1768

De arcubus curvarum aeque amplis earumque comparatione

Leonhard Euler

ſunt, quam ſimpliciſſimae reddantur. Veluti in caſu § 17. ſumſimus $q=\sqrt{\frac{u+1}{2}}+\sqrt{\frac{u-1}{2}}$, ſeu $qq=u+\sqrt{(uu-1)}$, in vltimo vero $q=u+\sqrt{(uu-1)}$: ibi nempe opus non erat, vt $x+y$ rationaliter exprimatur, vnde ſufficiebat ipſi qq formam $u+\sqrt{(uu-1)}$ tribui, hic vero neceſſe erat, vt $x+y$ rationalem conſequatur valorem.

23. Denique caſum ſimpliciorem praetermittere non poſſum, quo proponitur haec aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(A+Cyy)}}$, quam ita refero $\frac{ydx}{xdy}=\sqrt{\frac{Ayy+Cxxyy}{Axx+Cxxyy}}$ $=\sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}}$; poſito ergo $x=p(\sqrt{\frac{q+1}{2}}-\sqrt{\frac{q-1}{2}})$ et $y=p(\sqrt{\frac{q+1}{2}}+\sqrt{\frac{q-1}{2}})$ fiet $\frac{-pdq}{2dp\sqrt{(qq-1)}}=\frac{P-\sqrt{(PP-QQ)}}{Q}$ exiſtente

$$\frac{P}{Q}=\frac{Aq+Cpp}{A\sqrt{(qq-1)}} \text{ et } \frac{\sqrt{(PP-QQ)}}{Q}=\frac{\sqrt{(2ACppq+CCp^4+AA)}}{A\sqrt{(qq-1)}}$$

vnde ſumto $pp=r=xy$ erit

$$0=\frac{rdq}{dr}+\frac{Aq+Cr-\sqrt{(2ACrq+CCrr+AA)}}{A} \text{ hincque}$$

$$\frac{A(rdq+qdr)+Crdr}{\sqrt{(2ACrq+CCrr+AA)}}=dr \text{ cuius integrale eſt}$$

$$Cr+F=\sqrt{(2ACrq+CCrr+AA)} \text{ ſeu}$$

$$FF+2CFr=2ACrq+AA$$

eſt vero $r=xy$ et $q=\frac{xx+yy}{2xy}$ vnde aequatio integralis eſt $FF+2CFxy=AA+AC(xx+yy)$.

Sicque haec comparatio inter x et y, quae alias per logarithmos vel arcus circulares oſtendi ſolet, hic algebraice eſt eruta.

DE

DE ARCVBVS CVRVARVM AEQVE AMPLIS EORVMQVE COMPARATIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Amplitudinem arcus cuiuscunque lineae curuae cum Celeb. *Ioh. Bernoullio* b. m. voco angulum, quem rectae ad eius terminos normales inter ſe conſtituunt. Ita ſi fuerit AM arcus lineae cuiuscunque curuae, atque ad eius terminos A et M rectae normales ducantur AO et MO in O concurrentes, angulus AOM erit amplitudo arcus AM. Haec amplitudinis idea perquam ingenioſe ad curuas dimetiendas eſt introducta, propterea quod non vti ceterae relationes, quibus natura curuarum per coordinatas exprimi ſolet, ab hypotheſibus arbitrariis pendet; dum enim relatio inter coordinatas, prouti axis eiusque initium diuerſimode accipitur, plurimum variare poteſt manente eadem linea curua, notio amplitudinis nulli huiusmodi varietati eſt obnoxia, niſi forte quod alio atque alio puncto curuae A pro initio aſſumto angulus AOM quantitate conſtante augeri diminuiue queat, vnde ta- Tab. I. Fig. 1.

 men

men vix sensibilis mutatio in calculum redundat. Ex quo amplitudo essentialiter ad naturam curuae pertinere est censenda, dum coordinatae aliaeque relationes extrinsecus pro arbitrio nostro eo traducuntur.

2. Aeque essentialis autem notio amplitudinis lineis curuis est statuenda atque notio curuedinis, cuius mensura per radium osculi exhiberi solet quippe qui ex amplitudine expedite definitur. Posito enim arcu ipso $AM=s$, eiusque amplitudine seu angulo $AOM=\Phi$, sit MR radius osculi curuae in M, quo scilicet elementum curuae $Mm=ds$, tanquam arcus circuli centro R describi est putandum: et cum arcus infinite parum aucti AMm amplitudo sit angulus $Aom=\Phi+d\Phi$, fiet angulus $MRm=d\Phi$, hincque $RM.d\Phi=Mm=ds$; vnde prodit radius osculi $MR=\frac{ds}{d\Phi}$. Vicissim igitur si radius osculi MR vocetur $=r$, ob $r=\frac{ds}{d\Phi}$ habebitur $d\Phi=\frac{ds}{r}$, qua formula ex curua s et radio osculi r eius amplitudo definitur; ac denique ex amplitudine Φ et radio osculi r ipsa curuae longitudo ita definitur, vt sit $ds=rd\Phi$ seu $s=\int rd\Phi$.

3. Ponamus igitur dari pro curua AM aequationem inter ipsum eius arcum $AM=s$, eiusque amplitudinem seu angulum $AOM=\Phi$, quae aequatio sit saltem differentialis; atque tali aequatione natura curuae ita essentialiter exprimetur, vt eius vera curuatura vbique quasi sponte se offerat, nullumque discrimen a positionibus arbitrariis oriundum

dum locum inueniat; nisi quod dum longitudo arcus ab alio principio A computatur, quo quantitas s augmentum vel decrementum constans accipit, simul angulus Φ quantitate constante siue augeatur, siue diminuatur. Atque ex tali aequatione facili negotio aequatio inter coordinatas consuetas elicietur; si enim recta AO pro axe assumatur, in eumque ex M perpendiculum MP demittatur, vt habeantur coordinatae orthogonales $AP=x$, $PM=y$, ob angulum $AMP=AOM=\Phi$, erit $dx=ds\,\text{sin.}\Phi$ et $dy=ds\,\text{cos.}\Phi$; vnde ob aequationem datam inter ds et angulum Φ habebuntur ipsae coordinatae:

$$AP=x=\int ds\,\text{sin.}\Phi \quad \text{et} \quad PM=y=\int ds\,\text{cos.}\Phi.$$

Vel si in aequatione inter s et Φ scribatur $\frac{dx}{ds}$ pro sin Φ et $\frac{dy}{ds}$ pro cos. Φ, orietur aequatio differentialis inter coordinatas x et y ob $ds^2=dx^2+dy^2$.

4. Hinc etiam facillime radius osculi per coordinatas x et y exprimitur; cum enim sit radius osculi $r=\frac{ds}{d\Phi}$, ob $\text{sin.}\Phi=\frac{dx}{ds}$, habebimus differentiando: $d\Phi\,\text{cos.}\Phi=d.\frac{dx}{ds}$; at est $\text{cos.}\Phi=\frac{dy}{ds}$, ex quo obtinebitur:

$$d\Phi=\frac{ds}{dy}d.\frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad r=\frac{dy}{d.\frac{dx}{ds}},$$

quae est formula nulli ambiguitati obnoxia. Simili autem modo differentiando formulam $\text{cos.}\Phi=\frac{dy}{ds}$

habe-

habebimus $d\Phi \sin.\Phi = -d.\frac{dy}{ds}$ hincque ob $\sin\Phi = \frac{dx}{ds}$ erit

$$d\Phi = -\frac{ds}{dx} d. \frac{dy}{ds} \text{ et } r = \frac{-dx}{d.\frac{dy}{ds}}$$

quae binae formulae inter se conueniunt. Posito enim $dy = p\,dx$, erit $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; sicque vtrinque elicitur: $r = \frac{-dx(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{dp}$.

5. Pro circulo igitur, quoniam eius radius osculi r vbique est constans quippe radio, qui sit $= a$ aequalis, habebitur statim $a = \frac{ds}{d\Phi}$, hincque $s = a\Phi$; seu quilibet circuli arcus suae amplitudini est aequalis. Ex hac scilicet notissima circuli proprietate sequitur, omnes circuli arcus aeque amplos simul inter se esse aequales; neque vlla alia existit linea curua, in qua omnes arcus aeque ampli inter se essent aequales. Quae proprietas etiam, cum angulus a tangentibus extremis AT et MT ad T formatus sit complementum amplitudinis AOM $= \Phi$ ad duos rectos, ita enunciari potest, vt datus angulus ATM, vtcunque peripheriae circuli applicetur, ita vt suis cruribus eam tangat, semper aequales arcus intercipiat. Probe autem notetur, circulum hac proprietate gaudere, quantuscunque angulus ATM accipiatur: nam si huic angulo ATM determinata quaedam quantitas tribuatur, aliae fortasse quoque existent lineae curuae, ad quas hic angulus applicatus etiam perpetuo aequales arcus intercipiat.

6. Hanc igitur quaestionem hic potissimum tractandam suscepi, vtrum praeter circulum aliae dentur lineae curuae, ad quas datus angulus ATM ita applicatus, vt cruribus suis curuam tangat, continuo arcus aequales intercipiat? tum vero si tales dentur, quomodo eae inuestigari queant? Vel vt hanc quaestionem ad amplitudinis notionem reuocemus, sit data amplitudo $= \alpha$, quaeriturque, num praeter circulum aliae dentur lineae curuae, quarum omnes arcus eandem amplitudinem α habentes sint inter se aequales? Nisi enim curuae tractus cuspidibus vel ramis in infinitum porrectis perturbetur, ab eius quouis puncto arcus abscindi potest, cuius amplitudo sit $= \alpha$; sicque in eadem curua exhiberi poterunt infiniti arcus eiusdem amplitudinis α, qui an omnes inter se, nisi curua fuerit circulus, aequales esse queant? hic primum quaeritur.

7. Hanc autem quaestionem affirmadam esse ex casu quo amplitudo $\alpha = 180^\circ$ assumitur, statim liquet, quippe quo tangentes AT et MT inter se fiunt parallelae; aequalitas enim talium arcuum aeque amplorum adeo in ellipsi manifesto habet locum. Nam cum omnes diametri perimetrum ellipsis bifariam diuidant, quoniam tangentes ad terminos cuiusque diametri ductae sunt inter se parallelae, omnium semissium ellipticarum eadem est amplitudo 180°; ex quo perspicuum est ellipsin eiusmodi esse lineam curuam, cuius omnes arcus,

quorum amplitudo eſt 180° ſint inter ſe aequales. Eadem proprietate quoque erunt praeditae omnes aliae curuae in ſe redeuntes centro gaudentes, ex quo concludo etiam praeter circulum innumerabiles alias dari curuas, quarum omnes arcus aliam quandam datam amplitudinem habentes ſint inter ſe aequales. Verum mox patebit menſuram huius amplitudinis datae rationem rationalem ad angulum rectum tenere oportere.

Problema Generale.

Tab. I. Fig. 2. 8. *Inuenire lineam curuam* AMN, *cuius omnes arcus* AF, MN, *quorum eadem eſt amplitudo* $=\alpha$ *ſint inter ſe aequales.*

Solutio.

Sit arcus quicunque a puncto fixo A computatus $AM=s$ eiusque amplitudo $AOM=\Phi$, atque aequatio inter s et Φ eiusmodi eſſe debet, vt ſi loco Φ capiatur $\Phi+\alpha$, arcus s augmentum datum, quod ſit $=a$, accipiat; ſcilicet ſi a puncto indefinito M abſcindatur arcus MN iſti augmento a aequalis, vt eius amplitudo MLN futura ſit $=\alpha$, ideoque totius arcus $AMN=s+a$ amplitudo $=\Phi+\alpha$. Primum igitur patet huic conditioni ſatisfieri, ſi ſtatuatur $s=\frac{a\Phi}{\alpha}$, tum enim poſito $\Phi+\alpha$ loco Φ, arcus s abibit in $s+a$; hac autem poſitione curua quaeſita fit circulus; propterea quod radius osculi $r=\frac{ds}{d\Phi}$ prodit conſtans $=\frac{a}{\alpha}$. Verum hic nobis eſt propoſitum praeter circulum eas inveſtigare lineas curuas, quae huic problemati ſatisfaciant, atque adeo eius ſolutionem generalem adornare.

9. Concipio igitur eiusmodi functionem anguli Φ, quae inuariata maneat, etiamſi pro Φ ſcribatur $\Phi+\alpha$, cuiusmodi functiones per ſinus, tangentesue exprimi poſſe intelliguntur, ſiquidem nouimus infinitorum angulorum communes eſſe ſinus vel tangentes. Quodſi igitur V ſit talis functio anguli Φ, manifeſtum eſt, et huiusmodi aequationem $s=\frac{a\Phi}{\alpha}+V$ conditiones problematis adimplere: nam ſi pro Φ ſcribatur $\Phi+\alpha$, prius membrum $\frac{a\Phi}{\alpha}$ abit in $\frac{a\Phi}{\alpha}+a$, alterum vero V manet inuariatum, vnde aucta amplitudine Φ angulo α, arcus amplitudini $\Phi+\alpha$ reſpondens erit $=\frac{a\Phi}{\alpha}+a+V$, ideoque priorem arcum s ſuperat quantitate conſtante a. Quare cuiuscunque arcus MN cuius amplitudo eſt $=\alpha$, longitudo erit conſtans $=a$, omnino vti problema poſtulat. Tota ergo huius problematis ſolutio huc redit, vt huiusmodi functiones idoneae V exquirantur, quae angulo $\Phi+\alpha$ aeque conueniant atque angulo Φ, ſeu quae nullam mutationem ſubeant, etiamſi pro Φ ſcribatur $\Phi+\alpha$.

10. Nouimus autem, ſi π denotet angulum duorum rectorum, angulum quemcunque ω tam ſinum quam coſinum et tangentem communes habere

bere cum omnibus his angulis innumerabilibus $2\pi+\omega$; $4\pi+\omega$; $6\pi+\omega$; $8\pi+\omega$; etc. qui in hac formula generali $2n\pi+\omega$ continentur, denotante n numerum quemcunque integrum, eumque tam negatiuum quam positiuum. Cum igitur anguli ω et $2n\pi+\omega$ communes habeant sinum, cosinum, et tangentem; etiam anguli $m\Phi$ et $m\Phi+m\alpha$ tam sinum quam cosinum habebunt communem, si fuerit $m\alpha=2n\pi$, ideoque $m=\frac{2n\pi}{\alpha}$. Ex quo tam sinus quam cosinus anguli $\frac{2n\pi\Phi}{\alpha}$ eiusmodi erunt functiones, quae nullam mutationem patiuntur, etiamsi pro Φ scribatur $\Phi+\alpha$. Pro n ergo successiue ponendo 1, 2, 3, 4 etc. tales functiones pro V adhibendae erunt:

$$\text{sin.}\tfrac{2\pi\Phi}{\alpha};\ \text{sin.}\tfrac{4\pi\Phi}{\alpha};\ \text{sin.}\tfrac{6\pi\Phi}{\alpha};\ \text{sin.}\tfrac{8\pi\Phi}{\alpha}\ \text{etc.}$$
$$\text{cos.}\tfrac{2\pi\Phi}{\alpha};\ \text{cos.}\tfrac{4\pi\Phi}{\alpha};\ \text{cos.}\tfrac{6\pi\Phi}{\alpha};\ \text{cos.}\tfrac{8\pi\Phi}{\alpha}\ \text{etc.}$$

11. Quia vero sinus et cosinus angulorum multiplorum per sinum et cosinum anguli simplicis rationaliter exprimuntur, eiusque functiones vniformes sunt censendae, patet functionem quamcunque rationalem tam sinus quam cosinus anguli $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ pro V vsurpari posse, quoniam istius anguli tam sinus quam cosinus idem manet, etiamsi pro Φ scribatur $\Phi+\alpha$. Functionem autem hanc rationalem esse oportet, vt pro eodem angulo Φ vnicum valorem recipiat; ex quo functiones irrationales excluduntur; si enim tales admittere vellemus, ex angulo $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ etiam sinus et cosinus angulorum submultiplorum deriuare possemus, qui tamen nullo modo satisfacerent. Pro V itaque assumi debet functio quaecunque rationalis quantitatum sin.$\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ et cos.$\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$, vnde perspicuum est, nisi angulus α ad 2π rationem teneat rationalem, has quantitates ne quidem ex angulo Φ assignari posse. Assumta autem pro V tali functione quacunque, aequatio generalis pro curuis problemati satis facientibus erit $s=\frac{a\Phi}{\alpha}+\text{V}$.

12. Ex hac aequatione statim aequatio inter coordinatas solitas, elici potest, si enim rectam AE ad curuam in A normalem pro axe assumamus, ad eumque ex M applicatam MP normaliter ducamus, positis $AP=x$ et $PM=y$, ob $ds=\frac{ad\Phi}{\alpha}+d\text{V}$ habebimus:

$$x=\tfrac{a}{\alpha}(1-\text{cos.}\Phi)+\int d\text{V}\,\text{sin.}\Phi \text{ et } y=\tfrac{a}{\alpha}\text{sin.}\Phi+\int d\text{V}\,\text{cos.}\Phi$$

vnde si formulae $\int d\text{V}\,\text{sin.}\Phi$ et $\int d\text{V}\,\text{cos.}\Phi$ integrari, ac per sinus et cosinus anguli Φ, eiusue multiplorum exprimi queant, curuae prodibunt algebraicae problemati satisfacientes. Verum ex natura differentiationis constat, differentiale functionis V semper habiturum esse huiusmodi formam $\text{U}d\Phi$, in qua etiam U futura sit functio rationalis quantitatum sin $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ et cos $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$. Neque vero hinc vicissim concludere licet, si U fuerit talis functio, etiam integrale

grale $V = \int U d\Phi$ huiusmodi fore functionem, quod tamen natura problematis postulat.

13. Quo nunc in indolem harum curuarum accuratius inquiramus, earum radium osculi contemplemur, qui in M sit $= r$. Cum igitur inuenimus $r = \frac{ds}{d\Phi}$, ob $ds = \frac{a d\Phi}{\alpha} + dV = \frac{a d\Phi}{\alpha} + U d\Phi$ posito $dV = U d\Phi$, erit $r = \frac{a}{\alpha} + U$. Hic igitur statim liquet, radios osculi in M et N inter se fore aequales, quia enim posito $\Phi + \alpha$ loco Φ quantitas U non mutatur, radius quoque osculi eundem retinebit valorem. Sumto ergo quoque ab principio A arcu AF amplitudinis $= \alpha$, vt sit ipse arcus $AF = a$, radius osculi in F aequalis erit radio osculi in A, et cum sit arcus $MN = AF = a$, erit arcus $FN =$ arcui AM. Quare cum radius osculi in N aequalis sit radio osculi in M, arcus FN non solum aequalis, sed etiam similis erit arcui AM, ex quo curua ita erit comparata, vt ex pluribus partibus similibus in eandem plagam se insequentibus componatur. Tot scilicet huiusmodi portiones similes habebit, quoties angulus α continetur in quatuor angulis rectis.

14. Haec consideratio similitudinis, si eam debita attentione tractemus, generalem nobis methodum suppeditabit omnes curuas algebraicas, quae quidem problemati satisfaciant, inueniendi; quae eo magis videtur notatu digna, quod non tam facile ex formulis principalibus supra exhibitis deriuari possit, vnde non contemnenda subsidia, quae per vniuersam Analysin eximiam vtilitatem sint habitura, hauriri poterunt. Quam ob causam hoc problema imprimis dignum existimaui, quod accuratius euolueretur. Verum ante, quam insignem hunc similitudinis vsum ostendam, haud abs re erit quasdam curuas algebraicas ex formulis primo inuentis elicere, quo simul pateat, quam restricta sit ista via ad curuas algebraicas nobis patefaciendas; hincque praestantia alterius methodi post declarandae eo magis elucescat. Hunc in finem pono breuitatis gratia $\frac{2\pi}{\alpha} = n$, vt V denotet functionem quamcunque vniformem binarum quantitatum $\sin. n\Phi$ et $\cos. n\Phi$: tum igitur erit vt vidimus:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \cos.\Phi) + \int dV \sin.\Phi \text{ et } y = \frac{a}{\alpha}\sin.\Phi + \int dV \cos.\Phi.$$

15. Vt iam hinc curuas algebraicas eruamus, pro V sumere poterimus huiusmodi formam:

$$V = \begin{matrix} +A\sin n\Phi + B\sin.2n\Phi + C\sin.3n\Phi + D\sin.4n\Phi + \text{etc.} \\ +\mathfrak{A}\cos.n\Phi + \mathfrak{B}\cos.2n\Phi + \mathfrak{C}\cos.3n\Phi + \mathfrak{D}\cos.4n\Phi + \text{etc.} \end{matrix}$$

atque hinc casum simplicissimum obtinebimus ponendo

$$V = \frac{2b}{n}\sin.n\Phi, \text{ vnde fit } dV = 2b\,d\Phi\cos.n\Phi.$$

Quo valore assumto erit

$$dV\sin\Phi = b\,d\Phi(\sin.(n+1)\Phi - \sin.(n-1)\Phi)$$
$$dV\cos.\Phi = b\,d\Phi(\cos.(n+1)\Phi + \cos.(n-1)\Phi)$$

 quae

quae formulae cum ſint integrabiles, habebimus:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \operatorname{cof.}\Phi) + b\left(\frac{1 - \operatorname{cof.}(n+1)\Phi}{n+1} - \frac{1 + \operatorname{cof.}(n-1)\Phi}{n-1}\right)$$

$$y = \frac{a}{\alpha}\operatorname{fin.}\Phi + b\left(\frac{\operatorname{fin.}(n+1)\Phi}{n+1} + \frac{\operatorname{fin.}(n-1)\Phi}{n-1}\right)$$

adiectis ſcilicet eiuſmodi conſtantibus, vt euaneſcente angulo Φ ſimul coordinatae x et y euaneſcant, vti earum aſſumtio poſtulat.

16. Conſideremus caſum, quo omnes arcus, quorum amplitudo eſt 180°, ſeu $\alpha = \pi$, inter ſe debent eſſe aequales; fiet igitur $\frac{2\pi}{\alpha} = n = 2$, et coordinatae curuae ſatisfacientis erunt:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1 - \operatorname{cof.}\Phi) + \tfrac{1}{3}b(1 - \operatorname{cof.} 3\Phi) - b(1 - \operatorname{cof.}\Phi)$$

$$y = \frac{a}{\alpha}\operatorname{fin.}\Phi + \tfrac{1}{3}b\operatorname{fin.}3\Phi + b\operatorname{fin.}\Phi.$$

Sumatur alia abſciſſa t vt ſit $x = \frac{a}{\alpha} - \frac{2}{3}b - t$, erit

$$t = \left(\frac{a}{\alpha} - b\right)\operatorname{cof.}\Phi + \tfrac{1}{3}b\operatorname{cof.}3\Phi$$

$$y = \left(\frac{a}{\alpha} + b\right)\operatorname{fin.}\Phi + \tfrac{1}{3}b\operatorname{fin.}3\Phi$$

ſit porro $\frac{a}{\alpha} - b = f$; $\frac{a}{\alpha} + b = g$, erit $b = \frac{g-f}{2}$, ideoque

$$t = f\operatorname{cof.}\Phi + \frac{g-f}{6}\operatorname{cof.}3\Phi;\quad y = g\operatorname{fin.}\Phi + \frac{g-f}{6}\operatorname{fin.}3\Phi$$

ſeu ob $\operatorname{cof.}3\Phi = -3\operatorname{cof.}\Phi + 4\operatorname{cof.}\Phi^3$ et $\operatorname{fin.}3\Phi = 3\operatorname{fin.}\Phi - 4\operatorname{fin.}\Phi^3$

$$t = \frac{3f-g}{2}\operatorname{cof.}\Phi + \frac{2g-2f}{3}\operatorname{cof.}\Phi^3;\quad y = \frac{3g-f}{2}\operatorname{fin.}\Phi + \frac{2f-2g}{3}\operatorname{fin.}\Phi^3.$$

Vnde eliminando angulo Φ inter coordinatas t et y oritur aequatio ſex dimenſionum.

17. Quoniam igitur nouimus huic caſui ellipſin ſatisfacere, quae vtique poſt circulum eſt curua ſimpliciſſima, euidens eſt; hanc methodum non eſſe aptam ad curuas algebraicas ſimpliciores exhibendas; atque multo minus ad hunc ſcopum pertingere poterimus, ſi angulus α fuerit minor pars aliquota totius peripheriae 2π. Ratio huius defectus in hoc eſt ſita, quod dum pro V functionem algebraicam quantitatum $\operatorname{fin.} n\Phi$ et $\operatorname{cof} n\Phi$ aſſumimus, alias lineas curuas non inueniamus, niſi quarum rectificatio a quadratura circuli pendeat; cum enim habeamus $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$, quilibet arcus harum curuarum erit aggregatum ex arcu circulari $\frac{a\Phi}{\alpha}$ et linea recta V algebraice aſſignabili. Quare vt curuae algebraicae ſimpliciores inde elici poſſent, pro V functio tranſcendens accipi deberet, quae tamen ita eſſet comparata, vt formulae $dV\operatorname{fin.}\Phi$ et $dV\operatorname{cof}\Phi$ integrationem admitterent: Verum his caſibus iudicium, vtrum functio V debita gaudeat proprietate, difficilius videtur quam vt ei in calculo fidere queamus. Hinc eo magis e re erit vt tradatur

Methodus magis idonea curuas algebraicas huic quaeſtioni ſatisfacientes inueniendi.

18. Talem autem methodum conſideratio ſimilitudinis arcuum AM et FN largitur. Cum enim natura problematis hanc ſimilitudinem inuoluat; etiam viciſſim concludere licet omnes curuas, in quibus haec ſimilitudo locum habeat, ſimul problemati ſatisfacere. Namque ſi arcus AMF habeat ampli-

amplitudinem propositam $= \alpha$, atque curua vltra F ita protendatur, vt arcus FN similis et aequalis sit arcui AM, tum sumto arcu FN aequali arcui AM, tam eius longitudo MFN aequalis erit arcui AMF, quam eius amplitudo MLN aequalis amplitudini $AEF = \alpha$. Quare ad problema resoluendum sufficit eiusmodi curuas inuestigare, quae vltra arcum AF cuius amplitudo est $= \alpha$ ita continuentur, vt portio continuata FN similis et aequalis sit ipsi curuae AM.

19. Siue igitur curua ad axem AE siue ad axem FE referatur eadem prodire debet aequatio inter coordinatas; verum si recta FE inaequalis fuerit rectae AE hinc quaedam disparitas nascitur, vt arcus FN non aeque ad punctum E referatur, atque arcus AM eo refertur: commoditas autem analyseos postulat, vt punctum in calculum introducatur, ad quod arcus similes AM et FN aequa-
Tab. I. Fig. 3. liter referantur. Vt igitur tale punctum inueniamus, per data tria puncta A, E et F circulum describamus AEF, eiusque arcu AEF bisecto in C, erit C hoc punctum quod desideramus. Cum enim anguli CAE et CFE sint aequales, arcus AM et FN aequaliter referuntur ad rectas AC et FC, et quia $FC = AC$, horum arcuum quoque par est relatio ad punctum C, quod idcirco centrum similitudinis appellari potest. Quin etiam angulus ACF, etsi lineae CA et CF in curuam non sunt normales, sed quia similiter ad eam sunt incli-

inclinatae, ipsi amplitudini propositae α erit aequalis; hoc ergo puncto C tanquam centro similitudinis arcuum AM et FN ad nostrum institutum vti poterimus.

20. Sumtis ergo a punctis A et F arcubus aequalibus AM et FN ductisque ad C rectis MC et NC, tam ipsae quam anguli ACM et FCN erunt aequales, et cum sit $MFN = AMF$ etiam amplitudo arcus MFN erit $= \alpha$, tantumque angulum rectae MC et NC, etiamsi ad curuam non fuerint normales, constituunt scilicet $MCN = \alpha$. Hoc modo consideratio normalium vel tangentium prorsus ex calculo exuitur, et quaestio iam huc est reducta, vt eiusmodi quaeratur linea curua AMFN circa punctum fixum C describenda, vt si angulo ACM respondeat radius CM, idem quoque radius CN conueniat angulo $ACM + \alpha$. Siue posito angulo $ACM = \omega$ et recta $CM = z$, eiusmodi aequatio inter z et ω est quaerenda, quae eadem sit mensura, etiamsi pro ω statuatur $\omega + \alpha$. Quare ratiocinium vt supra instituendo, recta z exprimi debebit functione quapiam rationali quantitatum $\sin.\frac{2\pi\omega}{\alpha}$ et $\cos.\frac{2\pi\omega}{\alpha}$, quippe quae suos valores, dum $\omega + \alpha$ pro ω scribitur, non mutant.

21. Haec conditio ita est comparata, vt statim sine vlla praeuia integratione ad curuas algebraicas deducat, atque adeo inde aequatio generalis pro omnibus curuis algebraicis problemati satisfacientibus

tibus exhiberi possit. Si enim Ω denotet functionem quamcunque rationalem binarum quantitatum sin. $\frac{2\pi\omega}{\alpha}$ et cos. $\frac{2\pi\omega}{\alpha}$, aequatio haec $z = c\,\Omega$ omnes curuas algebraicas problemati satisfacientes in se complectetur: indeque etiam facile aequatio inter coordinatas consuetas deduci poterit. Sumta namque recta CA pro axe in eamque ex M demisso perpendiculo MP, si vocentur $CP = x$ et $PM = y$, erit primo $z = \sqrt{(xx+yy)}$ tum vero sin. $\omega = \frac{y}{z}$ et cos. $\omega = \frac{x}{z}$; ex quibus formulis si secundum praecepta cognita sinus et cosinus anguli multipli $\frac{2\pi\omega}{\alpha}$ definiantur, aequatio inter coordinatas x et y obtinebitur. Ad hoc autem necesse est, vt angulus α, quo amplitudo proposita designatur, rationem teneat rationalem ad angulum rectum; nam si $\frac{2\pi}{\alpha}$ esset numerus irrationalis, euidens est nullam curuam algebraicam esse satisfacturam.

22. Si ergo talis aequatio inter radium z et angulum ω assumatur; necesse est, vt etiam primae conditioni, qua esse debet $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ existente V functione quacunque rationali, seu vniformi quantitatum sin. $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$ et cos $\frac{2\pi\Phi}{\alpha}$, satisfiat. Prodit autem elementum arcus curuae $ds = \sqrt{(dz^2 + zz\,d\omega^2)}$, et cum Φ denotet amplitudinem arcus AM, si angulus constans CAE ponatur $= \gamma$, reperitur $\frac{dz}{z} = d\omega\,\text{tang.}(\omega - \Phi + \gamma)$ et $ds = \frac{z\,d\omega}{\text{cos.}(\omega - \Phi + \gamma)} = \frac{dz}{\text{sin.}(\omega - \Phi + \gamma)}$ Vnde non patet, quemadmodum conditioni $s = \frac{a\Phi}{\alpha} + V$ satis-

satisfiat. Quo magis notatu digna est haec altera solutio, quod introducendo nouo angulo ω, multo facilior relatio inter variabiles z et ω sit inuenta, quae neque ipsum arcum s neque eius amplitudinem Φ, circa quas quantitates tamen problema proprie versatur, contineat. Ad quod compendium cum nos consideratio geometrica perduxisset, insigni hoc problema nobis est exemplo, quantum per considerationes geometricas saepenumero solutiones problematum Analyticorum promoueri queant; et quanta subsidia inde in Analysi sint expectanda.

Quaestio I.

23. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum amplitudo est 360°, sint eiusdem magnitudinis.*

Patet, huic quaestioni omnes curuas in se redeuntes satisfacere, atque adeo certo respectu omnes plane curuas, siquidem arcus in infinitum excurrentes in censum admittere velimus. Hoc etiam nostra solutio indicat; nam ob $\alpha = 2\pi$, pro z capi oportet functionem quamcunque binarum quantitatum sin ω et cos. ω. Cum igitur sit sin. $\omega = \frac{y}{z}$ et cos. $\omega = \frac{x}{z}$, quaecunque aequatio inter x et y fingatur ponendo $x = z\,\text{cos.}\,\omega$ et $y = z\,\text{sin.}\,\omega$, resultabit aequatio inter z et ω ex qua z aequabitur functioni cuipiam ipsarum sin. ω et cos. ω, quae etsi forte non

non est rationalis, curuaque ideo variis plexibus constare potest, tamen ad solutionem problematis accommodari potest. Vnde affirmare licebit, si Z fuerit functio quaecunque ipsius $xx+yy$ et quantitatum x et y, tum aequationem $Z=0$ fore pro curua satisfaciente. Interdum quidem fieri potest, si z sit functio irrationalis ipsorum fin. ω et cos. ω, vt duo pluresue arcus existant, quorum eadem sit amplitudo $=360^\circ$, quorum non omnes satisfaciant, sed inter eos semper erit vnus adaequate satisfaciens, quem a reliquis facile erit discernere.

Quaestio 2.

24. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo* $\alpha=180^\circ$, *sint inter se aequales.*

Misso igitur problemate praecedente, cui omnes plane curuae algebraicae satisfaciunt, fit $\alpha=\pi$, et $\frac{2\pi}{\alpha}=2$, atque pro z sumi debebit functio quaecunque binarum quantitatum sin. 2ω et cos. 2ω. Cum ergo sit sin. $2\omega=\frac{2xy}{zz}$ et cos. $2\omega=\frac{xx-yy}{zz}$, si Z denotet functionem quamcunque rationalem harum quantitatum:

$$xx+yy;\quad xy \quad \text{et} \quad xx-yy$$

seu quod eodem redit harum quantitatum:

$$xx,\quad xy,\quad \text{et}\ yy$$

tum

tum aequatio $Z=0$, problemati generaliter satisfaciet.

25. Ex ordine igitur secundo huic quaestioni in genere satisfacient omnes lineae hac aequatione contentae:

$$Axx+Bxy+Cyy=aa$$

quae complectitur omnes sectiones conicas, per quarum centrum hic axis transire, et abscissae a centro computari assumuntur. Non solum igitur ellipses, vt supra notauimus, hic locum habent, sed etiam hyperbolae, vbi quidem arcus, quorum amplitudo est 180° fiunt infiniti. Quae aequatio quomodo satisfaciat, vt appareat, ponatur $x=z\,\text{cos.}\,\omega$ et $y=z\,\text{sin.}\,\omega$, ex eaque elicietur:

$$z=\frac{a}{\sqrt{(A\,\text{cos.}\,\omega^2+B\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\omega+C\,\text{sin.}\,\omega^2)}}$$

quae ob cos. $\omega^2=\frac{1+\text{cos.}\,2\omega}{2}$; sin. $\omega^2=\frac{1-\text{cos.}\,2\omega}{2}$ et sin. ω cos. $\omega=\frac{1}{2}$ sin 2ω reducitur ad hanc formam:

$$z=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(A+C+(A-C)\,\text{cos.}\,2\omega+B\,\text{sin.}\,2\omega)}}$$

vnde patet valorem ipsius z eundem manere, etiamsi pro ω scribatur $\omega+\pi$; ita vt irrationalitas huius functionis negotium non turbet, quod etiam in reliquis casibus est notandum.

26. Ex ordine tertio nulla curua proprie satisfacit; verum ex ordine quarto habemus hanc aequationem generalem

$$Ax^4+Bx^3y+Cxxyy+Dxy^3+Ey^4+Fxx+Gxy+Hyy+I=0$$

in

in qua tamen, si curua propric satisfacere debeat, cauendum est, ne curua habitura sit ramos in infinitum extensos; siquidem eorum ratio minus perspicue ad propositum transferri potest, quemadmodum hoc incommodum etiam in hyperbola habet locum. Atque haec est ratio, quod ordo tertius nullarum huiusmodi sit capax, etiam si haec aequatio forte per diuisionem in ordinem tertium migrare possit: si enim esset $E = 0$, $H = 0$, et $I = 0$ diuisione per x facta haberetur aequatio tertii ordinis. Maximum autem incommodum, quod his casibus vsu venit, in hoc consistit, quod arcuum, postquam in infinitum excurrerint, continuationes difficilius perspiciantur, haeque ipsae interdum pro negatiuis sint habendae, id quod scopo, cui propositio problematis est accommodata, plurimum aduersatur.

Quaestio 3.

27. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem amplitudo est* $\alpha = 120°$, *sint eiusdem magnitudinis.*

Hoc ergo casu est $\frac{2\pi}{\alpha} = 3$, et z denotabit functionem quamcunque binarum quantitatum sin. 3ω et cos. 3ω: cum ergo sit

$$\text{sin.}\, 3\omega = \frac{3xxy - y^3}{z^3} \text{ et cos.}\, 3\omega = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$$

patet, si pro Z capiatur functio vtcunque composita ex his tribus formulis:

$$xx + yy;\quad 3xxy - y^3,\quad \text{et } x^3 - 3xyy$$

tum

tum aequationem $Z = 0$ complecti omnes curuas algebraicas quaestioni satisfacientes. Vnde si excludamus in infinitum extensas, post circulum simplicissimae erunt ordinis quarti hac aequatione contentae:

$$(xx+yy)^2 + fy(3xx-yy) + gx(xx-3yy) \pm hh(xx+yy) \pm k^4 = 0.$$

Cum in hac curua omnes arcus amplitudinis $120°$ sint aequales, etiam eorum dupli, quorum amplitudo est $240°$ inter se erunt aequales. In genere autem valet, si in curua quapiam arcus amplitudinis α sint aequales, in eadem quoque arcus amplitudinis 2α, 3α, 4α etc. respectiue inter se aequales fore.

Quaestio 4.

28. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo* $\alpha = 90°$, *sint inter se aequales.*

Quia hoc casu est $\frac{2\pi}{\alpha} = 4$, pro z sumi debet functio quaecunque binarum quantitatum sin. 4ω et cos. 4ω, vnde cum ob sin. $\omega = \frac{y}{z}$ et cos. $\omega = \frac{x}{z}$ sit

$$\text{sin.}\, 4\omega = \frac{4x^3y - 4xy^3}{z^4} \text{ et cos.}\, 4\omega = \frac{x^4 - 6xxyy + y^4}{z^4}$$

si Z denotet functionem vtcunque conflatam ex his tribus formulis

$$xx + yy;\quad xy(xx - yy) \text{ et } x^4 - 6xxyy + y^4$$

 seu

seu ob $x^4 - 6xxyy + y^4 = (xx+yy)^2 - 8xxyy$ ex his tribus.

$$xx+yy;\quad xy(xx-yy) \text{ et } xxyy$$

aequatio $Z=0$ complectetur omnes curuas algebraicas quaestioni satisfacientes. Post circulum igitur simplicissimae erunt ex ordine quarto hac aequatione contentae:

$$x^4 + mx^3y - nxxyy - mxy^3 + y^4 \pm ff(xx+yy) \pm g^4 = 0$$

quarum eae, quae vno tractu simplici in se redeunt, modo maxime naturali satisfaciunt, cuiusmodi est $x^4 + y^4 = g^4$; hoc sensu enim non solum ramos in infinitum extensos, sed etiam plexus plurium tractuum euitari conuenit.

Quaestio 5.

29. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha = 72^\circ$ sint inter se aequales.*

Hoc casu habemus $\frac{2\pi}{\alpha} = 5$, et pro z sumenda est functio quaecunque binarum quantitatum $\sin. 5\omega$ et $\cos. 5\omega$. Cum vero sit

$$\sin. 5\omega = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{z^5} \text{ et } \cos. 5\omega = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{z^5}$$

si Z denotet functionem vtcunque compositam ex his tribus formulis

$$xx+yy;\quad 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \text{ et } x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

aequatio $Z=0$ complectetur omnes curuas algebraicas problemati satisfacientes. Vnde si ramos in infinitum extensos euitare velimus, post circulum simplicissimae curuae ad ordinem sextum pertinebunt, hac aequatione contentae:

$$(xx+yy)^3 + fy(5x^4 - 10xxyy + y^4) + gx(x^4 - 10xxyy + 5y^4) \pm bb(xx+yy)^2 \pm k^4(xx+yy) \pm l^6 = 0.$$

In his autem curuis non solum arcus, quorum amplitudo est 72° seu $\frac{2\pi}{5}$, sed etiam ii, quorum amplitudo est vel $2.\frac{2\pi}{5}$ vel $3.\frac{2\pi}{5}$, vel $4.\frac{2\pi}{5}$, inter se erunt aequales.

Quaestio 6.

30. *Inuenire omnes curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum eadem est amplitudo $\alpha = 60^\circ$, sint inter se aequales.*

Erit igitur $\frac{2\pi}{\alpha} = 6$, et pro z capienda est functio quaecunque harum quantitatum $\sin. 6\omega$ et $\cos. 6\omega$. Cum igitur sit

$$\sin. 6\omega = \frac{6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5}{z^6} \text{ et } \cos. 6\omega = \frac{x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6}{z^6}$$

si Z denotet functionem vtcunque compositam ex his tribus formulis:

$$xx+yy;\quad xy(3x^4 - 10xxyy + 3y^4);\quad x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6$$

aequatio $Z=0$ continebit omnes curuas algebraicas quaesito satisfacientes. Tales ergo praeter circulum infra ordinem sextum non dantur, quae autem sunt ex ex hoc ordine ista aequatione generali comprehenduntur:

$$(xx+yy)^3+mxy(3x^4-10xxyy+3y^4)+n(x^6-15x^4yy+15xxy^4-y^6)\pm ff(xx+yy)^2\pm g^4(xx+yy)\pm h^6=0.$$

Atque in his curuis non solum arcus amplitudinem $60°$, sed etiam amplitudinem $120°$, $180°$, $240°$, et $300°$ habentes sunt inter se aequales.

Quaestio generalis.

31. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus omnes arcus, quorum amplitudo datam ad $360°$ tenet rationem, sint inter se aequales.*

Sit ergo amplitudo proposita ad $360°$ vti m ad n seu $\alpha=\frac{m}{n}.2\pi$ ideoque $\frac{2\pi}{\alpha}=\frac{n}{m}$: atque iam satis notauimus, si arcus amplitudinis $\frac{2\pi}{n}$ fuerint aequales, etiam arcus amplitudinis $\frac{m}{n}.2\pi$ fore inter se aequales, vnde sufficit pro z sumsisse functionem binarum quantitatum $\sin.n\omega$ et $\cos.n\omega$, ita vt numerus m non in computum ingrediatur. Cum autem sit

$$\sin.n\omega=\frac{(x+y\sqrt{-1})^n-(x-y\sqrt{-1})^n}{2z^n\sqrt{-1}}\text{ et }\cos.n\omega=\frac{(x+y\sqrt{-1})^n+(x-y\sqrt{-1})^n}{2z^n}$$

aequatio $Z=0$ continebit omnes curuas algebraicas quaesito satisfacientes, si fuerit Z functio vtcunque ex his tribus formulis conflata:

$$xx+yy;\ \frac{(x+y\sqrt{-1})^n-(x-y\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}\text{ et }\frac{(x+y\sqrt{-1})^n+(x-y\sqrt{-1})^n}{2}$$

Vel

Vel euolutis his potestatibus, vt imaginaria se destruant, functio Z formata esse debebit ex his tribus formulis:

I. $xx+yy$

II. $nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}x^{n-5}y^5-\text{etc.}$

III. $x^n-\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y^4-\text{etc.}$

32. Cum mihi igitur fuisset propositum, omnes curuas inuestigare, quae hanc habeant proprietatem, vt omnes earum arcus, qui amplitudinem quandam datam habent, sint inter se aequales; hoc problema equidem ita perfecte solutum dedisse mihi videor, vt nihil praeterea desiderari possit. Primum enim ex natura amplitudinis formulam generalem pro huiusmodi curuis exhibui, quae autem cum in differentialibus subsisteret, et curuas algebraicas difficulter proderet, imprimis simpliciores; similitudinis arcuum ratio, quam indidem obseruare licuit, eximiam patefecit methodum, omnes adeo curuas algebraicas expedite inueniendi. Quod negotium cum primo intuitu maxime arduum esset visum, istud artificium ex natura similitudinis petitum vtique omnem attentionem meretur, neque vllum est dubium, quin inde alia insignia subsidia in Analysin hauriri queant.

 EVO-