1768

Disquisitio de vera lege refrationis radiorum diversicolorum

Leonhard Euler

DISQVISITIO
DE VERA LEGE REFRACTIONIS RADIORVM DIVERSICOLORVM.

Auctore
L. EVLERO.

Definitio 1.

1.

Refractionem mediam voco rationem illam constantem inter sinum anguli incidentiae et sinum anguli refractionis, secundum quam radii mediae naturae ex alio medio in aliud transeuntes refringuntur. Simili modo eadem ratio, quae in radios rubros competit, *Refractio rubra*, quae autem radiis violaceis conuenit, *Refractio violacea* appellabitur.

Coroll. 1.

2. Cum ergo radi rubrii minus, violacei vero magis refringantur, quam medii; refractio rubra propius ad rationem aequalitatis accedit, quam refractio media, haec autem propius, quam violacea.

Coroll. 2.

3. Quodsi igitur refractio media ratione $m:1$; rubra ratione $r:1$ et violacea ratione $v:1$ exprimatur;

matur; fueritque $m > 1$, tum erit $r < m$ et $v > m$; sin autem sit $m < 1$, tum erit $r > m$ et $v < m$.

Coroll. 3.

4. Interim tamen si refractio media sit ratio maioris inaequalitatis, etiam refractiones rubra et violacea erunt rationes maioris inaequalitatis, contra si illa sit ratio minoris inaequalitatis, etiam hae erunt rationes minoris inaequalitatis.

Coroll. 4.

5. Statim autem atque vna harum refractionum abit in rationem aequalitatis, etiam reliquae fient rationes aequalitatis. Hoc scilicet casu, radii cuiusque naturae sine vlla refractione transeunt.

Scholion.

6. Principalis haec lex vniuersae Dioptricae nititur phaenomenis, quibus compertum est, dum radii ex vno medio in aliud transeunt, refractionem semper ita esse comparatum, vt sinus incidentiae ad sinum refractionis eandem seruet rationem, si scilicet radii eiusdem fuerint naturae seu eundem colorem referant. Pro radiis autem diuersae indolis ex obseruationibus constat radios rubros minorem, violaceos vero maiorem refractionem pati, quam eos, qui sunt indolis mediae, veluti virides; ita tamen vt pro radiis eiusdem indolis lex illa

illa principalis perpetuo locum habeat. Rationibus quidem physicis hanc quoque legem confirmare sunt annisi; cum autem ad hoc perfecta cognitione naturae radiorum opus sit, ob eius defectum perfecta demonstratio a priori petita expectari nequit. Memoratu autem dignum hic usu venit, quod quaecunque fere hypothesis circa naturam radiorum fingatur, inde eadem lex refractionis deducatur. Quam ob rem etiam reliquas refractionis affectiones ex phaenomenis hauriri expediet.

Phaenomenon I.

7. Dum radii ex medio A in medium B transeunt, si fuerit refractio media $= m : 1$, rubra $= r : 1$ et violacea $= v : 1$; tum vicissim pro radiis ex medio B in medium A transeuntibus erit refractio media $= 1 : m$ seu $\frac{1}{m} : 1$; rubra $= \frac{1}{r} : 1$ et violacea $= \frac{1}{v} : 1$, haec conuersio inde euincitur, quod in transitu radiorum quocunque radius incidens et refractus inter se permutari queant.

Scholion.

8. Ita si radii ex aere in vitrum penetrent, ex plurimis experimentis *Newtonus* conclusit, esse refractionem mediam $= 155 : 100$, rubram $= 154 : 100$ et violaceam $= 156 : 100$, ita vt sit $m = 1,55$, $r = 1,54$ et $v = 1,56$. Vicissim ergo si radii ex vitro in aerem exeant, erit refractio media $= 100 : 154$ et violacea $= 100 : 156$. Vtroque casu manifestum

nifestum est refractionem rubram propius ad rationem aequalitatis accedere, quam mediam, hancque propius, quam violaceam, quippe quae maxime a ratione aequalitatis recedit.

Phaenomenon 2.

9. Si fuerit, vti sequitur:

in transitu ex medio	in medium	refractio media	refractio rubra	refractio violacea
A	B	$m : 1$	$r : 1$	$v : 1$
A	C	$M : 1$	$R : 1$	$V : 1$

Tum si radii ex medio B in medium C transeant, erit

$$\text{refractio media} = M : m = \tfrac{M}{m} : 1$$

$$\text{refractio rubra} = R : r = \tfrac{R}{r} : 1$$

$$\text{refractio violacea} = V : v = \tfrac{V}{v} : 1.$$

Coroll. I.

10. Quodsi ergo refractio ex aere in varias materias diaphanas, cuiusmodi sunt aqua, spiritus vini aliique liquores, tum vero vitrum, cuius quoque varias dari species certum est, chrystallus lapidesque pretiosi; fuerit explorata, tum etiam pro transitu radiorum ex quocunque horum mediorum in aliud refractio definiri poterit.

Coroll. 2.

11. Ac vicissim etiam si refractio ex quopiam horum mediorum in aliud fuerit definita, si-

 mul-

mulque refractio ex aëre in alterutrum eorum constet, tum inde refractio ex aëre in alteram mediam concludi potest.

Scholion 1.

12. Eximiam hanc refractionis proprietatem inter phaenomena refero, etiamsi ex praecedenti firmiter demonstrari possit. Fingatur enim inter bina media B et C lamina tenuissima medii A, sitque angulus incidentiae in medio $B = \Phi$, eiusque sinus $=$ fin. Φ; eritque sinus refractionis in medio $A = m$ fin. Φ, pro radiis mediis, quorum refractio est $= 1 : m$; pro reliquis vero idem valet ratiocinium. At hic sinus refractionis m fin Φ simul fit sinus incidentiae, dum radius ex medio A in C transit; hinc quia refractio est $= M : 1$ erit sinus refractionis in medio $C = \frac{m}{M}$ fin. Φ. Eodem autem modo rem se habere debere perspicuum est, si lamella intermedia penitus tollatur, vnde cum sinui incidentiae fin. Φ conueniat sinus refractionis $\frac{m}{M}$ fin. Φ, erit vtique refractio $= 1 : \frac{m}{M} = \frac{M}{m} : 1$ quod idem de radiis rubris et violaceis valet.

Scholion 2

13. Haec sunt generalia refractionis principia, quae partim ex phaenomenis partim ex ratione sunt deducta; neque praeterea quicquam certi reperimus, cui Theoria refractionis superstrui queat. Quantam scilicet quodlibet medium diaphanum patiat

tiat refractionem, per experimenta in hunc finem instituta definiri oportet, cum refractionis quantitas vtique a peculiari cuiusque medii natura pendeat. Ita apud Auctores passim occurrunt experimenta, quibus pro variis mediis, in quae radii ex aëre sunt intromissi, quantitas refractionis determinatur. Plerumque autem haec experimenta tantum ad radios mediae naturae sunt accommodata, neque iis quicquam certi pro radiis extremis, rubris scilicet et violaceis assignari solet. Hinc quaestio enascitur maximi momenti, num cognita refractione media, dum radii ex quocunque medio in aliud transeunt, exinde per certam regulam refractiones rubra et violacea definiri queant? Quaeritur scilicet, vtrum data refractione media, quae sit $= m : 1$, ex ea sola sine vllo respectu ad ipsorum mediorum indolem habito, tam refractio rubra $r : 1$ quam violacea $v : 1$ determinari possit? an vero haec determinatio insuper a natura mediorum quodammodo pendeat? Quoniam hic per solam rationem nihil decidere licet, vtrumque casum sollicite euolui, indeque relationem, quae inter refractiones mediam, rubram ac violaceam intercedere reperitur, sedulo perpendi conuenier, vt deinceps experientia consuli possit, quaenam hypothesis veritati maxime sit consentanea.

Hypothesis 1.

14. In hac hypothesi statuatur, refractionem rubram et violaceam vnice a refractione media pendere,

dere; ita vt cognita refractione media $m:1$, per eam solam refractio rubra $r:1$ et violacea $v:1$ determinetur; et quantitates r et v tanquam certae quaedam functiones quantitatis m spectari queant.

Coroll. 1.

15. Hac ergo hypothesi assumta statuitur, si pro transitu ex quopiam medio A in aliud medium B fuerit refractio media $= m:1$, rubra $= r:1$ et violacea $= v:1$; tum si pro transitu ex alio quocunque medio C in aliud D refractio media pariter sit $= m:1$, tum etiam refractionem rubram fore $= r:1$ et violaceam $= v:1$.

Coroll. 2.

16. Haec consequentia ita arcte cum ipsa hypothesi est connexa, vt si ex aequalitate refractionis mediae certa aequalitas refractionis rubrae et violaceae concludi posset, ipsa hypothesis pro vera esset habenda.

Coroll. 3.

17. Ad veritatem ergo istius hypothesis diiudicandam, totum negotium ad hanc quaestionem reducitur, num si in duobus diuersis transitibus ex alio medio in aliud, refractio media vtrinque fuerit eadem, etiam refractio rubra et violacea vtrinque eadem sit futura. Quemadmodum casu quo $m=1$, etiam semper est $r=1$ et $v=1$,

$v=1$, quandoquidem hoc casu radii nullam refractionem patiuntur.

Scholion.

18. Haec hypothesis mihi iam olim ita probabilis et constantiae naturae conformis est visa, vt non dubitauerim, eam tanquam principium vniuersae Dioptricae accipere, quod non minus pro certo esset admittendum, quam illa superius commemorata. Nullam enim dubitandi rationem perspicere poteram, cur eidem refractioni mediae non eaedem quoque refractiones extremae respondere censeri possent. Huic igitur principio disquisitiones meas de lentibus obiectiuis ex duplici materia pellucida componendis, quae vitio diuersae radiorum refractionis non essent obnoxiae, superstruxeram. Nunc autem dubiis grauissimis, quae Acutissimis Geometra Clairaut in Mem. Acad. Scient. Parisinae pro A. 1756. aduersus hoc principium proposuit, permotus de eius certitudine ita dubitare coepi, vt id non amplius veritatibus necessariis annumerandum censerem, vti quidem statim mihi erat visum, sed agnoscere sum coactus, nihil impedire, quo minus aliae leges in natura locum habere queant. Quam ob rem hic illud equidem principium propono, sed non tanquam solum, ad quod refractionis natura sit adstricta; verum deinde innumeras alias leges ipsi adiungam, quae pariter in natura locum habere posse videantur. Quo facto accuratius inuestigabo, quae-

nam harum legum phaenomenis maxime satisfaciat: haec scilicet via ad veritatem perueniendi vel saltem appropinquandi tutissima videtur.

Problema 1.

19. In hypothesi refractionis modo memorata, data refractione media pro transitu radiorum quocunque ex medio alio in aliud, definire refractiones extremas, rubram scilicet et violaceam.

Solutio.

Concipiantur media quotcunque diaphana A, B, C, D etc. ita comparata, vt dum radii ex eorum quouis in sequens transeunt, refractio media sit eadem $m:1$; Eadem ergo quoque erit refractio rubra $r:1$ et violacea $v:1$. Quodsi iam radii ex medio A in medium C transeant, erit refractio media $= m^2:1$, rubra $= r^2:1$ et violacea $= v^2:1$; sin autem ex medio A in medium D transeant, erit refractio media $= m^3:1$, rubra $= r^3:1$ et violacea $= v^3:1$. Quare in genere si radii ex medio A in medium quodcunque N transeant, fueritque refractio media $= M:1$ existente $M = m^n$, erit refractio rubra $= r^n:1$ et violacea $= v^n:1$. Cum vero sit $lM = n\,lm$ ideoque $n = \frac{lM}{lm}$ erit $lr^n = n\,lr = \frac{lr}{lm}\,lM$, hincque $r^n = M^{lr:lm}$ et $v^n = M^{lv:lm}$. Quod si ergo pro vnica refractione media $m:1$ nota sit refractio rubra $= r:1$ et violacea $= v:1$; tum

tum pro quacunque alia refractione media $M:1$ habebitur

Refractio rubra $= M^{lr:lm}:1$ et

refractio violacea $= M^{lv:lm}:1$.

Cum igitur constet in transitu ex aëre in vitrum esse $m = 1,55$, $r = 1,54$ et $v = 1,56$ erit

$\frac{lr}{lm} = \frac{1875207}{1903317} = 1 - \frac{1}{68}$ et

$\frac{lv}{lm} = \frac{1931246}{1903317} = 1 + \frac{1}{68\frac{1}{8}}$.

Hinc medium sumendo, et loco fractionis $\frac{1}{68}$ scribendo litteram δ in genere affirmare licet, si in transitu quocunque fuerit refractio media $= M:1$, fore refractionem rubram $= M^{1-\delta}:1$ et violaceam $= M^{1+\delta}:1$.

Coroll. 1.

20. Cum sit δ fractio tam exigua nempe $\delta = \frac{1}{68}$, erit satis exacte $M^{\delta} = 1 + \delta\, lM$ et $M^{-\delta} = 1 - \delta\, lM$ denotante lM logarithmum hyperbolicum ipsius M; vnde prodit pro refractione media $= M:1$ proxime:

refractio rubra $= M - \delta\, M\, lM = M - \frac{1}{68} M\, lM : 1$

refractio violacea $= M + \delta\, M\, lM = M + \frac{1}{68} M\, lM : 1$.

Coroll. 2.

21. Logarithmi autem hyperbolici obtinentur, si vulgares in tabulis exhibiti multiplicentur per 2,30258. Hinc si in his formulis logarithmis vulga-

vulgaribus vtamur, loco δ / M ſcribere debemus $2,30258\, \delta / M = \frac{1}{59} / M$, vnde pro refractione media $M : 1$ fit

refractio rubra $= M - \frac{1}{59} M / M : 1$

refractio violacea $= M + \frac{1}{59} M / M : 1$.

Scholion.

22. In Volum. III. Mem. Acad. Reg. Boruſſ. tabulam exhibui ex hac hypotheſi computatam, vnde pro quauis refractione media ſtatim refractiones rubra et violacea depromi poſſunt; eidemque hypotheſi conſtructio lentium obiectiuarum compoſitarum innititur. Illo ſcilicet tempore haec hypotheſis ſola mihi vera eſt viſa, aliaeque circumſtantiae impedimento fuerant, quo minus per experimenta eius veritatem explorare liceret. Nunc autem a Cel. D[no]. Clairaut edoctus etiam aliarum hypotheſium poſſibilitatem agnoſcere cogor; et argumentum ab Eo allatum hoc ſufficienter probat, etſi ex hypotheſi emanationis luminis cum attractione coniuncta eſt petitum. Quanquam enim meo quidem indicio haec hypotheſis eſt reiicienda, tamen concluſiones inde deductae poſſibilitatis notam gerunt, atque adeo ipſi veritati conſentaneae eſſe poſſent, non obſtante ipſius hypotheſis falſitate. Quemadmodum enim inde conſtantia rationis inter ſinus incidentiae et refractionis pulcerrime oſtenditur, ita etiam reliquae refractionis affectiones inde deductae

deductae verae eſſe poſſent: ſufficiat autem eas tanquam poſſibiles ſpectaſſe.

Hypotheſis 2.

23. Hic radii lucis in particularum minimarum perniciſſimo motu conſiſtere ſtatuuntur, ita vt diuerſis coloribus diuerſi celeritatis gradus conueniant. Tum refractio ab attractione quapiam circa ſuperficiem refringentem exerta effici ſtatuimus, qua fit, vt dum particulae illae ex medio alio in aliud tranſeunt a tramite rectilineo deflectantur.

Coroll. 1.

24. In hac ergo hypotheſi cuiusque coloris radiis in quouis medio certus celeritatis gradus tribuitur, quo minima corpuſcula radium conſtituentia per id medium feruntur, in eoque lineam rectam, qua radii directio continetur, deſcribunt.

Coroll. 2.

25. Deinde dum radii ex vno medio in aliud tranſeunt, circa confinia ſpatium quoddam quamuis anguſtum concipitur $ABCD$, in quo radii ad alterutrum terminum relati CD attrahantur, motumque ſuum inflectere et mutare cogantur, deinceps in altero medio iterum in directum progreſſuri. Tab. II. Fig. 4.

Scholion.

26. Si scilicet EF fuerit radius in medio diaphano A celeritate $=a$ motus, isque ad F in aliud medium B ingredi incipiat, spatium quoddam tanquam ABCD certae crassitiei $AC=BD=e$ statuitur, per quod dum radius transit, vim sustineat ad alterum terminum CD normaliter tendentem, ab eaque de sua directione deflectatur simulque celeritatis mutationem patiatur, ita vt in hoc spatio lineam quandam curuam FG describere cogatur. Tum vero cum hoc spatium superauerit, celeritate et directione, quam in G fuerit adeptus, in altero medio B secundum rectam GH motum suum sit prosecuturus. Erit ergo EF radius incidens in medio A celeritate a motus, et GH radius refractus in medio B cuius celeritas sit $=b$; ac si ad laminam ABCD ambo media separantem ducantur normales FP et GQ, erit angulus incidentiae $EFP=\zeta$ et angulus refractionis $HGQ=\eta$. Hic quidem rationem attractionis, dum radius per laminam ABCD transit, definire non licet, sed mox patebit quaecunque ea fingatur, eadem fere refractionis phaenomena inde sequi. Hoc tantum notasse iuuabit, si angulus incidentiae ζ superet angulum refractionis η, attractionem fieri debere ad lineam CD, contra vero ad AB.

Scholion

Scholion 2.

27. Quod ad ipsam hanc hypothesin attinet, eam naturae luminis aduersari, nunc quidem satis manifestum videtur, cum radiorum emanatio vera tantis inuoluta sit difficultatibus, vt in rerum natura nullo modo admitti possit. Quin potius extra omnem dubitationem positum videtur, radios per media diaphana perinde propagari atque sonum per aërem, idque certa quadam pulsuum agitatione fieri, vbi neque vera celeritas neque attractio consistere possit. Interim tamen hi errores ita compensari possent, vt radii in refractione eandem legem sequerentur, ac si omnia secundum hanc hypothesin fierent; ex quo conclusiones ex hac hypothesi etiamsi falsa deriuandae minime contemnendae videntur.

Problema 2.

28. Admissa hypothesi modo exposita inuestigare legem refractionis, secundum quam radii ex medio quocunque A in aliud B transeuntes reflectuntur. Tab. II. Fig. 4.

Solutio.

Sit EF radius incidens in medio A celeritate $=a$ latus, quem primo mediae naturae assumo, vt refractio media eruatur, statuaturque angulus incidentiae $EFP=\zeta$. Tum vero facto in spatio ABCD motus variatione sit in medio B radius refra-

ctus

ctus GH celeritatem habens $= b$, et angulus refractionis $HGQ = \eta$. At dum per ſpatium ABCD viam ſuam ſecundum lineam FYG incuruat, ſit in loco quocunque Y eius celeritas $= z$, et ducta ad planum ſeparans normali YX, ſit Φ angulus, quem cum ea motus directio conſtituit. Iam ponatur $FX = x$, et $XY = y$, et vis, qua radii corpuſcula in Y ad planum CD ſecundum directionem XY impelluntur $= Y$, quae vt functio quaecunque ipſius Y ſpectetur. Reſoluto igitur motu ſecundum coordinatas $FX = x$ et $XY = y$, ſumtoque dt pro temporis elemento, erit celeritas ſecundum $FX, = \frac{dx}{dt} = z\,\text{ſin.}\,\Phi$ et celeritas ſecundum XY, $= \frac{dy}{dt} = z\,\text{coſ.}\,\Phi$, quae ſola a vi ſollicitante Y afficitur; vnde per principia mechanica conſequimur:

$$\frac{ddx}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ddy}{dt^2} = Y$$

ideoque $\frac{dx}{dt} = z\,\text{ſin}\,\Phi = \text{Conſt.} = a\,\text{ſin.}\,\zeta$, quoniam celeritas ſecundum FX in radio incidente eſt $= a\,\text{ſin.}\,\zeta$; eidem ergo aequalis eſt celeritas ſecundum eandem directionem in radio refracto GH quae eſt $= b\,\text{ſin.}\,\eta$; ex quo habemus $a\,\text{ſin.}\,\zeta = b\,\text{ſin.}\,\eta$, ſeu $\text{ſin.}\,\zeta : \text{ſin.}\,\eta = b : a$, ita vt ſinus incidentiae ad ſinum refractionis teneat rationem reciprocam celeritatum radii in vtroque medio.

Altera v[e]ro aequatio $\frac{ddy}{dt^2} = Y$ per $2dy$ multiplicata per integrationem dat $\frac{dy^2}{dt^2} = zz\,\text{coſ.}\,\Phi^2 = 2\int Y\,dy$. Vnde ſi integrale $\int Y\,dy$ ita capiamus, vt in initio refra-

refractione F, vbi $z = a$ et $\Phi = \zeta$, euaneſcat, habebimus $zz\,\text{coſ.}\,\Phi^2 = aa\,\text{coſ.}\,\zeta^2 + 2\int Y\,dy$. Extendamus iam hoc integrale vsque ad alterum terminum G, faciendo $y = e$ fiatque tum $2\int Y\,dy = E$; et quia tum abit $z\,\text{coſ.}\,\Phi$ in $b\,\text{coſ.}\,\eta$, obtinebimus:

$$bb\,\text{coſ.}\,\eta^2 = aa\,\text{coſ.}\,\zeta^2 + E.$$

At cum ſit per ante inuenta $bb\,\text{ſin.}\,\eta^2 = aa\,\text{ſin.}\,\zeta^2$, hac aequatione addita prodet $bb = aa + E$, vbi quantitas E pendet a ratione attractionis, hoc eſt a relatione, quae inter ambo media diaphana intercedit. Cum ergo ſit $b = \sqrt{(aa + E)}$ erit

$$\text{ſin.}\,\zeta : \text{ſin.}\,\eta = \sqrt{(aa + E)} : a$$

quae eſt refractio media. Si iam pro altero radio extremo, ſiue rubro ſiue violaceo, celeritas in medio A vocetur $= a'$, in medio B vero $= b'$, erit quoque $b' = \sqrt{(a'a' + E)}$, et refractio extrema $= \sqrt{(a'a' + E)} : a'$.

Coroll. 1.

29. Cum pro eodem radio quantitates a et E ſint conſtantes mutato vtcunque angulo incidentiae ζ, proportio $\text{ſin.}\,\zeta : \text{ſin.}\,\eta = \sqrt{(aa + E)} : a$ ſtatim dat conſtantiam rationis inter ſinus incidentiae et refractionis.

Coroll. 2.

30. Eiusdem ergo radii celeritates per diuerſa media A et B rationem tenent inuerſam refractionis.

nis. Si igitur angulus refractionis η minor fit angulo incidentiae ζ, vti fit, dum radii ex medio rariori in denfius progrediuntur, fecundum hanc hypothefin radii in medio denfiori velocius mouentur, quam in rariori.

Coroll. 3.

31. Si a denotet celeritatem radiorum mediae naturae in medio A, fitque refractio media $= m : 1$ erit $\sqrt{(aa + E)} = ma$ vnde fit conftans $E = (mm - 1)aa$. Tum vero fi pro altero radiorum extremorum genere veluti rubrorum, celeritas in medio A fit $= a'$, et refractio rubra vocetur $= r : 1$ erit quoque $E = (rr - 1)a'a'$ hincque $(rr - 1)a'a' = (mm - 1)aa$ et $r = \sqrt{\left(1 + \frac{(mm-1)aa}{a'a'}\right)}$.

Coroll. 4.

32. Ob $E = (mm - 1)aa$, erit celeritas radiorum mediorum in altero medio B, nempe $b = ma$, celeritas vero radiorum rubrorum $b' = ra'$, ideoque $b' = \sqrt{(a'a' + (mm - 1)aa)}$, feu $b'b' - bb = a'a' - aa$, vnde differentia inter quadrata celeritatum, quibus radii medii et extremi in quouis medio mouentur, eft conftans.

Scholion.

33. Sit medium A aër, et medium B vitrum, vt fit refractio media $m = 1,55$; et celeritas

tas radiorum horum in vitro maior erit celeritate in aëre, in ratione $155 : 100$. Cum iam fit refractio rubra $= 1,54 : 1$ feu $r = 1,54$ hinc ex celeritate radiorum mediorum in aëre a definire poterimus celeritatem radiorum rubrorum $a' = a\sqrt{\frac{mm-1}{rr-1}} = 1,0112\,a$ feu $a' = (1 + \frac{1}{89})a$, quae eft maior celeritate mediorum parte quafi $\frac{1}{89}$, tanto autem celeritas radiorum violaceorum maior eft cenfenda. Ceterum cum in aëre pofita celeritate radiorum mediorum $= a$, fit celeritas radiorum rubrorum $= a' = (1 + \frac{1}{89})a$, intelligimus fi radii ex aëre in quodcunque medium tranfeant pro quo refractio fit $= m : 1$, refractionem rubram inde perfecte determinari. Atque hinc discimus, quantumuis variae vitri fpecies ratione compofitionis inter fe discrepent, tamen ftatim ac refractio media ex aëre in binas vitri fpecies fuerit eadem, etiam refractiones rubram ac violaceam easdem effe debere, ita vt in his ob vitri varietatem nulla diuerfitas locum habere poffit, quin fimul refractio media turbetur.

Scholion 2.

34. Hinc iam infignem controuerfiam a follertiffimo Artifice Anglo Dollondo motam dirimere licet; qui experimentis quibusdam, quae merito non fatis certa videntur, inftitutis contendit in Anglia duplicis generis vitrum reperiri, alterum Chryftallicum, alterum coronarium appellari folitum; quorum hoc multo minorem radiorum difperfionem

nem gignat, quam illud, idque adeo in ratione ſeſquialtera, qua differentia inter refractiones extremas maior ſit in chryſtallino, quam in coronario, quod certo legibus naturae maxime aduerſari eſſet cenſendum, ſi refractio media vtrinque eſſet eadem. Quamuis autem ea in chryſtallino nutillo ſit maior, inde tamen tantum diſcrimen nullo modo oriri poteſt, id quod etiam inde colligere licet, quod ſine dubio inter innumerabiles vitri ſpecies vna quaedam reperiatur chryſtallo quidem ſimilior, ſed quae eandem refractionem mediam ac ſpecies coronaria dicta gignat; atque in iſta ſpecie etiam refractiones extremae parum a chryſtallinis diſcrepabunt; Iam vero omnino neceſſe eſt, vt eae plane perinde ſe habeant atque in vitro coronario. Ne vero rationibus contra experientiam pugnare videar, notandum eſt, vitrum coronarium viridi colore eſſe tinctum, quo euenit, vt in tranſitu radiorum haud exigua portio rubrorum abſorbeatur atque ob hanc potiſſimum cauſam diſperſio radiorum multo minor deprehendatur, ipſa refractionis lege, quaecunque ea ſit, haud turbata.

Problema 3.

35. In hac refractionis hypotheſi, data refractione media, dum radii ex aëre in aliud medium quodcunque transmittuntur, pro eodem tranſitu refractionem extremam vtramque definire.

Solutio.

Solutio.

Primum hic obſeruari oportet, hoc problema non vti primum pro omni tranſitu reſolui poſſe, ſed alterius medii naturam iam eſſe debere cognitam: vnde hic pro altero medio aërem aſſumo, in quo ſi radii medii velocitate $=a$ moueantur, celeritatem rubrorum vidimus eſſe $=(1+\frac{1}{89})a$, et violaccorum $=(1-\frac{1}{89})a$. Quod ſi iam radii ex aëre in aliud medium quodcunque tranſeant, et per experimenta explorata ſit refractio media $=m:1$, quaeritur refractio tam rubra quam violacea. Sit igitur in hoc medio celeritas radiorum mediorum $=b$, eritque $b=ma$; celeritas autem radiorum rubrorum erit $b'=a\sqrt{((1+\frac{1}{89})^2+mm-1)}=a\sqrt{(mm+\frac{2}{89}+\frac{1}{89\cdot 89})}$, et violaccorum $=a\sqrt{((1-\frac{1}{89})^2+mm-1)}=a\sqrt{(mm-\frac{2}{89}+\frac{1}{89\cdot 89})}$. Breuitatis gratia pro fractione $\frac{1}{89}$, quippe quae non accuratiſſime cognita eſt putanda, ſcribamus α, vt ſit in medio propoſito celeritas radiorum rubrorum $=a\sqrt{(mm+2\alpha+\alpha\alpha)}$ et violaccorum $=a\sqrt{(mm-2\alpha+\alpha\alpha)}$, dum in ipſo aëre eſt celeritas rubrorum $=(1+\alpha)a$ et violaccorum $=(1-\alpha)a$. Cum igitur refractio rationem inuerſam celeritatum ſequatur, in tranſitu radiorum ex aëre in medium propoſitum, quo refractio media eſt $=m:1$ erit

$$\text{refractio rubra} = \frac{\sqrt{(mm+2\alpha+\alpha\alpha)}}{1+\alpha} = \sqrt{\left(mm-\frac{(mm-1)(2\alpha+\alpha\alpha)}{(1+\alpha)^2}\right)}$$

$$\text{refractio violacea} = \frac{\sqrt{(mm-2\alpha+\alpha\alpha)}}{1-\alpha} = \sqrt{\left(mm+\frac{(mm-1)(2\alpha-\alpha\alpha)}{(1-\alpha)^2}\right)}.$$

Vel

Vel si radii medii aliquanto aliter constituantur inter extremos, ita repraesentari poterit

$$\text{refractio rubra} = \sqrt{\frac{mm+\alpha}{1+\alpha}} = \sqrt{\left(mm - \frac{\alpha(mm-1)}{1+\alpha}\right)}$$
$$\text{refractio violacea} = \sqrt{\frac{mm-\alpha}{1-\alpha}} = \sqrt{\left(mm + \frac{\alpha(mm-1)}{1-\alpha}\right)}$$

vbi fractio α aliter se habet, est quae $\alpha =$ [illegible]. Ita scilicet hic valor est definitus, vt posito $m = 1,55$ refractio rubra prodeat ad violaceam vt 154 ad 156.

Coroll. 1.

36 Cum in quolibet medio differentia inter quadrata celeritatum, quibus radii rubri, medii, et violacei propagantur, sit eadem, litterae α valor ita est comparatus, vt $\alpha a a$ aequetur isti differentiae, denotante a celeritatem radiorum mediam in aere.

Coroll. 2.

37. Si in transitu radiorum ex aere in aliud medium sit refractio media $= n : 1$, erit simili modo refractio rubra $= \sqrt{\frac{nn+\alpha}{1+\alpha}} : 1$ et violacea $= \sqrt{\frac{nn-\alpha}{1-\alpha}} : 1$. Quare si radii ex illo medio in hoc transeant, erit refractio media $= \frac{n}{m} : 1$, rubra $= \sqrt{\frac{nn+\alpha}{mm+\alpha}} : 1$ et violacea $= \sqrt{\frac{nn-\alpha}{mm-\alpha}} : 1$.

Coroll. 3.

38 Definita ergo refractione media, quam radii ex aëre in singula media diaphana patiuntur, hinc etiam refractio omnium radiorum ex quouis medio in aliud quodcunque transeuntium assignari potest.

Scholion 1.

39. Hinc iam discrimen inter hanc hypothesin et priorem, qua olim vsus eram, luculenter perspicitur. Fingamus enim quotcunque media diaphana A, B, C, D etc. quorum primum A sit aër, reliqua vero continuo ita fiant densiora, vt refractio media ex quolibet in sequens sit eadem $= m : 1$, ideoque refractio media sit ex A in C $= m^2 : 1$, ex A in D $= m^3 : 1$ etc. Hinc autem ex quolibet medio in sequens transeundo refractiones extremae non prodibunt eaedem, vti in priori hypothesi, sed ita se habebunt:

In transitu	refractio media	refractio rubra	refractio violacea
ex A in B	$m : 1$	$\sqrt{\frac{mm+\alpha}{1+\alpha}} : 1$	$\sqrt{\frac{mm-\alpha}{1-\alpha}} : 1$
ex B in C	$m : 1$	$\sqrt{\frac{m^4+\alpha}{m^2+\alpha}} : 1$	$\sqrt{\frac{m^4-\alpha}{m^2-\alpha}} : 1$
ex C in D	$m : 1$	$\sqrt{\frac{m^6+\alpha}{m^4+\alpha}} : 1$	$\sqrt{\frac{m^6-\alpha}{m^4-\alpha}} : 1$

Etsi ergo refractio media vtique est eadem, refractiones extremae tamen discrepant, et continuo propius ad mediam conuergunt, ita vt quo densiora fuerint ambo media, eo minus discrimen inter refractiones extremas intercedat.

Scholion 2.

40. Cum α ſit fractio admodum parua $\frac{1}{55}$, formulae inuentae commode per approximationem exhiberi poterunt; cum enim ſit:

$$\sqrt{\left(mm-\frac{\alpha(mm-1)}{1+\alpha}\right)}=m-\frac{\alpha(mm-1)}{2m(1+\alpha)}-\frac{\alpha\alpha(mm-1)^2}{8m^3(1+\alpha)^2}\text{ etc.}$$

at $\frac{\alpha}{1+\alpha}=\alpha-\alpha\alpha$ etc. erit ſatis accurate

refractio rubra $=m-\frac{\alpha(mm-1)}{2m}+\frac{\alpha\alpha(mm-1)(3mm+1)}{8m^3}$

refractio violacea $=m+\frac{\alpha(mm-1)}{2m}+\frac{\alpha\alpha(mm-1)(3mm+1)}{8m^3}$

ideoque differentia inter has extremas $=\frac{\alpha(mm-1)}{m}$. Quare ſi media reuera in illarum medio conſiſtere aſſumatur et loco $m+\frac{\alpha\alpha(mm-1)(3mm+1)}{8m^3}$ ſimpliciter ſcribatur m, neglectis ipſius α poteſtatibus quadrato altioribus, erit

refractio rubra $=m-\frac{1}{55}\cdot\frac{mm-1}{m}$

refractio violacea $=m+\frac{1}{55}\cdot\frac{mm-1}{m}$.

Hypotheſis 3.

41. Ad ſimilitudinem praecedentis hypotheſis, dum radiorum ex aëre in medium quodcunque refractio media eſt $=m:1$ generalius ſtatuatur

refractio rubra $=\left(\frac{m^\lambda+\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda}}:1$ et

refractio violacea $=\left(\frac{m^\lambda-\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda}}:1$

vt

vt ſit $\alpha=\frac{156^\lambda-154^\lambda}{154^\lambda+156^\lambda-2.100^\lambda}$.

Coroll. 1.

42. Generalior haec hypotheſis abit in hypotheſin ſecundam modo pertractatam, ſi ſumatur $\lambda=2$, ſin autem ponatur $\lambda=1$ prodit hypotheſis *Newtoniana*, qua ſtatuatur

refractio rubra $=\frac{m+\alpha}{1+\alpha}:1=m-\frac{\alpha}{1+\alpha}(m-1):1$ et

refractio violacea $=\frac{m-\alpha}{1-\alpha}:1=m+\frac{\alpha}{1-\alpha}(m-1):1$

exiſtente $\alpha=\frac{2}{310-200}=\frac{1}{55}$.

Coroll. 2.

43. At ſi ſumatur $\lambda=0$, ob $m^\lambda=1+\lambda lm$ erit refractio rubra $=\left(\frac{1+\alpha+\lambda lm}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda}}=\left(1+\frac{\lambda lm}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$. Ponatur haec quantitas $=z$, vt ſit $z^\lambda=1+\frac{\lambda lm}{1+\alpha}=1+\lambda lz$, erit $lz=\frac{lm}{1+\alpha}$ et $z=m^{\frac{1}{1+\alpha}}$, ideoque refractio rubra $=m^{\frac{1}{1+\alpha}}:1$ et violacea $=m^{\frac{1}{1-\alpha}}:1$ quae eſt ipſa hypotheſis prima ſupra euoluta, eſtque proxime $\alpha=\frac{1}{57}$.

Coroll. 3.

44. Tenet ergo hypotheſis *Newtoniana* quaſi medium inter binas hypotheſes ante conſideratas: et

quan-

quantum altera in exceſſu ab ea diſcrepat, tantum altera in defectu diſſidere eſt cenſenda.

Coroll. 4.

45. Si igitur radii ex aëre in aquam tranſeant, refractione media exiſtente $=\frac{4}{3}:1$ ſeu $m=1$, habebitur:

In hypotheſi	refractio rubra	refractio violacea
$\lambda=0$	1, 327608 : 1	1, 339058 : 1
$\lambda=1$	1, 327381 : 1	1, 339506 : 1
$\lambda=2$	1, 326852 : 1	1, 339814 : 1

vnde patet diſcrimen inter refractiones extremas maximum eſſe in hypotheſi $\lambda=2$ minimum vero in hypotheſi $\lambda=0$.

Scholion 1.

46. Diſcrimen autem nimis eſt paruum, quam vt per experimenta decidi poſſit, quaenam harum trium hypotheſium ad veritatem propius accedat. Cum autem hypotheſis *Newtoniana* $\lambda=1$ ideo ſit repudianda, quod ea ſtabilita effectus diuerſae refractionis radiorum nunquam tolli poſſet, vtcunque etiam diuerſa media refringentia inter ſe coniungerentur, certum autem ſit in oculis animalium nullam plane confuſionem ex hoc fonte enaſci; hac hypotheſi quaſi media remota id tantum reſtat inueſtigandum, vtra extremarum ad naturae veritatem propius accedat. Quamuis autem hypotheſis prima $\lambda=0$, mihi olim maxime probabilis ſit viſa, tamen cum ſecundum eam oculi ſtructuram diligentius eſſem perſcrutatus, quomodocunque refractiones humorum aquei, chryſtallini et vitrei aſſumſeram, tamen ſemper inueni figuram chryſtallini concauam eſſe debere, vt ex diuerſa radiorum refractione nulla confuſio oriretur, quod argumentum nunc mihi quidem ſatis validum videtur ad hanc quoque hypotheſin explodendam. Simul vero hinc hypotheſis poſterior qua $\lambda=2$ eo fortuis firmamentum adipiſcitur, cum affectus inde oriundus plane contrarius reſultet, eaque admiſſa figura vtique conuexa pro humore chryſtallino obtineatur, quemadmodum hoc in natura euenire novimus. Quam ob rem non dubito hanc hypotheſin, qua $\lambda=2$, tanquam veritati maxime conuenientem ſpectare, eique principia Dioptricae ſuperſtruere.

Scholion 2.

47. Hypotheſi hac qua $\lambda=2$ tam probabili facta, operae pretium erit tabulam exhibere, quae pro ſingulis refractionibus mediis refractiones extremas oſtendat.

Tabula

Tabula Refractionum

pro transitu radiorum ex aëre in medium quodcunque.

Refractio media.	Differentia refract.	Refractio rubra.	Refractio violacea.
132 : 1	0, 006249	1, 313751 : 1	1, 326249 : 1
133 : 1	0, 006424	1, 323576 : 1	1, 336424 : 1
134 : 1	0, 006597	1, 333403 : 1	1, 346597 : 1
135 : 1	0, 006769	1, 343231 : 1	1, 356769 : 1
136 : 1	0, 006941	1, 353059 : 1	1, 366941 : 1
137 : 1	0, 007112	1, 362888 : 1	1, 377112 : 1
138 : 1	0, 007282	1, 372718 : 1	1, 387282 : 1
139 : 1	0, 007451	1, 382549 : 1	1, 397451 : 1
140 : 1	0, 007619	1, 392381 : 1	1, 407619 : 1
141 : 1	0, 007786	1, 402214 : 1	1, 417786 : 1
142 : 1	0, 007953	1, 412047 : 1	1, 427953 : 1
143 : 1	0, 008119	1, 421881 : 1	1, 438119 : 1
144 : 1	0, 008284	1, 431716 : 1	1, 448284 : 1
145 : 1	0, 008448	1, 441552 : 1	1, 458448 : 1
146 : 1	0, 008612	1, 451388 : 1	1, 468612 : 1
147 : 1	0, 008775	1, 461225 : 1	1, 478775 : 1
148 : 1	0, 008937	1, 471063 : 1	1, 488937 : 1
149 : 1	0, 009098	1, 480902 : 1	1, 499098 : 1
150 : 1	0, 009259	1, 490741 : 1	1, 509259 : 1
151 : 1	0, 009419	1, 500581 : 1	1, 519419 : 1
152 : 1	0, 009579	1, 510421 : 1	1, 529579 : 1
153 : 1	0, 009738	1, 520262 : 1	1, 539738 : 1
154 : 1	0, 009896	1, 530104 : 1	1, 549896 : 1

Re-

Refractio media.	Differentia refract.	Refractio rubra.	Refractio violacea.
155 : 1	0, 010054	1, 539946 : 1	1, 560054 : 1
156 : 1	0, 010211	1, 549789 : 1	1, 570211 : 1
157 : 1	0, 010367	1, 559633 : 1	1, 580367 : 1
158 : 1	0, 010523	1, 569477 : 1	1, 590523 : 1
159 : 1	0, 010678	1, 579322 : 1	1, 600678 : 1
160 : 1	0, 010833	1, 589167 : 1	1, 610833 : 1
161 : 1	0, 010988	1, 599012 : 1	1, 620988 : 1
162 : 1	0, 011142	1, 608858 : 1	1, 631142 : 1

Problema 4.

43. Refractionem radiorum ex medio quocunque M in aliud N transeuntium definire, data refractione media ex aëre in vtrumque medium.

Solutio.

Sit $m:1$ refractio media, dum radii ex aëre in medium M transeunt, refractiones autem extremae ita exprimantur $m+dm:1$, tribuendo ipsi dm valorem ex columna differentiarum tabulae praecedentis desumtum, ita vt refractio rubra sit $=m-dm:1$ et violacea $=m+dm:1$. Simili modo pro radiis ex aëre in medium N transeuntibus sit refractio media $=n+dn:1$, valore ipsius dn ex tabula differentiarum itidem desumto. His positis si radii ex medio M in medium N ingrediantur, erit

re-

refractio media $= n : m = \frac{n}{m} : 1$

refractio rubra $= n - dn : m - dm = \frac{n-dn}{m-dm} : 1$

refractio violacea $= n + dn : m + dm = \frac{n+dn}{m+dm} : 1$.

Cum autem differentiae dm et dn tam ſint paruae vt tanquam differentialia tractari poſſint, erit proxime:

refractio rubra $= \frac{n}{m} - d.\frac{n}{m} : 1$

refractio violacea $= \frac{n}{m} + d.\frac{n}{m} : 1$.

Hincque refractio radiorum, quatenus diuerſae ſunt indolis, per media diaphana quotcunque definiri poterit, ſi modo refractio media ex aëre in ſingula iſta media fuerit cognita.

DE NOVO MICROSCOPIORVM GENERE EX SEX LENTIBVS COMPOSITIO.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Cum microſcopia ſimplicia maiores multiplicationes largiri nequeant, niſi lenticulae quam minimae adhibeantur, quarum conſtructio non ſolum ſummam artificis ſollertiam requirit, ſed etiam obiecta ipſis tam prope admoueri debent, vt tantum non lenticulam contingant, ideoque minimae inaequalitates in eorum ſuperficie nimis confuſe repraeſententur; vt his inſignibus incommodis occurratur, microſcopia compoſita in vſum vocari ſunt coepta, quibus maiorum lenticularum beneficio quantumuis magnae multiplicationes produci poſſunt, ita vt obiecta non adeo prope admoueri neceſſe ſit. Vulgo haec microſcopia tribus conſtant lentibus, praeter obiectiuam ſcilicet binis ocularibus, quarum ratio ab artificibus diuerſimode aſſignatur. Veram autem rationem nuper indicaui, qua fit, vt non ſolum maximum in obiecto ſpatium conſpiciatur, ſed