



1768

De arcubus curvarum aequae amplis earumque comparatione

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De arcubus curvarum aequae amplis earumque comparatione" (1768). *Euler Archive - All Works*. 346.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/346>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

sunt, quam simplicissime reddantur. Veluti in casu § 17. sumimus $q = \sqrt{\frac{u+1}{u-1}} + \sqrt{\frac{u-1}{u+1}}$, seu $qq = u + \sqrt{(u^2-1)}$, in ultimo vero $q = u + \sqrt{(au-1)}$: ibi nempe opus non erat, ut $x+y$ rationaliter exprimeretur, vnde sufficiebat ipsi qq formam $u + \sqrt{(u^2-1)}$ tribui, hic vero necesse erat, ut $x+y$ rationalem consequatur valorem.

23. Denique casum simpliciozem praetermittere non possum, quo proponitur haec aequatio $\frac{dx}{\sqrt{A+Cxx}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+Cyy)}}$, quam ita refero $\frac{2dx}{Ax+Cxx} = \frac{2dy}{Ay+Cyy}$ $= \sqrt{\frac{p+Q}{p-Q}}$ posito ergo $x = p(\sqrt{\frac{p+Q}{p-Q}} - \sqrt{\frac{p-Q}{p+Q}})$ et $y = p(\sqrt{\frac{p+Q}{p-Q}} + \sqrt{\frac{p-Q}{p+Q}})$ fiet $\frac{2pdx}{2p\sqrt{(p^2-1)}} = \frac{p-Q}{p+Q}$ et existente

$$\frac{1}{Q} = \frac{Aq+Cp^2}{Ay(q^2-1)} \text{ et } \frac{y(p^2-Q)}{Q} = \frac{y(A+Cp^2)}{Ay(q^2-1)} + \frac{Aq}{Ay(q^2-1)}$$

vnde sumto $pp = r = xy$ erit

$$0 = \frac{r^2q}{Ar} + \frac{Aq+C}{Ar} = \frac{y(A+Cp^2+Crr+AA)}{A} \text{ hincque}$$

$$\frac{A(rdq+qdr)+Crd}{y(A+Cp^2+Crr+AA)} = dr \text{ cuius integrale est}$$

$$Cr + \frac{1}{2}F = \sqrt{(2ACr^2q + CCrr + AA)} \text{ seu}$$

$$FF + 2CFr = 2ACr^2q + AA$$

est vero $r = \frac{x}{y}$ et $q = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ vnde aequatio integralis est $FF + 2CFxy = AA^2 + AC(x^2+y^2)$. Sicque haec comparatio inter x et y , quae alias per logarithmos vel arcus circulares offendi solet, hic algebraice est eruta.

DE

ARCVBVS CVRVARVM
AEQVEAMPLIS EORVMQVE
COMPARATIONE.

Auctore
L. EULER O.

Amplitudinem arcus cuiuscunque lineae curvae Tab. I. cum Celeb. Ioh. Bernoullio b. m. voco angulum, quem rectae ad eius terminos normales inter se constituunt. Ita si fuerit AM arcus lineae cuiuscunque curvae, atque ad eius terminos A et M rectae normales ducantur, AO et MO in O concurrentes, angulus AOM erit amplitudo arcus AM.

Haec amplitudinis idea perquam ingeniose ad curvas dimittendas est introducta, propterea quod non vni ceterae relationes, quibus natura curvarum per coordinatas exprimi solet, ab hypothetibus arbitrariis pendet; dum enim relatio inter coordinatas, prouti axis eiusque initium diversimode accipitur, plurimum variare potest manente eadem linea curva, notio amplitudinis nulli huiusmodi varietati est obnoxia, nisi forte quod alio atque alio puncto curvae A pro initio assumto angulus AOM quantitate constanter augeri diminuique queat, vnde tantum

Tom. XII. Nou. Comm. C men

men vix sensibilibus mutatio in calculum redundat. Ex quo amplitrudo essentialiter ad naturam curvae pertinere est confensa, dum coordinate aliaque relationes extrahereus pro arbitrio nostro eo traduntur.

2. Aequae essentialis autem notio amplitrudiinis lineis curvis est statenda atque notio curvedinis, cuius mensura per radium osculi exhiberi solet quippe qui ex amplitrudiine expedit definitur. Posito enim arcu ipso $AM = s$, eiusque amplitrudiine seu angulo $AO M = \Phi$, sit MR radius osculi curvae in M , quo scilicet elementum curvae $Mm = ds$, tanquam arcus circuli centro R describi est putandum: et cum arcus infinite parum aucti AMm amplitrudo sit angulus $AOm = \Phi + d\Phi$, fiet angulus $MRm = d\Phi$, hincque $RM \cdot d\Phi = Mm = ds$; vnde prodit radius osculi $MR = \frac{ds}{d\Phi}$. Vicissim igitur si radius osculi MR vocetur $= r$, ob $r = \frac{ds}{d\Phi}$ habebitur $d\Phi = \frac{ds}{r}$, qua formula ex curva s et radio osculi r eius amplitrudo definitur; ac denique ex amplitrudiine Φ et radio osculi r ipsa curvae longitudo ita definitur, vt sit $ds = r d\Phi$ seu $s = \int r d\Phi$.

3. Ponamus igitur dari pro curva AM aequationem inter ipsum eius arcum $AM = s$, eiusque amplitrudiinem seu angulum $AO M = \Phi$, quae aequatio sit saltem differentialis; atque tali aequatione natura curvae ita essentialiter exprimeretur, vt eius vera curvatura vbique quasi sponte se offerat, nullumque discrimen a positionibus arbitrariis oriundum

dum locum inueniat; nisi quod dum longitudo arcus ab alio principio A computatur, quo quantitas s augmentum vel decrementum constans accipit, simul angulus Φ quantitate constans sine augeatur, sine diminuat. Arque ex tali aequatione facili negotio aequatio inter coordinatas constatas elicetur; si enim recta AO pro axe assumatur, in eumque ex M perpendicularum MP demittatur, vt habeatur coordinatae orthogonales $AP = x$, $PM = y$, ob angulum $\widehat{AMP} = AO M = \Phi$, erit $dx = ds \sin \Phi$ et $dy = ds \cos \Phi$; vnde ob aequationem datam inter ds et angulum Φ habebuntur ipsae coordinatae:

$$AP = x = \int ds \sin \Phi \quad \text{et} \quad PM = y = \int ds \cos \Phi.$$

Vel si in aequatione inter s et Φ scribatur $\frac{dx}{dz}$ pro $\sin \Phi$ et $\frac{dy}{dz}$ pro $\cos \Phi$, oriatur aequatio differentialis inter coordinatas x et y ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

4. Hinc etiam facillime radius osculi per coordinatas x et y exprimitur; cum enim sit radius osculi $r = \frac{ds}{d\Phi}$, ob $\sin \Phi = \frac{dx}{ds}$, habebimus differentiam: $d\Phi \cos \Phi = d \cdot \frac{dx}{ds}$; at est $\cos \Phi = \frac{dy}{ds}$, ex quo obtinebitur:

$$d\Phi = \frac{ds}{dy} d \cdot \frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad r = \frac{dy}{d \cdot \frac{dx}{ds}},$$

quae est formula nulli ambiguitati obnoxia. Simili autem modo differentiansdo formulam $\cos \Phi = \frac{dy}{ds}$ habebimus

habebimus $d\Phi \sin \Phi = -d \frac{dy}{dx}$ hincque ob $\sin \Phi = \frac{dy}{ds}$ erit

$$d\Phi = -\frac{dx}{dy} \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad r = \frac{dx}{d\Phi}$$

quae binae formulae inter se conveniunt. Posito enim $dy = p dx$, erit $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ et $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; sicque vtrique dicitur: $r = \frac{1}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$.

5. Pro circulo igitur, quoniam eius radius oculi r vbi que est constans quippe radio, qui sit $r = a$ aequalis, habebitur statim $a = \frac{dx}{d\Phi}$, hincque $r = a\Phi$; seu quilibet circuli arcus suae amplitudini est aequalis. Ex hac scilicet notissima circuli proprietate sequitur, omnes circuli arcus aequae amplitudines simul inter se esse aequales; neque vlla alia existit linea curva, in qua omnes arcus aequae amplitudinis inter se essent aequales. Quae proprietates etiam, cum angulus a tangentibus extremis AT et MT ad T formatus sit complementum amplitudinis AOM $= \Phi$ ad duos rectos, ita enunciantur potest, ut datus angulus ATM, vtrunque peripheriae circuli applicetur, ita ut suis cruribus eam tangat, semper aequales arcus intercipiat. Probe autem notetur, circulum hac proprietate gaudere; quantumcunque angulus ATM accipitur: nam si huic angulo ATM determinata quaedam quantitas tribuitur, aliae fortasse quoque existent lineae curvae, ad quas hic angulus applicatus etiam perpetuo aequales arcus intercipiat.

6. Hanc

6. Hanc igitur quaestionem hic potissimum tractandam suscepi, vtrum praeter circulum aliae dentur lineae curvae, ad quas datus angulus ATM ita applicatus, ut cruribus suis curvam tangat, continuo arcus aequales intercipiat? tum vero si tales dentur, quomodo eae investigari queant? Vel ut hanc quaestionem ad amplitudinis notionem revocemus, sit data amplitudo $= \alpha$, quaeriturque, num praeter circulum aliae dentur lineae curvae, quarum omnes arcus eandem amplitudinem α habentes sint inter se aequales? Nisi enim curvae tractus cuspidibus vel ramis in infinitum porrectis perturbetur, ab eius quovis puncto arcus abscindi potest, cuius amplitudo sit $= \alpha$; sicque in eadem curva exhiberi poterunt infiniti arcus eiusdem amplitudinis α , qui an omnes inter se, nisi curva fuerit circulus, aequales esse queant? hic primum quaeritur.

7. Hanc autem quaestionem affirmadam esse ex casu quo amplitudo $\alpha = 180^\circ$ assumitur, statim liquet, quippe quo tangentes AT et MT inter se sunt parallelae; aequalitas enim talium arcuum aequae amplitudinis adeo in ellipsi manifesto habet locum. Nam cum omnes diametri perimetrum ellipsis bisariam dividant, quoniam tangentes ad terminos cuiusque diametri ductae sunt inter se parallelae, omnium semitium ellipticarum eadem est amplitudo 180° ; ex quo perspicuum est ellipsin eiusmodi esse lineam curvam, cuius omnes arcus, quorum

quorum amplitudo est 150° sunt inter se aequales. Eadem proprietate quoque erunt praeditae omnes aliae curvae in se redeuntes centro gaudentes, ex quo concludo etiam praeter circulum innumerabiles alias dari curvas, quarum omnes arcus aliam quandam datam amplitudinem habentes sunt inter se aequales. Verum mox patebit mensuram huius amplitudinis datae rationem rationalem ad angulum rectum tenere oportere.

Problema Generale.

Tab. I. 8. *Invenire lineam curvam AMN, cuius omnes arcus AF, MN, quorum eadem est amplitudo $= a$ sint inter se aequales.*

Solutio.

Sit arcus quicumque a puncto fixo A computatus $AM = s$ eiusque amplitudo $AO M = \Phi$, atque aequatio inter s et Φ eiusmodi esse debet, ut si loco Φ capiatur $\Phi + a$, arcus s augmentum datum, quod sit $= a$, accipiat; scilicet si a puncto indefinito M abscindatur arcus MN isti augmento a aequalis, ut eius amplitudo MLN futura sit $= a$, ideoque totius arcus $AMN = s + a$ amplitudo $= \Phi + a$. Primum igitur patet huic conditioni satisfieri, si statuitur $s = \frac{a}{\alpha} \Phi$, tum enim posito $\Phi + a$ loco Φ , arcus s abibit in $s + a$; hac autem positione curva quaesita sit circulus; propterea quod radius

radius osculi $r = \frac{d}{2\alpha}$ prodit constans $= \frac{a}{2}$. Verum hic nobis est propositum praeter circulum eas investigare lineas curvas, quae huic problemati satisfaciant, atque adeo eius solutionem generalem adornare.

9. Concipio igitur eiusmodi functionem anguli Φ , quae invariata maneat, etiam si pro Φ scribatur $\Phi + a$, cuiusmodi functiones per sinus, tangentesue exprimi posse intelliguntur, siquidem novimus infinitorum angulorum communes esse sinus vel tangentes. Quod si igitur V sit talis functio anguli Φ , manifestum est, et huiusmodi aequationem $s = \frac{a}{\alpha} \Phi + V$ conditiones problematis adimplere: nam si pro Φ scribatur $\Phi + a$, prius membrum $\frac{a}{\alpha} \Phi$ abibit in $\frac{a}{\alpha} \Phi + a$, alterum vero V manet invariatum, unde aucta amplitudine Φ angulo a , arcus amplitudini $\Phi + a$ respondens erit $= \frac{a}{\alpha} \Phi + a + V$, ideoque priorum arcuum s superat quantitate constanter a . Quare cuiuscunque arcus MN cuius amplitudo est $= a$, longitudo erit constans $= a$, omnino vti problema postulat. Tota ergo huius problematis solutio huc redit, ut huiusmodi functiones idoneae V exquirantur, quae angulo $\Phi + a$ aequae conveniant atque angulo Φ , seu quae nullam mutationem subeant, etiam si pro Φ scribatur $\Phi + a$.

10. Novimus autem, si π denotet angulum duorum rectorum, angulum quemcunque ω tam suum quam cosinum et tangentem communes habere:

bere cum omnibus his angulis innumerabilibus $2\pi + \omega$; $4\pi + \omega$; $6\pi + \omega$; $8\pi + \omega$; etc. qui in hac formula generali $2n\pi + \omega$ continentur, denotante n numerum quemcumque integrum, eumque tam negativum quam positivum. Cum igitur anguli ω et $2n\pi + \omega$ communes habeant sinum, cosinum, et tangentem; etiam anguli $m\Phi$ et $m\Phi + m\alpha$ tam sinum quam cosinum habebunt communem, si fuerit $m\alpha = 2n\pi$, ideoque $m = \frac{2n\pi}{\alpha}$. Ex quo tam sinus quam cosinus anguli $\frac{2n\pi}{\alpha}\Phi$ cuiusmodi erunt functiones, quae nullam mutationem patiuntur, etiam si pro Φ scribarur $\Phi + \alpha$. Pro n ergo successive ponendo 1, 2, 3, 4 etc. tales functiones pro V adhibendae erunt:

$$\begin{aligned} \sin. \frac{2\pi\Phi}{\alpha}; \sin. \frac{4\pi\Phi}{\alpha}; \sin. \frac{6\pi\Phi}{\alpha}; \sin. \frac{8\pi\Phi}{\alpha} \text{ etc.} \\ \cos. \frac{2\pi\Phi}{\alpha}; \cos. \frac{4\pi\Phi}{\alpha}; \cos. \frac{6\pi\Phi}{\alpha}; \cos. \frac{8\pi\Phi}{\alpha} \text{ etc.} \end{aligned}$$

11. Quia vero sinus et cosinus angulorum multiplo-
rum per sinum et cosinum anguli simplicis rationaliter exprimitur, eiusque functiones vni-
formes sunt censendae, patet functionem quamcum-
que rationalem tam sinus quam cosinus anguli $\frac{2\pi}{\alpha}\Phi$
pro V usurpari posse, quoniam istius anguli tam
sinus quam cosinus idem manet, etiam si pro Φ
scribarur $\Phi + \alpha$. Functionem autem hanc rationa-
lem esse oportet, ut pro eodem angulo Φ vicium
valorem recipiat; ex quo functiones irrationales ex-
cluduntur; si enims tales admittere vellemus, ex
angulo

angulo $\frac{2\pi}{\alpha}\Phi$ etiam sinus et cosinus angulorum sub-
multiplo-
rum derivare possemus, qui tamen nullo
modo satisfacerent. Pro V itaque assumi debet fun-
ctio quaecumque rationalis quantitarum $\sin. \frac{2\pi}{\alpha}\Phi$ et
 $\cos. \frac{2\pi}{\alpha}\Phi$, vnde perspicuum est, nisi angulus α ad
 2π rationem tenear rationalem, has quantitates ne-
quidem ex angulo Φ assignari posse. Assumpta au-
tem pro V tali functione quaecumque, aequatio
generalis pro curvis problemati satis facientibus erit
 $s = \frac{\alpha\Phi}{s} + V$.

12. Ex hac aequatione statim aequatio inter
coordinatas solitas, elici potest, si enim rectam AE
ad curvam in A normalem pro axe assumamus,
ad eumque ex M applicatam MP normaliter ducamus,
positis AP = x et PM = y , ob $ds = \frac{\alpha d\Phi}{\alpha} + dV$
habebimus:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha} (1 - \cos\Phi) + \int dV \sin. \Phi \text{ et } y = \frac{\alpha}{\alpha} \sin. \Phi + \int dV \cos\Phi$$

vnde si formulae $\int dV \sin. \Phi$ et $\int dV \cos. \Phi$ integrari,
ac per sinus et cosinus anguli Φ , eiusque multiplo-
rum exprimi queant, curvae prodibunt algebraicae
problemati satisfaciunt. Verum ex natura differen-
tiationis constat, differentiale functionis V semper
habiturum esse huiusmodi formam $U d\Phi$, in qua
etiam U incerta sit functio rationalis quantitarum
 $\sin. \frac{2\pi}{\alpha}\Phi$ et $\cos. \frac{2\pi}{\alpha}\Phi$. Neque vero hinc vicissim equa-
tiones hae, si U fuerit talis inspectio, quibus inte-
Tom. XII Non. Comm. D

grale $V = \int U d\Phi$ huiusmodi fore functionem, quod tamen natura problematis postulat.

13. Quo nunc in indolem harum curvarum accuratius inquiramus, earum radium osculi contemplemur, qui in M fit $= r$. Cum igitur inuenimus $r = \frac{d^2s}{d\Phi^2}$, ob $ds = \frac{ad\Phi}{a} + U$, $dV = \frac{ad\Phi}{a} + U d\Phi$ posito $dV = U d\Phi$, erit $r = \frac{a}{a} + U$. Hic igitur statim liquet, radios osculi in M et N inter se fore aequales, quia enim posito $\Phi + \alpha$ loco Φ quantitas U non mutatur, radius quoque osculi eundem retinebit valorem. Sumto ergo quoque ab principio A arcu AF amplitudinis $= \alpha$, ut sit ipse arcus $AF = \alpha$, radius osculi in F aequalis erit radio osculi in A , et cum sit arcus $MN = AF = \alpha$, erit arcus $FN =$ arcui AM . Quare cum radius osculi in N aequalis sit radio osculi in M , arcus FN non solum aequalis, sed etiam similis erit arcui AM , ex quo curua ita erit comparata, ut ex pluribus partibus similibus in eandem plagam se insequentibus componatur. Tot scilicet huiusmodi portiones similes habebit, quoties angulus α continetur in quatuor angulis rectis.

14. Haec confideratio similitudinis, si eam debita attentione tractemus, generalem nobis methodum suppeditabit omnes curuas algebraicas, quae quidem problemati satisfaciunt, inueniendi; quae eo magis videtur notatu digna, quod non tam facile ex formulis principalibus supra exhibitis derivari possit,

possit, vnde non contemnenda subsidia, quae per vniuersam Analysis eximiam utilitatem sunt habitura, hauriri poterunt. Quam ob causam hoc problema imprimis dignum existimaui, quod accuratius euolueretur. Verum ante, quam insignem hunc similitudinis usum ostendam, haud abs re erit quaedam curuas algebraicas ex formulis primo inuentis elicere, quo simul pateat, quam restricta sit ista via ad curuas algebraicas nobis patefaciendas; hincque praesentia alterius methodi post declarandae eo magis elucefeat. Hunc in finem pono breuitatis gratia $\frac{2\pi}{\alpha} = n$, ut V denotet functionem quancunque vniuersam binarium quantitatum $\sin. n\Phi$ et $\cos. n\Phi$: tum igitur erit ut vidimus:

$$x = \frac{a}{\alpha} (1 - \cos \Phi) + \int dV \sin. \Phi \text{ et } y = \frac{a}{\alpha} \sin. \Phi + \int dV \cos. \Phi.$$

15. Vt etiam hinc curuas algebraicas eruamus, pro V sumere poterimus huiusmodi formam:

$$V = + A \sin n\Phi + B \sin. 2n\Phi + C \sin. 3n\Phi + D \sin. 4n\Phi + \text{etc.} \\ + \mathcal{R} \cos. n\Phi + \mathcal{S} \cos. 2n\Phi + \mathcal{E} \cos. 3n\Phi + \mathcal{Q} \cos. 4n\Phi + \text{etc.}$$

atque hinc casum simplicissimum obtinebimus ponendo

$$V = \frac{1}{n} \sin. n\Phi, \text{ vnde fit } dV = 2bd\Phi \cos. n\Phi.$$

Quo valore assumto, erit

$$dV \sin \Phi = bd\Phi (\sin. (n+1)\Phi - \sin. (n-1)\Phi) \\ dV \cos. \Phi = bd\Phi (\cos. (n+1)\Phi + \cos. (n-1)\Phi)$$

quae formulae cum sint integrabiles, habebimus:

$$x = \frac{a}{2} (1 - \cos \Phi) + b \left(\frac{1 - \cos(\frac{n}{2}\Phi + 1)\Phi}{n+1} - \frac{1 + \cos(\frac{n}{2}(\pi - 1)\Phi)}{n-1} \right)$$

$$y = \frac{a}{2} \sin \Phi + b \left(\frac{\sin(\frac{n}{2}\Phi + 1)\Phi}{n+1} + \frac{\sin(\frac{n}{2}(\pi - 1)\Phi)}{n-1} \right)$$

adfectis scilicet eiusmodi constantibus, ut evanescente angulo Φ simul coordinatae x et y evanescant, uti earum assumentio postulat.

16. Consideremus casum, quo omnes arcus, quorum amplitudo est 180° , seu $\alpha = \pi$, inter se debent esse aequales; fiet igitur $\frac{2\pi}{\alpha} = n = 2$, et coordinatae curvae satisfaciuntis erunt:

$$x = \frac{a}{2} (1 - \cos \Phi) + \frac{1}{2} b (1 - \cos 3\Phi) - b (1 - \cos \Phi)$$

$$y = \frac{a}{2} \sin \Phi + \frac{1}{2} b \sin 3\Phi + b \sin \Phi.$$

Sumatur alia abscissa t ut fit $x = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} b - t$, erit

$$t = \left(\frac{a}{2} - b \right) \cos \Phi + \frac{1}{2} b \cos 3\Phi$$

$$y = \left(\frac{a}{2} + b \right) \sin \Phi + \frac{1}{2} b \sin 3\Phi$$

fit porro $\frac{a}{2} - b = f$; $\frac{a}{2} + b = g$, erit $b = \frac{g-f}{2}$, ideoque

$$t = f \cos \Phi + \frac{g-f}{6} \cos 3\Phi; y = g \sin \Phi + \frac{g-f}{6} \sin 3\Phi$$

seu ob $\cos 3\Phi = -3 \cos \Phi + 4 \cos^3 \Phi$ et $\sin 3\Phi = 3 \sin \Phi - 4 \sin^3 \Phi$

$$t = \frac{2}{3} f \cos \Phi + \frac{2g-2f}{3} \cos^3 \Phi; y = \frac{2g-f}{3} \sin \Phi + \frac{2}{3} f \sin^3 \Phi.$$

Vnde eliminando angulo Φ inter coordinatas t et y oritur aequatio sex dimensionum.

17. Quoniam igitur novimus huic casui ellipticam satisfacere, quae virique post circuitum est curva

sim-

simplicissima, evidens est; hanc methodum non esse aptam ad curvas algebraicas simpliciores exhibendas; atque multo minus ad hunc scopum perungere poterimus, si angulus α fuerit minor pars aliquota totius peripheriae 2π . Ratio huius defectus in hoc est sita, quod dum pro V functionem algebraicam quantitarum $\sin n\Phi$ et $\cos n\Phi$ assumimus, alias lineas curvas non inveniamus, nisi quarum rectificatione a quadratura circuli pendat; cum enim habeamus $s = \frac{a\Phi}{2} + V$, quilibet arcus harum curvarum erit aggregatum ex arcu circulari $\frac{a\Phi}{2}$ et linea recta V algebraice assignabili. Quare ut curvae algebraicae simpliciores inde elici possent, pro V functione transcendens accipi deberet, quae tamen ita esset comparata, ut formulae $dV \sin \Phi$ et $dV \cos \Phi$ integrationem admitterent: Verum his casibus indicium, utrum functione V debita gaudeat proprietate, difficilius videtur quam ut ei in calculo fidere queamus. Hinc eo magis e re erit ut tradatur

*Methodus magis idonea curvas algebraicas huic quae-
sioni satisfaciunt inveniendi.*

18. Talem autem methodum consideratio similitudinis arcuum AM et FN largitur. Cum enim natura problematis hanc similitudinem involvat; etiam vicissim concludere licet omnes curvas, in quibus haec similitudo locum habeat, simul problemati satisfacere. Namque si arcus AMF habeat

D 3 ampli-

amplitudinem propositam $=\alpha$, atque curva ultra F ita protendatur, vt arcus FN similis et aequalis sit arcui AM, tum sumro arcu FN aequali arcui AM, tam eius longitudo MFN aequalis erit arcui AMF, quam eius amplitudo MLN aequalis amplitudini AEF $=\alpha$. Quare ad problema resoluendum sufficit eiusmodi curvas inuestigare, quae ultra arcum AF cuius amplitudo est $=\alpha$ ita continuentur, vt portio continuata FN similis et aequalis sit ipsi curvae AM.

19. Siue igitur curva ad axem AE siue ad axem FE referatur eadem prodire debet aequatio inter coordinatas; verum si recta FE inaequalis fuerit rectae AE hinc quaedam disparitas nascitur, vt arcus FN non aequae ad punctum E referatur, atque arcus AM eo referatur: commoditas autem analyticos postulat, vt punctum in calculum introducatur, ad quod arcus similes AM et FN aequa-
Tab. 1. liter referantur. Vt igitur tale punctum inueniamus, per data tria puncta A, E et F circulum describamus AEF, eiusque arcu AEF bisecto in C, erit C hoc punctum quod desideramus. Cum enim anguli CAE et CFE sint aequales, arcus AM et FN aequaliter referuntur ad rectas AC et FC, et quia $FC=AC$, horum arcuum quoque par est relatio ad punctum C, quod idcirco centrum similitudinis appellari potest. Quin etiam angulus ACF, etsi lineae CA et CF in curvam non sunt normales, sed quia similiter ad eam sunt

incli-

inclinatae, ipsi amplitudini propositae α erit aequalis; hoc ergo puncto C tanquam centro similitudinis arcuum AM et FN ad nostrum institutum vi poterimus.

20. Sumtis ergo a punctis A et F arcubus aequalibus AM et FN ductisque ad C rectis MC et NC, tam ipsae quam anguli ACM et FCN erunt aequales, et cum sit $MFN=AMF$ etiam amplitudo arcus MHN erit $=\alpha$, tantumque angulum rectae MC et NC, etiam ad curvam non fuerint normales, constituunt scilicet $MCN=\alpha$. Hoc modo consideratio normalium vel tangentium prorsus ex calculo exiit, et quaestio iam huc est reducta, vt eiusmodi quaeratur linea curva AMFN circa punctum fixum C describenda, vt si angulo ACM respondeat radius CM, idem quoque radius CN conveniat angulo ACM $+\alpha$. Siue posito angulo ACM $=\delta$ et recta CM $=z$, eiusmodi aequatio inter z et ω est quaerenda, quae eadem sit mensura, etiam pro ω statuat $\omega+\alpha$. Quare ratiocinium vt supra instituendo, recta z exprimi debet functione quapiam rationali quantitatum $\sin \frac{1}{2}\pi\omega$ et $\cos \frac{1}{2}\pi\omega$, quippe quae suos valores, dum $\omega+\alpha$ pro ω scribitur, non mutant.

21. Haec conditio ita est comparata, vt statim sine vlla praenota integratione ad curvas algebraicas deducatur, atque adeo inde aequatio generalis pro omnibus curvis algebraicis problemati satisfaciens

tibus

tibus exhiberi possit. Si enim Ω denotet functionem quamcunque rationalem binarum quantitatum $\sin. \frac{2\pi\omega}{\alpha}$ et $\cos. \frac{2\pi\omega}{\alpha}$, aequatio haec $z = c\Omega$ omnes curvas algebraicas problemati satisfaciens in se complectetur: indeque etiam facile aequatio inter coordinatas consuetas deduci poterit. Sumta namque recta CA pro axe in eaque ex M demisso perpendiculari MP, si vocentur CP = x et PM = y, erit primo $z = \sqrt{(xx + yy)}$ tum vero $\sin. \omega = \frac{y}{z}$ et $\cos. \omega = \frac{x}{z}$; ex quibus formulis si secundum praecipua cognita sinus et cosinus anguli multipli $\frac{2\pi\omega}{\alpha}$ definiantur, aequatio inter coordinatas x et y obtinebitur. Ad hoc autem necesse est, ut angulus α , quo amplitudo proposita designatur, rationem teneat rationalem ad angulum rectum; nam si $\frac{2\pi}{\alpha}$ esset numerus irrationalis, evidens est nullam curvam algebraicam esse satisfacturam.

22. Si ergo talis aequatio inter radium z et angulum ω assignatur; necesse est, ut etiam prima conditioni, qua esse debet $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ existente V functione quacunque rationali, seu uniformi quantitate $\sin. \frac{\pi\Phi}{\alpha}$ et $\cos. \frac{\pi\Phi}{\alpha}$, satisfiat. Prodit autem elementum arcus curvae $ds = V(dx^2 + z^2d\omega^2)$, et cum Φ denotet amplitudinem arcus AM, si angulus, consensus CAE ponatur = γ , reperitur $\frac{ds}{z} = d\text{arctang.}(\frac{\omega - \Phi + \gamma}{z})$ et $ds = \frac{z d\omega}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} \frac{d\omega^2}{d\omega^2}}}$. Vnde non patet, quemadmodum conditioni $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ satis-

satisfiat. Quo magis notatu digna est haec altera solutio, quod introducendo nouo angulo ω , multo facilior relatio inter variables z et ω sit inuenta, quae neque ipsum arcum s neque eius amplitudinem Φ , circa quas quantitates tamen problema proprie versatur, contineat. Ad quod compendium cum nos consideratio geometrica perduxisset, insigni hoc problema nobis est exemplo, quantum per considerationes geometricas saepenumero solutiones problematum Analyticorum promoueri queant; et quanta subsidia inde in Analyſi sunt extractanda.

Quaestio I.

23. *Inuenire omnes curvas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum amplitudo est 360°, sint eiusdem magnitudinis.*

Patet, huic quaestioni omnes curvas in se redeuntes satisfacere, atque adeo certo respectu omnes plane curvas, siquidem arcus in infinitum excurrentes in centum admittere velimus. Hoc etiam nostra solutio indicat; nam ob $\alpha = 2\pi$, pro z caetera oportet functionem quamcunque binarum quantitatum $\sin \omega$ et $\cos. \omega$. Cum igitur sit $\sin. \omega = \frac{y}{z}$ et $\cos. \omega = \frac{x}{z}$, quaecunque aequatio inter x et y fingatur ponendo $x = z \cos. \omega$ et $y = z \sin. \omega$, relinquetur aequatio inter z et ω ex qua z aequabatur functioni cuiuspiam ipsarum $\sin. \omega$ et $\cos. \omega$, quae estis fors non

non est rationalis, curvaeque ideo variis plexibus consistere potest, tamen ad solutionem probl. natis accom. nomi. posse. Vnde affirmare licet, si Z fuerit functio quaecunque ipsius $xx+yy$ et quantitatum x et y , tum aequationem $Z=0$ fore pro curua satisfaciēte. Interdum quidem fieri potest, si z sit functio irrationalis ipsorum $\sin \omega$ et $\cos \omega$, ut duo pluresue arcus existant, quorum eadem sit amplitudo $= 360^\circ$, quorum non omnes satisficiant, sed inter eos semper erit unus aequare satisfaciens, quem a reliquis facile erit discernere.

Quaestio 2.

24. *Invenire omnes curvas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $a=180^\circ$, sint inter se aequales.*

Missa igitur problemate precedente, cui omnes plane curvae algebraicae satisficiunt, sit $a=\pi$, et $\frac{2\pi}{a}=2$, atque pro z sumi debet functio quaecunque binarium quantitatum $\sin 2\omega$ et $\cos 2\omega$. Cum ergo sit $\sin 2\omega = \frac{2xy}{z^2}$ et $\cos 2\omega = \frac{x^2-yy}{z^2}$, si Z denotet functionem quamcunque rationalem harum quantiarum:

$$xx+yy; \quad xy \quad \text{et} \quad xx-yy$$

seu quod eodem redit harum quantiarum:

$$xx, \quad xy, \quad \text{et} \quad yy$$

tum

tum aequatio $Z=0$, problemati generaliter satisfacet.

25. *FX ordine igitur secundo huic quaestioni in genere satisfaciēt omnes lineae hac aequatione contentae:*

$$Axx+Bxy+Cy^2=aa$$

quae complectitur omnes sectiones conicas, per quam certum hic axis trahere, et abicere: a centro computari assumentur. Non solum igitur ellipses, ut supra notavimus, hic locum habent, sed etiam hyperbolae, ubi quidem arcus, quorum amplitudo est 180° sunt infiniti. Quae aequatio quomodolibet satisfaciatur, ut appareat, ponatur $x=zc \cos \omega$ et $y=zs \sin \omega$, ex eaque elicietur:

$$z^2 = \frac{aa}{\frac{c^2 \cos^2 \omega}{1+\frac{cs}{B}} + \frac{s^2 \sin^2 \omega}{1+\frac{cs}{A}} + \frac{cs}{C}}; \quad \text{si} \quad \omega^2 = \frac{1-\cos^2 \omega}{\sin^2 \omega} \quad \text{et} \quad \sin \omega = \frac{1-\cos^2 \omega}{\sin 2\omega} \text{ reducitur ad hanc formam:}$$

$$z = \frac{a\sqrt{1-\cos^2 \omega}}{\sqrt{A+C+(1-\cos^2 \omega) \frac{cs}{A}} + \frac{cs}{B} \sin^2 \omega}$$

unde patet valorem ipsius z eundem manere, etiam si pro ω scribatur $\omega+\pi$; ita ut irrationalitas huius functionis negentiam non turbet, quod etiam in reliquis casibus est notandum.

26. *FX ordine tercio nulla curva proprie satisfacet; verum ex ordine quarto habemus hanc aequationem generalem*

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2y+Dxy^2+Ey^4+Fx^3+Gxy+Hy^3+I=0$$

E 2

in

in qua tamen, si curva proprie satisficere debeat, cavendum est, ne curva habitura sit ramos in infinitum extensos; siquidem eorum ratio minus perspicue ad propositum transferri potest, quemadmodum hoc incommodum etiam in hyperbola, habet locum. Atque haec est ratio, quod ordo tertius nullarum huiusmodi sit capax, etiam si haec aequatio forte per divisionem in ordinem tertium migrata possit: si enim esset $E=0$, $H=0$, et $I=0$ divisione per x facta haberetur aequatio tertii ordinis. Maximum autem incommodum, quod his casibus usu venit, in hoc consistit, quod arcuum, postquam in infinitum excurrerint, continuationes difficilius perspiciantur, haecque ipsae interdum pro negatiuis sint habendae, id quod scopo, cui proposito problematis est accommodata, plurimum adversatur.

Quaestio 3.

27. *Invenire omnes curvas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem amplitudo est $\alpha = x 20^\circ$, sint eiusdem magnitudinis.*

Hoc ergo casu est $\frac{1^\pi}{2} = 3$, et z denotabit functionem quaecunque binarum quantitarum sin. 3 ω et cos. 3 ω : cum ergo sit

$$\text{sin. } 3 \omega = \frac{1 + 3xy - y^3}{2^3} \text{ et cos. } 3 \omega = \frac{x^3 - 3xy^2}{2^3}$$

patet, si pro Z capiatur functio utcunque composita ex his tribus formulis:

$$xx + yy; \quad 3xy - y^3; \quad \text{et } x^3 - 3xy^2$$

tum

tum aequationem $Z=0$ completi omnes curvas algebraicas quaestioni satisficientes. Vnde si excludamus in infinitum extensas, post circulum simplicissimae erunt ordinis quarti hac aequatione contentae:

$$(xx + yy)^4 + f(3xx - yy) + g(x^2 - 3yy) + h^2(xx + yy) + k^2 = 0.$$

Cum in hac curva omnes arcus amplitudinis 120° sint aequales; etiam eorum dupli, quorum amplitudo est 240° inter se erunt aequales. In genere autem valet, si in curva quapiam arcus amplitudinis α sint aequales, in eadem quoque arcus amplitudinis 2α , 3α , 4α etc. respectivae inter se aequales fore.

Quaestio 4.

28. *Invenire omnes curvas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha = 90^\circ$, sint inter se aequales.*

Quia hoc casu est $\frac{1^\pi}{2} = 4$, pro z sumi debet functio quaecunque binarum quantitarum sin. 4 ω et cos. 4 ω , vnde cum ob sin. $\omega = \frac{z}{2}$ et cos. $\omega = \frac{x}{2}$ sit

$$\text{sin. } 4 \omega = \frac{1 + 3xy - 4y^3}{2^4} \text{ et cos. } 4 \omega = \frac{x^4 - 6x^2xy + y^4}{2^4}$$

si Z denotet functionem utcunque constam ex his tribus formulis

$$xx + yy; \quad xy(x^2 - yy) \text{ et } x^4 - 6x^2xy + y^4$$

E 3

feu

ſeu ob $x^4 - 6xxyy + y^4 = (xx + yy)^2 - 8xxyy$ ex his tribus.

$$xx + yy; \quad xy(xx - yy) \quad \text{et} \quad xxyy$$

aequatio $Z = 0$ complectetur omnes curvas algebraicas quaestioni ſatisfacientes. Poſt circulum igitur ſimpliciſſimae erunt ex ordine quarto hac aequatione contentae:

$x^4 + mxy^2 - nxyy - mxy^2 + y^4 \pm ff(xx + yy) \pm g^4 = 0$ quarum eae, quae vno tractu ſimplici in ſe redeunt, modo maxime naturali ſat ſtaciunt, cuſt prodi eſt $x^4 + y^4 = g^4$; hoc ſenſu enim non ſolum ramos in inſurſum extenſos, ſed etiam plexus plurimum tractuum curvari conuenit.

Quaeſtio 5.

29. *Invenire omnes curvas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem eſt amplitudo $a = 72^\circ$ ſint inter ſe aequales.*

Hoc caſu habemus $\frac{a}{2} = 36^\circ$, et pro z ſumenda eſt functio quaecunq; binarum quantitarum ſin. 5ω et $\cos. 5\omega$. Cum vero ſit

$$\sin. 5\omega = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{25} \quad \text{et} \quad \cos. 5\omega = \frac{25 - 10x^2y^2 + 5x^4y^4}{25}$$

ſi Z denotet functiōem vtrunq; compoſitam ex his tribus formulis

$$xx + yy; \quad 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \quad \text{et} \quad x^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y^4$$

aequatio $Z = 0$ complectetur omnes curvas algebraicas problemati ſatisfacientes. Vnde ſi ramos in raſurum

ſimplicem extenſos curvare v. l. ſinus, poſt circulum ſimpliciſſimae curvae ad ordinem ſextum pertinebunt, hac aequatione contentae:

$$(xx + yy)^2 + ff(5x^4 - 10xxyy + y^4) + g^4(x^4 - 10xxyy + 5y^4) + bb(xx + yy)^2 + k^4xx^2yy^2 = 0.$$

In his autem curvis non ſolum arcus, quorum amplitudo eſt 72° ſeu $\frac{2\pi}{5}$, ſed etiam ii, quorum amplitudo eſt vel $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ vel $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$, vel $4 \cdot \frac{2\pi}{5}$, inter ſe erunt aequales.

Quaeſtio 6.

30. *Invenire omnes curvas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem eſt amplitudo $a = 60^\circ$, ſint inter ſe aequales.*

Erit igitur $\frac{a}{2} = 30^\circ$, et pro z capienda eſt functio quaecunq; harum quantitarum ſin. 6ω et $\cos. 6\omega$. Cum igitur ſit

$$\sin. 6\omega = \frac{6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5}{26} \quad \text{et} \quad \cos. 6\omega = \frac{26 - 15x^2y^2 + 5x^4y^4}{26}$$

ſi Z denotet functiōem vtrunq; compoſitam ex his tribus formulis:

$$xx + yy; \quad xy(3x^4 - 10xxyy + 3y^4); \quad x^6 - 15x^2yy^2 + 15xxy^4 - y^6$$

aequatio $Z = 0$ continet omnes curvas algebraicas quaestio ſatisfacientes. Tales ergo praeter circulum iſta ordinem ſextum non dantur, quae autem ſunt

ex hoc ordine ista aequatione generali comprehenduntur :

$$(xx + yy)^2 + mxy(3x^2 - 10xyy + 3y^2) + n(x^2 - 15x^2yy + 15xyy^2 - y^3) \pm ff(xx + yy)^2 \pm g^2(x^2 + yy) \pm b^2 = 0.$$

Atque in his curuis non solum arcus amplitudinem 60°, sed etiam amplitudinem 120°, 180°, 240°, et 300° habentes sunt inter se aequales.

Quaestio generalis.

31. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum amplitudo data est ad 360° tenet rationem, sint inter se aequales.*

Sit ergo amplitudo proposita ad 360° uti m ad n seu $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$ ideoque $\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{n}{m}$; atque iam satis notauimus, si arcus amplitudinis $\frac{2\pi}{\alpha}$ fuerint aequales, etiam arcus amplitudinis $\frac{m}{n} \cdot 2\pi$ fore inter se aequales, vnde sufficit pro z sumsisse functionem binarum quantitarum $\sin. n\omega$ et $\cos. n\omega$, ita ut numerus m non in computum ingrediatur. Cum autem sit

$$\sin. n\omega = \frac{(x+yyV-1)^n - (x-yyV-1)^n}{2x^nV-1} \quad \text{et} \quad \cos. n\omega = \frac{(x+yyV-1)^n + (x-yyV-1)^n}{2x^n}$$

aequatio $Z = 0$ continebit omnes curuas algebraicas quaesito satisfaciens, si fuerit Z functio vtriusque ex his tribus formulis constans:

$$xx + yy; \quad \frac{(x+yyV-1)^n - (x-yyV-1)^n}{2V-1} \quad \text{et} \quad \frac{(x+yyV-1)^n + (x-yyV-1)^n}{2}$$

Vel

Vel euolutis his potestatibus, ut imaginaria se destruant, functio Z formata esse debet ex his tribus formulis:

- I. $xx + yy$
- II. $\pi x^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{n-3}y^3 - \text{etc.}$
- III. $x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \text{etc.}$

32. Cum mihi igitur fuisset propositum, omnes curuas inuestigare, quae hanc habeant proprietatem, ut omnes earum arcus, qui amplitudinem quandam datam habent, sint inter se aequales; hoc problema equidem ita perfecte solum dedisse mihi videor, ut nihil praeterea desiderari possit. Primum enim ex natura amplitudinis formulam generalem pro huiusmodi curuis exhibui, quae autem cum in differentialibus subsisteret, et curuas algebraicas distulter proderet, imprimis simpliciores; similitudinis arcuum ratio, quam indidem obseruare licuit, eximiam patefecit methodum, omnes adeo curuas algebraicas expedite inueniendi. Quod negotium cum primo intuitu maxime arduum esset visum, istud artificium ex natura similitudinis petitura vtriusque omnem attentionem mereretur, neque vllum est dubium, quin inde alia insignia subsidia, in Analytici hauriri queant.