



1767

Sur le mouvement d'un corde, que au commencement n'a ete ebranlee que dans un partie

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Sur le mouvement d'un corde, que au commencement n'a ete ebranlee que dans un partie" (1767). *Euler Archive - All Works*. 339.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/339>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



S U R

LE MOUVEMENT D'UNE CÔRDE

QUI AU COMMENCEMENT N'A ÉTÉ ÉBRANLÉE

QUE DANS UNE PARTIE,

P A R M. E U L E R.

I.

Je crois que l'évolution de ce cas, où la corde n'a été d'abord ébranlée que dans une de ses parties, sera très propre à dissiper tous les doutes, que Mrs. Bernoulli & d'Alembert ont suscités contre ma Théorie des cordes vibrantes, & ceux que M. de la Grange a le premier proposés dans les Actes de la nouvelle Académie de Turin. Car l'un & l'autre de ces illustres Adversaires est obligé de reconnoître que ce cas n'est pas renfermé dans leurs solutions du probleme des cordes vibrantes: & partant, si ma méthode en fournit une solution, & même une telle, qui est confirmée par l'expérience, il n'y aura plus aucun doute que cette méthode ne soit fondée dans la vérité, & beaucoup plus générale que celle d'où les Adversaires ont tiré leur solution du probleme des cordes vibrantes.

2. Or, pour écarter tous les doutes sur la généralité de ma méthode, il faut remarquer qu'on convient de part & d'autre, que ce probleme ne sauroit être résolu, que dans les cas où les éloignemens de la corde de sa situation naturelle sont quasi infiniment petits, & outre cela encore l'inclinaison de chacun de ses élémens infiniment petite. Cette condition est absolument nécessaire, puisqu'on est obligé de supposer dans la solution, que chaque point M de la corde AMB se meut toujours sur l'appliquée MP perpendiculaire à la situation naturelle APB; ce qui ne sauroit arriver, à moins que toutes

Planche V.
Fig. 1.

Qq 2

ces



ces appliquées PM ne soient infiniment petites, & que les tangentes aux points M ne soient infiniment peu inclinées à la droite APB , afin que l'élément de la courbe Mm puisse partout être regardé comme égal à l'élément correspondant de l'abscisse Pp .

Fig 2.

3. Pour se former une juste idée de telles courbes, propres à représenter la figure d'une corde pendant son mouvement de vibration, on n'a qu'à construire sur la ligne AB une courbe quelconque AMB , qui n'ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe AB ; alors, une telle courbe étant décrite, qu'on diminue toutes les appliquées $P\mathcal{M}$ en raison d'un nombre infini i à l'unité, de sorte que $P\mathcal{M} : PM = i : 1$, & par ce moyen on obtiendra la courbe AMB , que la corde AB pourra recevoir dans son mouvement: puisque non seulement chaque appliquée de la courbe AMB mais aussi l'inclinaison de chaque élément Mm à l'axe AB , devient infiniment petite. Au reste, on comprend aisément que le mot d'infini ne doit pas ici être pris à la rigueur, & qu'il suffit que le nombre i soit très grand. De cette manière, toute courbe décrite sur l'axe AB , pourvu qu'elle n'ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe, fournit une courbe propre à représenter la figure de la corde AB pendant son mouvement de vibration.

4. Ici se présente d'abord cette question: si toutes ces courbes sont également propres à représenter la figure d'une corde pendant son mouvement? ou s'il y a encore quelque autre condition qu'il est nécessaire d'y ajouter? M. d'Alembert soutient qu'aucune autre figure ne sauroit convenir aux cordes vibrantes, que celles qui sont contenues dans cette équation:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{a} + B \sin \frac{2\pi x}{a} + C \sin \frac{3\pi x}{a} + D \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

où a marque la longueur de la corde AB , x une abscisse quelconque AP , y l'appliquée PM , $\pi : 1$ le rapport de la périmétrie ou diamètre, & les lettres A, B, C, D &c. des coefficients infiniment

petits.



petits. Donc, s'il arrivoit qu'on eût imprimé à la corde au commencement une figure qui ne seroit pas contenue dans cette équation, il seroit aussi impossible d'en déterminer le mouvement par le calcul.

5. M. d'Alembert convient donc, qu'on pourroit donner aux cordes une infinité de figures initiales, qui ne seroient pas comprises dans cette équation; mais, dans ces cas, il nie que la Théorie soit suffisante pour déterminer le mouvement dont les cordes seront agitées après avoir été relâchées. La raison qu'il en donne est, que dans ces cas il se trouveroit quelque élément où l'équation différentielle du second degré, tirée de la Théorie, ne sauroit plus avoir lieu, vu qu'il y auroit quelque particule qui n'évanouiroit plus par rapport aux autres quantités, comme on le suppose dans la Théorie; de sorte que dans cet élément on commettrait une erreur. Mais je réponds qu'une telle erreur commise dans un ou quelques élémens est toujours infiniment petite, & ne sauroit troubler le résultat total du calcul. En effet, quand on calcule le mouvement de quelque corps, on suppose partout l'accélération infiniment petite par rapport à la vitesse actuelle du corps: & quoique cette supposition soit fautive dans les premiers élémens où le mouvement est engendré, le calcul ne laisse point d'être très juste.

6. Le même inconvénient se rencontre presque dans toutes les applications du calcul intégral: quand il s'agit de trouver l'aire APM par la formule $\int y dx$, on y suppose que le vrai élément de cette aire étant le trapeze $PMmp$, le triangle Mmn est infiniment petit par rapport au rectangle $PMnp = y dx$: ce qui cependant n'est pas vrai dans le premier élément en A , à moins que la tangente en A ne convienne avec l'axe. Voudroit-on pour cela soutenir, que la formule intégrale $\int y dx$ ne sauroit être appliquée à des courbes, dont la tangente au commencement A ne convient point avec l'axe même? Or il me semble qu'il en est de même des scrupules que M. d'Alembert élève contre ma solution du probleme des cordes vibrantes: vu que toutes les difficultés ne tombent que sur les deux derniers

Fig. 1.



éléments de la corde: je ne nie pas, qu'en y appliquant le calcul, on ne commette quelque erreur; mais je soutiens que dans la totalité cette erreur devient infiniment petite & tout à fait nulle.

7. La solution de M. Bernoulli revient aussi entièrement à l'équation rapportée ci dessus (§. 4.), & il soutient que quelque compliqué que soit le mouvement d'une corde, on le peut toujours envisager comme un assemblage de plusieurs oscillations régulières, qui se trouvent tant dans la corde entière que dans ses parties aliquotes, indépendamment les unes des autres. C'est de ce grand principe, qu'il a expliqué fort heureusement le phénomène bien singulier, que la même corde peut rendre à la fois plusieurs sons différens, qui sont entr'eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c. De ce principe il s'ensuit, que quel que soit le mouvement d'une corde, à chaque instant sa figure doit être exprimée par ladite équation

$$y = A \sin \frac{\pi x}{a} + B \sin \frac{2 \pi x}{a} + C \sin \frac{3 \pi x}{a} + D \sin \frac{4 \pi x}{a} \text{ \&c.}$$

& partant, puisqu'au commencement on peut avoir donné à la corde une figure quelconque, & que les figures qu'elle prend dans la suite à chaque instant, en dépendent nécessairement; il soutient que toutes les figures possibles sont comprises dans cette même équation, & qu'il est même superflu de vouloir recourir à d'autres principes pour déterminer le mouvement d'une corde, en regardant comme donnée la figure qui lui a été imprimée au commencement.

8. En effet, puisque cette équation contient une infinité de coefficients A, B, C, D &c. dont chacun peut être déterminé à volonté, on les peut toujours déterminer en sorte que la courbe passe par une infinité de points donnés: d'où il semble qu'on ne sauroit décrire une ligne courbe, à laquelle cette équation ne puisse être appliquée. Mais, quand même j'accorderois à M. Bernoulli cette possibilité, il est bien clair que l'exécution seroit encore assujettie à des difficultés insurmontables. Car, ayant donné d'abord à la corde une certaine

taine

taine figure, il faudroit commencer par déterminer tous lesdits coefficients en sorte que l'équation réponde à une infinité de points de la figure donnée; ce qui seroit sans contredit un ouvrage dont le plus habile calculateur ne viendroit jamais à bout. Cependant, avant que d'avoir achevé cet ouvrage, il sera impossible de déterminer le mouvement de la corde: qui demeurera par conséquent toujours inconnu même au plus grand Géometre.

9. Je ne crois donc faire aucun tort au mérite de la solution de M. Bernoulli, quand je dis, qu'elle n'est pas suffisante pour déterminer le mouvement des cordes vibrantes en général, c'est à dire, après qu'on leur a imprimé une figure quelconque, & à cet égard il me semble qu'on doit accorder une grande préférence à ma methode & à celle de M. de la Grange. Puisque, quelle que soit la figure qu'on aura imprimée à la corde au commencement, quand même aussi elle ne seroit expressible par aucune équation, je suis toujours en état de déterminer son mouvement par une construction très simple & applicable à tous les cas possibles, sans qu'aucune circonstance en puisse arrêter le succès. Or cette même construction fournit aussi, pour les cas qui sont compris dans l'équation de M. Bernoulli, précisément les mêmes solutions que ce grand Géometre a données, & partant je ne vois aucune raison, pourquoi cette construction lui puisse paroître superflue, ou même suspecte.

10. Mais il me sera encore permis de douter, que toutes les figures possibles dont les cordes sont susceptibles, soient contenues dans l'équation rapportée, quoique le nombre de ses termes puisse être augmenté à l'infini. Entre plusieurs raisons que je pourrois alléguer pour justifier mes doutes, le cas que j'ai ici en vue, me semble fournir une preuve très convaincante. Car, supposant qu'on n'ait détourné au commencement qu'une partie de la corde AC de son état naturel, & qu'on lui ait donné la figure AMC, pendant que le reste CB est demeuré dans son état naturel & rectiligne, de sorte que la figure initiale ait été composée de la ligne

Fig. 3.

courbe



courbe AMC & de la droite CB, ce qui est facile d'exécuter : alors il sera sans doute très difficile, pour ne pas encore dire impossible, de déterminer les coefficients de l'équation de M. Bernoulli, en sorte qu'elle exprime cette figure mixte d'une ligne courbe quelconque AMC & d'une droite CB. Il semble aussi par la dernière lettre de M. Bernoulli lui-même, qu'il regarde ce cas, comme non compris dans sa solution, sans parler des difficultés que la détermination des coefficients renfermeroit.

11. Mais il y a plus : le mouvement de cette corde ne sauroit en aucune manière être envisagé comme un assemblage ou mélange de plusieurs oscillations simples & régulières ; en quoi consiste l'essence de la solution de M. Bernoulli. Car, au premier instant après le relâchement de la corde, la seule partie AMC sera mise en mouvement, tandis que le reste CB demeure encore absolument immobile, & sans aucune mouvement d'oscillation, pour lequel on puisse assigner la longueur du pendule isochrone. Il est vrai que, bientôt après, le mouvement sera aussi successivement communiqué à la partie CB, mais alors d'autres parties seront réduites en repos, & il n'y sauroit plus être question des pendules simples isochrones aux mouvemens de toutes les parties de la corde. Le mouvement de la corde sera d'une nature tout à fait différente, qui ne sauroit être représentée comme un mélange de plusieurs oscillations simples & régulières, conformément au principe de M. Bernoulli.

12. Voilà donc un cas bien incontestable, auquel la solution de M. Bernoulli est absolument inapplicable ; & puisque ce cas a lieu toutes les fois que la corde n'a pas été ébranlée par toute sa longueur, il y faut reconnoître une infinité de cas non compris dans la solution de M. Bernoulli. Delà on sera aussi obligé de m'accorder que, quand même la corde aura été ébranlée par toute son étendue, il y aura encore une infinité de cas qu'il faut également exclure de cette solution, leur mouvement se réglant sur des principes



cipes entierement différens. Par conséquent, quelque ingénieuse que soit la solution de M. Bernoulli, on ne la sauroit regarder que comme une solution très particulière, qui ne s'étend qu'à de certaines especes de vibrations, qu'on peut nommer régulières, pendant qu'une infinité d'autres especes irrégulières en sont absolument exclues.

13. Cependant la construction générale que j'ai donnée autrefois pour le mouvement des cordes vibrantes, s'étend également à toutes ces especes tant irrégulières que régulières; & pour le tems présent où l'on continue de combattre ma construction en la regardant, ou comme fautive, ou superflue, je crois qu'il sera fort intéressant, que j'en tire ici en détail la détermination du mouvement d'une corde qui n'a été ébranlée au commencement que dans une de ses parties. J'ai tout lieu d'espérer, que M. Bernoulli en reconnoitra la justesse, sur tout quand il verra le bel accord avec l'expérience; mais M. d'Alembert dira, sans doute, qu'il réfutera ma solution dans quelcun de ses ouvrages qu'il publiera dans la suite, & il se contentera pour le présent d'en avertir le public. Or, quoi qu'il en soit, je soumets ma solution entierement au jugement du Public dans la confiance qu'elle sera approuvée au moins d'une partie, même avant que la réfutation paroisse.

14. Je commencerai donc par mettre devant les yeux ma construction du probleme des cordes vibrantes. Soit AB la corde dans sa situation naturelle, la longueur $AB = a$, son poids $= M$, & la force dont elle est tendue $= F$, en supposant la corde également épaisse par toute sa longueur. Qu'à cette corde on ait donné au commencement une figure quelconque AMB , dont, comme j'ai déjà remarqué, toutes les appliquées PM doivent être regardées comme infiniment petites. Cela posé, on demande, après qu'on aura subitement relâché la corde, quel sera son mouvement dans la suite? Il est évident que, pour résoudre cette question, il faut être en état d'assigner la figure de la corde pour chaque instant suivant. Or, posant que depuis le commencement il s'est écoulé un tems de t

Fig. 4.

secondes, & que z marque la hauteur d'où les corps graves tombent dans une seconde ; si y marque l'appliquée qui répondra alors à l'abscisse $\Delta P = x$, la Théorie que personne ne révoque en doute, fournit pour la valeur de y cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2Faz}{M} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, dont l'intégrale complete est sans contredit

$$y = \Gamma: \left(x + t\sqrt{\frac{2Faz}{M}}\right) + \Delta: \left(x - t\sqrt{\frac{2Faz}{M}}\right)$$

où les caractères Γ & Δ indiquent des fonctions quelconques.

15. Pour construire cette équation, je prolonge la droite AB de part & d'autre, j'y prends les parties Ab & $Ba = AB$, & je décris sur elles $AV'V''V'''b$ & $Bv''v'''a$, égales à la figure initiale de la corde AMB , mais dans une situation renversée, comme on peut le voir aisément en regardant la figure : d'où il est clair que ces courbes continuées auront en A & B leurs tangentes communes avec la courbe donnée. Dans la première construction, j'ai continué ces mêmes courbes de part & d'autre à l'infini, mais on verra bientôt, qu'il suffit de la décrire une fois de chaque côté. Or ces courbes nous serviront à déterminer la figure que la corde prendra à un tems quelconque écoulé depuis le commencement.

Pour cet effet, j'ajoute à la figure la ligne droite $EF = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, qui servira de mesure du tems d'une seconde, & dont la longueur sera aisément déterminée par la formule $\sqrt{\frac{2Faz}{M}}$: ce qui nous met en état de représenter par une ligne droite chaque tems pour lequel on voudra connoître la figure de la corde.

16. Maintenant, si l'on veut savoir de chaque point de la corde P , à quelle distance il se trouvera de son lieu naturel sur l'appliquée PM , après un tems quelconque donné de t secondes, qu'on
prenne



prenne sur l'axe de part & d'autre, du point P, les intervalles P T & P t égaux à ce tems, ou bien à EF. t , & après y avoir tiré les appliquées TV & $t v$, l'appliquée cherchée pour le point P, que j'ai nommée $= y$, sera toujours $= \frac{1}{2} TV + \frac{1}{2} t v$. Si le tems proposé t est plus grand, l'une ou toutes les deux appliquées doivent être prises dans les continuations où l'on doit tenir compte, si ces appliquées tombent en sens contraire: ainsi, après le tems P T' $=$ P t' on aura $y = -\frac{1}{2} T' V' + \frac{1}{2} t' v'$, & après le tems P T'' $=$ P t'', on aura $y = -\frac{1}{2} T'' V'' - \frac{1}{2} t'' v''$, & ainsi de suite. De là on connoitra aussi aisément le mouvement de chaque point de la corde P pour un tems proposé quelconque, puisqu'on trouve par cette construction, de combien change son lieu d'un instant à l'autre. Ainsi rien n'est plus aisé que de déterminer le mouvement tout entier de la corde, quelle qu'ait été la figure initiale AMB.

17. Pour prouver la vérité de cette construction, je n'ai qu'à en montrer le parfait accord avec l'équation fournie par la théorie, & avec les conditions que la nature de la question renferme. Or d'abord, il est évident que cette construction donne pour le premier instant la même figure AMB qu'on suppose avoir été imprimée à la corde; & on en voit aussi que tous les points de cette courbe ne changent point de place au premier instant, ou bien que le mouvement commence du repos, comme on le suppose dans le problème. Ensuite, l'une & l'autre extrémité de la corde A & B demeurera constamment en repos; car, en prenant de A ou de B sur l'axe de part & d'autre des abscisses égales, les appliquées y sont aussi toujours égales & l'une négative de l'autre, de sorte que leur somme est constamment $= 0$; c'est aussi la raison, pourquoi la courbe AMB a été continuée de part & d'autre de la manière qui a été expliquée ci-dessus; & puisque les deux points A & B demeurent toujours nécessairement en repos, il est impossible de supposer à la courbe AMB d'autres continuations que celles que je viens d'établir.



18. Maintenant rien n'empêche qu'on n'envisage la courbe AMB avec toutes ses continuations que je viens de lui donner, comme une seule courbe où il n'importe si la ligne AMB est une courbe régulière renfermée dans quelque équation, ou si c'est une courbe irrégulière décrite à la main, la régularité n'entrant ici pour rien en compte. Et partant, prenant une abscisse quelconque AT , l'appliquée TV qui lui répond pourra être regardée comme une fonction de AT , & indiquée en sorte $TV = \Delta : AT$. Cela remarqué, soit pour abrégér la ligne $EF = \sqrt{\frac{2Fag}{M}} = c$, & nommant l'appliquée $= y$, qui répond à l'abscisse $AP = x$, après le tems $= t$ secondes, on prend dans la construction les intervalles $PT = Pt = ct$, d'où l'on a les abscisses $AT = x - ct$ & $At = x + ct$; & partant les appliquées $TV = \Delta : (x - ct)$ & $tv = \Delta : (x + ct)$: de sorte que notre construction donne $y = \frac{1}{2} \Delta : (x - ct) + \frac{1}{2} \Delta : (x + ct)$: ce qui convient parfaitement avec l'équation principale $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$; puisqu'on a

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{c}{2} \Delta' : (x - ct) + \frac{c}{2} \Delta' : (x + ct); \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} \Delta' : (x - ct) + \frac{1}{2} \Delta' : (x + ct)$$

&

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{cc}{2} \Delta'' : (x - ct) + \frac{cc}{2} \Delta'' : (x + ct) \quad \& \quad \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{2} \Delta'' : (x - ct) + \frac{1}{2} \Delta'' : (x + ct)$$

ce qui suffit pour prouver la justesse de ma construction.

19. Mais, pour puiser de cette construction une connoissance parfaite de tout le mouvement de la corde, il suffit de pousser les opérations exposées jusqu'au tems exprimé par la longueur de la corde AB , puisque alors la corde sera réduite à une figure $AnmB$ semblable à celle qu'elle avoit au commencement, mais dans une situa-

situation renversée; de sorte qu'après ce tems le mouvement redevient semblable à celui du commencement. Pour prouver cela, prenons du point P les intervalles $PT = Pt = AB$: & après le tems de $\frac{AB}{EF}$ secondes, le point P se trouvera en n, en sorte que $Pn = \frac{1}{2}(TV + tv)$. Or, prenant $BQ = AP$, à cause de $AT = AQ$ & $Bt = BQ$, on aura en vertu de la construction $TV = QN$ & $tv = QN$; & partant $Pn = QN$; d'où l'on voit que la courbe $AnmB$ est semblable à $BNMA$. Par conséquent, quelle qu'ait été la figure initiale de la corde, il est certain qu'après le tems $\frac{AB}{EF} = \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$, les mêmes phénomènes du mouvement reviennent, & qu'il suffit toujours de connoître le mouvement pour un tel intervalle de tems, à quoi les deux continuations Ab & Ba de la courbe initiale sont suffisantes.

Solution du probleme proposé.

20. Soit comme auparavant la longueur de la corde $AB = a$, son poids $= M$, la force de sa tension $= F$, & g la hauteur d'où les corps graves tombent dans une seconde: & que pour mesurer le tems on prenne une ligne droite $c = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$, qui marquera une seconde. Supposons maintenant, que cette corde n'ait été ébranlée au commencement que dans la partie AC , à laquelle on ait donné la figure AMC , tandis que le reste CB a conservé sa figure naturelle & rectiligne, & qu'après avoir réduit la corde dans cet état forcé, on la relâche subitement. Cela posé, on demande, quel sera le mouvement dont la corde sera agitée dans la suite? Pour cet effet, on prendra sur la droite AB prolongée les intervalles $Ab = Ba = AB$, sur lesquels on décrira les courbes Amc & $a\mu\gamma$, semblables à la courbure initiale AMC , mais dans une situation renversée, pour avoir l'échelle des tems $bcmAMCB\gamma\mu a$, dont

Planche VI.
Fig. 6.

dont les parties, bc , CB & $B\gamma$, conviennent avec l'axe même, de sorte que les appliquées dans ces espaces sont censées être nulles.

21. Maintenant, par la construction expliquée ci-dessus, il est aisé de déterminer le mouvement de chaque point de la corde. Ainsi le milieu D de l'espace ébranlé AC étant au commencement à la distance DM , s'approchera vers l'axe, & parviendra en D après le tems $\equiv AD$: de là il passera de l'autre côté de l'axe, & après le tems $Dd \equiv 2AD$, il se trouvera à la distance $\frac{1}{2}dm \equiv \frac{1}{2}DM$, d'où il retournera de nouveau vers l'axe, & reviendra en D après le tems $Dc \equiv 3AD$, où il demeurera en repos jusqu'au tems $D\gamma \equiv BD + BC \equiv 2AB - 3AD$, de sorte que la durée de ce repos est $\equiv 2AB - 6AD \equiv 2AB - 3AC \equiv 2BC - AC$.

De la même manière, le point C montera d'abord, & après le tems $CD \equiv AD$, parviendra à sa plus grande distance $\equiv \frac{1}{2}DM$, d'où il retournera en C après le tems $CA \equiv 2AD$: & de là il passera de l'autre côté de l'axe jusqu'à la distance $\frac{1}{2}dm \equiv \frac{1}{2}DM$, après le tems $Cd \equiv 3AD$; ensuite il retournera en C après le tems $Cc \equiv 4AD$, où il reposera jusqu'au tems $C\gamma \equiv 2BC \equiv 2AB - 2AC$. Or un point quelconque P de la partie CB demeurera en repos pendant le tems PC , après quoi il prendra le même mouvement que le point C ; tant que la distance $P\gamma$ est plus grande que Pc , ou bien $PB + BC > AP + AC$, ou $BP > AC$. Mais si $BP < AC$ il recommence plutôt à se mouvoir.

22. De là nous pourrons assigner la figure de la corde après un tems écoulé quelconque depuis le commencement; dont je considérerai les principaux instans:

- Fig. 7. I. Après le tems AD , la corde aura la figure 7, où la partie AD est droite, & la courbure ne se trouve que dans la partie DcE , le point c étant dans la plus grande élongation.
- Fig. 8. II. Après le tems $2AD$, la corde aura la figure $AdCeFB$, les intervalles AD , DC , CE , EF étant pris égaux; où les points

points *d* & *e* se trouvent dans leur plus grand éloignement de l'axe.

III. Après le tems $3 AD$, la même courbure est avancée sur la partie *DG*, les parties *AD* & *BG* étant droites & en repos. Fig. 9.

IV. Après le tems $4 AD$, la même courbure est avancée sur la partie *CH*, supposé que $4 AD$ soit encore plus petit que *AB*. Fig. 10.

V. Enfin, après le tems *AB*, la corde reçoit une figure *ATNB* semblable à la première, mais dans une situation renversée; après quoi les mêmes phénomènes reviennent, dont les périodes s'achevent dans le tems $\equiv AB$, ou bien de $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes. Fig. 11.

23. On voit donc que ce mouvement est fort irrégulier, & qu'il n'y a aucune partie de la corde qui fasse des oscillations réglées qui puissent être comparées à celles d'un pendule simple, selon la manière de M. Bernoulli. Car chaque partie n'est ébranlée que pendant quelque tems, où même son mouvement n'est rien moins que semblable à celui de quelque pendule : & pendant un autre tems la même partie se trouve dans un repos parfait. M. Bernoulli m'avoit objecté contre ce mouvement, que si une partie de la corde avoit été en repos pendant quelque tems, il n'y auroit point de raison pourquoi elle commenceroit à se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Mais on n'a qu'à suivre pas à pas la progression du mouvement, & ce doute évanouira de soi même : outre qu'on voit aussi dans la propagation du son par l'air, dont le calcul est fondé sur les mêmes principes, que les ébranlemens propagés ne se continuent que dans un sens, pendant que la première agitation se répand en tout sens.



*Considération du cas, où la corde n'a été ébranlée
que dans son milieu.*

Fig. 12.

24. Soit AB encore la même corde que j'ai considérée jusqu'ici, dont au commencement la partie du milieu CD ait été détournée dans la courbe CMD, les deux autres parties AC & BD ayant été conservées dans leur état naturel; & que de cet état forcé la corde soit relâchée subitement. Donc, pour en déterminer le mouvement, je prolonge la corde de part & d'autre en *a* & *b*, en sorte que $Ab = Ba = AB$, & sur ces parties prolongées je décris dans une situation renversée les courbes $cm\delta$ & $\gamma\mu\delta$, semblables à la courbe CMD. Pour rendre la chose plus claire, je supposerai chaque partie AC, CD, & BD, précisément le tiers de la corde entière AB. Ensuite, soit O le milieu tant de la corde que de la partie ébranlée CD, & je conçois la courbe CMD composée de deux parties égales & semblables, CM & DM. On voit bien que je ne fais ces suppositions que pour faciliter les constructions suivantes, & les rendre plus évidentes.

25. Concevons la corde divisée en six parties égales aux points E, C, O, D, F, & prenant la corde entière $AB = a$, pour exprimer le tems de $\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes, après chaque sixième partie de ce tems, la corde sera réduite aux figures suivantes:

Fig. 13.

I. Après le tems $= \frac{1}{6} AB$, les parties EO & FO seront courbées en haut, les éloignemens de l'axe n'étant que la moitié de ceux de la courbe CMD, & les parties AE & BF se trouveront encore en repos. L'angle en O ne doit pas choquer, puisque l'inflexion n'y est qu'infiniment petite.

Fig. 14.

II. Après le tems $= \frac{2}{6} AB$, ces deux courbures seront avancées jusques aux extrémités, & seront encore tournées en haut sur les parties AC & BD, la partie du milieu CD étant droite & en repos.

III.



- III. Après le tems $= \frac{1}{2} AB$, toute la corde se trouvera dans sa position naturelle & rectiligne, mais les parties AC & BD auront un mouvement pour se courber en bas, celle du milieu CD demeurant encore en repos. Fig. 15.
- IV. Après le tems $= \frac{2}{3} AB$, les parties AC & BD seront effectivement courbées en bas, celle du milieu CD étant encore droite. Fig. 16.
- V. Après le tems $= \frac{3}{4} AB$, ces deux courbures se rapprocheront vers le milieu O, les parties AE & BF étant droites & en repos. Fig. 17.
- VI. Enfin, après le tems $= AB$, toute la corde se trouvera dans un état semblable à celui du commencement, mais dans une situation renversée. Fig. 18.

26. Ces deux cas ne laissent plus aucune raison de douter, que les cordes ne soyent susceptibles de mouvemens très irréguliers, qu'on ne sauroit comparer avec les oscillations d'un pendule, ni regarder comme un mélange de plusieurs vibrations simples & régulières. Dans ces cas donc, le son doit être très impur, & quasi varier à

tout instant; cependant, puisque toujours après le tems $= \sqrt{\frac{M a}{2 F g}}$,

la corde retourne dans le même état, & que ces périodes sont régulières, nonobstant les agitations irrégulières de chaque partie de la corde; le son principal de la corde sera néanmoins le même que si les vibrations étoient régulières, quoiqu'on y apperçoive quelque bruit fort désagréable. Cet accident ne doit pas être regardé comme uniquement attaché aux cas que je viens de développer, mais il est aussi très possible, lors qu'on ébranle la corde dans toute son étendue, ce que je me propose de faire encore voir, pour mettre la Théorie à l'abri de toute nouvelle objection.



Planche VII.
Fig. 19.

Développement du cas où la corde a reçu au commencement la figure A p q r s t B (Fig. 19.)

27. Dans ce cas, je suppose l'intervalle AF deux fois plus grand que BF, & je divise toute la corde en six parties égales aux points C, D, E, F, G, pour rendre la construction plus évidente. Cette figure a donc deux ventres inégaux AF & BF; ce qui est sans contredit un cas qui ne sauroit être compris dans la solution de M. Bernoulli. Cependant on verra que ce mouvement participe beaucoup de celui que cet illustre Géometre a assigné aux cordes à deux ventres: la différence n'étant, sinon que le mouvement de chaque élément de la corde est irrégulier & tout à fait différent de celui d'un pendule. Mais, nonobstant cette irrégularité, toute la corde retourne à un état semblable à celui du commencement après le tems =

$\sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes, que j'exprime ici par la longueur de la corde AB:

or, pendant ce tems presque toutes les parties de la corde acheveront deux vibrations, mais qui sont d'autant plus inégales entr'elles, que les deux ventres du commencement AF, & BF, auront été inégaux entr'eux.

28. Ayant donc continué la figure initiale d'une manière renversée sur les parties prolongées Ab & Ba, ma construction fournira pour les instans principaux suivans les figures que je m'en vai rapporter:

- Fig. 20. I. Après le tems AC = $\frac{1}{2}$ AB, la corde aura la figure représentée fig. 20. où le premier ventre s'étend jusqu'en G, & la partie BG est réduite dans sa situation naturelle rectiligne.
- Fig. 21. II. Après le tems AD = $\frac{2}{3}$ AB, la partie AD est droite, & l'autre BD a un ventre courbé en haut.
- Fig. 22. III. Après le tems AE = $\frac{3}{4}$ AB, les deux ventres deviennent égaux, l'un AE étant tourné en bas, & l'autre BE en haut.

IV.



- IV. Après le tems $AF = \frac{1}{2} AB$, il y a un ventre AF tourné en bas, & la partie BF est droite. Fig. 21.
- V. Ap-rès le tems $AG = \frac{2}{3} AB$, la partie AC est droite, & l'autre BC à un ventre tourné en bas. Fig. 24.
- VI. Après le tems AB , la corde reprend la figure du commencement, mais dans une situation renversée. Fig. 25.

29. Depuis le tems $= AB$ la corde reprendra dans un ordre renversé les mêmes figures qu'elle a eues aux tems $\frac{2}{3} AB$, $\frac{1}{2} AB$ &c. & enfin après le tems $= 2 AB$ elle se trouvera parfaitement rétablie dans son état premier (fig. 19.): pendant lequel tems elle aura achevé deux vibrations entières. Mais durant chaque vibration entiere, dont le tems est $= AB$, les différentes parties de la corde feront portées d'un mouvement tout particulier. Car le point C passe deux fois par l'axe, d'abord après le tems $\frac{2}{3} AB$ & ensuite après le tems $\frac{1}{2} AB$, la différence étant $= \frac{1}{3} AB$. Mais quoique ce point C demeure après le premier passage au dessous de l'axe pendant le tems $= \frac{2}{3} AB$, après le second passage il ne demeure au dessus de l'axe que pendant le tems $\frac{2}{3} AB$. Ensuite il se trouvera encore au dessous pendant le tems $\frac{2}{3} AB$, mais depuis il s'arrêtera au dessus pendant le tems $\frac{1}{2} AB$: de sorte que les intervalles de tems entre les passages successifs du point C par l'axe sont comme les nombres 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4 &c. & partant ce point paroitra, pendant le tems $2 AB$, achever 4 vibrations, mais inégales entr'elles.

30. Une semblable irrégularité regne aussi entre les passages successifs par l'axe AB , du point G , mais les points D & F demeurent pendant des intervalles de tems égaux $= \frac{1}{2} AB$ alternativement au dessus & au dessous de l'axe, de sorte que ces deux points semblent achever 3 vibrations pendant le tems $= 2 AB$. Pour le point du milieu E , il demeure toujours pendant un tems $= AB$ au dessus & d'autant au dessous de l'axe. Donc pendant que la corde entiere rend un certain son principal, quelques uns de ses élé-



mens sembleront rendre un ton plus haut d'une octave, d'autres donneront un ton plus haut d'une quinte: tandis que d'autres produisent le même son principal. Cependant il faut bien remarquer que, dans ce cas, l'octave produite par les points C & G est très impure, puisque les intervalles de tons que ces points demeurent successivement au dessus & au dessous de l'axe, sont fort inégaux entr'eux, puisque ce ne sont que les termes $= 3$ de la serie 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4 &c. qui s'accordent avec l'octave, tandis que les termes 2 & 4 concourent à produire la quinte & la douzieme.

31. De là on jugera aisément, quelles irrégularités doivent se trouver dans le mouvement des cordes, lorsque la figure initiale aura plusieurs ventres inégaux entr'eux: lesquelles n'empêcheront pas pourtant, que le mouvement dans sa totalité ne soit très régulier: on comprendra aussi que plusieurs tels mouvemens peuvent être réunis ensemble dans la même corde, & cela de la même manière que M. Bernoulli a fait voir, que plusieurs mouvemens réguliers s'y peuvent trouver à la fois. D'où il faut conclure, que la solution de M. Bernoulli ne renferme que les mouvemens réguliers, qui peuvent avoir lieu dans les cordes vibrantes: & on ne sauroit plus douter que les cordes ne soient susceptibles d'une infinité d'autres mouvemens irréguliers, que ma méthode découvre tous sans aucune difficulté. Cette même conclusion regarde aussi M. d'Alembert, entant qu'il prétend que l'Analyse ne s'étend qu'à la détermination des mouvemens réguliers, quoiqu'il n'en nie pas l'existence.

32. Mais cette même circonstance, qu'on a trouvé moyen d'appliquer l'Analyse à des cas, qui en ont paru entièrement exclus, semble mériter l'attention de tous les Géometres. Jusqu'ici on n'a pas cru que l'Analyse fut applicable à des lignes courbes mécaniques, qui ne sauroient être renfermées dans aucune équation, ou qui sont destituées de toute loi de continuité. Cela est bien vrai à l'égard de cette partie de l'Analyse qui ne s'occupe qu'à des fonctions d'une seule quantité variable, à laquelle on s'est presque uni-
que-



quement appliqué jusqu'ici : mais dès qu'on traite des fonctions de deux ou plusieurs variables, comme dans le cas des cordes vibrante, l'appliquée y doit être considérée comme une fonction non seulement de l'abscisse x , mais aussi du tems t ; cette partie de l'Analyse est très essentiellement différente de la précédente, & s'étend même à des fonctions destituées de toute loi de continuité. Cette partie, dont nous ne connoissons presque encore que les premiers élémens, mérite sans doute que tous les Géomètres réunissent leurs forces pour la cultiver.

DÉMONSTRATION RIGOUREUSE

DE MA CONSTRUCTION DU PROBLEME DES CORDES
VIBRANTES.

33. D'abord, j'envisage le probleme des cordes vibrantes sous ce point de vue, que la figure qu'on a imprimée au commencement à la corde, étant donnée, il faut déterminer le mouvement que recevra la corde après avoir été relâchée subitement : où l'on suppose, que la figure initiale ne s'écarte qu'infiniment peu de son état naturel & rectiligne. Avec cette restriction, je regarde la figure initiale comme une courbe quelconque, sans me mettre en peine, si elle peut être exprimée par quelque équation, ou si elle est décrite d'une manière irrégulière quelconque. Dans l'un & l'autre cas, il est également certain que, dès que la corde sera relâchée, elle sera aussi mise en mouvement ; & la recherche de ce mouvement doit être regardée sans doute comme un probleme très réel, qui mérite à tous égards l'attention des Géomètres. Si l'Analyse est suffisante à le résoudre ou non ? c'est une question tout à fait étrangère ; & si la solution est impossible en général, l'impossibilité ne se manifesterait que trop tôt dans les recherches qu'on doit entreprendre pour arriver à la solution.

34. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$, que je suppose par tout également épaisse, son poids $= M$, & la force dont

Fig. 26.



dont elle est tendue $= F$. Cela posé soit AMB la figure, qu'on a d'abord imprimée à la corde, & qu'après un tems quelconque de t seconde elle ait été réduite à la figure AYB , qui comme l'initiale doit nécessairement passer par les deux termes A & B , où la corde est fixée. Donc, posant pour cette courbe AYB une abscisse quelconque $AX = x$, & l'appliquée $XY = y$, il est évident que y sera une certaine fonction tant de l'abscisse $AX = x$ que du tems t , de sorte que l'appliquée y doit être considérée & traitée comme une fonction des deux variables x & t , d'où l'on comprend ce que signifient ces formules différentielles $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$.

Il est bon de remarquer ici, que la formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ exprime la vitesse dont le point Y s'éloigne de l'axe, & que cette vitesse est déterminée par l'espace qui en seroit parcouru dans une seconde.

35. Pour déterminer la nature de cette fonction y , les principes de Mécanique fournissent cette équation différentielle du second degré $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où g marque la hauteur d'où un corps pesant tombe dans une seconde. Je ne m'arrête point à démontrer cette formule, puisqu'elle est reconnue juste de tous ceux qui ont traité cette matière, sans aucune contestation. Aussi l'intégration ne sauroit être révoquée en doute, d'autant plus que M. d'Alembert lui-même en est le premier Inventeur. Or, posant pour abrégé $\frac{2Fag}{M} = cc$, l'intégrale complète de cette équation est $y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$ où les caractères Γ & Δ marquent des fonctions quelconques des quantités $x + ct$ & $x - ct$. Cette double universalité est introduite par la double intégration qui y a conduit. Car, dans ces sortes d'intégrations, telles fonctions indéterminées tiennent lieu des constan-



constantes arbitraires, que les intégrations ordinaires renferment. Ce qui distingue essentiellement l'intégration des fonctions à deux variables de celles qui n'en renferment qu'une seule.

36. On ne sauroit se former une plus juste idée d'une telle fonction générale qu'en concevant une courbe quelconque, décrite sur l'axe AB , où prenant une abscisse égale à $x + ct$ ou à $x - ct$, l'appliquée représentera la dite fonction. Ainsi on n'aura qu'à concevoir deux telles lignes courbes, l'une pour représenter la fonction marquée par le caractère Γ , & l'autre pour celle du caractère Δ ; j'emploierai ces mêmes caractères pour désigner ces deux courbes. Ayant donc décrit deux telles lignes courbes Γ & Δ sur l'axe AB , qu'on prenne dans la première Γ l'appliquée qui répond à l'abscisse $x + ct$, & dans l'autre Δ l'appliquée qui répond à l'abscisse $x - ct$: alors la somme de ces deux appliquées fournira une telle valeur pour y , qui convient infailliblement à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dd y}{dt^2}\right) = c c \left(\frac{dd y}{dx^2}\right):$$

d'où l'on voit que cette solution est infiniment générale, puisqu'on peut tirer les deux courbes Γ & Δ à volonté. Je remarque seulement que, puisque la valeur de y doit être extrêmement petite, on n'a qu'à multiplier la somme des deux dites appliquées par une fraction très petite, vu qu'il est clair que, si à l'équation différentielle satisfait une valeur $y = u$, il satisfera aussi la valeur $y = \frac{u}{1000}$, & en général $y = mu$, de sorte qu'on peut faire le coefficient m aussi petit qu'on voudra.

37. Maintenant il ne s'agit que déterminer les deux courbes Γ & Δ , qui jusqu'ici ont été arbitraires, en sorte qu'elles conviennent aux conditions que notre problème renferme. Il en est ici de même que de tous les problèmes dont la solution se trouve par des intégrations, où les constantes arbitraires que chaque intégration introduit dans le calcul, doivent toujours être déterminées

par



par les conditions du problème. Or, dans notre cas, la principale condition est, qu'au commencement, ou posant $t = 0$, la figure de la corde provienne précisément la même que celle qui est prescrite AMB . Posons donc le tems $t = 0$, & la valeur de y , qui fera $y = \Gamma: x + \Delta: x$, doit devenir égale à l'appliquée XM de la courbe donnée: ou bien les deux courbes Γ & Δ doivent être telles, que la somme de leurs appliquées, qui répondent à la même abscisse $AX = x$ devienne $= XM$. Considérant donc l'une des deux courbes Γ & Δ comme donnée, l'autre sera déterminée par cette condition: il faut donc chercher encore une autre condition renfermée dans le problème, pour déterminer entièrement toutes les deux courbes Γ & Δ .

38. Cette autre condition est contenue dans la manière dont la corde est relâchée de son état initial forcé, puisque nous supposons que dans cet instant la corde n'a encore aucun mouvement. De là, prenant le tems $t = 0$, il faut que la vitesse de chaque point de la corde évanouisse. Or, en général après le tems t , la vitesse du point Y est $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$, ou bien $= c\Gamma':(x+ct) - c\Delta':(x-ct)$, où Γ' & Δ' marquent les fonctions différentielles, en sorte que si nous posons $\Gamma: u = v$, nous aurons $\Gamma': u = \frac{dv}{du}$; ainsi Γ' & Δ' seront représentés par des courbes, dont les appliquées sont les tangentes des angles dont les élémens des courbes Γ & Δ sont inclinés à l'axe AB . Posons maintenant le tems $t = 0$, & la formule $c\Gamma': x - c\Delta': x$ exprimera la vitesse du point M de la corde au commencement, laquelle devant être $= 0$, nous aurons $\Gamma': x = \Delta': x$. Donc, puisque ces deux fonctions différentielles sont égales entr'elles, les intégrales $\Gamma: x$ & $\Delta: x$ le seront aussi, vu qu'elles ne différeront que d'une quantité constante, ce qui revient au même que si nous posons $\Gamma: x = \Delta: x$.



39. Donc, puisque la première condition exige qu'il soit $\Gamma: x + \Delta: x = XM$, & la seconde $\Gamma: x = \Delta: x$, toutes les deux courbes arbitraires se trouvent maintenant déterminées par l'état initial, & on aura $\Gamma: x = \Delta: x = \frac{1}{2}XM$. Ces deux courbes seront donc égales entr'elles, & leurs appliquées partout égales à la moitié des appliquées XM de la figure initiale, de sorte que cette figure nous fournit l'une & l'autre des courbes Γ & Δ . Ou bien la figure initiale elle-même AMB pourra servir à représenter les deux courbes Γ & Δ , pourvu que nous établissions notre équation sous cette forme:

$XY = y = \frac{1}{2}\Gamma: (x + ct) + \frac{1}{2}\Gamma: (x - ct)$ à cause de $\Delta = \Gamma$, où les formules $\Gamma: (x + ct)$ & $\Gamma: (x - ct)$ marquent dans la courbe initiale AMB les appliquées qui répondent aux abscisses $x + ct$ & $x - ct$. De là on connoitra aussi aisément la vitesse du point Y , tendante à l'éloigner de l'axe par cette équation

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{c}{2} \Gamma': (x + ct) - \frac{c}{2} \Gamma': (x - ct).$$

40. Pour trouver donc, après un tems quelconque de t secondes, l'état de la corde, ou bien la position de chacun de ses points, qui dans l'état naturel se trouvoit en X , on prendra sur l'axe de part & d'autre de ce point X les intervalles $XT = Xt = ct$, pour avoir les abscisses $AT = x + ct$, & $At = x - ct$. Aux points T & t , on tirera les appliquées TV & tv à la courbe initiale de la corde AMB , & la moitié de la somme de ces deux appliquées donnera l'appliquée cherchée XY , pour la figure que la corde aura à présent. Mais ici on rencontre une grande difficulté, lorsque l'un ou l'autre des points T & t , ou tous les deux, tombent au delà des points A & B , sur l'axe où la corde est fixée: on voit bien que, pour cet effet, il faut continuer de part & d'autre la courbe initiale AMB ; & comme toutes les objections qu'on a faites à ma construction, roulent sur la manière de cette continuation, je tâcherai



de la mettre entièrement hors de doute, en l'établissant de la manière suivante.

41. Si la longueur de la corde AB étoit infinie, cette difficulté évanouiroit; concevons donc la corde continuée à l'infini des deux côtés, & tendue par la même force F ; & nous aurons à examiner cette question, s'il ne seroit pas possible de donner à cette corde infinie une telle figure initiale, que la partie AB en reçoive le même mouvement dont elle est agitée actuellement? Car, si cela est possible, nous n'aurons qu'à prolonger dans la pensée la corde AB à l'infini, & lui supposer ladite figure initiale par toute sa longueur; d'où il sera aisé ensuite de déterminer le mouvement de la partie AB pendant toute sa durée. Je me flatte que cette fiction, dont on fait très souvent de semblables presque dans toutes les recherches, ne trouvera aucune contradiction; aussi ne décidé-je pas encore si cette nouvelle question est possible ou non? Mais, si elle est possible, personne ne sauroit plus nier que cette considération ne nous conduise à la connoissance du véritable mouvement dont notre corde AB sera agitée.

42. Or la corde AB n'est terminée aux points A & B , qu'entant que ces points demeurent immobiles pendant tout le mouvement; donc, quand même la corde seroit étendue au delà des termes A & B , mais que son mouvement seroit tel, que les points A & B demeurassent toujours en repos, la partie AB auroit sans doute le même mouvement que si la corde AB étoit fixée aux points A & B , & que les parties prolongées en fussent entièrement retranchées, pourvu que la même tension y soit constamment conservée. Maintenant, après avoir établi ce principe incontestable, il est évident que, si la corde AB étoit seulement prolongée en a & b , de sorte que $Ab = Ba = AB$, & qu'on eût donné aux parties prolongées Ab & Ba , les figures renversées de celle de AMB , comme j'ai expliqué ci-dessus; les points A & B demeureroient en repos, du moins tant que les points T & t ne passent point au delà des termes a & b : & il est bien certain que le mouvement de AB sera pré-

Planche V.

Fig. 4.

précisément le même que si les parties Ab & Ba étoient retranchées.

43. On ne sauroit donc plus avoir le moindre doute, que par la nature même de la question la courbe AMB ne doive être continuée au moins par les intervalles Ab & Ba , selon la loi que j'ai établie ci-dessus; & les raisons que j'ai alléguées pour ces deux intervalles, ont également lieu pour tous les autres qu'on y voudra ajouter au delà à l'infini. Ainsi, quand même la courbe AMB seroit régulière & auroit sa continuation naturelle, comme si c'étoit, par exemple, un arc de cercle, cette continuation naturelle n'entreroit ici pour rien en compte, & il faudroit toujours sur les lignes Ab & Ba décrire de semblables arcs de cercle. Quelque choquant que cela puisse paroître à quelques Géometres, j'espère qu'on ne trouvera plus rien à reprocher à ma construction, à laquelle on ne sauroit plus refuser la plus grande généralité, puisqu'elle s'étend également à toutes les figures possibles, dont la corde AB est susceptible au commencement. En effet, qui pourroit nier qu'il ne fût possible de donner d'abord à la corde la figure $AMCB$, composée par exemple d'un arc de cercle AMC , & d'une ligne droite CB , quoique l'une de ces deux parties ne soit certainement pas la continuation naturelle de l'autre.

Planche VI.
Fig. 6.

44. Mais, quoique cette construction soit tirée de l'équation intégrale $y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$ qui renferme la solution du problème, M. d'Alembert semble nier qu'elle satisfasse

à l'équation différentielle du second degré $\left(\frac{ddy}{dt}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$,

que la Théorie fournit immédiatement. Il allegue quelques difficultés, auxquelles il faut encore répondre. Or d'abord, comment peut-on douter de la bonté d'une construction, lorsqu'elle est parfaitement d'accord avec l'équation intégrale, qui contient la solution du problème, & cela, sous le prétexte qu'elle ne convient pas parfaitement à l'équation différentielle, d'où l'intégrale est tirée. On a déjà résolu tant

de problemes par le moyen des intégrations, & personne ne s'est encore avisé de révoquer la solution en doute; d'autant plus que c'est toujours des équations intégrales, qui fournissent les constructions, & tant qu'on n'y peut pas parvenir, on ne sauroit se vanter d'une solution parfaite.

Planche VII.
Fig. 27.

45. Mais voyons quels sont les inconveniens qu'on rencontre en remontant de notre construction aux formules différentielles du premier & second degré. Soit donc AMB la figure initiale donnée à la corde AB , à laquelle on ait construit sur la prolongation $Ba \equiv AB$ la figure semblable amb dans une situation renversée: de sorte qu'après le tems t en prenant des intervalles $PT \equiv Pt \equiv ct$, le point P pris à la distance $AP \equiv x$ se trouve éloigné de l'axe au dessus de l'intervalle $y \equiv \frac{1}{2} \Gamma: (x + ct) + \frac{1}{2} \Gamma: (x - ct) \equiv \frac{1}{2} (-tv + TV)$, à cause de $TV \equiv \Gamma: AT$ & $-tv \equiv \Gamma: At$, puisqu'on a en général $PM \equiv \Gamma: AP \equiv \Gamma: x$. Maintenant, qu'on construise la courbe $A' M' B' m' a'$, en sorte que son appliquée soit $PM' \equiv \frac{d. PM}{d. AP} \equiv \frac{d. \Gamma: x}{d. x} \equiv \Gamma': x$, ce qu'on fera en prenant une certaine ligne pour unité. Donc, puisque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{1}{2} \Gamma': (x + ct) + \frac{1}{2} \Gamma': (x - ct)$$

$$\& \left(\frac{dy}{dt}\right) \equiv \frac{c}{2} \Gamma': (x + ct) - \frac{c}{2} \Gamma': (x - ct)$$

on aura par cette nouvelle courbe:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{1}{2} (-tv' + TV') \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) \equiv \frac{c}{2} (-tv' - TV')$$

dont la dernière formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ exprime la vitesse du point P de la corde dirigée en haut après le tems t . Au reste, il est évident que les



les appliquées de ces courbes, qui tombent dans la figure au dessous de l'axe, doivent être prises négatives.

46. Cette ligne $A' M' B' m' a'$ est bien tirée dans la figure d'un trait continu; mais on objecte que si la courbe $A M B$ n'étoit pas continue, & qu'elle eût des angles, il en résulteroit des interruptions dans la ligne $A' M' B' m' a'$. Mais comme la première condition de notre problème exige, que non seulement toutes les appliquées de la courbe $A M B$, mais aussi les angles dont tous ses élémens sont inclinés à l'axe, soient infiniment petits, de tels angles qu'on veut supposer dans la figure $A M B$, sont déjà exclus, n'étant au plus qu'infiniment petits. Mais, quand même il y auroit quelque interruption dans cette seconde ligne, elle n'affecteroit qu'un élément, & partant ne troubleroit pas la solution. En tout cas, on n'auroit qu'à emousser infiniment peu les angulosités dans la figure $A M B$, pour faire évanouir cet inconvénient, & par cela même, qu'on n'auroit changé qu'infiniment peu la figure $A M B$, toutes les conclusions qu'on en tire, demeureront toujours les mêmes. De telles objections sont entièrement semblables à celles qu'on a d'abord faites contre le calcul des infiniment petits.

47. Or ces inconvénients deviendront encore beaucoup plus considérables quand on remonte aux différentiels du second degré, où il faut décrire une nouvelle ligne $A'' M'' B'' m'' a''$ de la précédente $A' M' B' m' a'$, de la même manière que celle-ci a été formée de la figure $A M B m a$. Car, puisque la ligne $A' M' B' m' a'$ peut avoir en B' un angle plus considérable, on obtiendra deux lieux pour le point B'' , l'un au dessous & l'autre au-dessus de l'axe, ce qui semble rendre incertaines les formules différentielles du second degré qui renferment les accélérations instantanées. En effet, pour le point de la corde P , après le tems t , on aura par cette troisième ligne:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma'' : (x+ct) + \frac{1}{2} \Gamma'' : (x-ct) = \frac{1}{2} (tv'' - TV''),$$

$$\& \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{cc}{2} \Gamma'' : (x+ct) + \frac{cc}{2} \Gamma'' : (x-ct) = \frac{cc}{2} (tv'' - TV'').$$



Donc, si le point t tomboit en B , on seroit incertain, si pour $t v''$, on devoit prendre l'appliquée positive ou négative BB'' . Mais, quoiqu'on y commette quelque erreur, cette erreur n'affectera qu'un seul élément, & sera par conséquent sans aucune conséquence, étant toujours infiniment petite.

48. D'ailleurs, nonobstant cette incertitude, on aura toujours ouvertement $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ce qui étant l'équation principale, à laquelle la Théorie conduit immédiatement, il est évident que notre construction lui satisfait aussi bien qu'à l'équation intégrale qui en a été conduite. Et après tout cela, on n'a qu'à émousser infiniment peu l'angle B' dans la seconde ligne, pour réunir les deux points B'' & B' en B , & faire évanouir par ce moyen toutes les difficultés. Le changement qui en réjaillira sur la première courbe $AMBm$, ne sera aussi qu'infiniment petit, & partant ne changera rien dans l'état initial de la corde, d'où la détermination du mouvement a été tirée. Toutes ces objections sont donc précisément de la même nature, que celles qu'on a faites autrefois contre le calcul différentiel, en lui reprochant que dans certains élémens quelques particules n'évanouissent point, qu'on néglige néanmoins à l'égard des autres quantités. Comme aujourd'hui ces doutes sont entièrement dissipés, ceux qu'on fait contre cette détermination du mouvement des cordes, tomberont aussi d'eux-mêmes.



Fig. 1.

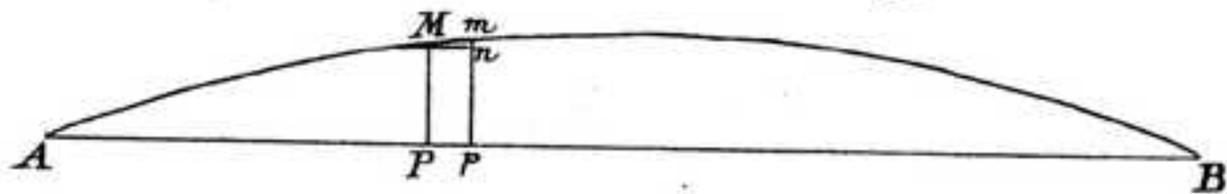


Fig. 2.

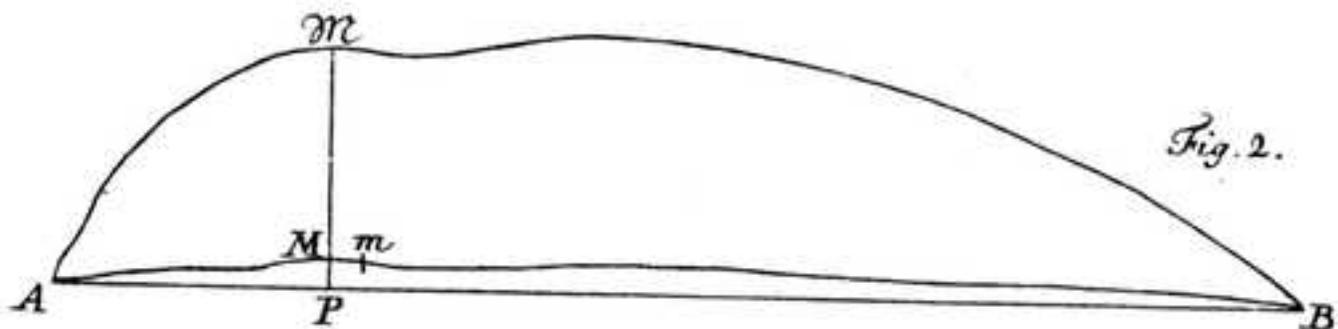


Fig. 3.



Fig. 4.

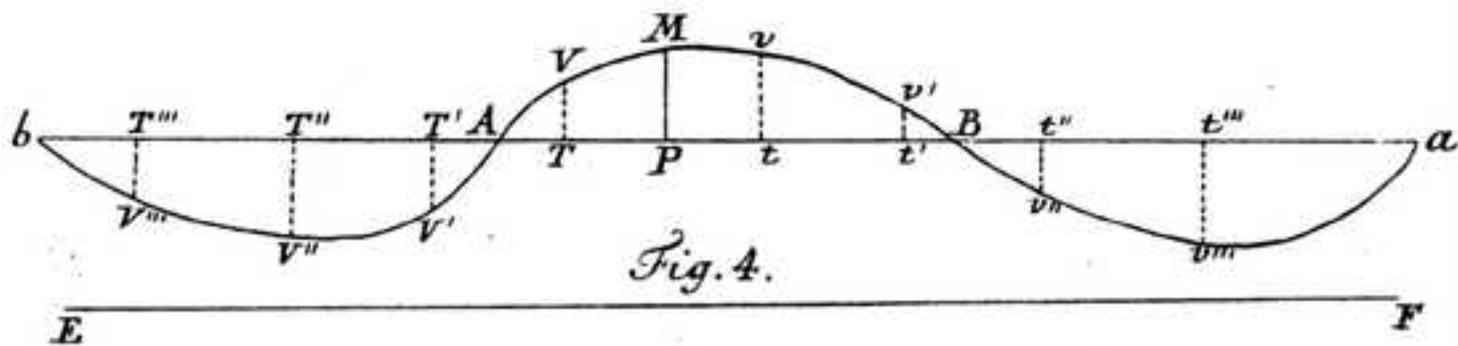


Fig. 5.

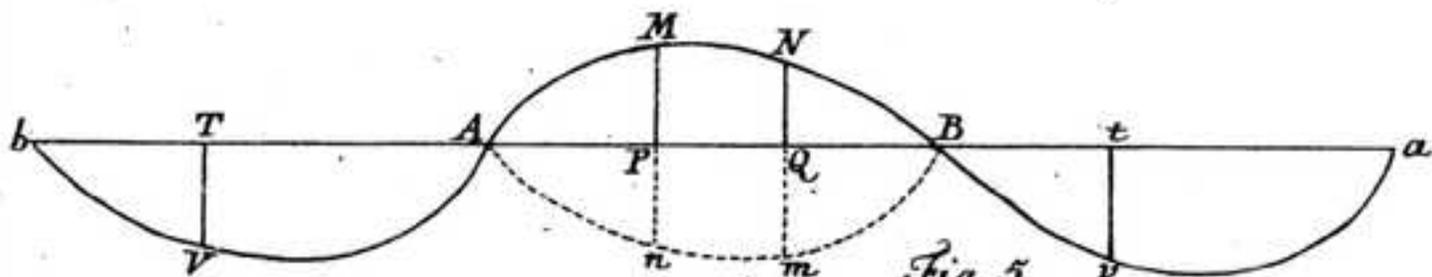


Fig. 6.

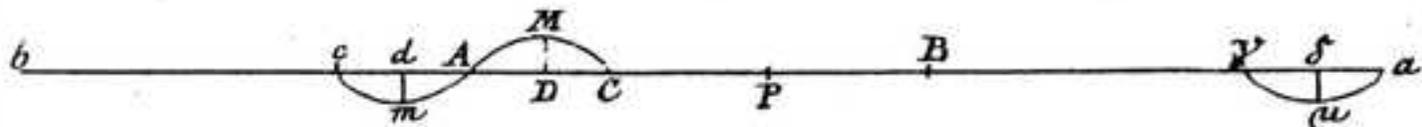


Fig. 7. après le tems AD

Fig. 8. après le tems $2AD = AC$

Fig. 9. après le tems $3AD$

Fig. 10. après le tems $4AD = 2AC$

Fig. 11. après le tems AB

Fig. 12.

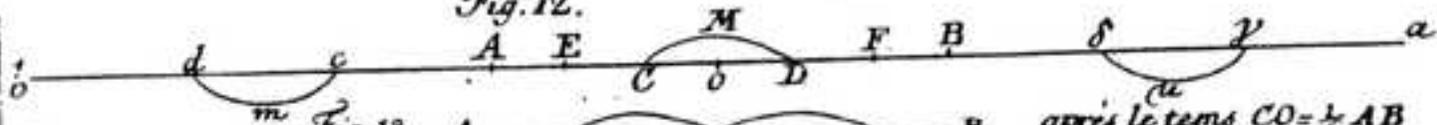


Fig. 13. après le tems $CO = \frac{1}{6} AB$

Fig. 14. après le tems $CD = \frac{1}{8} AB$

Fig. 15. après le tems $AO = \frac{1}{4} AB$

Fig. 16. après le tems $AD = \frac{2}{3} AB$

Fig. 17. après le tems $= \frac{2}{3} AB$

Fig. 18. après le tems $= AB$

Fig. 19

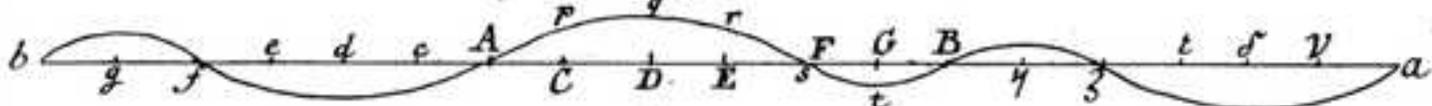


Fig. 20. A B *Après le tems AC*

Fig. 21. A B *Après le tems AD*

Fig. 22. A B *Après le tems AE*

Fig. 23. A B *Après le tems AF*

Fig. 24. A B *Après le tems AG*

Fig. 25. A B *Après le tems AB*

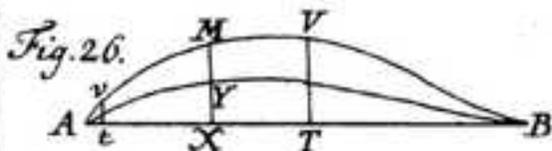


Fig. 27.

