1768

Recherches sur la confusion des verres dioptriques causée par leur ouverture

Leonhard Euler

RECHERCHES
SUR
LA CONFUSION DES VERRES DIOPTRIQUES
CAUSÉE PAR LEUR OUVERTURE.

PAR M. L. EULER.

1.

Il y a deux défauts principaux, auxquels les verres dioptriques ſont aſſujettis, l'un vient de la diverſe réfrangibilité des rayons de lumiere, & l'autre de la figure des verres. Je me propoſe d'examiner ici ce dernier défaut, & de déterminer exactement la quantité de la confuſion qui eſt cauſée par la figure ſphérique des verres. Car, quoique les Geométres ayent aſſès bien réuſſi à trouver de telles figures, qui ne produiroient aucune confuſion, les ouvriers n'ont pas encore trouvé moyen de donner aux verres ces figures: la figure ſphérique étant l'unique qu'on puiſſe imprimer au verre avec le dégré de préciſion que le but de ces verres exige. Je ſuppoſe donc que les faces des verres ſoient travaillées exactement ſur des baſſins ſpériques; & puiſque cette figure n'a pas la propriété, que tous les rayons, qui viennent d'un point de l'objet, ſoient réunis par la réfraction dans un ſeul point, il en naîtra une confuſion dans l'image formée, qui ſera d'autant plus grande, plus on donnera d'ouverture au verre. C'eſt à cauſe de cette circonſtance qu'on dit, que cette confuſion vient de l'ouverture du verre; & partant mes recherches rouleront ſur la quantité de la confuſion, qu'un verre, dont les faces ſont parfaitement ſphériques, doit produire à cauſe de ſon ouverture.

Planche V. Fig. 1.

2. Pour donner une idée plus nette de cette confusion, considérons un verre PP, dont les deux faces PMAMP & PNBNP, soient parfaitement sphériques. La ligne EF tirée par les centres de ces deux sphéricités représentera l'axe du verre. Soit E, un point lumineux situé dans l'axe du verre, & les rayons qui sont transmis par le milieu du verre AB, représenteront l'image dans un certain point de l'axe F. Or les rayons qui passent par les bords du verre MM, concourent avec l'axe dans un autre point G; de sorte que si ceux-cy étoient transmis tous seuls, l'image du point lumineux seroit représentée en G. D'où l'on comprend que les rayons qui passent entre le milieu & les bords du verre, représenteront l'image entre les points F & G de l'axe, de sorte que tout l'espace FG sera rempli d'images du point lumineux E; je nommerai cet espace FG l'espace de diffusion de l'image: & il est clair que c'est de là que la confusion tire son origine, dont je déterminerai ensuite la juste quantité.

3. Pour déterminer cet espace de diffusion FG, on n'a qu'à chercher en général le point G, où un rayon quelconque EM, qui passe par le verre hors de l'axe, rencontrera l'axe après la réfraction. Car alors, faisant évanouir l'intervalle AM, on aura le point F, où les rayons qui passent par le milieu du verre, représenteront l'image; & posant ensuite l'intervalle AM égal au demi-diametre de l'ouverture du verre, on trouvera le point G, où les rayons qui passent par les bords du verre, concourront avec l'axe. L'intervalle entre ces deux points F & G, sera ce que je nomme l'espace de diffusion FG; d'où il est evident, que cet espace sera d'autant plus grand, plus sera grande l'ouverture du verre: car, si l'ouverture MM évanouïssoit, l'espace de diffusion se réduiroit aussi à rien.

4. Voilà donc la question à laquelle mes recherches se réduisent: *Les deux faces sphériques PAP & PBP, avec l'épaisseur AB du verre étant données, de même que le lieu du point lumineux E, trouver le point G, où un rayon EM, qui passe par le verre dans un point donné M, coupera l'axe du verre EF.*

5. Pour

5. Pour cet effet, il faut considérer séparément les deux réfractions, qui se font tant à l'entrée M du rayon EM dans le verre, qu'à son issue en N: dans la premiere le rayon passe de l'air dans le verre, & le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme 31 à 20, pour les rayons d'une moyenne réfrangibilité, auxquels je me borne ici uniquement; me réservant de traiter à part de la confusion qui est causée par la différente réfrangibilité des rayons. Donc, au point N, où les rayons sortent du verre en l'air, le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme 20 à 31. Or je mettrai ici pour la commodité du calcul la fraction $\frac{31}{20} = n$.

6. Pour représenter ces choses plus sensiblement, soit AM la face antérieure du verre, dont le centre soit en C, & le demi-diametre $CA = CM = f$; ensuite soit BN la face postérieure du verre, son centre en D, & son demi-diametre $DB = DN = g$: or la distance de ces deux faces ou l'épaisseur du verre soit nommée $AB = d$. Que le point lumineux E se trouve devant le verre à la distance $AE = a$, & soit la distance du point M à l'axe $= x$, de sorte que, si le point M est pris dans les bords du verre, x soit égal au demi-diametre de son ouverture. J'envisage donc le verre comme convexe de ses deux côtés, ce qui n'empêche pas que les recherches suivantes ne s'étendent aussi à des verres concaves, puisqu'on n'aura qu'à prendre négatif le demi diametre d'une face concave. Fig. 1.

7. La commodité du calcul exige, qu'au lieu de x, nous y introduisions l'angle $AEM = \Phi$, qu'il sera permis de regarder comme assès petit, pour qu'il soit assès exactement $\sin \Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$, ce qui ne s'écarte pas sensiblement de la vérité, quand même l'angle Φ est de plusieurs dégrés: car, soit $\Phi = 30°$, & cette formule donne $\sin \Phi = 0,499675$, qui ne differe de la vérité que de 0,000325; mais posant $\Phi = 15°$, cette formule donne $\sin \Phi = 0,258809$, le véritable sinus de 15° étant $= 0,258819$, de sorte que l'erreur n'est que 0,00001: d'où l'on peut juger, à quel degré notre formule approche de la verité. Réciproquement donc aussi, lorsque le

 sinus

ſinus d'un angle moindre que de 30° eſt $= s$, l'angle même ſera aſſès exactement $= s + \frac{1}{6}s^3$.

8. Ayant donc poſé l'angle AEM $= \Phi$, puisqu'il eſt aſſès petit, nous aurons aſſès près $x = a\Phi$. Enſuite, poſons auſſi pour abréger le calcul EC $= c$, de ſorte qu'il ſoit $c = a + f$, & prolongeons le rayon une fois rompu MN, juſqu'à ſa rencontre avec l'axe en O. C'eſt ce point O qu'il faut déterminer, avant qu'on puiſſe trouver le point G, où le rayon rencontre l'axe après avoir ſouffert la double réfraction.

9. Cherchons donc d'abord le point O, & puiſque dans le triangle ECM ſont donnés les deux côtés CM $= f$, & CE $= c$, avec l'angle CEM $= \Phi$, on en tire

$$f : \text{ſin}\,\Phi = c : \text{ſin}\,\text{EM}m, \text{ d'où ſin EM}m = \frac{c\,\text{ſin}\,\Phi}{f},$$

& puiſque ſin $\Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3$ nous aurons:

$$\text{ſin EM}m = \frac{c}{f}(\Phi - \frac{1}{6}\Phi^3,$$

& partant l'angle même:

$$\text{EM}m = \frac{c}{f}(\Phi - \frac{1}{6}\Phi^3) + \frac{c^3}{6f^3}(\Phi - \frac{1}{6}\Phi^3)^3.$$

Donc, en négligeant les puiſſances de Φ qui ſurpaſſent la troiſieme:

$$\text{EM}m = \frac{c}{f}\Phi + \frac{c(cc - ff)}{6f^3}\Phi^3,$$

d'où, ſi nous retranchons l'angle CEM $= \Phi$, il reſtera l'angle

$$\text{ECM} = \frac{c-f}{f}\Phi + \frac{c(cc - ff)}{6f^3}\Phi^3.$$

10. Or EMm eſt l'angle d'incidence du rayon EM ſur le verre & CMO l'angle de réfraction; donc puiſque les ſinus de ces

deux

deux angles font entr'eux comme n à 1, & que nous venons de trouver

$$\sin EMm = \frac{c}{f}(\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3)$$

nous aurons:

$$\sin CMO = \frac{c}{nf}(\Phi - \tfrac{1}{6}\Phi^3)$$

& partant cet angle lui-même sera

$$CMO = \frac{c}{nf}\Phi + \frac{c(cc - nnff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

Otons cet angle de l'angle $ECM = \frac{c-f}{f}\Phi + \frac{c(cc-ff)}{6f^3}\Phi^3$, pour avoir l'angle

$$COM = \frac{(n-1)c-nf}{nf}\Phi + \frac{c((n^3-1)cc - nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

De là le finus de cet angle se trouvera:

$$\sin COM = \frac{(n-1)c-nf}{nf}\Phi + \frac{3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3}{6nnf^3}\Phi^3,$$

& puisque $\sin COM : CM = \sin CMO : CO$, nous aurons

$$CO = \frac{CM \sin CMO}{\sin COM}, \text{ \& par conséquent:}$$

$$CO = \frac{\frac{c}{n} - \frac{c}{6n}\Phi\Phi}{\frac{(n-1)c-nf}{nf} + \frac{3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3}{6nnf^3}\Phi\Phi}.$$

11. Or, parceque $\Phi\Phi$ est une quantité asses petite, cette expression se change en cette forme

CO

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{cf}{6((n-1)c-nf)}\Phi\Phi -$$
$$\frac{c(3(n-1)c^3+3(n-1)^2ccf-4n(n-1)cff+nnf^3)}{6nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

& par la réduction en celle-ci:

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(cc+(n-1)cf-nff)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi, \text{ ou bien}$$

$$CO = \frac{cf}{(n-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(c-f)(c+uf)}{2nf((n-1)(c-nf)^2}\Phi\Phi.$$

Ajoutons y $AC = f$, pour avoir

$$AO = \frac{nf(c-f)}{(u-1)c-nf} - \frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi,$$

& l'angle AOM eſt $= \frac{(n-1)c-nf}{nf}\Phi + \frac{c((n^3-1)cc-nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3$.

12. Ayant ainſi trouvé le point O avec l'angle AOM, que fait le rayon une fois rompu avec l'axe, nous en déterminerons par une opération ſemblable le point G, où le rayon aprés les deux réfractions rencontrera l'axe.

13. Pour cet effet, poſons la diſtance $DO = e$, & l'angle $DON = \psi$, le demi-diametre de la face ſphérique BM étant $= g$, & nous aurons ſin $\psi = \psi - \frac{1}{6}\psi^3$. Or la réſolution du triangle DON donne: DN : ſin DON = DO : ſin ONn, & partant:

$$\text{ſin } ONn = \frac{e}{g}(\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3),$$

d'où nous conclurons l'angle même:

$$ONn = \frac{e}{g}\psi + \frac{e(ee-gg)}{6g^3}\psi^3,$$

Otons

Otons en l'angle DON $= \psi$ pour avoir l'angle

$$ODn = \frac{e-g}{g}\,\psi + \frac{e\,(ee-gg)}{6\,g^3}\,\psi^3.$$

14. Or ONn = DNM eſt l'angle d'incidence à la ſeco . de réfraction en N, & GNn l'angle de réfraction; d'où l'on tire

$$\text{ſin } ONn : \text{ſin } GNn = 1 : n \text{ ou ſin } GNn = n \text{ ſin } ONn,$$

donc: $\text{ſin } GNn = \frac{ne}{g}\,(\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3,$

& partant l'angle même:

$$GNn = \frac{ne}{g}\,\psi + \frac{ne\,(nnee-gg)}{6\,g^3}\,\psi^3.$$

Otons de cet angle l'angle $ODN = \frac{e-g}{g}\,\psi + \frac{e\,(ee-gg)}{6\,g^3}\,\psi^3,$

& le reſte ſera l'angle

$$DGN = \frac{(n-1)\,e+g}{g}\,\psi + \frac{e\,((n^3-1)\,ee-(n-1)\,gg}{6\,g^3}\,\psi^3,$$

& ſon ſinus

$$\text{ſin}\,DGN = \frac{(n-1)\,e+g}{g}\,\psi + \frac{3n\,(n-1)\,e^3 - 3\,(n-1)^2\,eeg - 4\,(n-1)\,egg - g^3}{6\,g^3}\,\psi$$

15. Enfin le triangle DGN donne $DG = \frac{DN \text{ ſin } GNn}{\text{ſin } DGN}$, ou bien

$$DG = \frac{ne\psi - \tfrac{1}{6}\,ne\psi^3}{\frac{(n-1)\,e-g}{g}\,\psi + \frac{3n\,(n-1)\,e^3 - 3\,(n-1)^2\,eeg - 4\,(n-1)\,egg - g^3}{6\,g^3}\,\psi^3},$$

dont la valeur approchante eſt

$$DG = \frac{neg}{(n-1)\,e+g} - \frac{neg}{6\,((n-1)\,e+g}\,\psi^2$$

—*ne*

$$-\frac{ne(3n(n-1)e^3-3(n-1)^2eeg-4(n-1)eeg+g^3)}{6g((n-1)e+g^2}\psi^2,$$

qui se réduit à

$$DG=\frac{neg}{(n-1)e+g}-\frac{n(n-1)ee(e-g)(ne+g)}{2g((n-1)e+g)^2}\psi^2.$$

Otons en $BD = g$ pour avoir

$$BG=\frac{g(e-g)}{(n-1)e+g}-\frac{n(n-1)ee(e-g)(ne+g)}{2g((n-1)e+g)^2}\psi^2,$$

& nous avons déjà trouvé l'angle

$$BGN=\frac{(n-1)e+g}{g}\psi+\frac{e((n^2-1)ee-(n-1)gg)}{6g^3}\psi^3.$$

16. Maintenant, nous n'avons qu'à mettre ici au lieu de e & ψ les valeurs que nous avons trouvées cy-dessus. Or, puisque $DO = e$, il s'ensuit $BO = e - g$ & $AO = d + e - g$, d'où

$$e=\frac{nf(c-f)}{(n-1)c-nf}+g-d-\frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2}\Phi\Phi, \&$$

$$\psi=\frac{(n-1)c-nf)}{nf}\Phi+\frac{c((n^3-1)cc-nn(n-1)ff)}{6n^3f^3}\Phi^3.$$

Mais posons pour abréger $e = P - Q\Phi\Phi$, de sorte que

$$P=\frac{nf(c-f)}{(n-1)c-nf}+g-d \;\&\; Q=\frac{(n-1)cc(c-f)(c+nf)}{2nf((n-1)c-nf)^2},$$

& ces valeurs substituées, en négligeant les plus hautes puissances de Φ, donneront

$$BG=\frac{g(P-g-Q\Phi\Phi)}{(n-1)P+g-(n-1)Q\Phi\Phi}-\frac{n(n-1)PP(P-g)(nP+g)((n-1)c-nf)^2}{2nnffg((n-1)P+g)^2}\Phi\Phi,$$

& développant le premier nombre:

BG

$$BG = \frac{g\,(P - g)}{(n-1)\,P + g} - \frac{g\,Q}{(n-1)\,P - g}\Phi\Phi + \frac{(n-1)\,g\,Q\,(P-g)}{((n-1)\,P+g)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n\,(n-1)\,PP\,(P-g)\,(nP+g)\,((n-1)\,c - nf)^2}{2\,nnffg\,((n-1)\,P+g)^2}\Phi\Phi,$$

qui ſe réduit à cette forme:

$$BG = \frac{g\,(P - g)}{(n-1)\,P + g} - \frac{ngg\,Q}{((n-1)\,P+g)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n\,(n-1)\,PP\,(P-g)\,(nP+g)\,((n-1)\,c - nf)^2}{2\,nnffg\,((n-1)\,P+g)^2}\Phi\Phi,$$

& n'ayant pas beſoin de connoitre l'angle BGN à ce dégrè de préciſion, nous aurons

$$BGN = \frac{((n-1)\,c - nf)\,((n-1)\,P + g)}{nfg}\Phi.$$

17. Poſons pour abréger $(n-1)\,c - nf = nh$, & nous aurons

$$P = \frac{f(c-f) + h(g-d)}{h};\; Q = \frac{(n-1)\,cc(c-f)\,(c-h)}{2\,nnfhh},$$

$$P - g = \frac{f(c-f) - dh}{h};\; (n-1)P + g = \frac{ff + nh\,(f+g) - (n-1)\,dh}{h},$$

$$nP + g = \frac{cf + nfh + (n+1)\,gh - ndh}{h};$$ d'où l'on tirera

$$BG = \frac{fg(c-f) - dgh}{ff + nh(f+g) - (n-1)dh} - \frac{(n-1)ccgg(c-f)(c-h)}{2nf(ff + nh(f+g) - (n-1)\,dh)^2}\Phi\Phi$$
$$- \frac{n(n-1)(f(c-f) + h(g-d))^2(f(c-f) - dh)(cf + nfh + (n+1)gh - ndh)}{2ffg\,(ff + nh\,(f + g - (n-1)\,dh)^2}\Phi\Phi.$$

Au lieu de c nous pouvons auſſi introduire la diſtance $EA = a$, alors ayant $c = a + f$, il devient $(n-1)\,a - f = nh$, &

$$BG = \frac{afg - dgh}{(n-1)af + ngh - (n-1)dh} - \frac{(n-1)gg(a+f)^2(a+f-h)}{2nf((n-1)af + ngh - (n-1)dh)^2}\Phi\Phi$$

$$- \frac{n(n-1)(af+h(g-d))^2(af-dh)(naf+(n+1)gh-ndh)}{2ffg((n-1)af+ngh-(n-1)dh)^2}\Phi\Phi.$$

18. Posons l'angle Φ infiniment petit pour avoir dans la premiere figure le point F, où l'image formée par les rayons infiniment proches de l'axe se trouve, & nous aurons $BF = \frac{g(af - dh)}{(n-1)af + ngh - (n-1)dh}$. Mais ayant $nh = (n-1)a - f$, cette valeur étant substituée donnera

$$BF = \frac{nafg + dfg - (n-1)adg}{n(n-1)a(f+g) - nfg + (n-1)df - (n-1)^2 ad}.$$

Donc, si la distance EA $= a$ du point lumineux est supposée infinie, BF sera la distance du foyer de ce verre, laquelle sera donc

$$= \frac{nfg - (n-1)dg}{n(n-1)(f+g) - (n-1)^2 d} = \frac{g}{n-1}\cdot\frac{nf - (n-1)d}{nf + ng - (n-1)d}.$$

19. Puisque la distance BF peut être regardée comme connue, posons BF $= \alpha$, de sorte que:

$$\begin{aligned} n(n-1)a\alpha(f+g) &- nafg + (n-1)adg - dfg = 0. \\ -(n-1)^2 a\alpha d \quad &- n\alpha fg + (n-1)\alpha df. \end{aligned}$$

Ayant alors pour nos formules trouvées cy-dessus §. 16. $P = \frac{g(\alpha + g)}{g - (n-1)\alpha}$, nous trouverons pour le point G la distance

$$BG = \alpha - \frac{(n-1)a(a+f)^2(a+(n+1)f)(g-(n-1)\alpha)^2}{2nnfgg((n-1)a-f)^2}\Phi\Phi$$

$$- \frac{(n-1)\alpha(\alpha+g)^2(\alpha+(n+1)g)((n-1)a-f)^2}{2nnff(g-(n-1)\alpha)^2}\Phi\Phi,$$

&

& l'angle BGN $= \frac{g((n-1)a-f)}{f(g-(n-1)\alpha)}\Phi$, l'angle AEM étant $=\Phi$,

où il faut remarquer que ces formules ne renferment plus l'épaisseur du verre AB $= d$, celle-ci étant éliminée par le moyen de l'équation trouvée entre a, α, f, g & d, d'où l'on a

$$d = \frac{naf(g-(n-1)\alpha) - ng\alpha((n-1)a-f)}{((n-1)a-f)(g-(n-1)\alpha)}.$$

20. Or l'équation trouvée entre a, α, f, g & d, se réduit à cette forme :

$$((na+n\alpha+d)f-(n-1)a(n\alpha+d))((na+n\alpha+d)g \\ -(n-1)\alpha(na+d)) = nn(n-1)^2 aa\alpha\alpha,$$

qui, à cause des facteurs, où les deux quantités f & g sont séparées, est fort commode pour trouver ces quantités f & g, les distances AE $= a$ & BF $= \alpha$, avec l'épaisseur BA $= d$, étant données.

21. Ces formules que je viens de trouver, renferment tout ce qui régarde la Dioptrique des verres sphériques. Mais je me borne ici principalement à chercher l'espace de diffusion FG, pour en déterminer ensuite la quantité de la confusion, dont la vision des objets en les régardant par de tels verres sera troublée. Mais, pour traiter cette matiere plus distinctement, il sera bon de comprendre tous les articles qu'elle renferme dans les problemes suivans.

PROBLEME I.

22. *Tant l'épaisseur du verre* AB, *que la distance* EA *du point lumineux avant le verre, & la distance de l'image principale* BF *derriere le verre étant données, déterminer la sphéricité des deux faces* PAP *&* PBP *du verre.* Fig. 1.

SOLUTION.

Soit l'épaisseur du verre AB $= \alpha$, la distance du point lumineux E avant le verre AE $= a$, & que l'image principale, qui est

 celle

celle que forment les rayons, qui passent par le milieu du verre, doive tomber au point F, sa distance derriere le verre étant BF $= \alpha$. Considérons maintenant le verre comme convexe de ses deux côtés, & soit le demi-diametre de la courbure de la face antérieure PAP $= f$, & de la face postérieure PBP $= g$: ce sont donc ces deux quantités f & g, qu'il faut déterminer. Or, posant la raison du sinus d'incidence à celui de réfraction de l'air dans le verre comme $n : 1$, les quantités f & g doivent être telles, que cette équation soit remplie:

$$((na + n\alpha + d) f - (n - 1) a (n\alpha + d)) ((na + n\alpha + d) g - (n - 1) \alpha (na + d)) = nn (n - 1)^2 aa\alpha\alpha,$$

d'où l'on voit, que notre probleme est indéterminé, & que les deux demi-diametres f & g peuvent être déterminés d'une infinité de manieres différentes. Pour donner donc une solution générale posons:

$$(na + n\alpha + d) f - (n - 1) a (n\alpha + d) = \frac{\mu}{\nu}\, n (n - 1) a\alpha,$$

$$(na + n\alpha + d) g - (n - 1) \alpha (na + d) = \frac{\nu}{\mu}\, n (n - 1) a\alpha,$$

d'où nous tirons:

$$f = \frac{(n - 1) a (\mu n\alpha + \nu n\alpha + \nu d)}{\nu (na + n\alpha + d)} = \frac{(n - 1) a ((\mu + \nu) n\alpha + \nu d)}{\nu (n (a + \alpha) + d)},$$

$$g = \frac{(n - 1) \alpha (\nu na + \mu na + \mu d)}{\mu (na + n\alpha + d)} = \frac{(n - 1) \alpha ((\mu + \nu) na + \mu d)}{\mu (n (a + \alpha) + d)},$$

& puisqu'on peut prendre à volonté les nombres μ & ν, ces formules fournissent une infinité de verres, qui satisferont à la question.

Corollaire.

23. Puisqu'il s'agit ici uniquement du rapport des nombres μ & ν, qui est arbitraire, rien n'empêche, que nous ne puissions poser $\mu + \nu = 1$, & les déterminations des rayons de courbure f & g deviendront plus simples:

$f =$

$$f = \frac{(n-1)a(n\alpha + \nu d)}{\nu(n(a+\alpha)+d)} \;\&\; g = \frac{(n-1)\alpha(na+\mu d)}{\mu(n(a+\alpha)+d)}.$$

PROBLEME II.

24. *Ayant trouvé par le probleme précédent tous les verres possibles, dont l'épaisseur est* AB $=$ d, *qui représentent le point lumineux* E *par les rayons qui passent par le milieu du verre au point* F, *si l'on donne au verre une certaine ouverture* MM, *trouver l'espace de diffusion de l'image* FG.

SOLUTION.

Posant les distances AE $= a$, BF $= \alpha$, les rayons de courbure des deux faces du verre PAP, PBP doivent être tels, qu'il soit

$$f = \frac{(n-1)a(n\alpha + \nu d)}{\nu(n(a+\alpha)+d)} \;\&\; g = \frac{(n-1)\alpha(na+\mu d)}{\mu(n(a+\alpha)+d)},$$

prenant pour μ & ν des nombres quelconques qu'il soit $\mu + \nu = 1$, soit maintenant le demi-diametre de l'ouverture du verre AM $= x$, & posant l'angle AEM $= \Phi$, nous aurons $x = a\Phi$, ou $\Phi = \frac{x}{a}$.

Or, substituant pour f & g les valeurs trouvées, à cause de

$$a + f = \frac{na(n\alpha + \nu a - \mu a + \nu d)}{\nu(n(a+\alpha)+d)};\; \alpha + g = \frac{n\alpha(na + \mu\alpha - \nu a + \mu d)}{\mu(n(a+\alpha)+d)},$$

$$a + (n+1)f = \frac{na(nn\alpha + \nu a - \mu\alpha + n\nu d)}{\nu(n(a+\alpha)+d)};\; \alpha + (n+1)g$$

$$= \frac{n\alpha(nna + \mu\alpha - \nu a + n\mu d)}{\mu(n(a+\alpha)+d)},$$

$$(n-1)a - f = \frac{n(n-1)a(\nu a - \mu\alpha)}{\nu(n(a+\alpha)+d)};\; g - (n-1)\alpha = \frac{n(n-1)\alpha(\nu a - \mu\alpha)}{\mu(n(a+\alpha)+d)},$$

nous obtiendrons :

$$BG = \alpha - \frac{na(n\alpha + \nu a - \mu\alpha + \nu d)^2 (nn\alpha + \nu a - \mu\alpha + n\nu d)}{2(n-1)^2(n\alpha + \nu d)(na + \mu d)^2}\,\Phi\Phi$$

—

$$-\frac{n\alpha(na+\mu\alpha-\nu a+\mu d)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a+n\mu d)}{2\,(n-1)^2\,(na+\mu d)\,(n\alpha+\nu d)^2}\,\Phi\Phi,$$

qui étant plus petit, le point G tombera plus près du verre que le point F, & l'intervalle de diffusion sera:

$$FG=\frac{\begin{array}{l}+na(n\alpha+\nu d)(n\alpha+\nu a-\mu\alpha+\nu d)^2\,(nn\alpha+\nu a-\mu\alpha+n\nu d)\\+n\alpha(na+\mu d)(na+\mu\alpha-\nu a+\mu d)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a+n\mu d)\end{array}}{2\,(n-1)^2\,(na+\mu d)^2\,(n\alpha+\nu d)}\,\Phi\Phi.$$

COROLLAIRE I.

25. Puisque $\Phi=\frac{x}{a}$, l'espace de diffusion sera

$$FG=\frac{\begin{array}{l}+na(n\alpha+\nu d)(n\alpha+\nu a-\mu\alpha+\nu d)^2\,(nn\alpha+\nu a-\mu\alpha+n\nu d)\\+n\alpha(na+\mu d)(na+\mu\alpha-\nu a+\mu d)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a+n\mu d)\end{array}}{2\,(n-1)^2\,(na+\mu d)^2\,(n\alpha+\nu d)^2}\cdot\frac{xx}{aa},$$

il est donc proportionnel au quarré du demi-diametre de l'ouverture du verre; & partant à l'ouverture même.

COROLLAIRE 2.

26. Si l'épaisseur du verre est si petite, qu'on la peut négliger sans une erreur sensible, il faut prendre

$$f=\frac{(n-1)\,a\alpha}{\nu\,(a+\alpha)}\ \&\ g=\frac{(n-1)\,a\alpha}{\mu\,(a+\alpha)},$$

& l'espace de diffusion sera

$$FG=\frac{(n\alpha+\nu a-\mu\alpha)^2\,(nn\alpha+\nu a-\mu\alpha)+(na+\mu\alpha-\nu a)^2\,(nna+\mu\alpha-\nu a)}{2\,nn\,(n-1)^2\,a\alpha}\cdot\frac{xx}{aa},$$

prenant μ & ν en sorte qu'il soit $\mu+\nu=1$.

COROLLAIRE 3.

26. Pour réduire cette formule, posons $\nu a-\mu\alpha=t$, pour avoir:

FG

$$FG = \frac{(n\alpha + t)^2\,(nn\alpha + t) + (na - t)^2\,(nna - t)}{2nn\,(n-1)^2\,a\alpha} \cdot \frac{xx}{aa},$$

qui se réduit à cette forme:

$$FG = \frac{(a+\alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha}\left(n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)t + (n+2)tt\right),$$

& ensuite à celle-ci

$$FG = \frac{(a+\alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3\alpha}\begin{cases} + aa\,(n^3 - n\,(2n+1)\,\nu + (n+2)\,\nu\nu) \\ - a\alpha\,(n^3 - n\,(2n+1) + 2\,(n+2)\,\mu\nu) \\ + \alpha\alpha\,(n^3 - n\,(2n+1)\,\mu + (n+2)\,\mu\mu). \end{cases}$$

Corollaire 4.

28. Enfin en général, quoique l'épaisseur du verre ne soit pas évanouissante, nous pourrons déterminer l'angle BGN, qui est trouvé cy-dessus $= \frac{g\,((n-1)\,a - f)}{f\,(g - (n-1)\,\alpha)} - \Phi$. Il sera donc, après avoir substitué les valeurs assignées pour f & g:

$$BGN = \frac{na + \mu d}{n\alpha + \nu d} \cdot \frac{x}{a},$$

& au cas de $d = 0$, on aura $BGN = \frac{x}{\alpha}$.

PROBLEME III.

29. *L'épaisseur du verre étant négligée, déterminer entre tous les verres* PP, *qui représentent le point lumineux* E, *dans le même point* F, *celui, qui produit le moindre espace de diffusion* FG.

SOLUTION.

Posant les distances AE $= a$, & BF $= \alpha$, les rayons des deux faces du verre doivent être pris tels, qu'il soit:

$$f = \frac{(n-1)\,a\alpha}{\nu\,(a+\alpha)} \quad \& \quad g = \frac{(n-1)\,a\alpha}{\mu\,(a+\alpha)},$$

où les nombres μ & ν ſont arbitraires pourvu qu'il ſoit $\mu + \nu = 1$. Il s'agit donc de trouver les valeurs de ces deux nombres, afin que l'eſpace de diffuſion FO devienne le plus petit, pendant qu'on donne au verre la même ouverture. Soit donc le demi-diametre de l'ouverture $AM = x$, & poſant $\nu a - \mu\alpha = t$, l'eſpace de diffuſion eſt trouvé:

$$FG = \frac{(a+\alpha)xx}{2n(n-1)^2 a^3 \alpha}(n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)(t + (n+2)tt),$$

où la ſeule quantité t renferme les nombres μ & ν. Cherchons donc la valeur de t, pour que cette expreſſion $n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - n(2n+1)(a-\alpha)t + (n+2)tt$, devienne la plus petite, cequi arrive en prenant $t = \frac{n(2n+1)(a-\alpha)}{2(n+2)}$: & alors cette quantité ſera

$$n^3(aa - a\alpha + \alpha\alpha) - \frac{nn(2n+1)^2(a-\alpha)^2}{4(n+2)},$$

qui ſe réduit à

$$\frac{nn}{4(n+2)}((4n-1)aa + 2(2nn+1)a\alpha + (4n-1)\alpha\alpha),$$

ou bien à cette forme

$$\frac{nn}{4(n+2)}((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha).$$

Donc le plus petit eſpace de diffuſion ſera

$$FG = \frac{n(a+\alpha)xx}{8(n+2)(n-1)^2 a^3 \alpha}((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha).$$

Or, pour trouver les nombres μ & ν, puiſque $t = \nu a - \mu\alpha$, nous aurons:

$$n(2n+1)a - n(2n+1)\alpha = 2(n+2)\nu a - 2(n+2)\mu\alpha.$$

Mais, à cauſe de $\nu = 1 - \mu$, il s'enſuit

$\mu =$

$$\mu = \frac{n(2n+1)a + (4+n-2nn)a}{2(n+2)(a+\alpha)} \;\&$$

$$\nu = \frac{n(2n+1)a + (4+n-2nn)\alpha}{2(n+2)(a+\alpha)},$$

& de là les rayons des deux faces du verre feront

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)a + (4+n-2nn)\alpha},$$

$$g = \frac{2(n-1)(n+2)a\alpha}{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)a}.$$

COROLLAIRE 1.

30. Si la diftance du point lumineux E eft infinie, pour avoir le moindre efpace de diffufion, il faut prendre

$$f = \frac{2(n-1)(n+2)\alpha}{n(2n+1)} \;\&\; g = \frac{2(n-1)(n+2)\alpha}{4+n-2nn},$$

& partant le rapport des rayons des deux faces du verre fera

$$f : g = 4+n-2nn : n(2n+1),$$

& l'efpace de diffufion fera alors $= \frac{n(4n-1)}{8(n+2)(n-1)^2} \cdot \frac{xx}{\alpha}$.

COROLLAIRE 2.

31. Si nous fuppofons avec M. Huygens la raifon de réfraction de l'air dans le verre $n : 1$ comme $3 : 2$, nous aurons comme lui pour le cas, où le point lumineux eft éloigné à l'infini, $f : g = 1 : 6$. Mais, puisqu'il eft plus exactement $n : 1 = 31 : 20$, le rapport entre f & g fera $f : g = 146 : 1271 = 1 : 8\tfrac{103}{146}$.

SCHOLION.

32. Ayant déterminé les verres qu'il faut employer, pour que le point lumineux E, dont la diftance au verre eft $EA = a$, foit repréfenté à la diftance $BF = \alpha$, en négligeant l'épaiffeur du

verre, le §. 18 nous fournit cette égalité $\alpha = \frac{afg}{(n-1)a(f+g)-fg}$. Donc, en posant la distance de l'objet EA $= a$ infinie, la distance du foyer de ces verres sera $= \frac{fg}{(n-1)(f+g)}$: or les rayons des faces f & g, doivent être tellement déterminés par les distances données a & α, qu'il soit $(n-1)\,a\alpha\,(f+g) = (a+\alpha)fg$, de sorte que $\frac{fg}{f+g} = \frac{(n-1)\,a\alpha}{a+\alpha}$. Par conséquent la distance de foyer de ces verres sera $= \frac{a\alpha}{a+\alpha}$, ou pour que le point lumineux E soit représenté en F, il faut employer un verre dont la distance de foyer soit $= \frac{a\alpha}{a+\alpha}$. Donc, si nous posons la distance de foyer $= p$, nous aurons $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha}$, ou $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$: & la distance de foyer du verre PP étant $= p$, si le point lumineux E se trouve devant le verre à la distance AE $= a$, son image sera présentée derriere le verre en F, à la distance BF $= \frac{ap}{a+p}$. Ensuite, pour que la distance de foyer du verre devienne $= p$, les rayons de ses faces doivent être pris en sorte qu'il soit $f = \frac{(n-1)p}{\nu}$ & $g = \frac{(n-1)p}{\mu}$, prenant $\mu + \nu = 1$, & alors l'espace de diffusion produit par le verre, dont le demi-diametre de l'ouverture est AM $= x$, sera

$$FG = \frac{xx}{p} \cdot \frac{1}{2n(n-1)^2 aa} \begin{cases} + aa(n^3 - n(2n+1)\nu + (n+2)\nu\nu) \\ - a\alpha(n^3 - n(2n+1) + (n+2)\mu\nu) \\ + \alpha\alpha(n^3 - n(2n+1)\mu + (n+2)\mu\mu). \end{cases}$$

Et si l'on prend:

$$\mu = \frac{n(2n+1)\alpha + (4+n-2nn)a}{2(n+2)(a+\alpha)} \;\&\; \nu = \frac{n(2n+1)a + (4+n-2nn)\alpha}{2(n+2)(a+\alpha)},$$

pour avoir le plus petit espace de diffusion, cet espace sera alors

$$FG = \frac{xx}{p} \cdot \frac{n}{8(n+2)(n-1)^2 aa} \; ((4n-1)(a+\alpha)^2 + 4(n-1)^2 a\alpha,$$

d'où l'on voit que cet espace FG, soit qu'il soit le plus petit ou non, est toujours un multiple de $\frac{xx}{p}$: & partant, pour abréger, dans la suite je poserai FG $= \frac{xx}{p}$ A. De même maniere, si l'on employe un autre verre, dont la distance de foyer soit $= q$, la distance du point lumineux devant lui $= b$, celle de l'image présentée derriere lui $= \mathfrak{b}$, de sorte que $q = \frac{b\mathfrak{b}}{b+\mathfrak{b}}$, & que le demi-diametre de l'ouverture soit $= y$, je marquerai l'espace de diffusion par $\frac{yy}{q}$. B: où B dépend de la même maniere des distances b & $\mathfrak{b}$ & des faces du verres, comme il a été enseigné par rapport à A.

PROBLEME IV.

33. *L'espace de diffusion* FG *étant donné, lorsqu'un oeil regarde l'image répandue par cet espace à une distance* FO, *où il voit distinctement les objets, déterminer la confusion dont la vision sera troublée.* Fig. 3.

SOLUTION.

Soit l'eſpace de diffuſion FG $= s$, & F le point où l'image formée par les rayons qui paſſent par le milieu de quelque verre, ſera repréſentée, & G le lieu de l'image formée par les rayons qui paſſent par les bords du verre, & qui coupent l'axe GO ſous un certain angle, qui ſoit $= \omega$. Que l'oeil ſe trouve maintenant en O, & ſoit la diſtance OF $= l$, à laquelle l'oeil voit diſtinctement les objets: or nous pouvons regarder l'oeil comme une petite chambre obſcure, formée d'un petit verre convexe oOo, dont la diſtance de foyer ſoit $= v$. L'image F ſera donc repréſentée en f, de ſorte que Of $= \frac{lv}{l - v}$, mais l'image G renvoyant dans l'oeil les rayons Go, Go, ſuppoſé que la pupille ſoit aſſès large pour les recevoir, l'intervalle Oo ſera $= (l + s)\,\omega$, & l'image G ſera repréſentée en g, de ſorte que Og $= \frac{(l + s)\,v}{l + s - v}$, & partant $fg = \frac{svv}{(l - v)\,(l + s - v)}$. Donc, ſi la rétine ſe trouvoit en f, l'image de G y ſeroit repréſentée par un cercle dont le rayon $f\varphi = \frac{\mathrm{O}o.\; fg}{\mathrm{OG}} = \frac{s\,\omega\,v}{l - v}$. Mais, ſi la rétine étoit entre les points f & g, ce rayon $f\varphi$ deviendroit plus petit, & évanouïroit même, ſi elle étoit en g; mais alors des images moyennes entre F & G y ſeroient exprimées par des cercles, & en cherchant le point entre f & g, où la rétine recevroit le moindre cercle, on trouve que le rayon de ce cercle ſera $= \frac{s\,\omega\,v}{4\,l}$, où je néglige v par rapport à la diſtance l. Poſant donc $v = 1$ pouce, le rayon de ce cercle ſera $= \frac{s\,\omega}{4\,l}$ pouce. Nous pourrons donc prendre le rayon de ce cercle pour la juſte meſure de la confuſion qui réſulte de l'eſpace de diffuſion FG $= s$, avec l'obliquité des rayons qui forment le le point G, laquelle eſt ſuppoſée $= \omega$. Or on ſuppoſe communément la diſtance l infiniment grande, ce que je ferai auſſi dans la ſuite pour la commodité du calcul; mais de là il ne faut pas conclure, que la quantité de la confuſion $\frac{s\omega}{4l}$ ſe réduiſe à rien, car nous verrons bientôt, que dans ce cas la quantité s devient auſſi infiniment grande, de ſorte que $\frac{s\omega}{4l}$, ne laiſſe pas d'être une quantité finie.

COROLLAIRE.

34. Si l'ouverture de la pupille étoit moindre que la baſe du cone lumineux oGo, il n'y entreroit aucun rayon du point G, & la confuſion ſeroit cauſée par les points de l'eſpace FG, plus proches du point F; la confuſion ſeroit donc alors moindre.

PROBLEME V.

35. *Si l'on regarde par un ſeul verre* PP *un objet* E, *déterminer la confuſion cauſée par l'ouverture du verre.*

SOLUTION.

Soit la diſtance de foyer du verre PP $= p$, le rayon de ſa face antérieure PAP $= f$, de la poſtérieure PBP $= g$, & prenant $n = \frac{31}{20}$, & les nombres μ & ν à volonté, qu'il ſoit $\mu + \nu = 1$, on doit prendre en négligeant l'épaiſſeur du verre $f = \frac{(n-1)p}{\nu}$ $= \frac{11p}{20\nu}$ & $g = \frac{(n-1)p}{\mu} = \frac{11p}{20\mu}$. Soit maintenant la diſtance de l'objet AE $= a$, & que ſon image formée par les rayons qui paſſent par le milieu du verre, tombe en F, poſant la diſtance BF $= \alpha$, & on aura $\alpha = \frac{ap}{a-p}$. Mais, en quelque point de l'axe O que l'oeil ſe trouve, il faut que la diſtance OF ſoit infinie, & partant

$\alpha =$

$\alpha = \infty$ & $a = p$, dont la distance de l'objet $EA = a$ doit être égale à la distance de foyer du verre p. Posons à présent le demi-diametre de l'ouverture du verre $AM = x$, & mettons pour abréger

$$\frac{n^3 - n(2n+1)\mu + (n+2)\mu\mu}{2n(n-1)^2} = M,$$

$$\frac{n^3 - n(2n+1)\nu + (n+2)\nu\nu}{2n(n-1)^2} = N,$$

$$\frac{n^3 - n(2n+1) + 2(n+2)\mu\nu}{2n(n-1)^2} = L,$$

l'espace de diffusion sera:

$$FG = \frac{xx}{p} \cdot \frac{1}{aa}(Naa - La\alpha + M\alpha\alpha),$$

ou à cause de $\alpha = \infty$, nous aurons $FG = s = \frac{xx}{p} \cdot \frac{M\alpha\alpha}{aa}$; ensuite l'angle de l'obliquité des rayons au point G étant $= \frac{x}{\alpha} = \omega$, & la distance BO finie, on aura $l = -\alpha$, ou $l = \alpha$, puisque le signe ne fait rien dans la mesure de la confusion $\frac{s\omega}{4l}$, la confusion sera $= \frac{x^3}{p} \cdot \frac{M}{4aa}$, & à cause de $a = p$, elle sera $= \frac{1}{4}M \cdot \frac{x^3}{p^3}$.

Corollaire 1.

36. C'est le cas des microscopes simples: & l'on voit, que pour que la confusion devienne également insensible, les verres étant semblables, il faut que les demi-diametres de leurs ouvertures soient proportionnels à leurs distances de foyer.

Corollaire 2.

37. Puisque $n = \frac{31}{20} = 1,55$, nous aurons:

M =

$$M = 3{,}971075 - 6{,}776960\,\mu + 3{,}785658\,\mu\mu,$$
$$N = 3{,}971075 - 6{,}776860\,\nu + 3{,}785658\,\nu\nu,$$
$$L = 3{,}971075 - 6{,}776860 \quad + 7{,}571316\,\mu\nu.$$

Donc, si le verre est plano-convexe, & qu'il tourne sa face plane vers l'objet, on aura $\nu = 0$, $\mu = 1$, donc $M = 0{,}979873$, & la confusion $= 0{,}244968 \cdot \frac{x^3}{p^3}$. Mais, s'il tournoit sa convexité vers l'objet, à cause de $\mu = 0$ & $\nu = 1$, il seroit $M = 3{,}971075$, & la confusion $= 0{,}992769 \cdot \frac{x^3}{p^3}$, seroit plus de 4 fois plus grande que dans le cas précédent.

Corollaire 3.

38. Si l'on faisoit le verre également convexe de part & d'autre, ce qui arrive en prenant $\mu = \nu = \frac{1}{2}$, on auroit $M = 1{,}529064$, & la confusion seroit $= 0{,}382266 \cdot \frac{x^3}{p^3}$; elle tiendroit donc un certain milieu entre les deux cas précédens, & seroit à la premiere confusion comme 3 à 2 à peu près.

Corollaire 4.

39. Mais, pour que la confusion devienne la plus petite pour la même ouverture du verre, il faut prendre $\mu = \frac{n\ (2n + 1)}{2\ (n + 2)}$ $= 0{,}895070$ & $\nu = 0{,}104930$, d'où résulte $M = 0{,}938192$, & la plus petite confusion sera $= 0{,}234548 \cdot \frac{x^3}{p^3}$.

PROBLEME VI.

40. *L'espace de diffusion* FG *avec l'obliquité des rayons en* G *étant donné, causé par un verre quelconque, s'il se trouve en* B *un au-* Fig. 4.

tre

ere verre QBQ, *trouver l'espace de diffusion* Hh, *que cet autre verre produira.*

SOLUTION.

Soit l'espace de diffusion FG $= s$, & l'obliquité des rayons en G, ou l'angle BGM $= \omega$, ensuite la distance BF $= b$, par rapport à laquelle l'espace FG $= s$ peut être considéré comme fort petit: soit de plus la distance de foyer du verre QQ $= q$, & l'image du point F sera représentée en H, ensorte que $b\mathrm{H} = \frac{bq}{b-q}$, qui soit $= \beta$, & partant $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$. C'est donc de ces deux distances b & β, que le verre peut être déterminé d'une infinité de manieres, comme je l'ai fait voir cy-dessus. Maintenant, si le point G jettoit des rayons qui passassent par le milieu du verre, ils présenteroient son image en η, de sorte que H$\eta = \frac{\beta\beta}{bb}\cdot s$; mais les rayons qui partent du point G, étant obliques, passeront par le verre au point M, de sorte que BM $= b\omega$, ce qui tient lieu du demi-diametre de l'ouverture du verre: & à cause de cela l'image du point sera représentée en h, & on aura:

$$\eta h = \frac{bb\omega\omega}{q}\cdot\frac{1}{bb}\,(\mathrm{N}bb - \mathfrak{L}b\beta + \mathrm{M}\beta\beta),$$

& l'obliquité des rayons en h sera $= \frac{b\omega}{\beta}$. Donc l'espace de diffusion tout entier sera:

$$\mathrm{H}h = \frac{\beta\beta}{bb}\cdot \mathrm{FG} + \frac{\omega\omega}{q}\,(\mathrm{N}bb - \mathfrak{L}b\beta + \mathrm{M}\beta\beta).$$

COROLLAIRE.

41. Si un oeil placé en O regardoit cette image diffuse Hh; premierement il faudroit que la distance bH $= \beta$ fut infinie, & ensuite la quantité de confusion seroit

$l\omega$

$$\frac{b\omega}{\beta}\,.\,\mathrm{H}h\,.\,\frac{1}{4l} = \frac{b\omega}{4\beta\beta}\,.\,\mathrm{H}h,$$ à cause de $l = \beta$.

Cette confusion seroit donc, puisque $\beta = \omega$,

$$\frac{\omega}{4b}\,.\,\mathrm{FG} + \frac{b\omega^2}{4q}\,.\,\mathrm{M} = \frac{\omega}{4b}\,,\,\mathrm{FG} + \tfrac{1}{4}\mathrm{M}\,.\,\frac{b\omega^2}{q}.$$

PROBLEME VII.

42. *Si l'on regarde par deux verres* PP *&* QQ, *placés sur le même axe à la distance* AB, *un objet* E, *déterminer la confusion qui sera causée par l'ouverture des verres,*

SOLUTION.

Que les rayons, qui passent par le milieu des verres, présentent l'objet par le premier verre PP en F, & ensuite par le second verre en G. Qu'on pose les distances:

$\mathrm{EA} = a$, $\mathrm{AF} = \alpha$, $\mathrm{FB} = b$, & $\mathrm{BG} = \beta$, donc $\mathrm{AB} = \alpha + b$, soit de plus la distance de foyer du verre $\mathrm{PP} = p$, & du verre $\mathrm{QQ} = q$, & on aura $p = \dfrac{a\alpha}{a+\alpha}$ & $q = \dfrac{b\beta}{b+\beta}$. Posons outre cela le demi-diametre de l'ouverture du verre $\mathrm{PP} = x$, & du verre $\mathrm{QQ} = \eta$: supposons maintenant que les faces des verres soient déterminées des distances a, α & b, β, par les nombres μ & ν, comme il est enseigné cy-dessus; & le verre PP produira l'espace de diffusion:

$$\mathrm{F}f = \frac{xx}{aap}\,(\mathrm{N}aa - \mathfrak{L}a\alpha + \mathrm{M}\alpha\alpha),$$

& l'obliquité des rayons en f sera $= \dfrac{x}{\alpha}$. Maintenant, par le probleme précédent, le second verre QQ produira l'espace de diffusion

$$\mathrm{G}g = \frac{\beta\beta}{bb}\,.\,\mathrm{F}f + \frac{xx}{\alpha\alpha q}\,(\mathrm{N}'bb - \mathfrak{L}'b\beta + \mathrm{M}'\beta\beta),$$

à cauà cause de $\omega = \frac{x}{\alpha}$, pourvu qu'il soit $\eta > \frac{bx}{\alpha}$. J'ajoute ici aux lettres N, L, M de petites barres, pour les distinguer de celles qui conviennent au verre PP: car, puisque les nombres μ & ν peuvent être différens dans les deux verres, cette distinction est nécessaire.

Maintenant, pour que l'oeil placé en O regarde son objet comme éloigné à l'infini, il faut qu'il soit $\beta = \infty$, & alors la confusion sera $= \frac{bx}{4\alpha\beta\beta} \cdot Gg = \frac{x}{4\alpha b} \cdot Ff + \frac{1}{4} M' . \frac{bx^3}{\alpha^3 q}$,

où il faut remarquer qu'à cause de $\beta = \infty$, il y a $b = q$.

Donc la quantité de confusion cherchée est:

$$\frac{x^3}{4aa\alpha bp}(Naa - \mathfrak{L}a\alpha + M\alpha\alpha) + \tfrac{1}{4}M' . \frac{x^3}{\alpha^3}, \text{ ou bien}$$

$$\frac{x^3}{4\alpha}\left(\frac{Naa - \mathfrak{L}a\alpha + M\alpha\alpha}{aabp} + \frac{M'}{\alpha\alpha}\right).$$

Corollaire I.

43. Si les verres ont la forme qui leur convient, pour que chacun produise le moindre espace de diffusion, il faut en substituant pour n sa valeur $\frac{31}{20}$, qu'il soit

pour le verre PP le rayon de sa face

antérieure $= \frac{a\alpha}{1,62740\ a + 0,19078\ \alpha}$, & de la

postérieure $= \frac{a\alpha}{1,62740\ \alpha + 0,19078\ a}$;

pour le verre QQ le rayon de sa face

antérieure $= \frac{b\mathfrak{G}}{1,62740\ b + 0,19078\ \mathfrak{G}}$, & de la

po

postérieure $= \dfrac{b\beta}{1,62740\ \beta + 0,19078\ b}$.

Corollaire 2.

44. Or, donnant aux verres cette forme qui leur est la plus propre, l'espace de diffusion produit par le verre PP est

$$Ff = \frac{xx}{aap}\,(0,93819\,(a+\alpha)^2 + 0,21831\ a\alpha),\ \text{ou bien}$$

$$Ff = \frac{xx}{aap}\cdot 0,93819\ ((a+\alpha)^2 + 0,23269\ a\alpha).$$

Nous n'aurons donc qu'à mettre au lieu de $Naa - \mathfrak{L}a\alpha + M\alpha\alpha$ cette valeur $0,93819\ ((a+\alpha)^2 + 0,23269\ a\alpha)$, de sorte que:

$$M = N = 0,93819 \quad \& \quad \mathfrak{L} = 2,09469.$$

Corollaire 3.

45. Dans notre cas donc la confusion sera

$$\frac{0,23455\ x^3}{\alpha}\left(\frac{(a+\alpha)^2 + 0.23269\ a\alpha}{aabp} + \frac{1}{a\alpha}\right),$$

quand on donne aux deux verres la figure marquée, qui produit le moindre espace de diffusion. Et alors la confusion causée dans la vision sera aussi la plus petite.

Corollaire 4.

46. En général donc, si un verre QQ, dont la distance de foyer est $= q$, représente un objet qui se trouve devant lui à la distance $= b$, à une distance derriere lui qui est $= \beta$, de sorte que $q = \dfrac{b\beta}{b+\beta}$, & que les faces du verre soient prises comme dans le coroll. 3. le demi-diametre de son ouverture étant $= \eta$, l'espace de diffusion sera:

$$\frac{0,93819\ \eta\eta}{bbq}((b+\beta)^2+0,23269\ b\beta).$$

SCHOLIE.

47. Puisque je ne considérerai dans la suite que des verres qui produisent déjà le moindre espace de diffusion, ces deux nombres 0,93819 & 0,23269 se rencontreront toujours, je mettrai pour abréger μ pour le premier, & ν pour l'autre, n'ayant plus besoin de ces deux lettres pour marquer généralement les faces des verres. Ainsi, dans le cas du dernier corollaire, l'espace de diffusion sera $=$

$\frac{\mu\eta\eta}{bbq}((b+\beta)^2+\nu b\beta)$, posant toujours $\mu = 0,93819$ &

$\nu = 0,23269$: pourvu que les faces de ce verre soient formées suivant les formules données (43).

PROBLEME VIII.

Planche VI. Fig. 6. 48. *Si l'on regarde un objet* E *par trois verres* PP, QQ *&* RR, *rangés sur le même axe, déterminer la confusion causée par leur ouverture.*

SOLUTION.

Que les rayons qui passent par le milieu des verres, représentent successivement l'image de l'objet en F, G & H, & qu'on nomme les distances:

$EA = a$, $AF = \alpha$; $FB = b$; $BG = \beta$; $GC = c$; & $CH = \gamma$;

& les distances des verres seront $AB = \alpha + b$ & $BC = \beta + c$. Soient aussi p, q, r les distances de foyers des trois verres, & on aura

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma}.$$

Je suppose de plus ces verres formés en sorte, que posant pour abréger les nombres

$1,62740 = \sigma$ & $0,19078 = \tau$,

les

les rayons des faces ſoyent :

Rayon de la face		Pour le verre P P	Pour le verre QQ	Pour le verre R R
antérieure	$=$	$\frac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$	$\frac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$
poſtérieure	$=$	$\frac{a\alpha}{\sigma\alpha + \tau a}$	$\frac{b\beta}{\sigma\beta - \tau b}$	$\frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$

Cela poſé, ſoit le demi-diametre de l'ouverture du verre PP $= x$, & l'eſpace de diffuſion cauſé par le premier verre ſera : $Ff = \frac{\mu xx}{aap}((a + \alpha)^2 + \nu a\alpha)$, & l'obliquité des rayons en $f = \frac{x}{\alpha}$. De là il s'enſuit que l'eſpace de diffuſion produit par le ſecond verre QQ ſera

$$Gg = \frac{\beta\beta}{bb} \cdot Ff + \frac{\mu xx}{\alpha\alpha q}((b + \beta)^2 + \nu b\beta),$$

& l'obliquité des rayons en $g = \frac{bx}{\alpha\beta}$ De la même maniere nous conclurons l'eſpace de diffuſion produit par le troiſieme verre RR,

$$Hh = \frac{\gamma\gamma}{cc} \cdot Gg + \frac{\mu bbxx}{\alpha\alpha\beta\beta\nu}((c + \gamma)^2 + \nu c\gamma).$$

Maintenant pour procurer à l'oeil placé en O une viſion juſte il faut qu'il ſoit $\gamma = \infty$ & $l = \infty$, d'où la confuſion cauſée dans la viſion ſera $= \frac{bcx}{4\alpha\beta\gamma\gamma} \cdot Hh$. Or, ſubſtituant les valeurs de Gg & Ff, nous aurons

$$Hh = \frac{\mu\beta\beta\gamma\gamma xx}{aabbccp}((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha) + \frac{\mu\gamma\gamma xx}{\alpha\alpha ccq}((b + \beta)^2 + \nu b\beta)$$
$$+ \frac{\mu bbxx}{\alpha\alpha\beta\beta r}((c + \gamma)^2 + \nu c\gamma),$$

d'où

d'où l'on obtient à cauſe de $\gamma = \infty$ la confuſion cherchée

$$\frac{\mu b c x^3}{4\alpha\mathfrak{b}}\left(\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}(a+\alpha)^2+\nu a\alpha}{aabbccp}+\frac{(b+\mathfrak{b})^2+\nu b\mathfrak{b}}{\alpha\alpha ccq}+\frac{bb}{\alpha\alpha\beta\beta r}\right),$$

mais il faut pour cela qu'il ſoit:

le demi-diametre de l'ouverture $\begin{cases}\text{du verre QQ} > \dfrac{bx}{\alpha},\\ \text{du verre RR} > \dfrac{bcx}{\alpha\beta},\end{cases}$

puisque, ſans cette condition, les rayons qui paſſent par les bords du premier verre PP, ne ſeroient pas transmis par les deux autres verres.

Corollaire 1.

49. S'il n'y avoit que les deux verres PP & QQ, nous avons trouvé dans le probleme précédent, que la confuſion ſeroit

$$\frac{\mu b x^3}{4\alpha}\left(\frac{(a+\alpha)^2+\nu a\alpha}{aabbp}+\frac{1}{\alpha\alpha q}\right),$$

& cette forme peut mieux être comparée avec celle que nous venons de trouver pour trois verres, & que nous trouverons pour pluſieurs.

Corollaire 2.

50. Puisque la viſion juſte exige, qu'il ſoit $\gamma = \infty$, il y aura $r = c$, tout comme il doit y avoir dans le cas de deux verres $q = b$, & dans le cas d'un ſeul verre $p = a$; or, dans le cas d'un ſeul verre, la confuſion eſt $= \dfrac{\mu x^3}{4} \cdot \dfrac{1}{aap}$.

PROBLEME IX.

Fig. 7. 51. *Si l'on regarde un objet* E *par quatre verres* PP, QQ, RR *&* SS, *rangés ſur le même axe* EO, *déterminer la confuſion cauſée par l'ouverture des verres.*

SOLUTION.

Que les rayons qui passent par le milieu des verres représentent successivement l'image de l'objet en F, G, H & I, & qu'on nomme les distances

EA $= a$; AF $= \alpha$; FB $= b$; BG $= \beta$; GC $= c$; CH $= \gamma$; HD $= d$; & DI $= \delta$,

& les intervalles entre les verres seront

AB $= \alpha + b$; BC $= \beta + c$; CD $= \gamma + d$.

Soient aussi p, q, r, s les distances de foyer de nos quatre verres, & on aura:

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ \&\ s = \frac{d\delta}{d+\delta}.$$

Je suppose ces verres formés selon la regle prescrite cy-dessus de sorte qu'il y ait:

Pour le verre	le rayon de la face antérieure	le rayon de la face postérieure
le premier PP	$\frac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$	$\frac{a\alpha}{\sigma\alpha + \tau a}$
le second QQ	$\frac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$	$\frac{b\beta}{\sigma\beta + \tau b}$
le troisieme RR	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$	$\frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$
le quatrieme SS	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$

posant $\sigma = 1,62740$ & $\tau = 0,19078$.

Maintenant, pour trouver les espaces de diffusion, nous pourrons d'abord commencer par le troisieme Hh, qui a été trouvé dans le probleme précédent

$$Hh = \mu xx \left(\frac{\beta\beta\gamma\gamma((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccp} + \frac{\gamma\gamma(b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccq} + \frac{bb(c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha bbr}\right),$$

& l'obliquité en h étant $= \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$, l'espace quatrieme de diffusion sera

$$Ii = \frac{\delta\delta}{dd} Hh + \frac{\mu bbccxx}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s}((d+\delta)^2 \nu d\delta).$$

Or, prenant $\delta = \infty$ en quelqu'endroit de l'axe O, derriere le verre SS, que se trouve l'oeil, la confusion causée dans la vision sera $= \frac{bcdx}{4\alpha\beta\gamma\delta\delta} . Ii$: cette confusion sera donc

$$\frac{\mu bcdx^3}{4\alpha\beta\gamma}\left\{\begin{array}{l} + \frac{\beta\beta\gamma\gamma((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddp} + \frac{\gamma\gamma((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq} \\ + \frac{bb((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddr} + \frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s} \end{array}\right\},$$

pourvu qu'il soit comme je suppose

$$\text{le demi-diametre de l'ouverture} \left\{\begin{array}{l} \text{du verre QQ} > \frac{bx}{\alpha}, \\ \text{du verre RR} > \frac{bcx}{\alpha\beta}, \\ \text{du verre SS} > \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}. \end{array}\right.$$

Et puisque $\delta = \infty$, il y aura $s = d$.

Or pour le probleme suivant nous aurons l'espace de diffusion

$$Ii = \mu xx \left\{\begin{array}{l} + \frac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddp} + \frac{\gamma\gamma\delta\delta((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq} \\ + \frac{bb\delta\delta((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha bbddr} + \frac{bbcc((d+\delta)^2 + \nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s} \end{array}\right\}.$$

PRO-

PROBLEME X.

52. *Si l'on regarde un objet* E *par* 5 *verres* PP, QQ, RR, SS *&* TT *rangés ſur le même axe* EO, *déterminer la confuſion cauſée par l'ouverture de ces verres.* Fig. 1.

SOLUTION.

Que les rayons qui paſſent par le milieu des verres, repréſentent ſucceſſivement l'image de l'objet dans les points F, G, H, I & K, & qu'on nomme les diſtances

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d;\ IE = e,$$
$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma;\ DI = \delta;\ EK = \epsilon.$$

Soient auſſi p, q, r, s, t les diſtances de foyer de ces cinq verres de ſorte que

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ s = \frac{d\delta}{d+\delta};\ t = \frac{e\epsilon}{e+\epsilon},$$

& ſi nous ſuppoſons que les faces de chaque verre ſoient formées ſelon nos formules trouvées pour qu'elles produiſent le moindre eſpace de diffuſion, nous déterminerons aiſément la confuſion dont la viſion ſera troublée. Pour cet effet la diſtance ϵ doit être infinie, & partant $t = e$; & alors la confuſion cauſée dans la viſion ſera:

$$\frac{\mu bcdex^3}{4\alpha\beta\gamma\delta}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\,((a+\alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccddeep}, \\ + \dfrac{\gamma\gamma\delta\delta\,((b+\beta)^2 + \nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddeeq}, \\ + \dfrac{bb\delta\delta\,((c+\gamma)^2 + \nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddeer}, \\ + \dfrac{bbcc\,(d+\delta)^2 + \nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ees}, \\ + \dfrac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta t}, \end{array}\right.$$

pour-

pourvu que ces conditions ayent lieu, que

$$\text{le demi-diametre de l'ouverture} \left\{ \begin{array}{l} \text{du verrre QQ} > \dfrac{bx}{\alpha}, \\[2ex] \text{du verre RR} > \dfrac{bcx}{\alpha\beta}, \\[2ex] \text{du verre SS} > \dfrac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}, \\[2ex] \text{du verre TT} > \dfrac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{array} \right.$$

CONCLUSIONS.

53. Donc, si le nombre des verres est quelconque, on aura les distances de foyer p, q, r, s, t, u &c. puisque chacune est déterminée par la distance de l'image, dont ce verre reçoit les rayons, & par la distance de l'image qui est présentée par ce verre, savoir ces distances étant

$$EA = a;\ FB = b;\ GC = c;\ HD = d;\ IE = e \text{ \&c.}$$
$$AF = \alpha;\ BG = \beta;\ CH = \gamma;\ DI = \delta;\ EK = \epsilon \text{ \&c.}$$

les distances de foyer seront

$$p = \frac{a\alpha}{a+\alpha};\ q = \frac{b\beta}{b+\beta};\ r = \frac{c\gamma}{c+\gamma};\ s = \frac{d\delta}{d+\delta};\ t = \frac{e\epsilon}{e+\epsilon} \text{ \&c.}$$

& les intervalles entre les verres

$$AB = \alpha + b;\ BC = \beta + c;\ CD = \gamma + d;\ DE = \delta + e \text{ \&c.}$$

Or, pour les faces de chaque verre, je suppose qu'elles sont formées en sorte qu'elles produisent le moindre espace de diffusion. Ainsi, posant $\sigma = 1,52740$ & $\tau = 0,19078$, les verres doivent être construits en sorte.

Pour

Pour le	Rayon de la face antérieure	Rayon de la face postérieure
premier verre PP	$\frac{a\alpha}{\sigma a + \tau\alpha}$	$\frac{a\alpha}{\sigma\tau + \tau a}$
second verre QQ	$\frac{b\beta}{\sigma b + \tau\beta}$	$\frac{b\beta}{\sigma\beta + \tau b}$
troisieme verre RR	$\frac{c\gamma}{\sigma c + \tau\gamma}$	$\frac{c\gamma}{\sigma\gamma + \tau c}$
quatrieme verre SS	$\frac{d\delta}{\sigma d + \tau\delta}$	$\frac{d\delta}{\sigma\delta + \tau d}$
&c.	&c.	&c.

Ensuite le demi-diametre de l'ouverture du premier verre PP étant posé AP $= x$, je suppose

le demi-diametre de l'ouverture

du verre QQ $> \frac{bx}{\alpha}$,

du verre RR $> \frac{bcx}{\alpha\beta}$,

du verre SS $> \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$,

du verre TT $> \frac{bcdex}{\alpha\beta\gamma\delta}$,

&c.

Cela posé, en marquant pour abréger les nombres

$$0,93819 = \mu \quad \& \; 0,23269 = \nu,$$

la confusion pour chaque nombre de verres causée dans la vision sera, comme les cas suivans la marquent.

I. Cas.

54. Lorsqu'il n'y a qu'un ſeul verre PP; on aura $\alpha = \infty$ & $p = a$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu x^3}{4} \cdot \frac{1}{aap}.$$

II. Cas.

55. Lorsqu'il y a deux verres PP & QQ; on aura $\beta = \infty$ & $q = b$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu b x^3}{4\alpha}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{(a + \alpha)^2 + \nu a\alpha}{aabbp} \\[2ex] + \dfrac{1}{\alpha\alpha q} \end{array}\right\}.$$

III. Cas.

56. Lorsqu'il y a trois verres PP, QQ & RR; on aura $\gamma = \infty$ & $r = c$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu b c x^3}{4\alpha\beta}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta((a + \alpha)^2 + \nu a\alpha)}{aabbccp}, \\[2ex] + \dfrac{(b + \beta)^2 + \nu b\beta}{\alpha\alpha ccq}, \\[2ex] + \dfrac{bb}{\alpha\alpha\beta\beta r}. \end{array}\right.$$

IV. Cas.

57. Lorsqu'il y a quatre verres PP, QQ, RR & SS; on aura $\delta = o$ & $s = d$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu bcdx^3}{4\alpha\beta\gamma}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\,((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{aabbccddp}, \\ + \dfrac{\gamma\gamma\,((b+\beta)^2+\nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddq}, \\ + \dfrac{bb\,((c+\gamma)^2+\nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddr}, \\ + \dfrac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma s}. \end{array}\right.$$

V. CAS.

57. Lorsqu'il y a cinq verres PP, QQ, RR, SS & TT, on aura $\varepsilon = 0$, $t = e$; & la confuſion ſera:

$$\frac{\mu bcdex^3}{4\alpha\beta\gamma\delta}\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\,((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{aabbccddeep}, \\ + \dfrac{\gamma\gamma\delta\delta\,((b+\beta)^2+\nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddeeq}, \\ + \dfrac{bb\delta\delta\,((c+\gamma)^2+\nu c\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta ddeer}, \\ + \dfrac{bbcc\,((d+\delta)^2+\nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma ees}, \\ + \dfrac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta t}. \end{array}\right.$$

VI. CAS.

59. Lorsqu'il y a ſix verres PP, QQ, RR, SS, TT & VV; on aura $\zeta = 0$, & $\upsilon = f$; & la confuſion ſera exprimée en ſorte:

$$\frac{\mu bcdefx^3}{4\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\epsilon\epsilon((a+\alpha)^2+\nu a\alpha)}{aabbccddeeffp},\\
+\dfrac{\gamma\gamma\delta\delta\epsilon\epsilon((b+\beta)^2+\nu b\beta)}{\alpha\alpha ccddeeffq},\\
+\dfrac{bb\delta\delta\epsilon\epsilon((c+\gamma)^2+\nu c\gamma)}{\alpha\alpha\beta\beta ddeeffr},\\
+\dfrac{bbcc\epsilon\epsilon((d+\delta)^2+\nu d\delta)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma eeffs},\\
+\dfrac{bbccdd((e+\epsilon)^2+\nu e\epsilon)}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta fft},\\
+\dfrac{bbccddee}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\epsilon\epsilon v}.
\end{array}\right.$$

SCHOLIE.

60. Ces formules ſuffiſent pour nous faire connoître la loi, par le moyen de laquelle on les pourra continuer à de plus grands nombres de verres. Or ces formules ſont de la derniere importance dans la Théorie des Téleſcopes & Microſcopes, puisqu'on en peut déterminer d'abord la confuſion, avec laquelle ces inſtrumens nous repréſentent les objets: or je ne parle ici que de la confuſion, qui eſt cauſée par l'ouverture des verres. Cette confuſion eſt donc proportionnelle au cube du demi-diametre de l'ouverture du premier verre, qu'on nomme l'objectif; de ſorte que, ſi l'on doubloit ce demi-diametre dans le même inſtrument, la diſpoſition des verres demeurant auſſi la même, la confuſion deviendroit huit fois plus grande. Ainſi réciproquement, en rétréciſſant le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif à la moitié, on rendra par ce moyen la confuſion huit fois plus petite.

61. Mais, en rétréciſſant le diametre de l'ouverture de l'objectif, la clarté dont on voit les objets en devient plus petite ſelon la raiſon

son quarrée; par cette raison on est obligé de souffrir quelque petite confusion pour ne pas perdre trop de la clarté. L'expérience nous a donc donné à connoitre un certain degré de confusion, que nous pouvons aisément admettre, sans que la vision en soit sensiblement troublée. Pour connoitre ce degré, il suffit que nous sachions pour un seul instrument l'ouverture du verre objectif qui peut être admise. Mr. Huygens a remarqué que, dans une lunette à deux verres, où la distance de foyer de l'objectif étoit de 30 pieds, ou de 360 pouces, & celui de l'oculaire de trois pouces, l'objectif peut bien admettre une ouverture, dont le demi-diametre est $1\frac{1}{2}$ pouce. Nous n'avons donc qu'à mettre dans notre formule du II. Cas, $a = \infty$, $\alpha = p = 360$, $b = 3$, $q = 3$, & $x = 1\frac{1}{2}$, & l'expression de la confusion devient $= \frac{\mu}{460000}$ pouces, à peu près. Mais, puisque la distance de foyer de l'objectif étoit si grande, peut-être que ce verre a eu quelque petit défaut, qui a été cause qu'il n'a pas admis une plus grande ouverture. Examinons donc encore un autre exemple d'une bonne lunette à deux verres, dont l'objectif avoit 144 pouces de foyer, & l'oculaire 3 pouces, le demi-diametre de l'ouverture de celui-là étant 1 pouce: ces valeurs étant substituées donnent la confusion $= \frac{\mu}{250000}$, presque deux fois plus grande que dans la lunette précédente. D'où je conclus que dans les lunettes on peut bien souffrir une confusion, qui étant exprimée selon notre maniere ne surpasse pas $\frac{\mu}{300000}$ pouce.

62. Or dans les Microscopes on souffre ordinairement une beaucoup plus grande confusion; car, dans un microscope simple, on ne doute pas de donner au verre une ouverture, dont le demi-diametre soit la dixieme partie de la distance de foyer du verre, & on le fait ordinairement encore plus grand. Or posant dans notre formule du premier cas $\frac{x}{a}$, ou $\frac{x}{p} = \frac{1}{10}$, la confusion sera $= \frac{\mu}{4000}$, de sor-

te que dans les Microſcopes nous ſouffrons une confuſion à peu près 100 fois plus grande que dans les Téleſcopes: d'où l'on voit qu'il s'en faut beaucoup, que les Microſcopes ſoient encore portés au même degré de perfection que les Téleſcopes. Mais, comme j'ai ſuppoſé dans les formules qui expriment pour chaque cas la confuſion, que tous les verres ayent la forme qui leur convient pour que chacun produiſe déjà le moindre eſpace de diffuſion, & que dans les exemples examinés les verres n'ont pas eu cette forme avantageuſe, la confuſion qu'on y ſouffre actuellement y ſera plus grande: d'où il ſemble que faiſant uſage de cette figure dans les Téleſcopes, nous pourrons bien admettre une confuſion, dont la quantité ne ſurpaſſe pas le terme $\frac{\mu}{200000}$: & ſi l'on pouvoit ramener au même terme la confuſion des Microſcopes, il n'y a aucun doute que ces inſtrumens ne fuſſent portés à un beaucoup plus haut dégré de perfection.

63. Les formules que je viens de trouver pour la confuſion, peuvent auſſi ſervir à découvrir dans chaque cas de pluſieurs verres la plus avantageuſe diſpoſition, afin qu'il en réſulte la moindre confuſion du côté de leur ouverture. Car, ayant déjà donné à chaque verre la figure qui produit le moindre eſpace de diffuſion, on peut outre cela, ſurtout lorsqu'il y a pluſieurs verres, trouver un tel arrangement, que quelques unes des parties dont l'expreſſion de la confuſion eſt compoſée, deviennent négatives, & qu'elles diminuent par conſéquent la quantité de celles qui ſont poſitives: ou peut-être même ſera-t-il quelquefois poſſible que par ce moyen l'expreſſion tout entiere de la confuſion fut réduite à rien: ce qui ſeroit ſans doute la plus haut dégré de perfection dont ces inſtrumens ſont ſuſceptibles. Mais on ne ſauroit entreprendre cette recherche ſans qu'on ait égard aux autres qualités que tant les Téleſcopes que les Microſcopes doivent avoir.