1767

Éclaircissemens plus détaillés sur la génération et la propagation du son, et sur la formation de l'écho

Leonhard Euler

ÉCLAIRCISSEMENS PLUS DÉTAILLÉS

SUR

LA GÉNÉRATION ET LA PROPAGATION DU SON,

ET SUR LA FORMATION DE L'ECHO,

PAR M. EULER.

I.

La plus ſublime recherche que les *Géometres* ayent entrepriſe de nos jours avec ſuccès, eſt ſans contredit à tous égards celle de la propagation du ſon. Comme il y eſt queſtiou d'une certaine agitation de l'air, cette recherche a été d'autant plus difficile, que parmi toutes celles qu'on a faites ſur le mouvement de différens corps, il ne s'en trouve pas une ſeule, où l'on ait réuſſi à ſoumettre au calcul le mouvement de l'air: de ſorte que cette partie de la Mécanique a été jusqu'ici entierement inconnue. Car on n'y ſauroit rapporter le peu de choſe qu'on a fait ſur le mouvement des corps pouſſés par la force d'un air comprimé; puisqu'on n'y a conſidéré que la ſeule force de l'air, ſans examiner le mouvement dont les différentes particules de l'air ſont agitées entr'elles. Ainſi on ne ſavoit encore abſolument rien des différens mouvemens dont une maſſe d'air eſt ſuſceptible.

2. Outre cette difficulté, on en a rencontré encore une autre auſſi grande de la part de l'Analyſe: quelque perfectionnée que paroiſſe déjà cette ſcience par les ſoins des plus grands Géometres, elle n'étoit pas encore ſuffiſante pour entreprendre cette recherche; il falloit quaſi ouvrir une carriere tout à fait nouvelle, où il s'agit d'étendre l'Analyſe à des fonctions de deux ou pluſieurs variables, pendant que presque toutes les découvertes des Géometres ont été bornées à des fonctions d'une ſeule variable. Il falloit donc s'appliquer à une branche tout à fait

fait nouvelle de l'Analyſe des infinis, dont même les premiers élémens n'étoient presque pas encore développés. De là on ne ſera pas ſurpris ſi cette nouvelle Analyſe rencontre de grandes contradictions, même de la part des plus grands Géometres; quand on ſe rappelle à combien de contradictions le calcul différentiel a été expoſé dans ſa premiere naiſſance.

3. Quoique j'aye déjà traité ce ſujet en quelques Mémoires après le célebre M. de la Grange, à qui on eſt redevable de cette importante découverte, tant la nouveauté que l'importance mérite bien toute l'attention, & des recherches ultérieures ne manqueront pas de nous fournir encore de plus grands éclairciſſemens. Lorsque je traitai cette matiere pour la premiere fois, je me ſuis attaché principalement à déterminer la viteſſe dont un tremouſſement eſt tranſmis par l'air; mais à préſent je tacherai de développer toutes les particularités qui peuvent avoir lieu dans les agitations de l'air, & la maniere dont elles ſont altérées dans leur propagation. Cette recherche eſt d'autant plus intéreſſante, que c'eſt de là que réſultent toutes les variétés que nous obſervons dans les ſons. Mais, ayant déjà fait voir que la propagation ſe fait à peu près de la même maniere dans le plein air que dans un tuyau, je bornerai mes recherches préſentes à des tuyaux, & même également larges par toute leur étendue: il n'importe presque rien ſi ces tuyaux ſont droits ou courbés d'une maniere quelconque, puisque les phénomenes du ſon n'en ſouffrent aucun changement.

Pl. VIII. Fig. 1.

4. Soit donc AB un tuyau de la même largeur $= ff$ par toute ſa longueur, que la figure repréſente droit, quoiqu'il puiſſe avoir une figure courbée quelconque; je regarde auſſi encore ſa longueur indéterminée, puisque ce n'eſt qu'après toutes les intégrations, qu'on tiendra compte des bouts du tuyau, ſoit qu'ils ſoyent ouverts ou fermés. Je ſuppoſe donc que l'équilibre de l'air contenu dans ce tuyau ait été troublé d'une maniere quelconque, ou par toute ſa longueur, ou ſeulement dans une partie. Que B exprime la denſité naturelle

turelle de l'air, mais qu'au point S posant la distance $AS = S$ prise du point fixe A, la densité de l'air ait été reduite à Q, & qu'on ait imprimé à cette particule d'air en S un mouvement vers B avec la vitesse $= V$, de sorte que les deux quantités Q & V expriment le dérangement, dont l'équilibre de l'air dans le tuyau a été troublé au commencement. Si quelque part on avoit laissé l'air dans son état naturel, on n'auroit qu'à y mettre $Q = B$ & $V = o$. C'est ainsi que je représente l'état initial de l'air contenu dans le tuyau.

5. Maintenant après un tems écoulé de t secondes la couche de l'air, qui au commencement a rempli l'élément $S\Sigma = dS$, soit parvenue en $s\zeta$, & nommons l'espace $As = s$, dont l'élément $s\zeta = ds$: que la densité de l'air y soit à présent $= q$, & la vitesse vers $B = v$, en exprimant chaque vitesse par l'espace qui en seroit parcouru dans une seconde, de sorte que tout revient à déterminer ces trois quantités s, q, & v, auxquelles ont été reduites après le tems t les trois quantités S, Q & V de l'état initial. Or à l'égard de celles-ci il est bon de remarquer, que puisque l'état initial doit être regardé comme donné les lettres Q & V sont de certaines fonctions de l'espace $AS = S$, mais les quantités s, q & v puisqu'elles dépendent non seulement de l'état initial, mais aussi du tems t, sont effectivement des fonctions de deux variables S & t: & partant leur détermination apartient à cette nouvelle partie de l'Analyse, qui traite des fonctions de deux variables, & qui est fondée sur des principes, qui lui sont particuliers.

6. Donc puisque s est une fonction de S & t, en augmentant tant S que t de leurs différentiels dS & dt, la valeur de s deviendra $= s + dS\left(\frac{ds}{dS}\right) + dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$, où il faut remarquer que la partie $dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$ exprime proprement l'élément $s\zeta$, dont le point Σ sera plus avancé que le point S après le tems t. Mais l'autre

l'autre partie $dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$ exprime l'eſpace par lequel le point s avancera pendant l'élément du tems ſuivant dt: lequel étant diviſé par dt donnera par conſéquent la viteſſe de l'air en s après le tems t, de ſorte que nous en tirons $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$. Enſuite l'élément de la maſſe d'air, qui occupoit au commencement l'eſpace $S\Sigma = dS$ avec la denſité Q, la largeur du tuyau étant $= ff$, eſt exprimé par la formule $ffQdS$. Or cette même maſſe occupant après le tems t l'eſpace $s\zeta = dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$ avec la denſité q la largeur demeurant la même $= ff$, ſera exprimée par la formule $ffqdS\left(\frac{ds}{dS}\right)$, d'où nous tirons cette égalité $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$: de ſorte qu'ayant trouvé la nature de la fonction s, nous en connoiſſons d'abord tant la viteſſe $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ qui ſe trouve en s après le tems t, que ſa denſité $q = Q : \left(\frac{ds}{dS}\right)$. Or cet air en s eſt le même, qui au commencement a été en S.

7. La viteſſe de l'air en s après le tems t étant $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$, l'incrément de cette viteſſe pendant l'élément du tems ſuivant dt, ſera $= dt\left(\frac{dv}{dt}\right) = dt\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, lequel étant diviſé par dt donne l'accélération $= \left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, qui doit être la même, que celle qui eſt produite par les forces, qui agiſſent ſur l'élément de l'air en $s\zeta$, or ces for-

forces ne résultent que de la pression de l'air, dont il agit en vertu de son élasticité tant en s qu'en ζ. Soit donc la pression en s égale au poids d'une colonne de mercure, dont la hauteur $= p$, laquelle dependant de la densité de l'air en s doit aussi être considérée comme une fonction des deux variables S & t; d'où nous concluons pour le même tems la pression en ζ égale à la hauteur $= p + dS\left(\frac{dp}{dS}\right)$. Donc l'élément d'air en $s\zeta$, dont la masse est $= ffQdS$ est repoussé vers A par le poids d'une colonne de mercure, dont la hauteur $= dS\left(\frac{dp}{dS}\right)$, & qui agit sur la base $= ff$. Que l'unité exprime la densité du mercure, & le poids ou la masse de cette colonne étant $= ffdS\left(\frac{dp}{dS}\right)$, la force accélératrice sera $= -\frac{1}{Q}\left(\frac{dp}{dS}\right)$.

8. Or posant la hauteur $= g$, d'où les corps pesans tombent dans une seconde, qui est comme on sait de 15, 625 pieds de Rhin, les principes de Mécanique fournissent cette équation:

$$\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = -\frac{2g}{Q}\left(\frac{dp}{dS}\right), \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dp}{dS}\right) + \frac{Q}{2g}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0,$$

où il faut observer que Q marque une fraction, qui est à l'unité, comme la densité de l'air en S à la densité du mercure, ou bien en raison de leur gravités specifiques. Ou ayant déjà trouvé $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$ nous aurons $\left(\frac{dp}{dS}\right) + \frac{q}{2g}\left(\frac{ds}{dS}\right)\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$. Maintenant puisque la pression p est proportionelle à la densité q, supposons qu'à une densité connue $= b$ il répond la hauteur du barometre $= a$, & nous aurons $p = \frac{aq}{b}$, donc $\left(\frac{dp}{dS}\right) = \frac{a}{b}\left(\frac{dq}{dS}\right)$:

 de

de ſorte que notre équation prend cette forme $\frac{2ag}{bQ}\left(\frac{dq}{dS}\right) + \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$, qui conjointement avec la précédente $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$ renferme la détermination du mouvement de l'air dans le tuyau.

9. De là nous pourrons d'abord éliminer la lettre q; car puisque Q eſt une fonction du ſeul S, nous aurons $\frac{dQ}{dS} = \left(\frac{dq}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) + q\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$, d'où nous tirons:

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{dS} : \left(\frac{ds}{dS}\right) - Q\left(\frac{dds}{dS^2}\right) : \left(\frac{ds}{dS}\right)^2,$$

& cette valeur ſubſtituée dans l'autre équation donne

$$\frac{2agdQ}{bQdS} : \left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{2ag}{b}\left(\frac{dds}{dS^2}\right) : \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0.$$

Puisque Q eſt une fonction donnée de S, poſons pour abréger $\frac{dQ}{QdS} = P$, & $\frac{2ag}{b} = cc$, pour avoir en multipliant par $\left(\frac{ds}{dS}\right)^2$ cette équation:

$$ccP\left(\frac{ds}{dS}\right) - cc\left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0,$$

de l'intégration de laquelle dépend la détermination du mouvement qu'on cherche: or quelques peines que je me ſuis données, je n'en ai pu trouver la nature de la fonction s, ni comment elle eſt composée de deux variables S & t.

10.

10. Donc quelque ſimple que paroiſſe le cas, que je me ſuis propoſé, où il ne s'agit que du mouvement de l'air contenu dans un tuyau de même largueur par toute ſon étendue; il eſt pourtant encore de beaucoup trop compliqué, pour que les bornes de l'Analyſe ſoyent ſuffiſantes à le réſoudre. La difficulté ne réſide pas dans le mouvement, que je ſuppoſe avoir été d'abord imprimé à l'air dans le tuyau, puisque la lettre V, qui en déſigne la viteſſe, n'entre pas même dans le calcul. Donc ſi l'on ſuppoſoit une certaine quantité d'air dans le tuyau réduite à une plus grande denſité, & qu'il s'y trouve un boulet, qui en ſeroit pouſſé; il faut avouer que même dans ce cas la détermination du mouvement de l'air ſurpaſſeroit encore les forces du calcul: tout ce qu'on a fait ſur ce ſujet, ſe reduit au ſeul mouvement du boulet, qu'on a déterminé en faiſant abſtraction de celui de l'air, ou bien en négligeant l'inertie de l'air: laquelle étant ſi extrémement petite à l'égard de celle du boulet, le calcul ne laiſſe pas d'être très bien d'accord avec les expériences.

11. Je ne voi qu'une ſeule condition, ſous laquelle l'équation, que je viens de trouver, puiſſe être reduite à l'intégrabilité; cette condition eſt que la formule $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ retienne toujours presque la même valeur. Donc puisque au commencement il étoit $s = S$, & partant $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, cette condition aura lieu, quand les valeurs de $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ ne différent jamais ſenſiblement de l'unité. On voit bien que cela arrivera, lorsque l'eſpace Ss, par lequel l'air en S eſt tranſporté pendant le tems t, eſt toujours extrémement petit, ou bien lorsque chaque particule de l'air contenu dans le tuyau ne change presque point de place. Or c'eſt préciſément le cas de la propagation du ſon que j'ai ici principalement en vue; mais il pourra auſſi être appliqué avec le même ſuccès à tous les autres cas, où il ne s'agit que de dé-

terminer un tremouſſament de l'air dans le tuÿau; tels cas ſont premierement la génération, & enſuite la productiondu ſon dans les tuyaux d'orgue, que je me propoſe de développer à la premiere occaſion, où je me ſervirai des mêmes principes, que je m'en vai établir dans les articles ſuivans.

12. Puisque je ſuppoſerai donc, que la quantité s ne differe jamais que quaſi infiniment peu de S, je poſe $s = S + z$, de ſorte que z marque l'eſpace Ss, par lequel l'air qui étoit en S, ſe trouve tranſporté après le tems t. De là nous aurons $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$ où le terme $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ étant infiniment petit par rapport à l'unité, peut être omis; mais cela nonobſtant la valeur $\left(\frac{dds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$ demeurera dans le calcul, puisqu'il n'y a rien, par rapport auquel on la pourroit rejetter; enfin on aura $\left(\frac{ds}{dt}\right) = v = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$: d'où notre équation ſe réduit à cette forme à cauſe de $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$.

$$ccP - cc\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0.$$

Où je remarque que cette même équation réſulteroit ſi l'on poſoit $s = S + \alpha t + z$, quelque grande que ſoit la quantité α, pourvu que z ſoit une très petite; mais ce cas n'eſt que celui, où le tuyau entier ſeroit tranſporté uniformément ſelon la même direction, ou bien ſi l'air paſſoit par le tuyau d'un mouvement uniforme.

13. Lorsque je traitai la premiere fois ce ſujet de la propagation du ſon, l'équation, à laquelle je ſuis parvenu, différoit de celle-ci en ce, que le premier terme ccP ne s'y trouvoit point; mais cela nonobſtant la rapidité de la propagation, que j'en ai tirée, étoit très juſte, puisque ce terme alors omis renferme la nature de l'agitation, à laquelle je n'ai fait alors aucune attention. Mais à préſent ce terme me ſervira à découvrir toutes les variétés des ſons, qui dépendent de la nature de la premiere agitation de l'air dans le tuyau; car on ſait, que les ſons, quoiqu'ils ſoyent également graves ou aigus, & auſſi également forts, admettent encore pluſieurs variations & différences, comme ſont celles des différentes voyelles, dont perſonne n'a encore entrepris d'expliquer la nature. Enſuite ce même terme ccP me mettra auſſi en état d'expliquer la formation du ſon dans les flutes ou tuyaux d'orgues, ce que je remets à une autre occaſion, me contentant pour le préſent d'examiner plus en détail la production & propagation du ſon.

14. D'abord je remarque que le terme ccP ne trouble point l'intégration de l'équation trouvée: car poſant $z = u + R$ de ſorte que R ſoit une fonction de la variable S, nous aurons:

$$ccP - \frac{cc\,ddR}{dS^2} - cc\left(\frac{ddu}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = 0.$$

Faiſons donc $\frac{ddR}{dS^2} = P = \frac{dQ}{QdS}$, & nous aurons $\frac{dR}{dS} = l\,\frac{Q}{C}$, & $R = \int dS\,l\,\frac{Q}{C}$. Or pour la quantité u on aura cette équation $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddu}{dS^2}\right)$, dont on ſait par le mouvement des cordes vibrantes, que l'intégrale complette eſt

$$u = \Gamma:(S + ct) + \Delta:(S - ct),$$

où

où Γ & Δ déſignent des fonctions quelconques des quantités y jointes. Par conſéquent l'intégrale complette de notre équation eſt

$$z = \int dS\, l\frac{Q}{C} + \Gamma:(S + ct) + \Delta:(S - ct),$$

& de là enſuite $s = S + z$.

15. Maintenant il ne reſte plus que d'ajuſter cette équation infiniment générale au cas dont il eſt queſtion. Pour cet effet il en faut deduire les valeurs $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ & $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ qui réſultent

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right) = 1 + l\frac{Q}{C} + \Gamma':(S+ct) + \Delta':(S-ct), \ \&$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) = c\Gamma':(S+ct) - c\Delta':(S-ct)$$

Appliquons à préſent ces formules à l'état initial en poſant $t = 0$, & puisqu'alors il devient $s = S$, $\left(\frac{ds}{dt}\right) = V$, & $\left(\frac{ds}{dS}\right) = \frac{Q}{q} = 1$, à cauſe de $q = Q$, nous aurons:

$$0 = \int dS\, l\frac{Q}{C} + \Gamma: S + \Delta: S,$$

$$V = c\Gamma': S - c\Delta': S,$$

$$\& \quad 0 = l\frac{Q}{C} + \Gamma': S + \Delta': S.$$

Or de ces trois équations la premiere eſt déjà compriſe dans la troiſieme, & la conſtante C peut encore être priſe à volonté. Poſons donc $C = B$, ce qui eſt la denſité naturelle de l'air dans le tuyau, & remarquons que de là il ne nait aucune reſtriction puisque la généralité de la lettre C eſt déjà compriſe dans les deux fonctions générales.

16. En prennant $C = B$, puisque la densité Q ne sauroit différer considérablement de la densité naturelle, vu que nous supposons que les changemens de place de chaque particule d'air sont toujours très petits, la fraction $\frac{Q}{B}$ ne différera presque pas de l'unité, & partant son logarithme sera $l\frac{Q}{B} = \frac{Q-B}{B}$. De là nous déterminerons les deux fonctions différentielles:

$$\Gamma' : S = \frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2} l \frac{Q}{B}, \quad \& \ \Delta' : S = -\frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2} l \frac{Q}{B}.$$

& partant les fonctions Γ & Δ mêmes seront:

$$\Gamma : S = \frac{1}{2c}\int V\,dS - \tfrac{1}{2}\int dS\, l\frac{Q}{B},$$

$$\& \quad \Delta : S = -\frac{1}{2c}\int V\,dS - \tfrac{1}{2}\int dS\, l\frac{Q}{B}.$$

Donc, puisque l'état initial donne à connoitre pour chaque abscisse S les valeurs V & Q, on en tirera aisément les fonctions $\Gamma' : S$, $\Delta' : S$; $\Gamma : S$, & $\Delta : S$, non seulement pour l'abscisse S, mais aussi pour toute autre abscisse $S + ct$, ou $S - ct$, qui entrent dans nos formules qui expriment l'état de l'air après le tems t. D'où cette question est parfaitement résolue, quelle qu'ait été l'agitation initiale, pourvu qu'elle soit extrémement petite.

17. Nous voilà donc parvenus à la solution de ce probleme assez général: *L'état d'équilibre de l'air dans le tuyau* AB *ayant été* Fig. 1.
troublé d'une maniere quelconque, pourvu que les dérangemens soyent extrémement petits, déterminer le mouvement de l'air qui en sera causé dans le tuyau. Pour en donner la solution, considérons d'abord tout ce qui est donné; ce qui se réduit aux points suivans.

1°. La densité du mercure étant exprimée par 1, soit b celle de l'air naturel, & a la hauteur du mercure dans le barometre, d'où l'on tire l'espace $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$, où g marque la hauteur de la chûte dans une seconde.

Fig 2. 2°. Que dans l'état initial le dérangement d'équilibre ait été tel, que l'air au point S du tuyau ait reçu la densité $= Q$, d'où je construis la courbe CQD, en posant ses appliquées $SQ = c\, l \frac{Q}{b} = \frac{Q - b}{b} c$, que je nommerai l'échelle des densités.

3°. Qu'outre ce dérangement on ait imprimé à l'air en S une vitesse selon la direction SB, & posant l'espace qui en seroit parcouru dans une seconde $= V$, je constitue l'appliquée $SV = V$, d'où je construis l'échelle des vitesses EVF.

L'axe de ces deux échelles est la droite AB, qui représente en même tems le tuyau étendu en ligne droite, en cas qu'il soit courbé.

Solution analytique du probleme.

18. Qu'après le tems de t secondes écoulé depuis le commencement, la particule d'air qui étoit alors en S, se trouve à présent en s, & posons l'espace $Ss = z$: soit ensuite la densité de cet air en $s = q$, & sa vitesse $= v$ dirigée vers B: & il est clair que toute la solution se réduit à la détermination de ces trois élémens z, q & v. Pour cet effet on n'a qu'à établir les fonctions suivantes pour l'abscisse $AS = S$.

$$\Gamma' : S = \frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2} l \frac{Q}{b}; \qquad \Delta' : S = -\frac{V}{2c} - \tfrac{1}{2} l \frac{Q}{b}, \ \&$$

$$\Gamma : S = \frac{1}{2c} \int V dS - \tfrac{1}{2} \int dS\, l \frac{Q}{b}; \quad \Delta : S = -\frac{1}{2c} \int V dS - \tfrac{1}{2} \int dS\, l \frac{Q}{b},$$

&

& de là on aura

$$z = \int dS\,l\,\frac{Q}{b} + \Gamma:(S+ct) + \Delta:(S-ct),$$

$$\frac{Q}{q} = 1 + l\,\frac{Q}{b} + \Gamma':(S+ct) + \Delta':(S-ct),$$

$$\&\ v = c\,\Gamma':(S+ct) - c\,\Delta':(S-ct).$$

Or, puisque q differe très peu de Q, on aura aſſez exactement

$$\frac{q}{b} = 1 - \Gamma':(S+ct) - \Delta':(S-ct).$$

Conſtruction Géometrique du Probleme.

19. Les échelles conſtruites ſur l'état initial de l'air dans le tuyau donnent d'abord pour l'abſciſſe $AS = S$ les valeurs ſuivantes:

$$l\,\frac{Q}{b} = \frac{1}{c}.\,SQ;\quad \text{donc } \int dS\,l\,\frac{Q}{b} = \frac{1}{c}.\,ACSQ.$$

$$\&\quad V = SV;\quad \text{donc } \int V\,ds = AESV,$$

d'où nous tirons

$$\Gamma':S = \frac{1}{2c}.SV - \frac{1}{2c}.SQ;\quad \Delta':S = -\frac{1}{2c}.SV - \frac{1}{2c}.SQ,$$

$$\Gamma:S = \frac{1}{2c}.AESV - \frac{1}{2c}.ACSQ;\quad \Delta:S = -\frac{1}{2c}.AESV - \frac{1}{2c}.ACSQ.$$

Donc, prenant pour un tems écoulé quelconque de t ſecondes les abſciſſes $AT = S + ct$, & $At = S - ct$, de ſorte que $ST = St = ct$ nous aurons ſemblablement:

$$\Gamma':(S+ct) = \frac{1}{2c}.TN - \frac{1}{2c}.TM;\quad \Delta':(S-ct) = -\frac{1}{2c}.tn - \frac{1}{2c}.tm,$$

$$\Gamma:(S+ct) = \frac{1}{2c}.AETN - \frac{1}{2c}.ACTM;\quad \Delta:(S-ct) = -\frac{1}{2c}.AEtn - \frac{1}{2c}.ACtm,$$

d'où

d'où il est à présent aisé de construire les formules trouvées pour les trois quantités z, q & v.

20. Or, d'abord pour la quantité z qui exprime l'espace Ss, dont la particule d'air, qui étoit au commencement en S se trouve à présent plus avancée vers B, nous aurons:

$$z = \frac{1}{c}.ACSQ + \frac{1}{2c}.AETN - \frac{1}{2c}.ACTM - \frac{1}{2c}.AEtn - \frac{1}{2c}.ACtm,$$

$$\text{ou bien } z = \frac{1}{2c}(tnTN - SQTM + SQtm),$$

où $tnTN$, $SQTM$, & $SQtm$, marquent des espaces renfermés par les deux échelles données.

Ensuite, pour la densité q de l'air, qui se trouve à présent en s, nous aurons:

$$q = b\left(1 - \frac{1}{2c}.TN + \frac{1}{2c}.TM + \frac{1}{2c}.tn + \frac{1}{2c}.tm\right),$$

$$\text{ou bien } q = b + \frac{b}{2c}(TM + tm - TN + tn).$$

Enfin, pour la vitesse de cet air en s, qui est $= v$, & dirigée vers B, nous aurons:

$$v = \tfrac{1}{2}TN - \tfrac{1}{2}TM + \tfrac{1}{2}tn + \tfrac{1}{2}tm,$$

$$\text{ou bien } v = \tfrac{1}{2}(TN + tn - TM + tm).$$

Cette vitesse est exprimée par l'espace qui en seroit parcouru dans une seconde.

De la Génération & Propagation du Son.

Fig. 3. 21. Je conçois ici que notre tuyau s'étend de part & d'autre à l'infini, ayant par tout la même largeur : & qu'au commencement une petite partie d'air contenu dans l'espace IK ait été ebranlée d'une maniere quelconque, dont la nature soit exprimée par les deux

deux échelles IQK & IVK, la premiere IQK étant celle des densités dont chaque appliquée OQ est $= \frac{Q-b}{b}c$, où Q marque la densité de l'air en O, & b la densité naturelle, pendant que c est un espace égal à $\sqrt{\frac{2ag}{b}}$, comme j'ai expliqué ci-dessus: de sorte qu'on en aura la densité $Q = b\left(1 + \frac{OQ}{c}\right)$. De l'autre échelle des vitesses IVK, chaque appliquée OV exprime la vitesse qui a été imprimée à l'air en O selon la direction OB: où il est bon d'observer, que les appliquées positives, ou dirigées en haut, de l'échelle IQK marquent une plus grande densité de l'air que la naturelle: & que de semblables appliquées de l'échelle IVK se rapportent à la direction OB. Tout le reste de l'air dans le tuyau étant encore en équilibre, toutes les deux échelles se réunissent, hormis l'espace IK avec l'axe, & leurs appliquées évanouissent.

22. Maintenant, considérons un point quelconque S du tuyau, pour y déterminer l'état de l'air après cette agitation excitée en IK: & puisque, pour un tems quelconque de t secondes, il faut prendre, du point S de part & d'autre sur l'axe, des intervalles $ST = St = ct$, & y tirer des appliquées aux deux échelles, il est clair qu'à moins que l'un ou l'autre des points T & t ne tombe dans l'espace IK, toutes les appliquées étant alors $= 0$, l'air en S se trouvera en repos avec sa densité naturelle $= b$. Premierement donc, tant que le tems écoulé t est plus petit que $\frac{IS}{c}$, l'air en S demeurera en équilibre: & il ne commencera à être ébranlé qu'après le tems $t = \frac{IS}{c}$. Posons donc le tems écoulé $t = \frac{ST}{c}$ & puisque, au point t pris de l'autre côté, ne répond aucune appliquée tm ou tn, dans cet instant le point S se trouvera en t de sorte que

l'espace

l'eſpace $Ss = \frac{1}{2c}(ITN - ITM) = \frac{1}{2c}. MIN$; & alors la denſité de l'air en s ſera $q = b + \frac{b}{2c}(TM - TN) = b - \frac{b}{2c}. MN$; & ſa viteſſe dirigée vers B ſera $v = \frac{1}{2}(TN - TM) = \frac{1}{2} MN$. Or, dès que le tems écoulé t devient plus grand que $\frac{SK}{c}$, l'air en s ſe trouvera rétabli dans l'état d'équilibre, où il demeurera.

23. Ayant pris le point S quaſi derriere l'agitation produite dans l'eſpace IK, conſidérons auſſi un point S' pris de l'autre côté, & l'air dans ce lieu demeurera en équilibre jusqu'à ce qu'il s'écoule un tems plus grand que $\frac{KS'}{c}$ ſeconde. Soit donc le tems écoulé $t = \frac{S't'}{c}$, & puisqu'en prenant en avant un pareil eſpace $S'T'$, les appliquées $T'M'$ & $T'N'$ y ſont nulles; l'air qui a été en S' ſe trouvera à préſent avancé en s', de ſorte que l'eſpace

$$S's' = \frac{1}{2c}(Kt'n' + Kt'm').$$

Enſuite la denſité de l'air dans ce lieu s' ſera

$$q = b + \frac{b}{2c}(t'n' + t'm')$$

& la viteſſe dirigée vers B

$$v = \frac{1}{2}(t'n' + t'm').$$

D'où l'on voit que l'agitation initiale ne ſe propage point de la même maniere en avant & en arriere, & qu'une très grande différence y peut

peut avoir lieu. Et on voit même que, ſi les deux échelles I Q K & I V K ſe réuniſſoient dans une ſeule courbe, la propagation vers A évanouïroit entierement, & l'air y reſteroit toujours en équilibre.

24. Mais, nonobſtant cette différence, la viteſſe de la propagation eſt la même vers A & vers B, & par un eſpace $= x$ l'agitation eſt toujours transmiſe dans le tems de $\frac{x}{c}$ ſecondes, d'où l'on voit que l'eſpace $c = \sqrt{\frac{2ag}{b}}$ eſt précisément celui que le ſon parcourt dans une ſeconde. C'eſt la même viteſſe que le grand Newton avoit déjà trouvée; & l'on ſait qu'elle eſt conſidérablement plus petite, que l'expérience ne la decouvre. Il y a grande apparence qu'il en faut chercher la raiſon dans les petites parcelles ſolides, qui voltigent dans l'air, à travers desquelles l'agitation eſt transmiſe dans un inſtant: ſi la dixieme partie de tout l'eſpace étoit rempli de telles parcelles, le ſon devroit ſe propager de la dixieme partie plus vite; ce qui mettroit d'accord la théorie avec l'expérience. Mais, quelle qu'en ſoit la cauſe, il eſt toujours certain que la théorie ne ſauroit être révoquée en doute pour cela, ſurtout quand on fait attention que nous ſuppoſons les agitations extrémement petites, pendant qu'on a fait les expériences ſur le bruit des canons, qui cauſe ſans doute dans l'air une agitation très violente, à laquelle on ne ſauroit plus appliquer la théorie.

25. Il paroit des formules que je viens de trouver, qu'après que toute l'agitation a été transmiſe par les points S & S', les particules d'air qui ont été au commencement dans ces lieux, n'y ſont pas rétablies nécéſſairement, mais qu'elles repoſeront enſuite en d'autres points s & s'. Ainſi, dans le cas que la figure repréſente, l'air qui étoit en S ſera transporté après l'agitation par l'eſpace $Ss = \frac{1}{2c}$ (I V K — I Q K), & de l'autre côté vers B, l'air qui

étoit

étoit en S' par l'espace $S' s' = \frac{1}{2c}$ (IVK + IQK). Il semble que ces déplacemens n'affectent en aucune façon la sensation du son; mais, si les deux échelles IVK & IQK se trouvent en partie au dessus & en partie au dessous de l'axe, puisque les aires qui tombent au dessous doivent être prises négativement, les aires entieres IVK & IQK peuvent bien évanouïr: or cela arrive ordinairement dans les agitations de quelques parties de l'air, où il y a toujours autant d'air rarefié qu'il y en a de condensé: & si quelques particules ont reçu quelque mouvement vers B, il y en a toujours d'autres qui sont d'autant poussées vers A. Par cette raison on peut se dispenser d'avoir égard à ces déplacemens actuels, & se contenter de connoitre la densité & le mouvement de chaque particule, pendant qu'elle est agitée.

26. Voyons à présent plus en détail, comment l'agitation de l'air, excitée au commencement dans l'espace IK, est transmise Fig. 4. par le tuyau tant en avant qu'en arriere. Les deux échelles étant donc celle des densités IQK, & celle des vitesses IVK: Soit proposé le tems de t secondes, après lequel il faut déterminer l'agitation qui se trouvera dans le tuyau: pour cet effet on n'a qu'à prendre des deux côtés les espaces $Ii = Kk = ct$ & $Ii' = Kk' = ct$, & l'agitation initiale se trouvera à présent partagée par les deux intervalles ik & $i'k'$; en sorte que, prenant $io =$ IO & $i'o' =$ IO, la densité en o sera $q = b + \frac{b}{2c}$ (OQ — OV), & la vitesse $= \frac{1}{2}$ (OV — OQ); & de l'autre côté en o' la densité $q = b + \frac{b}{2c}$ (OQ + OV), & la vitesse $= \frac{1}{2}$ (OV + OQ). Donc, si nous construisons sur ik l'échelle des densités igk, prenant son appliquée $og = \frac{1}{2}$ (OQ — OV) $= \frac{q-b}{b} c$, elle

sera

ſera en même tems l'échelle des viteſſes dirigées vers A. De la même maniere, conſtruiſant ſur l'eſpace $i' k'$ l'échelle des denſités, en prenant $o' q' = \frac{1}{2}$ (O Q + O V), elle ſera auſſi l'échelle des viteſſes dirigées vers B. Dans tous les autres endroits du tuyau l'air ſe trouvera en équilibre, ſans excepter l'eſpace I K où la premiere agitation a été excitée.

27. C'eſt une propriété bien remarquable de toutes les agitations produites par la propagation, que les deux échelles des denſités & des viteſſes ſe réduiſent partout à la même ligne courbe: d'où nous apprenons que, plus l'air y eſt condenſé, plus il a auſſi de viteſſe en même ſens que le ſon va; & où la denſité eſt plus petite que la naturelle, là auſſi le mouvement eſt dirigé en ſens contraire. Il eſt donc évident, que les agitations produites peuvent très conſidérablement différer de l'agitation initiale; & en effet, ſi celle-ci étoit déjà telle que l'échelle des viteſſes fût égale à celle des denſités, la propagation ſe feroit dans un ſeul ſens, & l'air de l'autre côté dans le tuyau n'en feroit jamais ébranlé. Puiſque donc le ſon ſe répand presque également en tout ſens, ce qui arrive lorſque l'échelle des viteſſes dans l'agitation initiale évanouït, nous pourrons regarder cette échelle comme réunie avec l'axe I K; puiſqu'on peut toujours imaginer une telle échelle de denſités qui ſeule produiſe le même effet.

28. Dans ce cas, on auroit partout dans les agitations produites les appliquées $o q$ & $o' q'$ égales à $\frac{1}{2}$ O Q; & ce ſera toujours de la figure de l'échelle $i q k$ que dépend la nature du ſon, puiſque l'oreille n'eſt frappée que par ces agitations produites: car je ne parle pas ici du grave ou aigu des ſons, qui eſt cauſé par la fréquence de pluſieurs trémouſſemens qui ſe ſuccedent les uns aux autres, & dont la différence fait le principal objet de la Muſique. Toutes les autres qualités des ſons qui ne ſe rapportent pas à la ſucceſſions de pluſieurs vibrations, ne ſauroient dépendre que de la figure des échelles $i q k$, qui caractériſent les agitations propagées

 dans

dans l'air, & en constituent quasi l'essence. Or on comprend aisément qu'une variété infinie peut avoir lieu dans ces figures; & partant il n'y a aucun doute, que toutes les différentes qualités que nous appercevons dans les sons n'en tirent pas leur origine; quoiqu'il soit encore incertain, quelle qualité répond à chaque figure: & s'il a été jusqu'ici si difficile de découvrir la différence qui regne dans la pronciation des diverses voyelles, nous voyons à présent, que chaque voyelle doit être appropriée à une certaine figure des échelles *i q k*, d'où dépendent aussi toutes les autres variétés que l'oreille peut distinguer dans les sons.

29. Or d'abord, je remarque que plus ou moins de largeur dans la figure *i q k* ne fait que rendre le son plus ou moins fort, sans en altérer les autres qualités. Car, plus les appliquées *o q* sont grandes, plus aussi est grande leur force pour frapper l'oreille; & quoique dans le tuyau cette figure demeure la même à toutes les distances de l'agitation principale I Q K: dans l'air libre sa largeur va de plus en plus en diminuant, d'où ne résulte d'autre effet que l'affoiblissement du son, sans que ses autres qualités en soient altérées. D'où l'on peut conclure, que si toutes les appliquées *o q* de la figure *i q k* sont diminuées dans la même raison, il n'en arrive d'autre changement dans le son que l'affoiblissement. Mais, si la figure *i q k* changeoit en sorte que quelques unes de ses appliquées fussent augmentées ou diminuées dans une plus grande raison que d'autres, le son en souffriroit sans doute un changement plus essentiel: & il semble que l'expression des lettres consones, dans la voix, dépend d'une telle modification, ou dans la premiere ou dans la derniere des agitations dont chaque syllabe est composée; vu que les consones n'affectent que le commencement ou la fin de chaque syllabe.

30. Mais la longueur *i k* de chaque agitation *i q k* est invariable, non seulement dans le tuyau, mais aussi dans l'air libre, d'où l'on peut conclure qu'une qualité plus essentielle des sons en dépend, qui demeure la même, pendant que la force va en diminuant. Peut-

être

être que c'eſt dans cette longueur *i k*, qu'il faut chercher la cauſe des différentes voyelles : qui dans ce cas ne différeront entr'elles que du plus au moins. Si cela ne paroiſſoit aſſez conforme à la vérité, il faudroit recourir aux différentes figures des échelles *i q k*, où l'on trouveroit principalement à diſtinguer celles qui n'ont qu'un ventre, de celles qui en ont deux ou trois, ou pluſieurs : d'où ſans doute doit réſulter une différence très eſſentielle dans les ſons. Mais je ne donne tout cela que pour des conjectures, & il s'en faut beaucoup qu'on puiſſe eſperer ſi tôt une explication ſuffiſante de toutes les variétés qu'on obſerve dans les ſons: & il ne paroit pas encore, quel ſecours on pourroit attendre des expériences qu'on voudroit faire ſur ce ſujet.

Sur la formation de l'Echo.

31. Jusqu'ici j'ai conſidéré le tuyau comme étendu à l'infini de part & d'autre ; mais à préſent je le conſidérerai comme terminé, ou d'un côté, ou de tous les deux ; & nous verrons avec d'autant plus de ſurpriſe, que cette ſeule circonſtance eſt capable de produire l'écho, qu'on s'eſt formé jusqu'ici des idées tout à fait différentes ſur la formation de ce phénomene. D'abord donc, je ſuppoſerai terminé le tuyau d'un ſeul côté en B, pendant que de l'autre côté il demeure étendu à l'infini, partout avec la même largeur. Or il y a ici deux cas à examiner, l'un où le tuyau en B *b* eſt ouvert, & l'autre où il y eſt fermé comme dans la fig. 6. Dans l'un & l'autre cas il s'engendre un écho ſimple ; ce qui paroitra bien étrange pour le premier, où l'on ne ſauroit concevoir aucune réflexion, comme on ſe l'eſt communément imaginé ; d'où l'on comprendra auſſi pour l'autre cas, où le tuyau eſt bouché en B *b*, que ce n'eſt pas proprement à la réflexion qu'il faut attribuer la formation de l'écho.

PREMIER CAS.

32. Si donc, *premierement*, le tuyau terminé & ouvert en B *b* & qu'on y ait imprimé à l'air contenu dans l'eſpace I K une

agita-

agitation quelconque, dont l'échelle des densités soit ImK, & l'échelle des vitesses InK. Or, puisque le tuyau est ouvert en Bb, où il communique avec l'air extérieur, il est impossible que la densité en B soit différente de la naturelle, que je suppose $= b$. Donc, concevant le tuyau au delà de B vers Z prolongé à l'infini, il faut absolument que les deux échelles qu'on doit supposer sur cette continuation, soient telles que la densité en B demeure toujours la même $= b$, de quelque maniere que puisse varier la vitesse. Donc, pour un tems écoulé quelconque de t secondes, prenant du point B de part & d'autre les intervalles $BT = Bt = ct$: soient tm & tn les appliquées des deux échelles en t, & TM & TN celles en T; & puisque nous avons vu §. 20. que la densité en B est $q = b + \frac{b}{2c}(TM + tm - TN + tn)$; il faut donc qu'il soit partout $TM = - tm$ & $TN = tn$, pour qu'il devienne $q = b$; d'où l'on détermine pour toute la continuation BZ à l'infini les deux échelles des densités & des vitesses, quoique cette continuation n'existe que dans l'imagination.

33. De là il est clair que, sur la continuation B Z, les deux échelles se réunissent avec l'axe, à l'exception du seul espace $ik = IK$, & également éloigné de B, que celui où la premiere agitation a été excitée, où l'échelle des densités iMk est égale à la principale Imk, mais dans une situation renversée, pendant que celle des vitesses iNk, se trouve située en même sens que la principale InK; d'où l'on voit que la densité en B doit demeurer toujours la même en vertu de la construction donnée ci-dessus. Maintenant, ayant trouvé la juste continuation des deux échelles au delà de B à l'infini, la même construction nous découvrira tous les phénomenes dont l'agitation initiale excitée en I K sera suivie dans le tuyau. Car, pour les agitations qui en sont communiquées à l'air libre par l'ouverture Bb, notre calcul ne s'y étend point. Ainsi, il faut bien se garder de s'imaginer que l'agitation ik existe réellement hors du tuyau; & il ne

ne la faut regarder que comme un moyen propre à nous découvrir les agitations de l'air dans le tuyau, causées par l'agitation initiale IK. Cependant il est certain que, dès que cette agitation parvient au bout Bb, elle est ensuite propagée par l'air libre; mais cette propagation n'est plus soumise à notre calcul.

34. Puisque la densité de l'air dans l'ouverture Bb ne sauroit recevoir aucun changement, voyons quelle en sera la vitesse à chaque moment. Or, après le tems de t seconde, prenant les intervalles BT $=$ Bt $= ct$, à cause de l'appliquée TM negative, nous aurons par le §. 20. la vitesse de l'air en Bb vers Z.

$$v = \tfrac{1}{2}(TN + tn + TM + tm) = tm + tn:$$

donc, avant le tems $= \frac{BK}{c}$, l'air en Bb sera en repos; ensuite il recevra ce mouvement, dont la vitesse est égale à la somme des deux appliquées tm & tn, tant qu'elles sont toutes les deux positives, mais ce mouvement ne durera que pendant un tems $= \frac{IK}{c}$ secondes, après lequel l'équilibre sera parfaitement rétabli en Bb. Ici je remarque que, quoique l'agitation en Bb soit tout à fait différente de la principale IK, les agitations qui en sont produites dans l'air libre sont pourtant de la même nature que celles dans le tuyau; car on voit par ce qui est expliqué ci-dessus, que de très différentes agitations initiales peuvent résulter les mêmes agitations propagées, pourvu que les deux échelles ayent un certain rapport entr'elles: or on s'assurera aisément que ce rapport se trouve précisément dans l'agitation de l'ouverture Bb.

35. Voyons à présent ce qui doit arriver dans un autre lieu quelconque A du tuyau; & il est d'abord clair qu'après le tems $= \frac{AI}{c}$ seconde, l'agitation y commencera, & durera pendant le

tems $= \frac{IK}{c}$ seconde, de sorte qu'après le tems $\frac{At}{c}$ seconde la densité y sera $q = b + \frac{b}{2c}(tm - tn)$, & la vitesse $v = \frac{1}{2}(tn - tm)$ dirigée vers B; alors une oreille placée en A entendra le son, qui aura été produit en IK. Après cela, l'air en A demeurera tranquille, mais cette tranquillité ne dure que pendant le tems $\frac{Kk}{c} = \frac{2BK}{c}$, au bout duquel une nouvelle agitation y sera excitée, provenant de l'agitation imaginaire ik; de sorte qu'au tems $= \frac{AT}{c}$ seconde depuis le commencement, la densité y sera

$$q = b + \frac{b}{2c}(-TM - TN) = b - \frac{b}{2c}(tm + tn),$$

& la vitesse $v = \frac{1}{2}(TN + TM) = \frac{1}{2}(tm + tn)$. Cette nouvelle agitation différera de la premiere, puisque l'une est déterminée par la somme des deux appliquées tm & tn, pendant que l'autre l'est par leur différence. Si dans l'agitation initiale IK il étoit par tout $tn = tm$, la premiere agitation en A évanouïroit entierement, mais l'autre deviendroit d'autant plus forte; & s'il arrivoit le contraire, qu'il fût $tn = -tm$, la seconde évanouïroit.

36. De là il est clair que le même son excité en IK sera entendu deux fois en A, & partout ailleurs dans le tuyau AB, hormis près de l'embouchûre Bb: & que, si le lieu A est pris derriere l'espace IK, la répétition du son suit après le tems $= \frac{2BK}{c}$, où il faut remarquer que c designe l'espace que le son parcourt dans une seconde, qui est de 1040 pieds de Paris environ. Voilà donc un cas bien remarquable d'un *écho* simple, dont l'origine suit très naturellement des principes de la Mécanique, quoiqu'aucune réflexion n'y puisse avoir lieu. Un tel écho se formera donc dans un tuyau

tuyau ouvert d'un côté, & continué de l'autre à l'infini; & quoique dans ce calcul la largeur du tuyau ait été ſuppoſée très petite, le même phénomene doit auſſi arriver dans de tuyaux très larges, comme par exemple dans des galeries voûtées: où plus un homme s'y trouvera éloigné du bout Bb, & plus entendra-t-il tard la répétition de ſa propre voix: comme, s'il en étoit éloigné de 520 pieds, l'écho viendroit préciſément après une ſeconde.

SECOND CAS.

37. Le même phénomene aura également lieu, quand le tuyau eſt fermé en Bb, en le ſuppoſant encore infini vers l'autre côté. Pour appliquer nos formules à ce cas, il faut conſidérer que l'air en Bb ne ſauroit avoir aucun mouvement. Donc la continuation des deux échelles vers Z doit être telle, que notre conſtruction donne toujours pour le lieu B la viteſſe $v = 0$; quelle qu'y puiſſe être la denſité. Pour cet effet, prenons du point B de part & d'autre les intervalles égaux $BT = Bt$, & puiſque les appliquées tm & tn ſont connues au point t, ſoyent TM & TN celles au point T, d'où en vertu du §. 20. la viteſſe en B réſulte $v = \frac{1}{2}(TN + tn - TM + tm)$, qui devant toujours être $= 0$, il faut qu'il ſoit $TN = - tn$, & $TM = tm$. L'agitation initiale en IK étant donc repréſentée par l'échelle des denſités ImK, & celle des viteſſes InK, on n'a qu'à prendre les intervalles $Bi = BI$, & $Bk = BK$: & y décrire l'échelle des denſités iMk égale à ImK, & celle des viteſſes iNk égale, mais contraire à InK. Partout ailleurs les deux échelles ſont réunies avec l'axe. Fig. 6.

38. En Bb la viteſſe demeurant toujours $= 0$, la denſité après le tems $= t$, en prenant $BT = Bt = ct$, à cauſe de l'appliquée TN négative, y ſera $q = b + \frac{b}{2c}(TM + tm + TN + tn) = b + \frac{b}{c}(tm + tn)$. Mais, pour tout autre endroit A dans le

tuyau,

tuyau, derriere l'agitation initiale IK, après que le ſon en ſera entendu en A, l'écho y parviendra après le tems $= \frac{Kk}{c} = \frac{2BK}{c}$. Cet intervalle de tems ſera d'autant plus grand, plus l'agitation initiale IK ſe trouvera reculée du bout Bb, d'où l'on voit que les phénomenes de l'écho ſeront les mêmes, ſoit que le bout Bb ſoit fermé ou ouvert; la ſeule différence conſiſtera dans la nature de l'agitation, qui n'affecte point l'intervalle du tems écoulé entre le ſon principal & ſa répétition. Ici on pourroit bien dire, que l'écho provient de la réflexion du fond Bb; mais, puisque le même écho ſe forme, lorsque le tuyau eſt ouvert en Bb, on voit bien que l'idée de la réflexion ne fournit point la juſte explication de ce phénomene, mais que cette explication demande des recherches beaucoup plus profondes.

TROISIEME CAS.

Fig. 7. 39. Conſidérons maintenant un tuyau terminé des deux côtés en A & B, & puisque nous avons déjà vu, que les phénomenes ſont à peu près les mêmes, ſoit que les bouts ſoyent fermés ou ouverts, je ſuppoſerai le tuyau AB ouvert des deux côtés. Enſuite, pour ne pas trop embrouiller les idées, je conçois l'agitation initiale comme faite dans un ſeul point t, la denſité y étant $= b + \frac{b}{c} . tm$, & la viteſſe $= tn$, & que partout ailleurs ſur AB les deux appliquées évanouiſſent. Qu'on prolonge la droite AB de part & d'autre à l'infini, & qu'on prenne les intervalles AB', BA'; $A'B''$, $B'A''$ &c. égaux à la longueur du tuyau AB: & puisque le tuyau eſt ouvert en B à la diſtance $BT = Bt$, il faut établir les appliquées TM & TN; & à cauſe de l'ouverture Aa par la même raiſon, il faut établir en t', prenant $At' = At$, les appliquées $t'm'$ & $t'n'$; enſuite auſſi, à la diſtance $At'' = AT$, les appliquées $t''m''$ & $t''n''$. Selon la même loi, en prenant $BT' = Bt'$, il y faut mettre les appliquées $T'M'$ & $T'N'$, & ainſi de ſuite; d'où l'on voit, com-

comment on doit établir dans tous les intervalles AB', BA', $A'B''$, &c. les deux appliquées, celles des viteſſes étant toutes dirigées en haut, & celles des denſités alternativement en haut & en bas.

40. Soit à préſent une oreille en A, & après le tems $= \frac{At}{c}$ elle recevra la premiere impreſſion, cauſée par les deux agitations tmn & $t'm'n'$ conjointement; c'eſt le ſon principal, qu'elle entendra alors. Enſuite après le tems $\frac{tT}{c} = \frac{t't''}{c} = \frac{2Bt}{c}$ elle entendra le premier écho, qui ſera ſuivie du ſecond après le tems $= \frac{2At}{c}$; depuis du troiſieme après le tems $= \frac{2Bt}{c}$, enſuite du quatrieme après le tems $= \frac{2At}{c}$, & ainſi de ſuite. Le ſon principal ſera donc répété une infinité de fois, les intervalles de chaque écho au ſuivant étant alternativement de $\frac{2Bt}{c}$ & $\frac{2At}{c}$ ſecondes. Si le bruit étoit excité au lieu A même, la multitude des échos ſe réduiroit à la moitié, & les intervalles de tems entr'eux ſeroient tous égaux & $= \frac{2AB}{c}$ ſecondes; de ſorte que, ſi la longueur du tuyau AB étoit de 520 pieds, tous ces échos ſe ſuivroient toutes les ſecondes.

41. Que le premier ſon s'excite en t, & que l'oreille ſoit placée au même endroit; dans ce cas le premier écho ſuivra le ſon principal après le tems $\frac{tt'}{c} = \frac{2At}{c}$, le ſecond après le tems $\frac{tT}{c} = \frac{2Bt}{c}$, le troiſieme après le tems $\frac{tT'}{c} = \frac{tt''}{c} = \frac{2AB}{c}$, qui étant produit par les deux agitations $T'M'N'$ & $t''m''n''$ égales & ſemblables à la principale, ſera plus fort & plus diſtinct. Or celui-

ci ſera ſuivi en même ordre de nouveaux après le tems $\frac{2\,At}{c}$, $\frac{2\,Bt}{c}$ & $\frac{2\,AB}{c}$, & ainſi de ſuite. D'où l'on voit que, ſi le point t étoit pris au milieu du tuyau AB, tous les échos ſe ſuccéderoient à intervalles égaux, chacun étant $= \frac{AB}{c}$ ſecondes. Si l'oreille ſe trouvoit dans un autre endroit S, le nombre des échos feroit encore plus multiplié, & cela par des intervalles de tems plus inégaux entr'eux: pour en juger mieux, on n'a qu'à s'imaginer qu'en tous les endroits t, T, t', T$'$, t'', T$''$ &c. le même cri ſoit produit au même inſtant, & voir à quel inſtant chacun d'eux parvient au lieu propoſé S dans le tuyau, ſelon la loi de la propagation.

42. Si la longueur du tuyau eſt au deſſous de 100 pieds, de ſorte que les intervalles de tems entre les échos conſtructifs ne ſauroient être diſtingués, tous les échos ſe réduiront à une réſonnance confuſe; d'où l'on comprend clairement ce que c'eſt qu'une réſonance. Mais, ſi le tuyau eſt beaucoup plus long que 100 pieds, & que les intervalles de tems entre les échos ſucceſſifs deviennent aſſez ſenſibles: alors on entendra pluſieurs échos de ſuite, dont le nombre devroit même être infini, ſi par des cauſes phyſiques les répétitions ne devenoient de plus en plus foibles. Or ce que je viens d'expoſer, pourra ſelon toute apparence être appliqué à des galeries fort longues & bien fermées de tous côtés, quoiqu'à la rigueur ces recherches ne s'étendent qu'à des tuyaux fort étroits: cependant il n'y a preſque point de doute qu'on y obſervera une telle multiplicité d'echos. On trouve même quelques obſervations dans les Oeuvres de Kircher, qui ſemblent très bien confirmer cette production des échos.

43. Mais on comprend aiſément, que tout ce que je viens de développer, ne regarde qu'un cas très particulier, & qu'on ſe tromperoit bien groſſierement, ſi l'on vouloit aſſigner à tous les échos

Fig. 1.

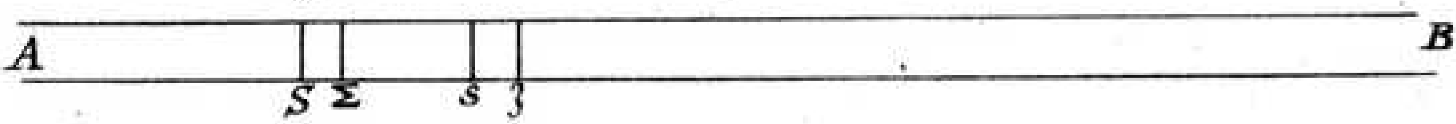


Fig. 2.

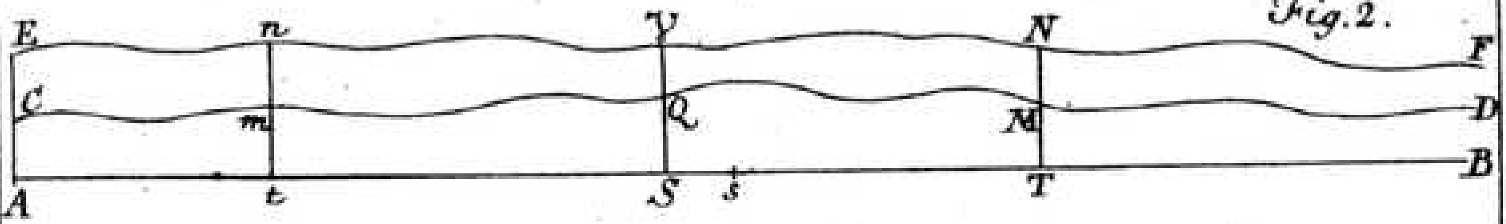


Fig. 3.

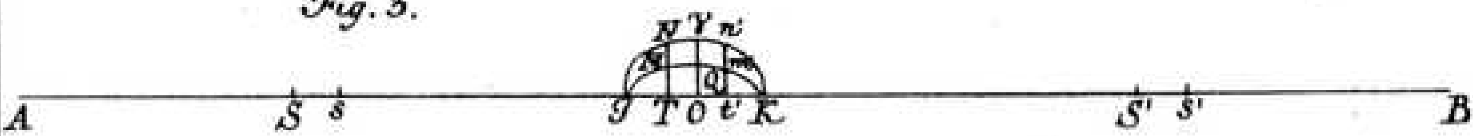
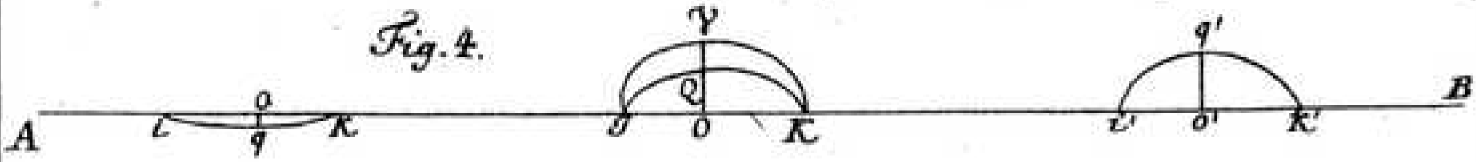


Fig. 4.



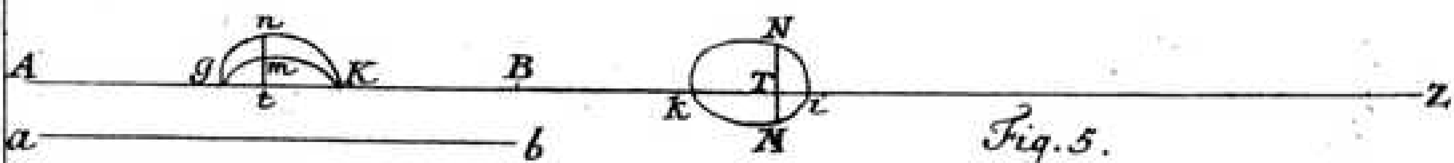


Fig. 5.

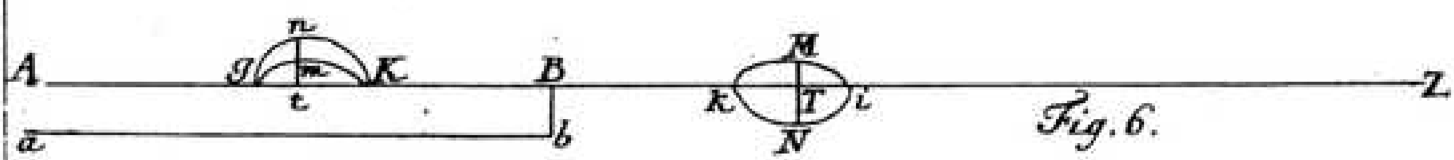


Fig. 6.

Fig. 7.

Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765. Pl. VIII. pag. 363.

échos cette même origine. Je n'ai confidéré que des tuyaux également larges par toute leur étendue ; ce qui eſt ſans doute un cas très particulier, auquel les bornes de l'Analyſe m'ont attaché, vu qu'il eſt encore impoſſible de définir le mouvement de l'air dans les tuyaux, dont la largeur varie d'une maniere quelconque. Cependant on avouera que ce cas, quelque particulier qu'il ſoit, nous a fourni des éclairciſſemens très importans tant ſur la génération & propagation du ſon, que ſur la formation des *échos*: d'où nous pourrons puiſer des idées beaucoup plus juſtes qu'on n'en a eu juſqu'ici. Mais, comme cette recherche eſt fondée ſur une branche tout à fait nouvelle de l'Analyſe, elle doit principalement exciter tous les Géometres à la cultiver ; puiſque c'eſt de là qu'on peut attendre les plus importantes découvertes, qui ſont entierement inacceſſibles à l'Analyſe ordinaire, & parmi leſquelles il faut ſurtout compter celles où le mouvement de l'air entre en conſidération.

44. Donc, ſi nous poſſédons encore à peine les premiers principes pour connoitre le mouvement de l'air, & ſi tout ce que nous en ſavons ſe réduit à certaines eſpeces de tuyaux ; combien ſommes-nous encore éloignés de déterminer toutes les modifications que le ſon reçoit dans des cavités quelconques ? La cavité de la bouche humaine nous en fournit un exemple frappant, dont nous ne connoiſſons que fort en gros l'effet dans la formation de la voix : ne ſachant presque rien de la maniere dont les articulations & autres modifications ſont opérées. Mais il n'y a aucun doute que, s'il nous étoit poſſible de pénétrer dans ces myſteres, nous découvririons auſſi dans la figure de la bouche un vrai chef-d'oeuvre de la ſouveraine ſageſſe, qui ſurpaſſe infiniment tout ce que le plus ſublime Géometre eſt capable d'imaginer. C'eſt ainſi que partout le Créateur a mis l'empreinte de ſon infinie ſageſſe, même dans les choſes qui en paroiſſent le moins ſuſceptibles.