alpha}{3,06402a - 1,24584\alpha}$	$\frac{3a\alpha}{3,06402a - 1,24584\alpha}$
pour le troisième verre	$\frac{3a\alpha}{4,50064a + 0,19078\alpha}$	$\frac{3\alpha}{1,62740\alpha - 2,68246a}$

& alors l'espace de diffusion sera

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha} \left(\frac{3-8v}{27} (a+\alpha)^2 + v\alpha\alpha \right), \text{ ou à cause de } v = 0,23269,$$

$$\frac{\mu(a+\alpha)xx}{a^3\alpha} (0,04217 (a+\alpha)^2 + v\alpha\alpha).$$

PROBLEME IV.

21. L'espace de diffusion, en employant un verre triple, ayant été trouvé exprimé en sorte dans le problème précédent :

$$\frac{\mu xx(a+\gamma)}{a^3\gamma} ((1-(v+3))(1-\mathcal{N})(1-\mathcal{E})(\mathcal{N}+\mathcal{E})) (a+\gamma)^2 + v\alpha\gamma),$$

trouver les cas où le coefficient de $(a + \gamma)^2$ dans cette expression évanouit entièrement.

SOLUTION.

Il s'agit donc de trouver les nombres \mathfrak{A} & \mathfrak{C} , qui satisfassent à cette équation :

$$1 = (\nu + 3) (1 - \mathfrak{A}) (1 - \mathfrak{C}) (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}).$$

Posons pour cet effet $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 2\eta$, & $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = z$, pour avoir

$$\mathfrak{A} = \eta + \sqrt{(\eta\eta - z)}, \text{ \& } \mathfrak{C} = \eta - \sqrt{(\eta\eta - z)}.$$

Or alors notre équation prendra cette forme :

$$1 = 2 (\nu + 3) \eta (1 - 2\eta + z), \text{ d'où l'on tire}$$

$$z = 2\eta - 1 + \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}, \text{ \& partant}$$

$$\eta\eta - z = (\eta - 1)^2 - \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}.$$

Il faut donc prendre pour η un tel nombre que cette formule $(\eta - 1)^2 - \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}$, obtienne une valeur positive.

Cherchons d'abord la valeur pour η , qui rendra cette quantité égale à zéro, ou soit

$$\eta (\eta - 1)^2 = \frac{1}{2(\nu + 3)} = 0,15467,$$

& il est évident que η doit être un nombre positif.

Soit I. η un nombre > 1 , & sa valeur, qui satisfait à cette équation, se trouve $\eta = 1,33966$, & ce sera aussi la valeur de \mathfrak{A} & de \mathfrak{C} ; d'où l'on aura $\mathfrak{B} = -1,67932$.

Soit II. η moindre que 1, & posons $\eta = 1 - \nu$, pour avoir à résoudre cette équation $\nu\nu - \nu^3 = 0,15467$: or cela est impossible, car la plus grande valeur que $\nu\nu - \nu^3$ puisse recevoir est

est $= 0,14815$, & partant nôtre équation n'a qu'une racine, qui est $\eta = 1,33966$, auquel cas $(\eta - 1)^2 - \frac{1}{2(\nu + 3)\eta}$ évanouit.

Mais, puisque $\mathcal{A} + \mathcal{C} = 1 - \mathcal{B}$, & que l'équation à résoudre a cette forme: $1 = (\nu + 3)(1 - \mathcal{A})(1 - \mathcal{B})(1 - \mathcal{C})$, il est évident que les trois nombres \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} peuvent être changés entr'eux à volonté, de sorte qu'ayant trouvé trois nombres pour \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , ces mêmes nombres pourront être pris, en quelqu'autre ordre qu'on mette les lettres \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} ; ainsi le cas trouvé fournit d'abord trois solutions:

I. $\mathcal{A} = 1,33966$; $\mathcal{B} = -1,67932$; $\mathcal{C} = 1,33966$,

II. $\mathcal{A} = 1,33966$; $\mathcal{B} = 1,33966$; $\mathcal{C} = -1,67932$,

III. $\mathcal{A} = -1,67932$; $\mathcal{B} = 1,33966$; $\mathcal{C} = 1,33966$,

& si les valeurs de \mathcal{A} & \mathcal{C} n'avoient pas été égales entr'elles, on en auroit pu tirer six solutions différentes. Or il est clair que la formule

$$\sqrt{(\eta\eta - z)} = \sqrt{((\eta - 1)^2 - \frac{0,15467}{\eta})}$$

quand on prend ou η négatif ou positif, mais plus grand que $1,33966$.

Prenons donc, pour donner un exemple du dernier cas, $\eta = \frac{3}{4}$, & ayant alors $\sqrt{(\eta\eta - z)} = \sqrt{(\frac{3}{4} - 0,10311)} = 0,38323$, on trouvera $\mathcal{A} = 1,88323$; $\mathcal{C} = 1,11677$; & $\mathcal{B} = -2$, & partant on aura de là six solutions, selon les diverses combinaisons des lettres \mathcal{A} , \mathcal{C} , \mathcal{B} , avec les trois nombres trouvés.

Prenons aussi pour η un nombre négatif, & soit $\eta = -\frac{1}{2}$: donc $\mathcal{A} + \mathcal{C} = -\frac{1}{2} = 1 - \mathcal{B}$, & partant $\mathcal{B} = \frac{3}{2}$. De là on aura

$$\sqrt{(\eta\eta - z)} = \sqrt{(\frac{1}{4} + 0,61868)} = 1,47828,$$

donc $\mathcal{A} = 1,22828$, & $\mathcal{C} = -1,72828$, & $\mathcal{B} = 1,50000$:

soit $\eta = -\frac{1}{3}$, & partant $\mathcal{A} + \mathcal{C} = -\frac{1}{3} = 1 - \mathcal{B}$, donc $\mathcal{B} = 1\frac{1}{3}$.

Or $\sqrt{(\eta\eta - z)} = \sqrt{(\frac{1}{9} + 0,92802)} = 1,51298,$

donc $\mathcal{A} = 1,34632$, & $\mathcal{C} = -1,67964$, & $\mathcal{B} = 1,33333$,
 & cette solution approche fort de la premiere. Or la premiere a cet
 avantage qu'aucun des trois nombres trouvés n'est aussi grand, que
 dans les autres solutions: ce qui est un avantage réel, puisque les faces
 des verres deviennent alors le moins courbes, & sont par conséquent
 susceptibles d'une plus grande ouverture.

COROLLAIRE I.

22. Donc, si nous posons la distance de l'objet avant le verre
 $= a$, & celle de l'image après le verre $= \alpha$, nous pourrons fournir
 une infinité de verres triples, qui produisent l'espace de diffusion
 $= \frac{\mu \cdot x x (a + \alpha)}{a^3 \alpha}$. $\nu n \alpha = \frac{\mu \nu x x (a + \alpha)}{a \alpha}$; dont voici la construction

I. VERRE TRIPLE.

Rayon de la face

23. du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{n\alpha}{+ 2,18016a + 0,74354\alpha}$	$\frac{n\alpha}{1,69220\alpha + 0,25558a}$
second	$\frac{n\alpha}{- 0,80834a - 2,24496\alpha}$	$\frac{n\alpha}{- 0,80834\alpha - 2,24496a}$
troisième	$\frac{n\alpha}{+ 1,69220a + 0,25558\alpha}$	$\frac{n\alpha}{+ 2,18016\alpha + 0,74354a}$

II. VERRE TRIPLE.

Rayon de la face

24. du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{n\alpha}{+ 2,18016a + 0,74354\alpha}$	$\frac{n\alpha}{+ 1,69220\alpha + 0,25558a}$
second	$\frac{n\alpha}{+ 1,10475a + 2,66813\alpha}$	$\frac{n\alpha}{- 0,23238\alpha - 1,66900a}$
troisième	$\frac{n\alpha}{+ 1,11624a - 0,32038\alpha}$	$\frac{n\alpha}{- 2,53293\alpha - 4,16955a}$

III.

III. VERRE TRIPLE.

25.	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{aa}{-2,73293a - 4,16955a}$	$\frac{aa}{+1,11624a - 0,32038a}$
second	$\frac{aa}{-0,23238a - 1,66900a}$	$\frac{aa}{+4,10475a + 2,66813a}$
troisième	$\frac{aa}{+1,69220a + 0,25558a}$	$\frac{aa}{+2,18016a + 0,74354a}$

IV. VERRE TRIPLE.

26.	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{aa}{+1,99890a + 0,56228a}$	$\frac{aa}{1,67095a + 0,23433a}$
second	$\frac{aa}{-1,04803a - 2,48465a}$	$\frac{aa}{-0,65767a - 2,09429a}$
troisième	$\frac{aa}{+1,72279a + 0,28617a}$	$\frac{aa}{+2,44110a + 1,00448a}$

V. VERRE TRIPLE.

27.	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{aa}{1,99890a + 0,56228a}$	$\frac{aa}{+1,67095a + 0,23433a}$
second	$\frac{aa}{+4,20567a + 2,76905a}$	$\frac{aa}{-0,04177a - 1,47839a}$
troisième	$\frac{aa}{+1,10689a + 0,32973a}$	$\frac{aa}{-2,81260a - 4,24922a}$

VI. VERRE TRIPLE.

28.	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{na}{+ 2,44110a + 1,00448a}$	$\frac{na}{+ 1,72279a + 0,28617a}$
second	$\frac{na}{+ 4,15383a + 2,71721a}$	$\frac{na}{- 0,48397a - 1,92059a}$
troisième	$\frac{na}{+ 1,10689a - 0,32973a}$	$\frac{na}{- 2,81260a - 4,24922a}$

VII. VERRE TRIPLE.

29.	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{na}{- 2,81260a - 4,24922a}$	$\frac{na}{+ 1,10689a - 0,32973a}$
second	$\frac{na}{- 0,48397a - 1,92059a}$	$\frac{na}{+ 4,15383a + 2,71721a}$
troisième	$\frac{na}{+ 1,72279a + 0,28617a}$	$\frac{na}{+ 2,44110a + 1,00448a}$

VIII. VERRE TRIPLE.

30.	Rayon de la Face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{na}{- 2,81260a - 4,24922a}$	$\frac{na}{+ 1,10689a - 0,32973a}$
second	$\frac{na}{- 0,04177a - 1,47839a}$	$\frac{na}{+ 4,20567a + 2,76905a}$
troisième	$\frac{na}{+ 1,67095a + 0,23433a}$	$\frac{na}{+ 1,99890a + 0,56228a}$

IX. VERRE TRIPLE.

31. du verre	Rayon de la face antérieure	postérieure
premier	$\frac{aa}{+2,44110a + 1,00448a}$	$\frac{aa}{+1,72279a + 0,28617a}$
second	$\frac{aa}{-0,65767a - 2,09429a}$	$\frac{aa}{-1,04803a - 2,48465a}$
troisième	$\frac{aa}{+1,67095a + 0,23433a}$	$\frac{aa}{+1,99890a + 0,56228a}$

SCHOLIE I.

32. Voilà donc ix verres triples, qui produisent l'effet souhaité; dont les trois premiers sont tirés des valeurs 1,33966, 1,33966 & - 1,67932 trouvées pour les lettres A, B, C, & les six autres des valeurs

1,22828, 1,50000, & - 1,72828.

Parmi les trois verres de tous ces cas, il y en a toujours un qui est concave, ou dont la distance de foyer est négative, celle des deux autres étant positive. Ainsi le premier verre, qui regarde l'objet, est concave dans les cas: I, IV, & IX: & le troisième verre est concave dans les cas: II, V, & VI. Ensuite il est aussi bon de remarquer, que les cas I & II ont le premier verre commun, & le troisième est commun aux cas I & III: or les cas II & III n'ont aucun verre commun. De même, dans les six autres cas, le premier verre est commun aux cas IV & V; & aussi aux cas VII & VIII; & encore aux cas VI & IX; or le troisième verre est commun aux cas IV & VII, & aussi aux cas V & VI: & encore aux cas VIII & IX.

SCHOLIE II.

33. Ayant dans ce problème déterminé le cas, où dans l'espace de diffusion



$$\frac{\mu x x (a + \gamma)}{a^3 \gamma} ((1 - (v + 3)(1 - \mathfrak{A})(1 - \mathfrak{B})(1 - \mathfrak{C})) (a + \gamma)^2 + v a \gamma),$$

le coefficient du terme $(a + \gamma)^2$ évanouir, nous avons trouvé que des trois nombres \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , deux sont toujours positifs & le troisieme négatif. De là nous pourrons aisément résoudre les cas où le coefficient de $(a + \gamma)^2$ deviendra même négatif. Car cela arrivera, ou si un des nombres \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , qui est positif, est plus petit qu'il n'a été trouvé dans notre probleme, ou si celui qui est négatif, est pris plus grand. Or il est souvent bon d'avoir de tels verres, qui produisent un espace de diffusion dans l'expression duquel le coefficient de $(a + \gamma)^2$, ou de $(a + \alpha)^2$, à laquelle forme je réduis toujours les expressions, soit un nombre négatif, mais très petit: il sera donc toujours fort aisé de remplir cette condition, en prenant ou un des nombres positifs \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , un peu plus grand qu'il ne doit être pour le cas, où le coefficient de $(a + \alpha)^2$ doit entierement évanouir.

PROBLEME IV.

Fig 7. 34. Lorsque quatre verres joints ensemble en A representent l'objet E par l'image principale en I, trouver l'espace de diffusion Ii, que produit une ouverture donnée des verres.

SOLUTION.

Considérons d'abord les quatre verres comme éloignés entr'eux, pour avoir le cas traité dans le ix Probleme du Mémoire précédent, & posons comme là

$$EA = a; FB = b; GC = c; HD = d,$$

$$AF = \alpha; BG = \beta; CH = \gamma; DI = \delta,$$

& nous n'aurons qu'à supposer $a + b = 0$; $\beta + c = 0$ & $\gamma + d = 0$, ou $\alpha = -b$; $\beta = -c$, & $\gamma = -d$. Ensuite, supposons comme auparavant les quatre verres tels, que chacun produise déjà le plus petit espace de diffusion, & partant leurs faces seront telles.

Le rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier -	$\frac{aa}{\sigma a + \tau a}$;	$\frac{aa}{\sigma a + \tau a}$,
second -	$\frac{b\epsilon}{\sigma b + \tau \epsilon}$;	$\frac{b\epsilon}{\sigma \epsilon + \tau b}$,
troisieme -	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau \gamma}$;	$\frac{c\gamma}{\sigma \gamma + \tau c}$,
quatrieme -	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau \delta}$;	$\frac{d\delta}{\sigma \delta + \tau d}$.

Soient de plus les distances de foyer de ces verres

du premier $p = \frac{aa}{a + a}$; du second $q = \frac{b\epsilon}{b + \epsilon}$;

du troisieme $r = \frac{c\gamma}{c + \gamma}$; & du quatrieme $= \frac{d\delta}{d + \delta}$,

& posant le demi-diametre de l'ouverture du verre = x , l'espace de diffusion sera :

$$Ii = \frac{\mu x x}{aa} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\epsilon\sigma\gamma\gamma\delta\delta((a+a)^2 + vca)}{bbccddp} + \frac{a\sigma\gamma\gamma\delta\delta((b+\epsilon)^2 + v'\epsilon)}{a\sigma\epsilon\epsilon ddq} \\ + \frac{aa\delta\delta((c+\gamma)^2 + vc\gamma)}{a\sigma\epsilon\epsilon ddr} + \frac{aa\delta\delta((d+\delta)^2 + v\delta)}{a\sigma\epsilon\epsilon\gamma\gamma s} \end{array} \right\}$$

Soit maintenant la distance de foyer qui conviendrait à un seul verre rapporté aux distances a & δ , = π , de sorte que $\pi = \frac{a\delta}{a + \delta}$, & supposons

$$p = \frac{\pi}{\mathfrak{A}} ; q = \frac{\pi}{\mathfrak{B}} ; r = \frac{\pi}{\mathfrak{C}} ; \& s = \frac{\pi}{\mathfrak{D}} ,$$

& à cause de $\frac{bb}{aa} = 1$; $\frac{cc}{\epsilon\epsilon} = 1$; $\frac{dd}{\gamma\gamma} = 1$, l'espace de diffusion sera exprimé ainsi:

$$Li = \frac{\mu_{rx}}{aa\pi} \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{\mathcal{A}\delta\delta}{bb} ((a+\alpha)^2 + v\alpha\alpha) + \frac{\mathcal{B}aa\delta\delta}{bbcc} ((b+\epsilon)^2 + v\epsilon\epsilon) \\ &+ \frac{\mathcal{C}aa\delta\delta}{ccdd} ((c+\gamma)^2 + v\gamma\gamma) + \frac{\mathcal{D}aa}{dd} ((d+\delta)^2 + v\delta\delta) \end{aligned} \right\}$$

Or les équations

$$\frac{\mathcal{A}b}{b-a} = \frac{a\delta}{a+\delta}; \quad \frac{\mathcal{B}bc}{c-b} = \frac{a\delta}{a+\delta}; \quad \frac{\mathcal{C}cd}{d-c} = \frac{a\delta}{a+\delta}; \quad \frac{\mathcal{D}d\delta}{d+\delta} = \frac{a\delta}{a+\delta},$$

donnent

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 1 - \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}a}{\delta}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{\mathcal{A}(a+\delta)}{a\delta}, \\ \frac{1}{c} &= \frac{1}{b} - \frac{\mathcal{B}(a+\delta)}{a\delta} = \frac{1}{a} - \frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B})(a+\delta)}{a\delta}, \\ \frac{1}{d} &= \frac{1}{c} - \frac{\mathcal{C}(a+\delta)}{a\delta} = \frac{1}{a} - \frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})(a+\delta)}{a\delta}; \end{aligned}$$

or on trouve aussi $\frac{1}{d} = \frac{\mathcal{D}(a+\delta)}{a\delta} - \frac{1}{\delta},$

d'où il suit $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D} = 1.$

Mais, posant $\alpha = -b$; $\epsilon = -c$, & $\gamma = -d$, l'expression de Li prendra cette forme:

$$Li = \frac{\mu_{rx}}{aa\pi} \left\{ \begin{aligned} &+ \mathcal{A}\delta\delta \left(\left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 - \frac{v\alpha}{b} \right) + \mathcal{B}aa\delta\delta \left(\frac{1}{cc} - \frac{2}{bc} + \frac{1}{bb} - \frac{v}{bc} \right) \\ &+ \mathcal{C}aa\delta\delta \left(\frac{1}{dd} - \frac{2}{cd} + \frac{1}{cc} - \frac{v}{cd} \right) + \mathcal{D}aa \left(\left(1 + \frac{\delta}{d} \right)^2 + \frac{v\delta}{d} \right), \end{aligned} \right\}$$

ou bien celle - cy:

$$Li =$$

$$I_i = \frac{\mu \delta \delta x}{\pi} \left\{ \begin{aligned} &+ \mathfrak{A} \left(\frac{1}{aa} - \frac{\nu-2}{ab} + \frac{1}{bb} \right) + \mathfrak{B} \left(\frac{1}{bb} - \frac{\nu-2}{bc} + \frac{1}{cc} \right) \\ &+ \mathfrak{C} \left(\frac{1}{cc} - \frac{\nu-2}{cd} + \frac{1}{dd} \right) + \mathfrak{D} \left(\frac{1}{dd} + \frac{\nu+2}{a\delta} + \frac{1}{\delta\delta} \right). \end{aligned} \right.$$

Or, faisant ici les substitutions, on parviendra à cette expression

$$I_i = \frac{\mu x x (a + \delta)}{a^3 \delta} ((1 - (\nu + 3))(1 - \mathfrak{A})(1 - \mathfrak{B})(1 - \mathfrak{C})(1 - \mathfrak{D}))(a + \delta)^2 + \nu a \delta).$$

Et en introduisant ces lettres \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , dont la somme doit être égale à l'unité, les faces des verres doivent être faites conformément aux formules suivantes:

	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{A} a + \tau (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \delta - \sigma (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \delta}$	
	Rayon de la face	
du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{A} a + \tau \mathfrak{A} \delta - (\sigma - \tau) (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \delta}$	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{A} \delta + (\sigma - \tau) (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \delta + \tau \mathfrak{A} a}$
second	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{B} a + (\sigma - \tau) \mathfrak{A} a + \tau \mathfrak{B} \delta - (\sigma - \tau) (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \delta}$	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{B} \delta + (\sigma - \tau) (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) \delta + \tau \mathfrak{B} a - (\sigma - \tau) \mathfrak{A} a}$
troisième	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{C} a + (\sigma - \tau) (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) a + \tau \mathfrak{C} \delta - (\sigma - \tau) \mathfrak{D} \delta}$	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{C} \delta + (\sigma - \tau) \mathfrak{D} \delta + \tau \mathfrak{C} a - (\sigma - \tau) (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) a}$
quatrième	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{D} a + (\sigma - \tau) (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) a + \tau \mathfrak{D} \delta}$	$\frac{a\delta}{\sigma \mathfrak{D} \delta + \tau \mathfrak{D} a - (\sigma - \tau) (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) a}$

Or les nombres \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} sont tels, que posant $\frac{a\delta}{a + \delta} = \pi$,

il soit

$$p = \frac{\pi}{\mathfrak{A}}; \quad q = \frac{\pi}{\mathfrak{B}}; \quad r = \frac{\pi}{\mathfrak{C}}; \quad \& \quad s = \frac{\pi}{\mathfrak{D}};$$

& on pourra prendre pour \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , tels nombres qu'on voudra, pourvu qu'il soit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 1$.

COROLLAIRE I.

35. Donc, si la distance de l'objet avant le verre est $= a$, & celle de l'image derriere le verre $= a'$, & qu'on veuille employer un verre quadruple, en sorte que posant $\frac{aa'}{a + a'} = \pi$, les distances de foyer des quatre verres soient

$$p = \frac{\pi}{\mathfrak{A}}; \quad q = \frac{\pi}{\mathfrak{B}}; \quad r = \frac{\pi}{\mathfrak{C}}; \quad s = \frac{\pi}{\mathfrak{D}};$$

de sorte qu'il soit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 1$.

Les faces des quatre verres doivent être travaillées en sorte, qu'il soit :

La face	Pour le premier verre
antérieure	$= \frac{aa'}{\sigma\mathfrak{A}a' - \sigma(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})a + \tau(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})a}$
postérieure	$= \frac{aa'}{\tau\mathfrak{A}a' - \tau(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})a + \sigma(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})a'}$
La face	Pour le second verre
antérieure	$= \frac{aa'}{\sigma(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})a' - \tau\mathfrak{A}a' - \sigma(\mathfrak{C} + \mathfrak{D})a + \tau(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})a'}$
postérieure	$= \frac{aa'}{\tau(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})a' - \sigma\mathfrak{A}a' - \tau(\mathfrak{C} + \mathfrak{D})a + \sigma(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D})a'}$
La face	Pour le troisieme verre
antérieure	$= \frac{aa'}{\sigma(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})a' - \tau(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})a' - \sigma\mathfrak{D}a + \tau(\mathfrak{C} + \mathfrak{D})a'}$
postérieure	$= \frac{aa'}{\tau(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})a' - \sigma(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})a' - \tau\mathfrak{D}a + \sigma(\mathfrak{C} + \mathfrak{D})a'}$

La face Pour le quatrième verre

$$\text{antérieure} = \frac{a\alpha}{\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}+\mathcal{D})a-\tau(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C})a+\tau\mathcal{D}\alpha}$$

$$\text{postérieure} = \frac{a\alpha}{\tau(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}+\mathcal{D})\tau-\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C})\tau+\sigma\mathcal{D}\alpha}$$

& alors, si l'on donne à ce verre une ouverture dont le demi-diamètre est = x , l'espace de diffusion sera :

$$\frac{\mu x x (a + \alpha)}{a^3 \alpha} ((1 - (v + 3)(1 - \mathcal{A})(1 - \mathcal{B})(1 - \mathcal{C})(1 - \mathcal{D})(a + \alpha)^2 + v a \alpha).$$

COROLLAIRE 2.

36. Si l'on met $\mathcal{D} = 0$, les faces du dernier verre deviennent parallèles entr'elles, & ce verre ne produisant aucune réfraction, on aura le cas des verres triples expliqué auparavant : & si l'on met $\mathcal{C} = 0$ & $\mathcal{D} = 0$, on aura le cas de deux verres, ou des verres doubles expliqué cy-dessus ; & posant $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$ & \mathcal{D} , il en résulte le cas d'un verre simple, auquel à cause de $\mathcal{A} = 1$ l'espace de

$$\text{diffusion devient} = \frac{\mu x x (a + \alpha)}{a^3 \alpha} ((a + \alpha)^2 + v a \alpha).$$

COROLLAIRE 3.

37. Si un seul des quatre nombres \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , est pris égal à l'unité, de sorte que la somme des trois autres soit = 0, l'espace de diffusion sera le même que dans le cas d'un seul verre, & partant on ne gagnera rien pour la diminution de la confusion.

COROLLAIRE 4.

38. L'évolution du cas des verres quadruples nous met en état d'assigner aisément les formules pour la construction des verres quintuples & sextuples, & de tous les suivans : & de déterminer en même tems l'espace de diffusion qu'une ouverture quelconque produira.

COROLLAIRE 5.

§9. Si l'on prend les nombres \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , positifs & moindres que l'unité, le coefficient de $(a + a)^2$ deviendra plus petit que l'unité. Or il sera le plus petit en prenant ces nombres égaux entr'eux. Posons donc pour ce cas

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D} = \frac{1}{4},$$

& l'espace de diffusion que ce verre quadruple, produira sera

$$\frac{\mu \cdot x \cdot x (a + a)}{a^3 a} \left(\left(1 - \frac{3^4}{4^4} (v + 3) (a + a)^2 + v n a \right), \text{ ou bien}$$

$$\frac{\mu \cdot x \cdot x (a + a)}{a^3 a} (-0,02284 (a + a)^2 + v n a).$$

Or pour ce cas les quatre verres doivent être formés en sorte.

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$= \frac{4na}{\sigma a - (3\sigma - 4\tau)a}$	$;\ \frac{4na}{\tau a + (4\sigma - 3\tau)a}$
second	$= \frac{4na}{(2\sigma - \tau)a - (2\sigma - 3\tau)a}$	$;\ \frac{4na}{(2\tau - \sigma)a + (3\sigma - 2\tau)a}$
troisième	$= \frac{4na}{(3\sigma - 2\tau)a - (\sigma - 2\tau)a}$	$;\ \frac{4na}{(3\tau - 2\sigma)a + (2\sigma - \tau)a}$
quatrième	$= \frac{4na}{(4\sigma - 3\tau)a + \tau a}$	$;\ \frac{4na}{(4\tau - 3\sigma)a + \sigma a}$

ou, en substituant pour σ & τ leurs valeurs,

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$= \frac{4na}{1,62740a - 4,11908a}$	$;\ \frac{4na}{5,93726a + 0,15078a}$

second



$$\text{second} = \frac{4na}{3,06402a - 2,68246a}; \frac{4na}{4,50064a - 1,24584a};$$

$$\text{troisième} = \frac{4na}{4,50064a - 1,24584a}; \frac{4na}{3,06402a - 2,68246a};$$

$$\text{quatrième} = \frac{4na}{5,93726a + 0,19078a}; \frac{4na}{1,62740a - 4,11508a}.$$

PROBLEME V. -

40. *Ayant trouvé l'espace de diffusion pour les verres quadruples en général, déterminer les cas où, dans l'expression de l'espace de diffusion, le coefficient du membre $(a + \alpha)^2$ évanouisse.*

SOLUTION.

Pour que l'espace de diffusion devienne $= \frac{\mu v x x (a + \alpha)}{a a}$, il faut déterminer les nombres \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , en sorte qu'il soit $(1 - \mathcal{A})(1 - \mathcal{B})(1 - \mathcal{C})(1 - \mathcal{D}) = \frac{1}{v + 3} = 0,30934$,

ce qui se peut faire d'une infinité de manières, de sorte pourtant qu'il soit $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D} = 1$. Or, afin que les rayons des faces ne deviennent pas trop petits, il faut que ces nombres soient aussi petits qu'il est possible; & il est évident qu'il y aura des cas où ces nombres seront à peu près égaux: posons donc

$\mathcal{A} = \frac{1}{4} + z$; $\mathcal{B} = \frac{1}{4} + z$; $\mathcal{C} = \frac{1}{4} + z$, & $\mathcal{D} = \frac{1}{4} - 3z$,
pour avoir

$$\left(\frac{1}{4} - z\right)^3 \left(\frac{1}{4} + 3z\right) = 0,30934, \text{ ou}$$

$$0,00715 = \frac{z^7}{8} z z - 6z^3 + 3z^4,$$

d'où nous tirons à peu près

$$\text{ou } z = 0,04787, \text{ ou } z = -0,04419,$$

& la première valeur donne

$\mathcal{A} = 0,29787$; $\mathcal{B} = 0,29787$; $\mathcal{C} = 0,29787$; $\mathcal{D} = 0,10639$.
 Or ces nombres approcheront encore plus de l'égalité, si nous posons

$\mathcal{A} = \frac{1}{4} + z$; $\mathcal{B} = \frac{1}{4} - z$; $\mathcal{C} = \frac{1}{4} + z$; $\mathcal{D} = \frac{1}{4} - z$,
 d'où l'on trouve $z = 0,07962$, & partant

$\mathcal{A} = 0,32962$; $\mathcal{B} = 0,17038$; $\mathcal{C} = 0,32962$; $\mathcal{D} = 0,17038$;
 & puisqu'il est permis de changer l'ordre de ces nombres à plaisir, ces valeurs nous fourniront la construction des verres quadruples suivans.

I. VERRE QUADRUPLE.

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{4na}{2,14569a - 3,60079a}$	$\frac{4na}{5,99802a + 0,25154a}$
second	$\frac{4na}{3,00326a - 2,74322a}$	$\frac{4na}{3,96235a - 1,76413a}$
troisième	$\frac{4na}{5,01893a - 0,72755a}$	$\frac{4na}{3,12478a - 2,62170a}$
quatrième	$\frac{4na}{5,87650a + 0,13002a}$	$\frac{4na}{1,10911a - 4,63737a}$

II. VERRE QUADRUPLE.

Rayon de la face

du verre	antérieure	postérieure
premier	$\frac{4na}{1,10911a - 4,63737a}$	$\frac{4na}{5,87650a + 0,13002a}$
second	$\frac{4na}{3,12478a - 2,62170a}$	$\frac{4na}{5,01893a - 0,72755a}$
troisième	$\frac{4na}{3,96235a - 1,76413a}$	$\frac{4na}{3,00326a - 2,74322a}$

qua-



quatrieme $\frac{4na}{5,99802a + 0,25154a}$; $\frac{4na}{2,14569a - 3,60079a}$.

CONCLUSION.

41. Puisque je suppose que ces verres multiples sont joints immédiatement ensemble, de sorte que tant leur épaisseur que leurs distances entr'elles puissent être négligées dans le calcul, on pourra dans la composition de plusieurs verres, dont j'ai déterminé la confusion dans le Mémoire précédent, regarder ces verres multiples comme des verres simples, & les substituer à leur place, entant qu'ils sont rapportés aux mêmes deux distances a, α , ou b, β , ou c, γ &c. auxquelles les simples ont été rapportés. Par ce moyen, il y aura beaucoup à gagner, puisque ces verres multiples produiront une beaucoup plus petite confusion; laquelle peut même quelquefois être réduite à rien. Or le calcul, pour déterminer la quantité de la confusion, ne devient pas pour cela plus difficile, & pourra même rester le même comme il est détaillé vers la fin du Mémoire précédent, pourvu qu'on y fasse quelques petits changemens, lorsqu'on fait usage de quelque verre multiple au lieu d'un verre simple. Car, de quelque verre qu'on se serve, soit qu'il soit simple ou multiple, lorsqu'il est déterminé par les deux distances a & α , & que le demi-diametre de son ouverture est $= x$, l'espace de diffusion est toujours contenu dans cette forme

$$\frac{\mu x x (a + \alpha)}{a^2 \alpha} (\lambda (a + \alpha)^2 + \nu a \alpha),$$

& toute la différence se trouve dans le seul caractère λ , lequel devient $= 1$, lorsque le verre est simple: or, pour les verres doubles les plus parfaits, on doit mettre $\lambda = 0,19183$, suivant le §. 11. Quand le verre est triple de la construction du §. 20, on aura $\lambda = 0,04217$; mais, quand il est de la construction décrite au §. 22. alors il y aura $\lambda = 0$. Quand on fera usage d'un verre quadruple de la construction du §. 39, on mettra $\lambda = -0,02289$, mais les verres quadruples de la dernière construction §. 40 auront $\lambda = 0$. Cela remar-

qué, les formules données dans les §§. 54. 55. 56 &c. seront rendues plus générales pour s'étendre aussi à des verres multiples quelconques, quand on multipliera les formules $(a + \alpha)^2$, $(b + \beta)^2$, $(c + \gamma)^2$ &c. par les nombres λ , λ' , λ'' &c. dont chacun obtiendra sa valeur déterminée par la nature du verre auquel il se rapporte. Ensuite, les derniers membres de chaque cas doivent aussi être multipliés par un semblable nombre λ ; ainsi, pour le cas d'un seul verre, la confusion sera $\frac{\mu x^3}{4} \cdot \frac{\lambda}{aap}$, pour le cas de deux verres, elle sera:

$$\frac{\mu b x^3}{4 a} \left(\frac{\lambda (a + \alpha)^2 + v a \alpha}{a a b b p} + \frac{\lambda'}{a a q} \right),$$

pour le cas de trois verres:

$$\frac{\mu b c x^3}{4 a \beta} \left(\frac{\beta \beta (\lambda (a + \alpha)^2 + v a \alpha)}{a a b b c c p} + \frac{\lambda' (b + \beta)^2 + v b \beta}{a a c c q} + \frac{\lambda'' b b}{a a \beta \beta r} \right),$$

où λ se rapporte au premier verre, λ' au second, λ'' au troisième &c. Il seroit superflu de répéter ici avec cette correction les formules pour les cas de 4, 5 & 6 verres.

