



1768

Methodus facilis motus corporum coelestium utcunq̄ue perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Methodus facilis motus corporum coelestium utcunq̄ue perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi" (1768). *Euler Archive - All Works*. 348.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/348>

METHODVS FACILIS

MOTVS CORPORM

COELESTIVM VTCVNQVE PERTVRBATUS AD
RATIONEM CALCVLI ASTRONOMICI
REVOCANDI.

Auctore

L. E V L E R O.

I.

Cum hanc inuestigationem, quomodo motus corporum coelestium ob actionem mutuanam delapsus, quos vero denique post multas ambages ad formulas multo simpliciores reducere licuit. Causa autem huius prolixitatis manifesto in multitudine elementorum, quae in calculum introduci oportet, est sita: neque enim solum ad cunctas determinaciones, quibus motus corporis perturbantis continetur, est respiciendum, sed etiam ipsa motus perturbatio, quatenus non fit in eodem plano, plurima postulat elementa, quibus ea pro modo apud Astronomos recepto ad variationes inde in linea nodorum et orbitae inclinatione oriundas referatur. Quodsi omnes istae consideraciones simul in
R
calcu-
Tom. XII. Nou. Comm.

calculum ingerantur; mirum sane non est, maximam hinc molestiam et confusionem oriri debere, cui evitandae aliud remedium non superesse videtur, nisi ut omnia elementa sollicite distinguantur, et singulae operationes ita insistantur, ut in eas non plura admittantur elementa, quam in eam necessario ingrediuntur. Ita enim commodissime cautebitur, ne attentio nostra nimia elementorum multitudine obruatur.

II

Praecipua quidem huius investigationis pars ad mechanicam est referenda, cum motus perturbatio ex viribus corporis perturbantis sit definienda; principia autem mechanica ita sunt comparata, ut ex iis locus corporis, cuius motus quaeritur, ad quoduis tempus per ternas coordinatas inuicem normales commodissime determinetur; verum altera pars haud leuiorem euolutionem requirit, quae locus in priori parte definitus ad morem in Astronomia receptum reduci debet, quo scilicet diuersa coeli loca per longitudinem et latitudinem exprimi solent. Atque hanc posteriorem partem, quam geometricam appellare licet, probe distingui conuenit a priori, quae tota mechanicae est tribuenda. Obseruari autem, has duas partes non solum commode a se inuicem separari, sed etiam vitamque tum multo faciliori negotio pertractari posse, quam si ambas coniunctim expedire vellemus. Quamuis autem

autem investigatio mechanica geometricam praecedere debere videatur, tamen satis conuincit a parte geometrica exordiri licet, cum nihil impediat, quominus locum corporis, cuius motum quaerimus; tanquam cognitum, ac per ternas coordinatas definitum spectemus. Hanc ordinais inuersionem ideo sequi est visum, quod euolutio partis geometricae plura insignia suppeditet subsidia, quibus deinceps in parte mechanica calculi labor non mediocriter subleuabitur. Hoc scilicet modo id potissimum lucrifragor consequimur, quod dum partem geometricam tractamus, nullae quantitates ad vires perturbantes relictae in calculum ingrediuntur.

Pars Geometrica.

III.

Morum igitur corporis Z iam ita determinatum assumo, uti per principia mechanica immediate definiti solet. Primum scilicet motus ad certum quoddam punctum A, quod ut fixum spectatur, etiam si forte ipsum versetur in motu referri solet, tum vero consideratur planum quoddam per id punctum transfrens pariter uti fixum, quod ipso tabulae plano repraesentetur, in quo accepta linea fixa AB, ad quoduis tempus locus corporis Z per ternas coordinatas inter se normales AX, XY et YZ ita definitur, ut primo ex loco Z in planum illud fixum demittatur perpendicularium ZY, tum ve-

ro ex Y ad rectam AB ducatur normalis YX. Vocemus ergo has coordinatas :

$$AX = X, \quad XY = Y \quad \text{et} \quad YZ = Z$$

quarum valores ad quoduis tempus elapsum = t vt cogniti spectantur. Hinc igitur statim habetur distantia corporis Z a puncto fixo A quae si breuitatis gratia dicatur $AZ = \varphi$ erit $\varphi = XX + YY + ZZ$.

Tum vero momento temporis dt corpus ex Z in z progredi concipiamus, vt sit $Az = a + d\varphi$, et angulus elementaris $ZAz = d\Phi$, quem corpus Z interea ex A in orbita sua conficere cernitur, eritque vti constat, $Zz = V(d\varphi^2 + \varphi\varphi d\Phi^2)$, at per coordinatarum elementa est etiam $Zz = V(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$, vnde fit

$$d\varphi^2 + \varphi\varphi d\Phi^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

sicque patet, quomodo angulum elementarem dΦ per coordinatas exprimi conueniat, quod vero mox succinctius ostendetur.

IV.

Per elementum Zz cum puncto fixo A certum planum determinatur, in quo nunc quidem corpus Z moueri censetur: hoc planum alicubi secabit secundum rectam AN, quae ergo haec intersectio nodorum appellatur, et cuius variatio ob perturbationem motus corporis Z potissimum est inuestiganda; deinde etiam angulum, quo planum NAZ ad

pl-

planum fixum inclinatur, notari conuenit, qui simpliciter in Astronomia inclinatio vocatur, et ob motus perturbationem insignes mutationes subire potest. Pro his ergo nouis elementis ponamus:

Longitudinem lineae nodorum seu angulum $BAN = \psi$
Inclinationem orbitae ZAN ad planum fixum = ω
et argumentum latitudinis seu angulum $NAZ = \sigma$

quae vt ad coordinatas reuocemus, tam ex Y quam ex Z ad lineam nodorum AN agamus normales YO et ZO, sicque angulus YOZ ipsam inclinationem ω metietur. At ob angulum $NAZ = \sigma$ et distantiam $AZ = \varphi$ habebimus:

$$AO = \varphi \cos. \sigma \quad \text{et} \quad ZO = \varphi \sin. \sigma$$

hincque porro

$$ZY = \varphi \sin. \sigma \sin. \omega \quad \text{et} \quad OY = \varphi \sin. \sigma \cos. \omega$$

vnde ob angulum $BAN = \psi = XYO$, concludimus:

$$AX = \varphi \cos. \sigma \cos. \psi - \varphi \sin. \sigma \cos. \omega \sin. \psi$$

$$\text{et} \quad XY = \varphi \cos. \sigma \sin. \psi + \varphi \sin. \sigma \cos. \omega \cos. \psi.$$

Quare ternae nostrae coordinatae ita hinc definiuntur, vt sit

$$X = \varphi(\cos. \sigma \cos. \psi - \sin. \sigma \cos. \omega \sin. \psi)$$

$$Y = \varphi(\cos. \sigma \sin. \psi + \sin. \sigma \cos. \omega \cos. \psi)$$

$$\text{et} \quad Z = \varphi \sin. \sigma \sin. \omega$$

vbi praeterea notetur esse tang. anguli $NA Y = \text{tang. } \sigma \cos. \omega$, qui angulus dicitur longitudo puncti Z a nodo.

V.

Cum nunc angulus $BA Y$ in Astronomia exhibeat longitudinem, angulus vero ZAY latitudinem puncti Z, siquidem planum tabulae eclipticam referat, et recta AB ad principium arietis sit perpendicularis; quas denominationes autem quoque in latiori sensu accipere licet: habebimus

$$\text{longitudinem puncti Z seu angulum } BA Y = \psi + NA Y$$

existente tang. $NA Y = \text{tang. } \sigma \cos. \omega$

pro latitudine vero seu angulo ZAY erit

$$\sin. ZAY = \frac{Z Y}{AZ} = \sin. \sigma \sin. \omega$$

Tab. II. quae eadem formulae vulgo ex trigonometria sphaerica elici solent. In superficie scilicet sphaerica centro A descripta circulus maximus BNY repraesentet planum fixum, et punctum B sit initium, a quo longitudo computatur. Porro sit N nodus et NZ orbita, ad quam nunc motus corporis Z refertur, tum ex Z ad circulum BNY ducatur arcus normalis ZY ; quo facto arcus BNY praebet longitudinem, arcus vero ZY latitudinem puncti Z, ad quas inueniendâs primo habemus:

$$\text{arcum } BN, \text{ seu longitudinem nodi} = \psi$$

$$\text{angulum } ZNY \text{ seu inclinationem} = \omega$$

$$\text{et arcum } NZ \text{ seu argumentum latitudinis} = \sigma.$$

Hæc

Hæc his resolutio trianguli sphaerici reſt anguli NYZ dat
 $\sin. ZY = \sin. \sigma \sin. \omega$ et $\text{tang. } NY = \text{tang. } \sigma \cos. \omega$
 profus ut ante.

IV.

Quamuis autem tam linea nodorum, quam inclinatio sit variabilis; tamen quia ambo puncta Z et z ad idem planum NAZ pertinent, per differentiationem a puncto Z ad z perueniri debet, etiamſi angulus $BAN = \psi$ et inclinatio ω pro constantibus habeantur, dum scilicet angulus $NAZ = \sigma$ angulo elementari $ZA z = d\Phi$ crescere sumatur ut sit $d\sigma = d\Phi$. Deinde vero etiam per differentiationem ad idem punctum z perueniri necesse est, si tam linea nodorum, quam inclinatio variables fuerint, quoniam punctum z quoque ad orbitam variam pertinere debet, hic vero non amplius differentiale $d\sigma$ ipsi $d\Phi$ aequale est ponendum, sed ipsi proprius valor est tribuendus, qui simul ab orbitae mutatione pendet. Cum igitur haec duplex differentiatione eodem perducere debeatis, aequationes hinc adipiscemur, quibus certae relationes inter variationes in orbita ortas designantur, quae in sequenti calculo maximum praestabunt usum. Neque vero hoc solum in differentialibus ipsarum coordinatarum locum habet, sed etiam quantitatum inde derivatarum, cuiusmodi sunt:

$$X = \frac{\cos. \sigma \cos. \psi}{\sin. \sigma \sin. \omega} - \frac{\cos. \omega \sin. \psi}{\sin. \omega} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\cos. \sigma \sin. \psi}{\sin. \sigma \sin. \omega} + \frac{\cos. \omega \cos. \psi}{\sin. \omega}$$

quæ

quarum ergo differentialia duobus illis modis sumta eosdem valores praebere debent.

VII.

Prima igitur differentiatio sumtis angulis ψ et ω constantibus et $d\sigma = d\Phi$ dat:

$$d \frac{X}{Z} = \frac{-d\Phi \cos \psi}{\sin \sigma^2 \sin \omega} \text{ et } d \frac{Y}{Z} = \frac{-d\Phi \sin \psi}{\sin \sigma^2 \sin \omega}$$

Pro altera differentiatione noventur primo hac formulae:

$$\frac{X}{Z} \cos \psi + \frac{Y}{Z} \sin \psi = \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma \sin \omega} \text{ et } \frac{Y}{Z} \cos \psi - \frac{X}{Z} \sin \psi = \frac{\cos \sigma}{\sin \omega}$$

quae more consueto differentiatiae praebent:

$$\cos \psi d \frac{X}{Z} + \sin \psi d \frac{Y}{Z} - d \psi \left(\frac{Y}{Z} \cos \psi - \frac{X}{Z} \sin \psi \right) = \frac{-d \sigma}{\sin \sigma \sin \omega}$$

$$\cos \psi d \frac{Y}{Z} - \sin \psi d \frac{X}{Z} - d \psi \left(\frac{X}{Z} \cos \psi + \frac{Y}{Z} \sin \psi \right) = \frac{-d \omega}{\sin \omega}$$

unde prioribus valoribus substituitis colligitur:

$$\frac{d\Phi \cos \psi^2}{\sin \sigma^2 \sin \omega} - \frac{d\Phi \sin \psi^2}{\sin \sigma^2 \sin \omega} + \frac{d\psi \cos \omega}{\sin \sigma \sin \omega} = \frac{d\sigma \cos \sigma \cos \omega}{\sin \sigma \sin \omega^2}$$

quae formae contrahuntur in has:

$$\frac{d\Phi}{\sin \sigma^2 \sin \omega} + \frac{d\psi \cos \omega}{\sin \omega} = \frac{-d\sigma}{\sin \sigma \sin \omega} - \frac{d\omega \cos \sigma \cos \omega}{\sin \sigma \sin \omega^2}$$

et $\frac{d\psi \cos \psi}{\sin \sigma \sin \omega} = \frac{-d\omega}{\sin \omega}$ seu $\frac{d\omega}{\sin \omega} = \frac{d\psi}{\tan \sigma}$

qui posterior valor in illa substitutus suppediat seu $d\psi \cos \omega = d\Phi - d\sigma$.

VIII.

VIII.

Hinc igitur primo dicimus variationem in inclinatione orbitae oram $d\omega$ semper ita pendere a variatione lineae nodorum $d\psi$ ut sit $d\omega = \frac{d\psi \sin \omega}{\tan \sigma}$; seu incrementum inclinationis se habebit ad promotionem lineae nodorum, ut sinus inclinationis ad tangentem argumenti latitudinis; unde sequentia conclusaria deducuntur:

- 1°. Si argumentum latitudinis σ sit vel nullum vel 6° vbi latitudo est nulla, lineam nodorum quiescere, quantumvis interea varietur inclinatio.
- 2°. Si argumentum latitudinis σ sit vel 3° vel 9°, seu $\tan \sigma = \infty$ vbi latitudo est maxima, vel ∞ vbi inclinationem nullam mutationem pati; quantumvis interea linea nodorum vel progrediatur vel regrediatur.
- 3°. Si argumentum latitudinis σ vel intra limites 0° et 3° vel intra 6° et 9° continetur, hoc est dum latitudo crescit, tum inclinationem ω crescere, siquidem linea nodorum progrediatur, sin autem regrediatur, inclinationem decrescere.
- 4°. Si argumentum latitudinis σ vel intra limites 3° et 6° vel intra 9° et 12° continetur, hoc est dum latitudo decrescit, tum progrediente linea nodorum inclinationem immiui, ea vero regrediente augeri.

IX.

Deinde obseruandum est, augmentum argumenti latitudinis σ promotioni in propria orbita seu elemento $d\Phi$ non esse aequale, nisi linea nodorum maneat immota; cum inuenimus $d\sigma = d\Phi - d\psi \operatorname{cof} \omega$, solo excepto casu, quo inclinatio ω foret angulus rectus. Haec vero phaenomena per trigonometriam sphaericam magis perspicua reddentur. Si enim circulus BNY vt ante repraesentet planum fixum, ad quod motus puncti Z refertur, eiusque motus praefens fiat secundum circulum NZ, vt sit $BN = \psi$; $YNZ = \omega$ et arcus $NZ = \sigma$; at postquam punctum Z per elementum $Zz = d\Phi$ fuerit progressum, eius motus fiat secundum circulum nz , erit promotio lineae nodorum $Nn = d\psi$ inclinatio variata $Ynz = \omega + d\omega$, et argumentum latitudinis $nz = \sigma + d\sigma$. Ducto ergo arcu ny ad NZ normali erit $Ny = d\psi \operatorname{cof} \omega$ et $ny = d\psi \operatorname{sn} \omega$; inde autem colligitur $Zn = \sigma - d\psi \operatorname{cof} \omega$, ideoque $nz = \sigma - d\psi \operatorname{cof} \omega + d\Phi = \sigma + d\sigma$ et consequenter $d\sigma = d\Phi - d\psi \operatorname{cof} \omega$ vt ante; simul autem intelligimus ob $d\psi \operatorname{cof} \omega = d\Phi - d\sigma = Ny$, formulam $d\Phi - d\sigma$ exhibere promotionem lineae nodorum in propria orbita, quia cum nodus fuisset in orbitae NZ puncto N; is iam in eius punctum n seu ν esset translatus. Praeterea ex triangulo sphaerico Nnz colligimus:

$$\operatorname{sn} \omega : \operatorname{sn} (\omega + d\omega) = \operatorname{sn} (\sigma - d\psi \operatorname{cof} \omega) : \operatorname{sn} \sigma$$

seu

seu $\operatorname{sn} \omega : \operatorname{sn} \omega + d\omega \operatorname{cof} \omega = \operatorname{sn} \sigma - d\psi \operatorname{cof} \sigma \operatorname{cof} \omega : \operatorname{sn} \sigma$
 et dividendo $\operatorname{sn} \omega : d\omega \operatorname{cof} \omega = \operatorname{sn} \sigma - d\psi \operatorname{cof} \sigma \operatorname{cof} \omega : d\psi \operatorname{cof} \sigma \operatorname{cof} \omega$
 vnde fit $d\omega \operatorname{sn} \sigma = d\psi \operatorname{sn} \omega \operatorname{cof} \sigma$ seu $\frac{d\omega}{\operatorname{sn} \omega} = \frac{d\psi}{\operatorname{tang} \sigma}$
 profus vt ante.

X.

Formulae autem differentiales, ante §. 7. inuentae, si euoluantur praebent:

$$\frac{XdZ - ZdX}{ZZ} = \frac{d\Phi \operatorname{cof} \psi}{\operatorname{sn} \sigma \operatorname{sn} \omega} \quad \text{et} \quad \frac{YdZ - ZdY}{ZZ} = \frac{d\Phi \operatorname{sn} \psi}{\operatorname{sn} \sigma \operatorname{sn} \omega}$$

vnde ob $Z = \psi \operatorname{sn} \sigma \operatorname{sn} \omega$ nascimur has formulas notatu dignas:

$$XdZ - ZdX = \psi d\Phi \operatorname{sn} \omega \operatorname{cof} \psi \quad \text{et} \\ YdZ - ZdY = \psi d\Phi \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn} \psi.$$

Hinc vt dZ eliminemus, si priorem multiplicemus per Y posteriorem vero per X , hoc productum ab illo ablatum relinquet:

$$Z(XdY - YdX) = \psi d\Phi \operatorname{sn} \omega (Y \operatorname{cof} \psi - X \operatorname{sn} \psi).$$

Cum autem sit vt vidimus §. 7. $Y \operatorname{cof} \psi - X \operatorname{sn} \psi = \frac{Z \operatorname{cof} \omega}{\operatorname{sn} \omega}$

haec formula ad insignem simplicitatem contrahitur:

$$XdY - YdX = \psi d\Phi \operatorname{cof} \omega.$$

Haec formulae cum illis, quas statim ab initio inuenimus, coniungae scilicet hisce:

$$XX + YY + ZZ = \psi\psi \quad \text{et} \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\psi^2 + \psi d\Phi^2$$

S 2

in

in parte mechanica maximum praestabunt visum, ad coordinatas ex calculo efficiendas, vt is deinceps eiusmodi quantitatibus, quae in Astronomia visu sunt receptae, contineatur.

XI.

Tab. II. Itae autem reductiones Geometricae latissime Fig. 1. patent nihilque interest, ad quodnam punctum A, planumque fixum BAY, motum puncti Z referre velimus. Verum si ad visum astronomicum spectemus, plurimum refert, quomodo tam illud punctum A, quod quasi est centrum motus, quam illud planum, ad quod motus puncti Z per longitudinem et latitudinem refertur, accipiatur, quoniam hinc potissimum simplicitas determinationis pendet. Ad quam electionem instituendam ante omnia notari oportet, cuncta artificia, quae adhuc sunt excogitata, tum solum cum aliquo successu adhiberi posse, cum motus corporis, qui quaeritur, non multum a legibus *Keplerianis* discrepet, ideoque perturbaciones admodum fuerint exiguae. Quando autem motus ita est comparatus, vt areae circa quodpiam punctum descriptae sint satis prope temporis proportionales, in hoc puncto aptissime punctum illud fixum A statuitur. Quod cum eueniat, si inter vires corpus sollicitantes, vna reliquas multum superet, in eo puncto, ad quod haec vis dirigitur, punctum A accipi conueniet: Ita si quaesito fuerit de perturbationibus planetae cuiusdam principalis seu

come-

cometae, punctum A commodissime in centro solis capietur: sin autem perturbationes in motu lunae, vel alius planetae secundarii factae definiri debeant; tum punctum A in centro terrae vel planetae primarii accipi oportet, ita vt vis corpus propolsum Z ad A pellens reliquas vires, quibus hoc corpus simul vrgetur, multum superet.

XII.

Si corpus Z hac sola vi principali sollicitaretur, corpus omnino regulariter circa punctum A in sectione conica renoueretur, idque perpetuo in eodem plano, ita vt quomodocumque planum fixum BAY acciperetur, neque in linea nodorum neque in inclinatione vngquam vlla mutatio oriretur; interim tamen calculus sine dubio simplicissimus euaderet, si planum fixum in ipso plano motus acciperetur. Verum si motus ab alio corpore coelesti perturbetur, cuiusquidem motum in hac investigatione tanquam cognitum assumi oportet, planum fixum conuenientissime cum orbita illius corporis perturbantis congruens sumetur. Ita si perturbaciones lunae a sole oriundae quaerantur, planum ellipticae, in quo sol ex terra tanquam centro motus A moueri cernitur, dabit planum fixum BAY; et a quocumque alio corpore perturbatio efficiatur, id planum, in quo hoc corpus ex centro motus A moueri cernitur, erit eligendum. At si hoc corpus ipsum non in eodem plano moueatur, tum pla-

num aliquod medium, commodissime assumetur; vix autem opus videtur, calculum ad istum casum accommodari, quod quidem si vltus postulerit facile praestabitur.

Pars Mechanica.

XIII.

Tab. II. In mechanica tractatione tria corpora veniunt
 Fig. I. consideranda. Primum est id, quod in centro motus A positum vim praecipuam exerit in corpus Z, cuius motum inuestigamus, qualis spectatori in ipso puncto A constituto apparet, huius igitur corporis in A sibi massam vocemus. $\equiv A$.

Alterum corpus, a cuius actione motus corporis Z perturbatur, in ipso plano fixo BAY utcumque moveri assumimus, ita ut eius locus ad quoduis tempus assignari possit. Sit massa huius corporis $\equiv B$, idque nunc quidem versetur in S, ita ut sit eius distantia a corpore centrali $AS \equiv u$, et longitudo seu angulus $BAS \equiv \theta$, vnde ex S in rectam fixam AB demisso perpendicularo SP fit $AP \equiv u \cos. \theta$ et $PS \equiv u \sin. \theta$.

Tertium corpus est id ipsum in Z, in cuius motum inquirimus, sit eius massa $\equiv C$, et ut ante posuimus, distantia a centro motus $AZ \equiv \psi$, vocatis ternis coordinatis orthogonalibus $AX \equiv X$, $XY \equiv Y$

$XY \equiv Y$ et $YZ \equiv Z$, quas vero ex calculo eximus introducendo sequentia elementa:

- 1°. longitudinem lineae nodorum $BAN \equiv \psi$
- 2°. Inclinationem orbitae praesentem $YOZ \equiv \omega$
- 3°. argumentum latitudinis seu $NAZ \equiv \sigma$.

Denique tempusculo dt a corpore Z angulum elementarem $ZAz \equiv d\Phi$ absolvi statimus. Horum autem elementorum relationes ex parte geometrica sunt reperendae.

XIV.

Quoniam corpus Z ad A vrgetur vi $\equiv \frac{A}{v^2}$, contra vero A ad Z trahitur vi $\equiv \frac{C}{v^2}$, ut punctum A tanquam quiescens considerari possit, corpus Z ad A attrahi censendum est vi $\equiv \frac{A+C}{v^2}$, quae secundum directiones ternarum coordinatarum resoluta dat vires:

sec. $XA \equiv \frac{A+C}{v^2} \cdot X$; sec. $YX \equiv \frac{A+C}{v^2} \cdot Y$; sec. $ZY \equiv \frac{A+C}{v^2} \cdot Z$.

Deinde pro vi, qua corpus Z ad S sollicitatur, vocemus breuitatis gratia distantiam $SZ \equiv w$; ut vis ZS sit $\equiv \frac{B}{w^2}$, quae resoluitur statim in vires sec. $ZY \equiv \frac{B}{w^2} \cdot Z$ et sec. $YS \equiv \frac{B}{w^2} \cdot YS$, haec vero porro ob $XP \equiv u \cos. \theta - X$ et $PS - XY \equiv u \sin. \theta - Y$ in vires:

sec. $XP \equiv \frac{B}{w^2} (u \cos. \theta - X)$ et sec. $XY \equiv \frac{B}{w^2} (u \sin. \theta - Y)$.

Deni-

Denique quia corpus A quoque ad S virgetur vi $\frac{B}{n}$ haec contrarie in Z translata dabit insuper vires

$$\text{secundum } XA = \frac{B}{n} \cos \theta \text{ et secundum } YX = \frac{B}{n} \sin \theta$$

quae vires in corpus Z agentes collectae praebent:

- 1°. $V \sin \theta \text{ sec. } XA = \frac{A+C}{n^2} X + \frac{B}{n^2} (X - u \cos \theta) + \frac{B}{n} \cos \theta$
- 2°. Vim sec. $XY = \frac{A+C}{n^2} Y + \frac{B}{n^2} (Y - u \sin \theta) + \frac{B}{n} \sin \theta$
- 3°. Vim sec. $ZY = \frac{A+C}{n^2} Z + \frac{B}{n^2} Z$,

quibus cum accelerationes corporis Z secundum eadem directiones sint proportionales, haurimus pro temporis elemento dt constanti sumto:

$$\begin{aligned} ddx &= -a dt^2 \left(\frac{A+C}{n^2} X + \frac{B}{n^2} X - B u \cos \theta \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ ddy &= -a dt^2 \left(\frac{A+C}{n^2} Y + \frac{B}{n^2} Y - B u \sin \theta \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ ddz &= -a dt^2 \left(\frac{A+C}{n^2} Z + \frac{B}{n^2} Z \right) \end{aligned}$$

vbi constans a ex unico motu huius generis cognoscitur, veluti ex motu solis apparente, definiti potest.

XV.

Antiquam autem has formulas euoluamus, distantiam $SZ = w$ in calculum de nouo introductam accuratius definire debemus. Cum autem manifestum sit:

$$SZ^2 = XZ^2 + XP^2 + (PS - XY)^2$$

habebimus:

$$w^2 = ZZ^2 + XX^2 + YY^2 + uu - 2uX \cos \theta - 2uY \sin \theta$$

quae

quae forma ob $XX + YY + ZZ = v^2$ reducitur ad hanc:

$$w^2 = v^2 + uu - 2u(X \cos \theta + Y \sin \theta).$$

Ex valoribus autem pro X et Y supra §. 4. inuentis colligimus:

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = v(\cos \sigma \cos(\theta - \psi) + \sin \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi))$$

vbi angulus $\theta - \psi$ exprimit distantiam corporis perturbantis S a linea nodorum seu angulum $NAS = \theta - \psi$, ita vt sit

$$w^2 = v^2 + uu - 2vu \cos \sigma \cos(\theta - \psi) + \sin \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi)$$

Verum si iam breuitatis gratia vocemus ang. $SAZ = \mu$ quo distantia corporis Z a corpore perturbante S ex A via designatur, ob $AZ = v$ et $AS = u$ constat fore

$$w^2 = v^2 + uu - 2vu \cos \mu$$

vnde concluditur esse:

$$\cos \sigma \cos(\theta - \psi) + \sin \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi) = \cos \mu$$

id quod facillime per trigonometricam sphaericam probatur. Cum enim in fig. 2. sit $BN = \psi$, Fig. 4. $NZ = \sigma$ et ang. $YNZ = \omega$ si capiatur $BS = \theta$, erit $NS = \theta - \psi$, et in triangulo sphaerico latus $SZ = \mu$ ex lateribus $NZ = \sigma$, $NS = \theta - \psi$ cum angulo intercepto $ZNS = \omega$ hoc ipso modo determinatur.

XVI.

Cum tres aequationes ex principiis mechanicis deductae totidem determinationes suppeditent, totum artificium in hoc consistat, quemadmodum eas inde commodissime deriuemus. Ac primo quidem statim se offert haec ratio, qua prima per $2dX$ secunda per $2dY$ et tertia per $2dZ$ multiplicatae in vnam summam colliguntur; quia enim ut supra vidimus est

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vdv\Phi'$$

$$\text{et } XX + YY + ZZ = v^2$$

$$\text{erit } 2dXddX + 2dYddY + 2dZddZ = d.(dv^2 + vdv\Phi')$$

$$\text{et } XdX + YdY + ZdZ = vdv.$$

Quare memorata ratione peruenietur ad hanc aequationem:

$$d.(dv^2 + vdv\Phi') = -2adi^2 \left(\frac{A+C}{v^3} dv + \frac{B}{v^2} vdv - B\mu (dX \cos \theta + dY \sin \theta) \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

vbi formulam $dX \cos \theta + dY \sin \theta$ enquiri conuenit. Verum ex formulis supra §. 10. erutis colligimus:

$$dX = \frac{Xdz}{Z} - \frac{vd\Phi \cos \psi}{\sin \sigma} \quad \text{et} \quad dY = \frac{Ydz}{Z} - \frac{vd\Phi \sin \psi}{\sin \sigma}$$

ob $Z = v \sin \sigma \sin \omega$ vnde fit

$$dX \cos \theta + dY \sin \theta = \frac{dz}{Z} (X \cos \theta + Y \sin \theta) - \frac{vd\Phi \cos(\theta - \psi)}{\sin \sigma}$$

modo autem vidimus esse

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = v(\cos \sigma \cos(\theta - \psi) + \sin \sigma \cos \omega \sin(\theta - \Phi))$$

$$= v \cos \mu$$

cum

cum vero est $\frac{dz}{Z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma \cos \sigma}{\sin \sigma} + \frac{d\omega \cos \omega}{\sin \omega}$, vel

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma \cos \sigma}{\sin \sigma} + \frac{d\psi \cos \omega}{\tan \sigma} \quad \text{ob } d\omega = \frac{d\psi \sin \omega}{\tan \sigma}$$

Cum igitur sit $d\Phi = d\sigma + d\psi \cos \omega$, adipiscimur

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dv}{v} + \frac{d\sigma}{\tan \sigma}, \quad \text{ita vt fit}$$

$$dX \cos \theta + dY \sin \theta = dv \cos \mu + \frac{vd\Phi \cos \mu}{\tan \sigma} - \frac{vd\Phi \cos(\theta - \psi)}{\sin \sigma} =$$

$$dv \cos \mu + \frac{vd\Phi}{\sin \sigma} (\sin \sigma \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi) + \cos \sigma^2 \cos(\theta - \psi) - \cos(\theta - \psi))$$

ideoque

$$dX \cos \theta + dY \sin \theta = dv \cos \mu - v d\Phi (\sin \sigma \cos(\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi)).$$

Quocirca aequatio nostra inuenta erit: $d.(dv^2 + vdv\Phi') = -2adi^2 dv \left(\frac{A+C}{v^3} + \frac{B}{v^2} - B \cos \mu \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{r} \right) \right) - 2aBdi^2 d\Phi \cdot v\psi (\sin \sigma \cos(\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi)) \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{r} \right)$.

XVII.

Hanc euolutionem formulae $dX \cos \theta + dY \sin \theta$ nimis prolixam multo conuenius ex ipsis valoribus pro X et Y inuentis conficere licet. Cum enim eorum differentia rite procedant, si anguli ψ et ω vt constantes tractentur et pro $d\sigma$ scribatur $d\Phi$ haec differentia praebet:

$$dX = dv (\cos \sigma \cos \psi - \sin \sigma \cos \omega \sin \psi) - v d\Phi (\sin \sigma \cos \psi + \cos \sigma \cos \omega \sin \psi)$$

$$dY = dv (\cos \sigma \sin \psi + \sin \sigma \cos \omega \cos \psi) - v d\Phi (\sin \sigma \sin \psi - \cos \sigma \cos \omega \cos \psi)$$

vnde

vnde statim colligitur :

$$dX \cos(\theta + dY \sin \theta = d\psi (\cos \sigma \cos(\theta - \psi) + \sin \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi)) - \omega d\Phi \sin \sigma \cos(\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi))$$

ad quam formam magis contrahendam observo in Fig. 2. vbi $NS = \theta - \psi$; $NZ = \sigma$ $SNZ = \omega$ et $SZ = \mu$ sere primo vt supra $\cos \sigma \cos(\theta - \psi) + \sin \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi) = \cos \mu$, deinde vero si ponatur angulus $NZS = \xi$, reperiri

$$\cos \xi = \frac{\sin \sigma \cos(\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi)}{\sin \omega \sin(\theta - \psi)}$$

vnde concluditur :

$$\sin \sigma \cos(\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi) = \frac{\sin \omega \sin(\theta - \psi) \cos \xi}{\sin \xi}$$

ob $\sin \xi : \sin(\theta - \psi) = \sin \mu : \sin \omega$. Ex his ergo inferramus

$$dX \cos \theta + dY \sin \theta = d\psi \cos \mu - \omega d\Phi \sin \mu \cos \xi.$$

Vel si in Z ad arcum NZ alium arcum normalem quæmus, id eundem ex S perpendicularium in superficie spherica demittamus, quod vocemus $= \nu$ erit $\sin \nu = \sin \mu \cos \xi$ seu

$$\sin \sigma \cos(\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin(\theta - \psi) = \sin \nu$$

æquatio primam determinationem continens ita se habebit

$$d(\sin \nu + \omega \nu d\Phi) = -2 \alpha d\tau \left(\frac{A+C}{\omega \nu} d\psi + \frac{B \nu d\nu}{\omega \nu} - B \nu (d\omega \cos \mu + \dots) \right)$$

XVIII.

Binas reliquas determinationes, quas æquationes differentio-differentiales ex principiis motus deductæ suppeditant, commodissime per sequentes combinationes obtinebimus: Primo ergo harum æquationum §. 14. inuentarum prima per Y multiplicata a secunda per X multiplicata subtrahatur vt prodcat:

$$X d d Y - Y d d X = -\alpha d\tau B \nu (Y \cos \theta - X \sin \theta) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right) \text{ seu } \text{valoribus pro } x \text{ et } y \text{ substitutis}$$

$$X d d Y - Y d d X = \alpha B \nu d\tau^2 \cos \sigma \sin(\theta - \psi) - \sin \sigma \cos \omega \cos(\theta - \psi) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{\sigma^2}{\nu^2} \right).$$

Cum igitur sit $X d d Y - Y d d X$ differentiale ipsius $X d Y - Y d X$ hæc habebimus æquationem:

$$d. \omega \nu d\Phi \cos \omega = \alpha B \nu d\tau^2 (\cos \sigma \sin(\theta - \psi) - \sin \sigma \cos \omega \cos(\theta - \psi)) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right).$$

Simili modo ex prima ac tertia colligimus

$$X d d Z - Z d d X = -\alpha B \nu Z d\tau^2 \cos \theta \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right) \text{ seu}$$

$$X d d Z - Z d d X = -\alpha B \nu d\tau^2 \cos \theta \sin \sigma \sin \omega \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right)$$

sicque habebitur:

$$d. \omega \nu d\Phi \sin \omega \cos \psi = -\alpha B \nu d\tau^2 \cos \theta \sin \sigma \sin \omega \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right).$$

Pari modo secunda æquatio cum tertia coniuncta dat:

$$Y d d Z - Z d d Y = -\alpha B \nu d\tau^2 \sin \theta \sin \sigma \sin \omega \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right) \text{ seu}$$

$$d. \omega \nu d\Phi \sin \omega \sin \psi = -\alpha B \nu d\tau^2 \sin \theta \sin \sigma \sin \omega \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\nu^2} \right)$$

verum probe est notandum, in his tribus aequationibus tantum duas determinationes contineri, cum in binis tertia iam sponte includatur.

XIX.

Binas postremas ita tractemus, ut cum membra priora differentitari debeant, pars communis $v\omega d\Phi \sin.\omega$ tanquam unica quantitas spectetur, si- que fiet:

$$\begin{aligned} \cos.\psi d.v\omega d\Phi \sin.\omega - d\psi \sin.\psi.v\omega d\Phi \sin.\omega &= -\alpha Bv\omega d\psi^2 \\ \sin.\psi d.v\omega d\Phi \sin.\omega + d\psi \cos.\psi.v\omega d\Phi \sin.\omega &= -\alpha Bv\omega d\psi^2 \\ \cos.\theta \sin.\sigma \sin.\omega \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right) \\ \sin.\theta \sin.\sigma \sin.\omega \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right) \end{aligned}$$

Unde $d.v\omega d\Phi \sin.\omega$ eliminando colligitur

$$d\psi.v\omega d\Phi \sin.\omega = -\alpha Bv\omega d\psi^2 \sin.\sigma \sin.\omega \sin.(\theta - \psi) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

sequae variatio lineae nodorum ita definitur ut sit

$$d\psi = -\frac{\alpha Bv\omega d\psi^2 \sin.\sigma \sin.\omega \sin.(\theta - \psi)}{v\omega d\Phi} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

Unde simul variatio inclinationis innotebit ob $\frac{d\omega}{\sin.\sigma}$

$\frac{d\psi}{\sin.\sigma}$ sin autem ex illis binis formis membrum $v\omega d\Phi \sin.\omega$ eliminetur, obtinetur

$$d.v\omega d\Phi \sin.\omega = -\alpha Bv\omega d\psi^2 \sin.\sigma \sin.\omega \cos.(\theta - \psi) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

quae iam cum prima exuendo angulum ω comparata praebet

$$\begin{aligned} \cos.\omega d.v\omega d\Phi - d\omega \sin.\omega v\omega d\Phi &= \alpha Bv\omega d\psi^2 (\cos.\sigma \sin.(\theta - \psi) \\ &\quad - \sin.\sigma \cos.\omega \cos.(\theta - \psi)) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin.\omega d.v\omega d\Phi + d\omega \cos.\omega.v\omega d\Phi &= -\alpha Bv\omega d\psi^2 (\sin.\sigma \sin.\omega \cos. \\ &\quad (\theta - \psi)) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right) \end{aligned}$$

unde concludimus:

$$d.v\omega d\Phi = -\alpha Bv\omega d\psi^2 (\sin.\sigma \cos.(\theta - \psi) - \cos.\sigma \cos.\omega \sin.(\theta - \psi)) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

$$\text{seu } d.v\omega d\Phi = -\alpha Bv\omega d\psi^2 \sin.v \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

quae est altera determinatio, quam quaeri oportebat.

XX.

Postremam hanc aequationem multiplicemus per $2v\omega d\Phi$ et, integrali satem indicato, fiet

$$v^2 d\Phi^2 = -2\alpha B d\psi^2 \int v^2 \omega d\Phi \sin.v \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

qua aequatione relatio inter angulum elementarem $d\Phi$ et tempusculum dt continetur, vbi quidem manifestum est, si massa corporis perturbantis B evanesceret, futurum esse $v^2 d\Phi$ tempori dt proportionale, seu areas circa A descriptas tempori proportionales. Ad hanc aequationem si adiungatur primo §. 17. inuenta, pariter integrata quatenus fieri potest erit

$$\begin{aligned} dv^2 + v\omega d\Phi^2 &= 2\alpha d\psi^2 (A + C) \left(\frac{1}{\omega} - \beta\right) - 2\alpha B d\psi^2 \int \frac{v\omega d\psi}{\omega^2} \\ &\quad + 2\alpha B d\psi^2 \int v \omega d\psi \cos.\mu - v d\Phi \sin.v \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v^2}\right) \end{aligned}$$

quae aequatio insuper variationem distantiae v cum elemento $d\Phi$ vel tempusculó dt comparat, quae duae res proprie ad motum corporis Z in sua orbita

bica spectant. Præterea vero pro ipsius orbitæ variatione, habemus:

$$d\psi = \frac{aBu d^2 \sin \sigma \sin(\theta - \psi)}{v d\Phi} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{d\omega}{\sin \omega} = \frac{aBu d^2 \cos \sigma \sin(\theta - \psi)}{v d\Phi} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) = \frac{d\psi}{\tan \sigma \sigma}$$

Ac denique argumentum latitudinis σ ad eadem elementa reuocatur ope huius æquationis $d\sigma = d\Phi - d\psi \cot \omega$.

XXI.

Elementum temporis dt cum quantitate constante a commodissime ex calculo tollitur, si motus quidam regularis et cognitus introducatur, veluti motus medius solis, vel alius corporis, quod circa centrum virium in circulo uniformiter reuoluatur. Ponamus ergo circa corpus in A positum cuius massa sit $= \mathfrak{A}$ aliud corpus, cuius massa $= \mathfrak{E}$ ad distantiam $= a$ in circulo ita circumferri vt tempore t angulum ipsi proportionalem τ absoluat, atque nostræ formulæ ad hunc casum accommodabuntur statucendo $A = \mathfrak{A}$, $C = \mathfrak{E}$ et $B = 0$, ita vt tunc fiat $v = d$ et $d\Phi = d\tau$. Motus igitur, quem cognitissimè assumimus, his duabus æquationibus continetur:

$$v^2 d\Phi^2 = 2aDdi^2 + vvd\Phi^2 = 2a\mathfrak{A}di^2 (\mathfrak{A} + \mathfrak{E}) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right)$$

vbi primum constantes D et f huic casui conuenienter designari oportet. Hinc in finem ex prioris valor $2a\mathfrak{A}di^2 = \frac{v^2 d\Phi^2}{D}$ in altera substitutus dat: $d\omega^2 = \frac{v^2 v d\Phi^2}{D} = \frac{v^2 + \mathfrak{E}}{D} \frac{2a\mathfrak{A}d\Phi^2}{(1 - \frac{r}{a})}$

seu

seu $Df d\omega^2 + Df v v d\Phi^2 = (\mathfrak{A} + \mathfrak{E}) v^2 d\Phi^2 (f - v)$ unde colligitur

$$d\Phi = \frac{d\omega \sqrt{Df}}{v \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{E}) v (f - v)}} = Df$$

cui æquationi differentiali satis fit tribuendo ipsi v cuiusmodi valorem constantem, quo denominator euanescat, verum alio loco ostendi, hanc solutionem in integrali admitti non posse, nisi iste denominationis factor euanesceat ad minimum vnius sit dimensionis, vnde necesse est, vt post signum radicale idem factor occurrat geminatus seu quadratus, vel quod eodem redit, vt etiam differentiale quantitatis post signum possit eundem inuoluat factorem. Posito ergo hoc differentiali $= 0$, sit $v = if$ quare cum per hypothesein esse debeat $v = a$, erit $f = 2a$, quo casu ipse denominator fit $(\mathfrak{A} + \mathfrak{E}) a a - 2Da$ nihilo æquandus, ita vt sit $D = (\mathfrak{A} + \mathfrak{E}) a$. Iam in alterutra æquatione statuerat $v = a$ et $d\Phi = d\tau$, eritque $a^2 d\tau^2 = a (\mathfrak{A} + \mathfrak{E}) a di^2$ seu $a di^2 = \frac{a^2 d\tau^2}{\mathfrak{A} + \mathfrak{E}}$.

XXII

Cum igitur ob motum istum cognitum ad datum quoduis tempus t innosceat motus medius τ , hic loco temporis in nostrum calculum introducitur, si modo vbiq; loco adi^2 scribatur valor modo inuentus $\frac{a^2 d\tau^2}{\mathfrak{A} + \mathfrak{E}}$. Statuamus ergo ad nostras formulas simpliciores reddendas primo $\frac{A+C}{\mathfrak{A} + \mathfrak{E}} = m$, deinde $B = n(A+C)$, vt fiat $adi^2 (A+C) = ma^2 d\tau^2$ et $aBdi^2 = mna^2 d\tau^2$ vbi notandum est, perturbationes

Tom. XII. Non. Comm.

V

tiones

tiones fore minimas, si termini numero n affecti fuerint minimi. Nostrae ergo aequationes sequentes inducent formas:

$$1^{\circ}. \psi^4 d\Phi^2 = -2ma^2 d\tau^2 \int \psi^4 u d\Phi \sin. \nu \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

$$2^{\circ}. d\psi^2 + \psi^2 d\Phi^2 = 2ma^2 d\tau^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) - 2ma^2 d\tau^2 \int \frac{\psi^2 \sigma}{a^2}$$

$$+ 2ma^2 d\tau^2 \int u(d\psi \cos. \mu - \psi d\Phi \sin. \nu) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

$$3^{\circ}. d\psi = -mna^2 d\tau^2 \cdot \frac{\psi \sin. \sigma \sin. \theta - \psi}{\psi d\Phi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

$$4^{\circ}. \int_{\sin. \omega} d\omega = -mna^2 d\tau^2 \cdot \frac{\kappa \cos. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{\psi d\Phi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{d\psi}{\tan. \delta. \sigma}$$

$$5^{\circ}. d\sigma = d\Phi + mna^2 d\tau^2 \cos. \omega \cdot \frac{\psi \sin. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{\psi d\Phi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) = d\Phi - d\psi \cos. \alpha.$$

Hisq; aequationibus totus corporis Z motus cum omnibus perturbationibus ab actione corporis S oriendis determinatur: vbi imprimis obseruetur formulas integrales, quibus binae priores aequationes sunt affectae, ad perturbationes tantum pertinere ideoque sufficere si earum valores proxime veri colligantur, ex quo his integrationibus negotium approximatio- nis vix impediti est censendum. Mox autem methodum exponam calculum adeo ab his integra- libus liberandi.

XXIII.

Statuamus tantisper ad abbreviandum:

$$\int \psi^2 u d\Phi \sin. \nu \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) = P$$

$$\int \frac{\psi^2 d\psi}{a^2} = Q$$

$$\int u(d\psi \cos. \mu - \psi d\Phi \sin. \nu) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) = R$$

VI

vt binae aequationes priores contrahantur in has formas:

$$1^{\circ}. \psi^4 d\Phi^2 = 2ma^2 d\tau^2 (D - nP)$$

$$2^{\circ}. d\psi^2 + \psi^2 d\Phi^2 = 2ma^2 d\tau^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} - n(Q - R) \right)$$

quae solae totum negotium conficerent, si corpus Z in eodem plano mouetur, in quo corpus perturbans S circumferri assumimus; reliquae aequationes ad motum, vt dicitur, latitudinis pertinent, earumque resolutio multo minoribus laborat difficultatibus, vnde omne studium in binis prioribus est consumendum. Inde autem eliminato elemento $d\tau$ haec nascitur aequatio

$$(D - nP)(d\psi^2 + \psi^2 d\Phi^2) = \psi^4 d\Phi^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) - n(Q - R)$$

vnde elicitur:

$$d\Phi = \frac{\psi^2 \psi \sqrt{(D - nP)}}{\psi \sqrt{\left(\psi - \frac{1}{r^2} - n\psi \right) (Q - R) - D + nP}}$$

$$\text{hincque porro } 2ma^2 d\tau^2 = \frac{\psi d\psi d\psi^2}{\psi - \frac{1}{r^2} - n\psi \left((Q - R) - D + nP \right)}$$

$$\text{ seu } ad\tau \sqrt{2ma^2} = \frac{\psi d\psi}{\sqrt{\left(-D + nP + \psi - \psi \left(\frac{1}{r^2} + n(Q - nR) \right) \right)}}$$

quarum formularum integratio foret in promptu, si fractio n vel perturbationes in nihilum abirent.

XXIV.

Aequationem illam hac forma representemus:

$$\frac{d\psi}{\psi} \sqrt{(D - nP)} = d\Phi \sqrt{\left(-\frac{1}{r^2} + n(R - Q) + \frac{1}{a^2} - \frac{D + nP}{\psi^2} \right)}$$

ex

ex qua discimus distantiam $AZ = \varphi$ tum fieri maximam vel minimam, quando quantitas posteriori signo radicali inuoluta euanescit. Haec autem loca non solum in Astronomia maximi sunt momenti, quia tum corpus Z in abscibus versari dicitur, sed etiam inde eiusmodi egregia subsidia petere licet, quibus motus perturbatus admodum concinne cum motu regulari comparari, eiusque aberrationes ab eo assignari queant. Commodissime hoc praestabitur introducendo in calculum nouum angulum ϑ , qui in Astronomia anomalia vera appellatur, et ita est comparatus, vt eo vel euanescente vel ad duos rectos excrecente distantia φ fiat vel minima vel maxima. Quo igitur motus propius ad similitudinem motus regularis in ellipsis facti reducat, statuumus $\varphi = \frac{p}{1+q \cos \vartheta}$, ita vt nunc motus consors sit motui regulari in eiusmodi ellipsi, cuius semiparameter sit $= p$, excentricitas $= q$, ideoque semi-axis transuersus $= \frac{p}{1-q}$, anomalia vera seu angulo ab axe existente $= \vartheta$. Facile autem perspicitur ob perturbaciones hanc ellipsis speciem continuo mutari, vnde non solum anomalia ϑ sed etiam litterae p et q vt variabiles sunt spectandae, quarum variationes iam sum inuestigaturus.

XXV.

Quo haec inuestigatio facillior reddatur, possumus breuitatis gratia:

$$j-n(R-Q) = M \text{ et } D-nP = N$$

vr

vt habeamus hanc formam euoluendam:

$$\frac{d\varphi}{dt} \sqrt{N} = d\Phi \sqrt{(-M + \frac{1}{b} - \frac{N}{r^2})}$$

Quoniam igitur nunc ponimus $\varphi = \frac{p}{1+q \cos \vartheta}$ seu $\frac{1}{b} = \frac{1+q \cos \vartheta}{p}$ per hypothesein tam casu $\vartheta = 0$, quo fit $\frac{1}{b} = \frac{1+q}{p}$, quam casu $\vartheta = 180^\circ$, quo casu fit $\frac{1}{b} = \frac{1-q}{p}$ quantitas $-M + \frac{1}{b} - \frac{N}{r^2}$ in nihilum abire debet, ex quo hae duae nascuntur aequationes:

$$-M + \frac{1+q}{p} - \frac{N(1+q)^2}{p^2} = 0 \text{ et}$$

$$-M + \frac{1-q}{p} - \frac{N(1-q)^2}{p^2} = 0$$

quorum differentia dat $\frac{2q}{p} - \frac{4q^2}{p^2} = 0$, ita vt fit $p = 2N$, seu $N = \frac{1}{2}p$, vnde fit $M = \frac{1+q}{p} - \frac{(1+q)^2}{2p} = \frac{1-q}{2p}$.

Quodsi ergo nostrae ellipsis semiaxis transuersus posterior $= r$ vt fit $r = \frac{p}{1+q \cos \vartheta}$, erit $M = \frac{1}{r^2}$, ideoque:

$$j-n(R-Q) = \frac{1-q}{2p} = \frac{1}{r^2} \text{ et } D-nP = \frac{1}{2}p.$$

XXVI.

His valoribus in nostra aequatione substitutis habebimus:

$$\frac{d\varphi}{dt} \sqrt{\frac{1}{2}p} = d\Phi \sqrt{(\frac{1+q}{2p} + \frac{1}{b} - \frac{p}{2r^2})}$$

in cuius posteriori membro primum pro $\frac{1}{b}$ valorem $\frac{1+q \cos \vartheta}{p}$ scribamus, vt fiat:

$$\frac{d\varphi}{dt} \sqrt{\frac{1}{2}p} = d\Phi \sqrt{(\frac{1+q}{2p} + \frac{1+q \cos \vartheta}{p} - \frac{1-q \cos \vartheta - 11 \cos^2 \vartheta}{2p})}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} \sqrt{\frac{1}{2}p} = d\Phi \sqrt{\frac{q \cos \vartheta + 1 - 11 \cos^2 \vartheta}{2p}} = \frac{q \cos \vartheta + 1 - 11 \cos^2 \vartheta}{\sqrt{2} p}$$

ita

ita ut sit $\frac{d\psi}{\psi} = \frac{qd\Phi}{p} \sin. s$; vnde vtiqve quod nobis erat propositum, agnoscimus, scilicet quoties anomaliae s sinus evanescit, simul distantiae ψ differentiale in nihilum abire, eamque propterea vel maximam vel minimam evadere. Tum vero hinc in genere incrementum distantiae ψ ad elementum $d\Phi$ reducitur, quod ipsum iam cum elemento cognito $d\tau$ ita comparatur, ut ob $D - nP = \frac{1}{2}p$ sit $\psi^2 d\Phi^2 = ma^2 p d\tau^2$, seu $\psi\psi d\Phi = ad\tau\sqrt{map}$.

Cum autem sit $\frac{1}{\psi} = \frac{1+q\cos.\psi}{p}$ erit

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{d\psi(1+q\cos.\psi)}{p} - \frac{dq\cos.\psi + qd\psi\sin.\psi}{p}$$

quae forma ipsi $\frac{qd\Phi}{p} \sin. s$ aequalis facta, praebet

$$q(d\Phi - ds) \sin. s = \frac{d^2p}{p}(1+q\cos.\psi) - dq\cos.\psi = \frac{d^2p}{\psi} - dq\cos.\psi$$

qua nova differentialium relatio continetur.

XXVII.

Reliquas determinationes peni oportet ex formulis supra inuentis:

$$p = 2D - 2nP \text{ et } \frac{1}{\psi} = \frac{1-q}{p} = \frac{1}{f} - 2n(R-Q)$$

quae differentiae et loco P, Q, R valores supra exhibitos restituendo suppediant,

$$dp = -2n dP = -2n\psi^2 u d\Phi \sin.\nu \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)$$

$$d.\frac{1}{\psi} = d.\frac{1-q}{p} = 2ndQ - 2ndR =$$

$$\frac{2n\psi d\psi}{\omega^2} - 2n\mu(d\psi\cos.\mu - \psi d\Phi \sin.\nu) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right).$$

Cum

Cum autem sit $d\psi = \frac{q\psi d\Phi \sin.\psi}{p} = \frac{q\psi d\Phi \sin.\psi}{1+q\cos.\psi}$

etiam hoc posterius differentiale ad elementum $d\Phi$ reducitur haecque:

$$d.\frac{1}{\psi} = d.\frac{1-q}{p} = \frac{2n\psi^2 d\Phi \sin.\psi}{p\omega^2} - 2n\psi u d\Phi \left(\frac{q\cos.\mu \sin.\psi}{1+q\cos.\psi} - \sin.\nu\right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right).$$

Est vero $d.\frac{1-q}{p} = \frac{-dp}{p^2}(1-q) - \frac{2q dq}{p}$, ideoque

$$q dq = -\frac{dp}{p^2}(1-q) = \frac{1}{p} d.\frac{1-q}{p} \text{ vnde colligitur}$$

$$q dq = +\frac{2n(1-q^2)\psi^2 u d\Phi \sin.\nu \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) - \frac{nq\psi^2 d\Phi \sin.\psi}{\omega^2}}{1+q\cos.\psi} - \sin.\nu \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)$$

quae ob $\psi = \frac{1}{1+q\cos.\psi}$ contrahitur in hanc

$$q dq = n\psi^2 u d\Phi \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) (q\cos.\mu \sin.\psi - \frac{q\sin.\nu(1+q+2\cos.\mu+q\cos.\psi)}{1+q\cos.\psi} \frac{2q\psi^2 d\Phi \sin.\psi}{\omega^2})$$

quae per q diuisa dat

$$dq = n\psi^2 u d\Phi \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) (\cos.\mu \sin.\psi - \frac{\sin.\nu(1+q+2\cos.\mu+q\cos.\psi)}{1+q\cos.\psi} \frac{2q\psi^2 d\Phi \sin.\psi}{\omega^2}).$$

Denique his valoribus in formula $q(d\Phi - ds) \sin. s = \frac{d^2p}{\psi} - dq\cos.\psi$ substitutis obtinebitur per sin. s diuisione facta

$$q(d\Phi - ds) = \frac{n\psi^2 d\Phi \cos.\psi}{\omega^2} - n\psi^2 u d\Phi \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) (\cos.\mu \cos.\psi + \frac{\sin.\nu \psi \sin.\psi (1+q\cos.\psi)}{1+q\cos.\psi}).$$

XXVIII.

Nunc igitur omnium quantitarum, quae in nostro calculum ingrediuntur, incrementa momentanea ad idem elementum $d\Phi$, quod eodem tem-
pusculo

pusculo dt , quo secundum motum medium hic introductum angulus $d\tau$ absoluitur, reduximus, unde pro quouis tempore minimo illa incrementa facile assignari poterunt. Primo igitur relatio inter angulum elementarem $d\Phi$ et $d\tau$ hac formula exprimitur:

$$v\omega d\Phi = a d\tau \sqrt{m a^2 d\tau^2 = \frac{1}{p} v^2 d\Phi^2}$$

secundo si statuamus $\omega = \frac{p}{1+q \cos \psi}$ et $r = \frac{p}{1-q}$ erit

$$1^\circ. dp = -2nv^2 u d\Phi \sin. v \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2} \right)$$

$$2^\circ. d\frac{1}{r} = \frac{1+q \cos \psi}{p} \frac{d\psi \sin. \psi}{p} - \frac{1+q \cos \psi}{p} (q \cos. \mu \sin. \psi - (1+q \cos. \psi) \sin. \psi)$$

$$3^\circ. dq = nv^2 u d\Phi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2} \right) (\cos. \mu \sin. \psi - \frac{(q+1 \cos. \mu + q \cos. \mu^2) \sin. \psi}{1+q \cos. \psi})$$

$$4^\circ. dv = d\Phi - \frac{nv^2 d\Phi \cos. \psi}{q \cos. \psi} + \frac{nv^2 u d\Phi}{q} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2} \right) (\cos. \mu \cos. \psi + \frac{(1+q \cos. \mu) \sin. \psi \sin. \psi}{1+q \cos. \psi})$$

existente

$$\cos. \mu = \cos. \sigma \cos. (\theta - \psi) + \sin. \sigma \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)$$

et $\sin. \nu = \sin. \sigma \cos. (\theta - \psi) - \cos. \sigma \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)$

vbi notetur $d\Phi - dv$ designare promotionem momentaneam lineae abscidum in ipsa orbita.

Tertio pro motu in latitudinem has habebimus formulas:

$$1^\circ. d\psi = \frac{nv^2 u d\Phi \sin. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2} \right)$$

$$2^\circ. \frac{d\omega}{\sin. \omega} = \frac{nv^2 u d\Phi \cos. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2} \right) = \frac{d\psi}{\tan. \sigma}$$

$$3^\circ. d\sigma = d\Phi + \frac{nv^2 u d\Phi \cos. \omega \sin. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2} \right)$$

$$\text{Sed } d\sigma = d\Phi - d\psi \cos. \omega. \quad \text{XXIX.}$$

XXIX.

Si integratio harum formularum absolui possit, nihil amplius in hac investigatione esset desiderandum, cum exinde omnis generis perturbations, quantumvis fuerint magnae, definire liceret. Cum autem vires Analyticos pondum consequere inveniunt, ad approximationes confugere conuenit, quae quidem eo feliciores successu suscipi poterunt, quo minores fuerint perturbations: quia enim tunc valores quantitarum p et q paucillulum mutantur, eas in integratione formularum littera n affectarum sine errore tanquam constantes spectare licet, quia etiam postmodum methodis vitatis correctiones necessariae haud difficulter elicientur. Interim tamen si excentricitas q fuerit valde magna, difficultates occurrunt, quas tamen certis artificijs adhibendis superare licebit, quae quidem res optime succedat, si excentricitas q parum ab unitate discrepat, ut fit in orbitis fere parabolicis cometarum. Maiores autem difficultates se exerunt, quando excentricitas q est quam minima, quia tunc variationes anomaliae v maxime incrementum, verumtamen si visus veniat, et hic remedium sperari possit. Maxime vero haec operationes ob partem $\frac{1}{a^2}$ impediuntur, quam nisi commode in seriem factis convergentem conuerrere liceat, de integratione omnino erit desperandum, neque tum alia via superesse videtur, nisi ut ex ipsis his formulis differentialibus singulae variationes pro temporis intervallis facis exiguis desumantur. Tom. XII. Nou. Comm. X

finiantur, earumque summatione integrationis negotium contempsetur, vti alia occasione fusius docui.

Applicatio huius Theoriae ad motum Lunae.

XXX.

Statuatur in A centrum terrae, cuius massa sit $\equiv A$, et dum tabula / planetam eclipsicae refert sit nunc quibens sol in S cuius massa sit $\equiv B$, pro quo loco designande dirigatur recta AB ad coeli partem fixam veluti primam stellam arietis, ac possitur

longitudo solis seu angulus BAS $\equiv \theta$

et distantia solis a terra seu AS $\equiv u$.

Quae elementa vt ex theoria solis designantur, po-
nanti semiaxis transversus orbitae solis $\equiv a$, semi-
parametèr orbitae solis $\equiv b$, excentricitas orbitae
eius $\equiv e$, et anomalia vera $\equiv \theta$; eritque $u = \frac{b}{1 - e \cos \theta}$.
Tum vero si sol secundum motum medium tem-
pore infinite paruo angulum $d\tau$ percurrere stitua-
tur erit $u d\theta = a d\tau \sqrt{ab}$, et $du = d\theta$, nisi ad mo-
tum apogei solis respicere velimus. Est vero $b =$
 $a(1 - e^2)$; vnde fit

$$u = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}, \text{ et } d\tau = \frac{d\theta(1 - e^2)^{3/2}}{(1 - e \cos \theta)^2} \text{ atque } du = d\theta \text{ proxime,}$$

vbi

vbi notetur, neglecta excentricitate orbitae solaris fore $u \equiv a$ et $d\theta = d\tau$.

XXXI.

Sit porro in Z luna, cuius massa $\equiv C$, ac ponatur $\frac{A+C}{A+B} \equiv n$ existente $\frac{A+C}{A+B} \equiv m$, quoniam angulus elementaris $d\tau$ ex motu medio solis est desumptus, ita, vt sit $\mathcal{A} \equiv A$ et $\mathcal{B} \equiv B$; vnde proiit $\frac{B}{A+B} \equiv mn$ seu $m = \frac{1}{n}$, siquidem massa solis B praec massa terrae A vt infinita spectari potest. Iam pro loco lunae statuetur:

longitudo nodi ascendentis seu angulus BAN $\equiv \psi$
inclinatio orbitae lunae ad eclipticam seu YOZ $\equiv \omega$
et argumentum latitudinis seu NAZ $\equiv \sigma$

vnde fit:

$$\text{longitudo lunae} = \psi + \text{Ang. tang.} (\text{tang. } \sigma \text{ col. } \omega) \\ \text{et latitudo borealis} = \text{Ang. sin.} (\text{sin. } \sigma \text{ sin. } \omega).$$

Deinde sit distantia lunae a terra AZ $\equiv v$ et distan-
tia lunae a sole SZ $\equiv w$, ac definitis hinc duobus
angulis μ et ν vt fit

$$\cos \mu = \cos \sigma \cos (\theta - \psi) + \sin \theta \sigma \cos \omega \sin (\theta - \psi) \\ \sin \nu = \sin \sigma \cos (\theta - \psi) - \cos \sigma \cos \omega \sin (\theta - \psi) \\ \text{erit } w w = v v + u u - 2 v u \cos \mu \text{ seu } w = \sqrt{(v v + u u - 2 v u \cos \mu)}.$$

XXXII.

His positis si potamus pro tempore praesente
 $v = \frac{a}{1 - q \cos \nu}$ vt ρ denotet orbitae lunaris parame-
trum.

trum dimidiam, (q eius excentricitatem, et angulus ψ eius anomaliam Veram; ideoque iam q negative accipi debeat; tum vero sit $d\Phi$ angulus a Luna circa terram eodem tempore descriptus, quo sol conficit angulum $d\tau$, motu medio. Hinc ergo pro motu lunae definiendo hae habebuntur aequationes:

- 1°. $\psi\psi d\Phi = a d\tau \sqrt{m a p} = a d\tau \sqrt{a^2 p}$
 - 2°. $d\dot{p} = -2n\psi^2 u d\Phi \sin. v \left(\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2} \right)$
 - 3°. $dq = -n\psi^2 u d\Phi (\cos. \mu \sin. \psi + \frac{(q-2\cos. \mu + q\cos. \mu^2) \sin. \psi}{1-q\cos. \mu}) \left(\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{n\psi^2 d\Phi \sin. \psi}{a\psi^2}$
 - 4°. $\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{q d\Phi \sin. \psi}{p}$ seu $d. \frac{1}{\psi} = \frac{q d\Phi \sin. \psi}{p}$
 - 5°. $ds = d\Phi + \frac{n\psi^2 d\cos. \mu}{q n \psi^2} - \frac{n\psi^2 u d\Phi}{q} (\cos. \mu \cos. \psi + \frac{(1-q\cos. \mu) \sin. \psi \sin. \mu}{1-q\cos. \mu})$ ($\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2}$)
- denotante $d\Phi - ds$ promotionem momentaneam lineae abscidum seu apogei lunae in sua orbita:
- 6°. $d\psi = -\frac{n\psi^2 u d\Phi \sin. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2} \right)$
 - 7°. $\frac{d\omega}{\sin. \omega} = \frac{d\psi}{\tan \sigma} = -\frac{n\psi^2 u d\Phi \cos. \sigma \sin. (\theta - \psi)}{q} \left(\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2} \right)$
 - 8°. $d\sigma = d\Phi - d\psi \cos. \omega = d\Phi + \frac{n\psi^2 u d\Phi \sin. \sigma \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2} \right)$.

XXXIII.

Incipiamus ab evolutione formulae $\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2}$; quae inde facile instituitur, quod distantia u semper est praemagna prae distantia ψ ; vnde fit

$$\frac{1}{a\psi^2} = (\mu \mu - 2\psi \mu \cos. \mu + \psi^2) \frac{-\frac{1}{\psi^2}}{\frac{1}{\mu^2}} = \frac{1}{\mu^2} + \frac{2\psi \cos. \mu}{\mu^2} + \frac{\psi^2 \cos. \mu^2 - 1}{2\mu^2}$$

ideoque $\frac{1}{a\psi^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{2\psi \cos. \mu}{\mu^2} + \frac{\psi^2 \cos. \mu^2 - 1}{2\mu^2}$,

Atque

Atque formulae n°. 3 et n°. 5 abibunt in has:

- 3°. $dq = \frac{n\psi^2 d\Phi \sin. \psi}{\mu^2} (1 - 3 \cos. \mu + \frac{2\psi \cos. \mu}{2\mu} (3 - 5 \cos. \mu^2)) - \frac{n\psi^2 d\Phi \sin. \psi}{1-q\cos. \mu} (q - 2 \cos. \mu + q \cos. \mu^2) \left(\frac{2\psi \cos. \mu}{\mu^2} + \frac{\psi^2 \cos. \mu^2 - 1}{2\mu^2} \right)$
- 5°. $ds = d\Phi + \frac{n\psi^2 d\Phi \cos. \mu}{q \mu^2} (1 - 3 \cos. \mu + \frac{2\psi \cos. \mu}{2\mu} (3 - 5 \cos. \mu^2)) - \frac{n\psi^2 d\Phi \sin. \psi \sin. \psi}{q(1-q\cos. \mu)} \left(\frac{2\psi \cos. \mu}{\mu^2} + \frac{\psi^2 \cos. \mu^2 - 1}{2\mu^2} \right) (2 - q \cos. \mu)$.

Ita ut hinc fit

$$dq \cos. \psi + q' d\Phi \sin. \psi = 2 n \psi^2 u d\Phi \sin. \psi \left(\frac{\psi \cos. \mu}{\mu^2} + \frac{\psi^2 \cos. \mu^2 - 1}{2\mu^2} \right)$$

quae expressio satis simplex deinceps vsum habere poterit.

XXXIV.

Deinde etiam notetur, cum inclinatio ω fit satis exigua ideoque $\cos. \omega = 1 - \frac{1}{2} \omega \omega$ fore proxime:

$$\cos. \mu = \cos. (\sigma - \theta + \psi) - \frac{1}{2} \omega \sin. \sigma \sin. (\theta - \psi)$$

$$\sin. \nu = \sin. (\sigma - \theta + \psi) + \frac{1}{2} \omega \cos. \sigma \sin. (\theta - \psi).$$