1767

Sur la probabilté des séquences dans la lotterie Génoise

Leonhard Euler

SUR

LA PROBABILITÉ

DES SÉQENCES DANS LA LOTTERIE GÉNOISE

PAR M. EULER.

Depuis l'établiſſement d'une telle Lotterie dans cette ville, tous les arrangemens en ſont ſi généralement connus, qu'il ſeroit tout à fait ſuperflu d'en donner une deſcription. Auſſi la plûpart des queſtions qu'on peut former ſur la probabilité des événemens qui ont lieu dans cette Lotterie, ne ſont plus inconnues, vû que leur ſolution ſe déduit aiſement des principes établis dans la ſcience des probabilités. Mais, quand on demande la probabilité des *ſéquences*, qui peuvent ſe trouver dans les cinq nombres qu'on tire chaque fois, la queſtion eſt ſi difficile qu'on rencontre les plus grands obſtacles pour parvenir à la ſolution. Or on nomme *ſéquence*, quand deux ou pluſieurs des cinq nombres qu'on tire chaque fois, ſe ſuivent immédiatement ſelon l'ordre naturel des nombres: d'où l'on comprend ce qu'il faut entendre ſous une ſéquence de deux ou trois, ou quatre, ou de tous les cinq nombres. Ainſi, quand parmi les cinq nombres tirés il y a, par exemple, ces deux 7 & 8, c'eſt une ſéquence de 2: s'il y avoit ces trois nombres 25, 26, 27, ce ſeroit une ſéquence de trois: & ainſi de pluſieurs. On pourroit penſer que, puisqu'il n'y a dans cette Lotterie que 90 nombres, il conviendroit de regarder ces deux 90 & 1 comme une ſéquence de deux, mais il eſt plus naturel de les en exclure, & de s'en tenir uniquement à l'ordre naturel des nombres.

Or

Or il eſt bon de rendre cette queſtion plus générale, & partant je ſuppoſerai, qu'au lieu de 90 billets il y a en tout n billets marqués des nombres $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n$, & qu'on en tire au hazard un nombre quelconque qui ſoit $= m$. Cela poſé, on demande qu'elle eſt la probabilité qu'il ſe trouve parmi ces m nombres tirés, ou une ſéquence de deux, ou une de trois, ou une de quatre, &c. ou même à la fois deux ſéquences de deux, ou une de deux ou une de trois, &c. ou enfin qu'il ne s'y trouve point du tout de ſéquences? Voilà donc pluſieurs queſtions que chaque cas fournit, dont le nombre ſera d'autant plus grand, que le nombre des billets tirés m ſera grand. Mais, pour parvenir à la ſolution de toutes ces queſtions, il eſt abſolument néceſſaire de commencer par le cas $m = 2$, où l'on ne tire des n billets que deux: de là je paſſerai à celui où l'on en tire 3, de ſorte que $m = 3$, enſuite à ceux où $m = 4$, & $m = 5$, & $m = 6$, &c. juſques où les difficultés du calcul me permettront de pouſſer ces recherches.

PROBLEME I.

I. *Le nombre des billets marqués des nombres* 1, 2, 3, 4, *&c. étant* $=$ n, *quand on en tire deux billets, quelle eſt la probabilité, qu'il y aura une ſéquence, ou non?*

SOLUTION.

On ſait que le nombre de tous les cas poſſibles, qui peuvent avoir lieu dans les deux nombres tirés, eſt $= \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$, où l'on ne regarde point à l'ordre de ces deux nombres, de ſorte que, par exemple, les nombres tirés 7 & 10 ſont le même cas que s'ils étoient tirés 10 & 7. Dans ce nombre des cas $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$ ſont compris tant ceux où il y a une ſéquence, que ceux où il n'y en a point. Or il eſt aiſé de faire le dénombrement de tous les cas qui ren-

renferment une ſéquence, qui ſont: 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; &c. juſqu'au dernier $(n - 1), n$; dont le nombre eſt évidemment $= n - 1$. Mais la probabilité d'un événement quelconque eſt exprimée par une fraction, dont le numérateur eſt le nombre des cas où cet événement arrive, & le dénominateur eſt le nombre de tous les cas poſſibles, d'où l'on tire la probabilité, que les deux nombres tirés renferment une ſéquence $= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$. Donc, qu'il n'y ait point de ſéquence, la probabilité ſera $= \frac{n-2}{n}$.

Corollaire I.

2. Donc la multitude des nombres qui ſe ſuivent dans leur ordre naturel, étant $= n$, ſi l'on en tire deux, de ſorte que le nombre de tous les cas poſſibles eſt $\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$, le nombre des cas qui contiennent une ſéquence eſt $= n - 1$, & le nombre des cas, qui n'en ont point $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2}$.

Corollaire II.

3. Et partant la probabilité que les deux nombres tirés renferment une ſéquence, eſt $= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$; & la probabilité que les deux nombres tirés ne donnent point de ſéquence, eſt $= \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n}$.

Corollaire III.

4. Donc, ſi le nombre des billets n étoit 90, & qu'on n'en tirât que deux, la probabilité d'une ſéquence ſeroit $= \frac{1}{45}$; & celle

qu'il

qu'il n'y eût point de ſéquence $= \frac{44}{45}$. Ou bien on pourroit parier 1 contre 44, qu'il n'y aura point de ſéquence.

REMARQUE.

5. Il eſt évident que le nombre des cas qui donnent une ſéquence, étant ajouté au nombre des cas qui n'en donnent point, doit produire le nombre de tous les cas poſſibles, qui eſt $= \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$: & de là j'ai conclu que, puisque le nombre des cas d'une ſéquence étoit $= n - 1$, le nombre des cas contraires devoit être $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}$. Mais on peut auſſi trouver le même nombre par le dénombrement actuel: qu'on ſuppoſe l'un des nombres tirés a, & puisque l'autre ne ſauroit être, ni $a - 1$, ni $a + 1$, il doit être un des autres dont le nombre eſt $= n - 3$, de ſorte que chaque nombre donne $n - 3$ cas, d'où le nombre de tous les cas ſeroit $= n(n-3)$; mais il faut conſidérer que, ſi l'on prend pour a, ou le premier 1, ou le dernier n, le nombre des cas devient d'une unité plus grand, puisque dans le premier cas le nombre $a - 1$, & dans l'autre le nombre $a + 1$ ne donne point d'excluſion. Par conſéquent le nombre trouvé $n(n-3)$ doit être augmenté de deux, d'où il devient $= nn - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$. Mais ici chaque cas eſt compté deux fois, puisque poſant les deux nombres tirés a & b, ce même cas eſt rapporté tant au nombre a qu'au nombre b: d'où je conclus que le nombre des cas exempts de ſéquence n'eſt que la moitié de $(n-1)(n-2)$, & partant $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}$. J'ai ajouté exprès cette opération pour mieux faire connoitre les précautions qu'il faut prendre dans la ſuite.

PRO-

PROBLEME II.

6. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. étant quelconque $= n$, ſi l'on en tire trois au hazard, trouver toutes les probabilités à l'égard des ſéquences.*

SOLUTION.

Il y a ici trois cas à développer par rapport aux ſéquences, que je repréſenterai de la maniere ſuivante:

I. a, $a+1$, $a+2$, ce qui eſt une ſéquence de trois.

II. a, $a+1$, b, ce qui marque une ſéquence de deux, le troiſieme nombre b n'étant ni $a+2$ ni $a-1$.

III. a, b, c où les nombres a, b, c, ne renferment aucune ſéquence.

Ces trois cas enſemble doivent produire tous les cas poſſibles, dont le nombre eſt $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$. Faiſons donc le dénombrement de tous les cas de chacune de ces trois eſpeces.

Pour la premiere a, $a+1$, $a+2$, le dénombrement eſt le plus aiſé, puisque tous ces cas ſont

$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ &c. jusqu'au dernier $(n-2, n-1, n)$

dont le nombre eſt $= n-2$; & partant la probabilité qu'une ſéquence de trois ait lieu $= \frac{2.\ 3}{n(n-1)}$.

Pour la ſeconde eſpece a, $a+1$, b nous n'avons qu'à conſidérer toutes les ſéquences de deux, qui ſont au nombre de $n-1$; & à remarquer que chacune reçoit encore un des autres nombres à l'exception des quatre $a-1$, a, $a+1$, $a+2$, de ſorte que le nombre des valeurs de b ſeroit $n-4$. Mais il faut conſidérer que pour la premiere ſéquence 1, 2 & la derniere $n-1$, n le nombre

des

des valeurs de b eſt $n - 3$, & partant le nombre de tous les cas eſt $(n-1)(n-4) + 2 = nn - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$; lequel nombre eſt déjà juſte, puiſqu'aucun de ces cas ne ſe rencontre deux fois. Donc la probabilité que cette eſpece arrive eſt $= \frac{2 \cdot 3\,(n-3)}{n\,(n-1)}$.

Pour la troiſieme eſpece a, b, c, prenant le nombre a à volonté, les deux autres b & c doivent être pris de cette ſérie interrompue de nombres:

$$1.2.3 \ldots a-2 \;\;\big|\;\; a+2,\, a+3,\, a+4 \ldots n$$

où le nombre des termes de la premiere partie eſt $= a-2$, & de l'autre $= n - a - 1$; mais en ſorte que b & c ne faſſent pas une ſéquence. Suppoſons que tous les deux ſoient pris de la premiere partie, dont le nombre de termes eſt $= a - 2$; & puiſque la ſérie des nombres $1, 2, 3, 4 \ldots n$ fournit $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ combinaiſons de deux ſans ſéquence, le nombre de ces cas eſt $= \frac{(a-3)(a-4)}{1 \cdot 2}$. De la même maniere, ſi tous les deux ſont pris de l'autre partie $a+2$, $a+3$, $\ldots n$, dont le nombre de termes eſt $= n-a-1$, le nombre des cas eſt $= \frac{(n-a-2)(n-a-3)}{1 \cdot 2}$. Or, ſi l'on prend l'un de la premiere, & l'autre de la ſeconde partie, chaque combinaiſon eſt exemte de ſéquence, & partant le nombre des cas ſera $= (a-2)(n-a-1)$, d'où le nombre de tous les cas pour chaque nombre a ſera:

$$\frac{(a-3)(a-4) + (n-a-2)(n-a-3) + 2(a-2)(n-a-1)}{1 \cdot 2}$$

qui ſe réduit à $\frac{nn - 9n + 22}{2}$. Mais ce dénombrement n'a pas

lieu

lieu lorsque le nombre a est ou 1, ou 2, ou n ou $n-1$, qu'il faut considérer séparément. Ayant donc lieu pour $n-4$ valeurs de a, le nombre des cas sera $= \frac{(n-4)(nn-9n+22)}{2}$. Or les deux cas $a=1$ & $a=n$ donnent chacun tant de cas $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$, & les deux cas $a=2$ & $a=n-1$ donnent chacun $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$: donc le nombre des cas qui répondent à ces quatre valeurs ensemble sera

$$\frac{2(n-3)(n-4)}{2}+\frac{2(n-4)(n-5)}{2}=\frac{2(n-4)(2n-8)}{2}=\frac{(n-4)(4n-16)}{2}$$

qui étant joint au nombre précédent produit

$$\frac{(n-4)(nn-5n+6)}{2}=\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\quad 2.}.$$

Enfin il faut observer que chaque triade de nombres a, b, c, est comptée ici trois fois, puisque chacun peut tenir lieu de a, & partant le juste nombre de tous les cas de cette troisieme espece se réduit à $\frac{(n-2)}{1.}\frac{(n-3)}{2.}\frac{(n-4)}{3.}$. D'où la probabilité que, parmi les trois nombres tirés il n'y ait aucune séquence,

$$\text{sera} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}.$$

Coroll. I.

7. Ayant donc trois especes à considérer, quand on tire trois de n billets, qui sont I. a, $a+1$, $a+2$ II. a, $a+1$, b

& III. a, b, c, le nombre des cas pour chacune de ces eſpeces eſt:

Pour la premiere, $a, a+1, a+2$ . . . $n-2$

Pour la ſeconde, $a, a+1, b$ . . . $\frac{2(n-2)}{1.}\frac{(n-3)}{2}$

Pour la troiſieme, a, b, c, . . . $\frac{(n-2)}{1.}\frac{(n-3)}{2.}\frac{(n-4)}{3}$

COROLL. II.

8. Donc, pour qu'il ſe trouve dans les trois nombres tirés une ſéquence de trois a, $a+1$, $a+2$, la probabilité eſt $= \frac{2.\ 3}{n(n-1)}$.
Pour qu'il ne s'y trouve qu'une ſéquence de deux, la probabilité eſt $= 2.\ \frac{3(n-3)}{n(n-1)}$, & pour qu'il n'y ait aucune ſéquence, la probabilité eſt $= \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$.

COROLL. III.

9. Si l'on demande les cas où il ſe trouve au moins une ſéquence de deux dans les trois nombres tirés, le nombre des cas favorables eſt $= n-2 + (n-2)(n-3) = (n-2)^2$, & partant la probabilité $= \frac{2.\ 3(n-2)}{n(n-1)}$.

REMARQUE.

10. Il eſt ici évident que les nombres des cas, qui conviennent à chacune de nos trois eſpeces, étant ajoutés enſemble, produiſent

duisent le nombre de tous les cas possibles, qui est $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$, tout comme la nature de la question le demande, puisqu'il est en effet:

$$n-2+\frac{2(n-2)(n-3)}{1.\ 2}+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

& de la même maniere, la somme des probabilités qui répondent à ces trois especes devient égale à l'unité, qui est le caractere d'une certitude complette. Par cette raison j'aurois bien pu me passer du raisonnement embarrassant, par lequel j'ai fait le dénombrement des cas de la troisieme espece. Mais je l'ai ajouté exprès pour en mieux faire voir la justesse, vû qu'il porte ouvertement l'empreinte de la vérité, afin qu'il ne paroisse point suspect, quand je serai obligé d'y recourir dans la suite. Cependant, puisque je suis enfin parvenu à une expression fort simple, on ne sauroit presque douter qu'il n'y eût aussi une autre route assez simple, qui conduise à la même conclusion, ce qui mérite principalement l'attention de ceux qui s'appliquent à cette espece de recherches.

PROBLEME III.

11. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, 4 &c. *étant* $= n$, *si l'on en tire* 4 *au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION.

Parmi les quatre nombres tirés, il faut distinguer 5 especes différentes par rapport aux séquences, dont la nature peut être représentée de la maniere suivante,

I. $a, a+1, a+2, a+3$; II. $a, a+1, a+2, b$; III. $a, a+1, b, b+1$;
IV. $a, a+1, b, c$; V. a, b, c, d.

de sorte que la premiere contient une séquence de 4, la seconde une de 3, la III. deux séquences de 2, la IV. une seule séquence de 2.

&

& la V ne contient aucune féquence. Il s'agit donc de faire le dénombrement des cas pour chacune de ces efpeces, dont la fomme doit être égale au nombre de tous les cas poffibles qui eft $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$.

I. Le nombre des cas où la premiere efpece a lieu, eft $= n - 3$, puisque ces cas font

$$(1, 2, 3. 4), (2, 3, 4, 5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n-3)(n-2)(n-1)n$$

& partant la probabilité que cette efpece arrive fera $= \frac{2. \; 3. \; 4}{n(n-1)(n-2)}$.

II. Pour l'efpece $a, a+1, a+2, b$, le nombre de toutes les féquences poffibles de trois étant $= n-2$, le nombre b doit être pris, ou de cette progreffion $1, 2, 3 \ldots . (a-2)$, ou de celle-ci $(a+4), (a+5) \ldots . n$: donc le nombre des valeurs convenables pour b eft $= a - 2 + n - a - 3 = n - 5$, pourvu que a ne foit ni 1, ni $a + 2 = n$. Mettons à côté ces deux cas, & le nombre des autres étant $= n - 4$ dont chacun peut exifter en $n - 5$ diverfes manieres différentes, le nombre des cas eft $= (n-4)(n-5)$. Mais la premiere féquence 1, 2, 3 peut être combinée avec $n - 4$ différens nombres b, & de même auffi la derniere $n-2, n-1, n$, d'où le nombre de tous les cas pour cette efpece eft $= (n-4)(n-5) + 2(n-4) = (n-3)(n-4)$ dont tous font différens, & partant la probabilité que cette efpece exifte eft $= 2. \frac{3. \; 4\,(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 2. \frac{3. \; 4\,(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$.

III. Pour la troifieme efpece $a, a+1, b, b+1$, la premiere féquence $a, a+1$ étant prife à volonté, ce qui fe peut faire en $n-1$ manieres différentes, la feconde féquence $b, b+1$ doit être prife ou de cette progreffion $1, 2, 3 \ldots . . (a-2)$, ce qui peut arriver en $a-3$ manieres, ou de celle-ci $(a+3), (a+4), (a+5) \ldots n$,

ce

ce qui peut arriver en $n-a-3$ manieres, pourvu que le nombre a ne soit 1 ou 2, & $a+1$ ni n ni $n-1$; mettons à côté ces 4 cas, & le nombre des autres étant $= n-5$, dont chacun peut arriver en $n-6$ manieres, le nombre des cas sera $= (n-5)(n-6)$. Mais la premiere séquence 1, 2, peut être combinée avec $n-4$, autres semblables séquences, de même que la derniere $(n-1)$, n & la seconde 2, 3 avec $n-5$, de même que l'avant derniere $(n-2)$, $(n-1)$; donc, au nombre des cas déjà trouvé, il faut encore ajoûter $2(n-4)+2(n-5) = 4n-18$, de sorte que le nombre entier de ces cas est

$$nn-11n+30+4n-18 = nn-7n+12 = (n-3)(n-4).$$

Mais ici chaque cas se rencontre deux fois, selon qu'on considere en premier lieu ou l'une ou l'autre séquence. Par conséquent le juste nombre des cas qui produisent cette troisieme espece est $= \frac{(n-4)(n-4)}{1.\quad 2}$ & la probabilité que ce cas existe $= \frac{3.4(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3.4(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$.

IV. Pour la quatrieme espece $a, a+1, b, c$, la séquence $a, a+1$ étant prise à volonté, ce qui se peut faire en $n-1$ manieres différentes, les deux autres nombres b & c doivent être pris de ces deux progressions:

$$1, 2, 3 \ldots . a-2 \quad | \quad a+3, a+4, \ldots . n$$

en sorte qu'ils ne renferment point de séquence. Donc, prenant tous les deux de la premiere progression, dont le nombre de termes est $a-2$, cela peut se faire en $\frac{(a-3)(a-4)}{1\quad 2}$ manieres différentes: de même, si l'on prend tous les deux de l'autre progression, dont le nombre de termes est $n-a-2$, cela peut arriver en

 autant

autant de manieres $\frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1 \cdot 2}$. Or, prenant b de la premiere, & c de la seconde progression, le nombre des cas est $= (a-2)(n-a-2)$, pourvu qu'on excepte les deux premieres & les deux dernieres séquences. Le nombre donc de celles où ce dénombrement a lieu étant $= n-5$, dont chacun peut arriver autant de fois

$$\frac{(a-3)(a-4)}{1. \quad 2} + \frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1. \quad 2} + (a-2)(n-a-2),$$

ce qui se réduit à $\frac{nn-11n+32}{1.\ 2}$ qu'il faut multiplier par $n-5$. Or la premiere séquence 1, 2 donne tant de cas, $\frac{(n-4)(n-5)}{1. \quad 2}$, & autant la derniere $(n-1)n$; & la seconde 2. 3 donne $\frac{(n-5)(n-6)}{1. \quad 2}$ cas, & autant l'avant-derniere, de sorte que le nombre de ces 4 cas est $= (n-4)(n-5) + (n-5)(n-6) = (n-5)(2n-10) = 2nn-20n+50$, qui étant ajoutés aux précédens donnent

$$\frac{n-5}{2}(nn-11n+32+4n-20) = \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.\ 2},$$

pour le nombre de tous les cas, qui produisent cette espece, & partant la probabilité qu'elle existe est $= \frac{3.4\,(n-4)(n-5)}{n\,(n-1)(n-2)}$.

V. La cinquieme espece n'a pas besoin d'être développée séparément, puisque le nombre des cas de toutes les cinq especes doit être $= \frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$: ajoûtons donc ensemble

ble les cas trouvés pour les quatre especes, dont la somme est

$$n-3+(n-3)(n-4)+\frac{(n-3)(n-4)}{1.\quad 2}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\quad 2}$$

$$=\frac{(n-3)(nn-6n+10)}{1.\quad 2},$$

qui étant retranchée de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$, laisse

$$\frac{n-3}{24}(n(n-1)(n-2)-12(nn-6n+10))=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$$

pour le nombre de tous les cas où il n'y a point de séquence parmi les 4 nombres tirés, d'où la probabilité que cette espece existe est $=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}$.

Corollaire I.

12. Voilà donc les nombres des cas qui produisent chacune des cinq especes rapportées.

	nombre des cas
I. Espece $a, a+1, a+2, a+3$ . .	$\frac{n-3}{1}$,
II. Espece $a, a+1, a+2, b$ . .	$\frac{2(n-3)(n-4)}{1.\quad 2}$,
III. Espece $a, a+1, b, b+1$ . .	$\frac{(n-3)(n-4)}{1.\quad 2}$,
IV. Espece $a, a+1, b, c$ . .	$\frac{3(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3}$,
V. Espece a, b, c, d . . .	$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

 J'ai

J'ai exprimé ces nombres en sorte qu'on en puisse peut-être former bientôt une induction pour des questions compliquées.

COROLLAIRE II.

13. De la même maniere j'exprimerai la probabilité que chacune de ces cinq especes existe.

la probabilité

I. Espece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ . . . $\dfrac{2.\ 3.\ 4}{n(n-1)(n-2)}$,

II. Espece a, $a+1$, $a+2$, b . . . . $2.\dfrac{3.\ 4\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)}$,

III. Espece a, $a+1$, b, $b+1$ . . . $\dfrac{3.\ 4\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)}$,

IV. Espece a, $a+1$, b, c . . . . . $3.\dfrac{4(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$,

V. Espece a, b, c, d . . . . $\dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}$.

PROBLEME IV.

14. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels 1, 2, 3, &c. étant quelconque* $= n$, *si l'on en tire 5 au hazard, trouver toutes les probabilités qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION.

Parmi les 5 nombres tirés il faut distinguer les especes suivantes auxquelles tous les cas possibles, dont le nombre est $=$ $\dfrac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}$ se réduisent.

I. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, où il y a une ſéquence de 5.

II. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, où il n'y a qu'une ſéquence de 4.

III. Eſpece a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, où il n'y a qu'une ſéquence de trois, & une de deux.

IV Eſpece a, $a+1$, $a+2$, b, c, où il n'y en a qu'une de trois.

V Eſpece a, $a+1$, b, $b+1$, c, où il n'y en a que deux de deux.

VI Eſpece a, $a+1$, b, c, d, où il n'y en a qu'une ſeule de 2.

VII Eſpece a, b, c, d, e, où il n'y a aucune ſéquence.

Parcourons ſéparément chacune de ces 7 eſpeces.

I. La premiere ne contient que ces cas:

$(1,2,3,4,5)$, $(2,3,4,5,6)$ &c. juſques à $(n-4, n-3, n-2, n-1, n)$, dont le nombre eſt $= n - 4$, & partant la probabilité $= \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

II. Dans la ſeconde eſpece la ſéquence a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, peut varier en $n - 3$ manieres différentes, & le nombre b devant être pris de l'une de ces deux progreſſions

$1, 2, 3 \ldots\ldots a-2$, ou $(a+5)$, $(a+6) \ldots\ldots\ldots n$,

le nombre de ſes valeurs eſt $= a - 2 + (n - a - 4) = n - 6$, à l'exception de la premiere & derniere ſéquence. Mettant donc ces deux à part, le nombre des autres étant $n - 5$, celui des cas ſera $= (n-5)(n-6)$. Or, pour la premiere ſéquence 1, 2, 3, 4, le nombre des valeurs de b eſt $= n - 5$, & auſſi pour la derniere. Ajoûtons donc encore ces $2(n-5)$ cas au

 nom-

nombre trouvé $(n - 5)(n - 6)$, & nous aurons le nombre de tous les cas qui conviennent à cette espece $= (n-5)(n-4) =$ $2\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ \ 2}$, d'où l'on tire la probabilité $=$

$$2.\frac{3.\ 4.\ 5\ (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

III. Dans la troisieme espece, a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, la premiere séquence de trois a, $a+1$, $a+2$ peut avoir lieu en $n-2$ manieres différentes, & l'autre séquence de deux b, $b+1$ doit être prise ou de cette progression $1, 2, 3 \ldots (a-2)$, d'où leur nombre sera $= a-3$, ou de cette progression $(a+4)(a+5) \ldots n$, d'où le nombre des cas devient $= n-a-4$; & partant le nombre des valeurs de b est $= n-7$, excepté les deux premieres & les deux dernieres séquences de trois. Le nombre des autres étant donc $= n-2-4$ $= n-6$, & chacune recevant $n-7$ cas, le nombre des cas est $= (n-6)(n-7)$. Mais la premiere $1, 2, 3$ admet $n-5$ cas, & la seconde $n-6$: d'où les deux premieres & les deux dernieres fournissent encore $2(n-5)+2(n-6) = 4n-22$ cas, qui étant ajoûtés à $(n-6)(n-7)$ produisent le nombre de tous les cas de cette espece $= nn-9n+20 = (n-4)(n-5) =$ $2\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ \ 2}$ comme dans l'espece précédente, d'où la probabilité est aussi $= 2.\frac{3.\ 4.\ 5\ (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

IV. Dans la quatrieme espece a, $a+1$, $a+2$, b, c, la séquence de trois a lieu en $n-2$ cas, & les deux nombres b & c doivent être pris de ces deux progressions

$$1, 2, 3 \ldots (a-2) \ \big|\ (a+4), (a+5) \ldots n,$$

en

en ſorte pourtant qu'ils ne faſſent point de ſéquence. Prenons d'abord tous les deux de la premiere progreſſion, & le nombre des cas eſt $\frac{(a-3)(a-4)}{1.\quad 2}$: mais, ſi nous les prenons de l'autre, le nombre des cas eſt $= \frac{(n-a-3)(n-a-4)}{1.\quad 2}$: enfin, prenant l'un de l'une & l'autre de l'autre, le nombre des cas eſt $= (a-2)(n-a-3)$. Ainſi, pour chaque ſéquence de trois, nous avons tant de cas $\frac{(a-3)(a-4)}{1.\quad 2} + \frac{(n-a-4)(n-a-5)}{1.\quad 2} + (a-2)(n-a-3) = \frac{nn-13n+44}{1.\ 2}$ excepté, les deux premieres & les deux dernieres ſéquences: donc le nombre de celles où ce denombrement eſt juſte étant $= n-2-4 = n-6$, le nombre des cas qui leur convient eſt $\frac{(n-6)(nn-13n+44)}{2}$. Or la premiere & la derniere ſéquence donnent chacune $\frac{(n-5)(n-6)}{2}$ cas, & la ſeconde & l'avant-derniere chacune $\frac{(n-6)(n-7)}{2}$; donc, au nombre des cas trouvés, il faut encore ajoûter $(n-6)(2n-12)$, d'où réſulte la ſomme $\frac{(n-6)(nn-9n+20)}{2} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$, qui exprime le nombre des cas pour cette eſpece, & partant la probabilité eſt $= 3. \frac{4.\quad 5\quad (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

V. Pour la cinquieme eſpece a, $a+1$, b, $b+1$, c, conſidérons le nombre c, & les deux ſéquences de deux doivent être tirées de ces deux progreſſions

$1, 2, 3 \ldots\ldots c-2 \mid c+2, c+3 \ldots\ldots n.$

Si

Si l'on prend toutes les deux de la premiere, le nombre des cas est $= \frac{(c-5)(c-6)}{2}$, & si on les prend de l'autre il est $= \frac{(n-c-4)(n-c-5)}{2}$. Mais, l'une étant prise de la premiere & l'autre de la derniere, le nombre des cas sera $= (c-3)(n-c-2)$: donc, pour chaque nombre c, le nombre des cas sera:

$$\frac{(c-5)(c-6)}{2}+\frac{(n-c-4)(n-c-5)}{2}+(c-3)(n-c-2)=\frac{nn-15n+62}{2}.$$

Mais il en faut exclure les 4 premiers & derniers nombres c, de sorte que ce dénombrement n'a lieu que pour $n-8$ valeurs de c, auxquelles convient ce nombre de cas $\frac{(n-8)(nn-15n+62)}{2}$.

Soyent maintenant les autres valeurs qui admettent les cas suivans:

	nombre des cas
si $c=1$, ou $c=n$	$\frac{(n-5)(n-6)}{2}$,
si $c=2$, ou $c=n-1$	$\frac{(n-6)(n-7)}{2}$,
si $c=3$, ou $c=n-2$	$\frac{(n-7)(n-8)}{2}$,
si $c=4$, ou $c=n-3$	$\frac{(n-8)(n-9)}{2}+n-6$,

dont la somme est $= 2nn-27n+94$, & dont le double $4nn-54n+188$ doit être ajoûté au nombre précédent $\frac{n^3-23nn+182n-496}{2}$, pour avoir le nombre des

cas

cas $\frac{n^3 - 15nn + 74n - 120}{2} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$,

& partant la probabilité $= 3.\ \frac{4.\ \ 5.\ \ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$, qui est précisément la même que celle de l'espece précédente.

VI. Pour la sixieme espece a, $a+1$, b, c, d, je tracerai une autre route en considérant le plus petit des nombres a, b, c, d. Soit donc premierement a le plus petit, & les trois solitaires b, c, d, seront pris de cette progression $a+3$, $a+4$, ... n, dont le nombre des termes est $= n - a - 2$, & partant le nombre des cas $= \frac{(n-a-4)(n-a-5)(n-a-6)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$, d'où nous aurons pour chaque nombre a les cas suivans

si a	le nombre des cas sera	or la somme de cette progression se trouve
1	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$	
2	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$	$= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$
3	$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$	
⋮		
$n-7$	$\frac{3.\ \ 2.\ \ 1}{1.\ \ 2.\ \ 3}$.	

Ensuite, si un des nombres solitaires d est le plus petit, les quatre autres a, $a+1$, b, c, seront pris de la progression $d+2$, $d+3$ . . . . n, dont le nombre de termes est $= n - d - 1$. Or alors le nombre des cas est $= \frac{3(n-d-4)(n-d-5)(n-d-6)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$.

Par conſéquent

ſi d eſt	le nombre des cas ſera	La ſomme de cette progreſſion ſe trouve
1	$\frac{3(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	
2	$\frac{3(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$	$= \frac{3(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$
$\vdots$		
$n-7$	$3 \cdot \frac{3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3}$	

Par conſéquent la ſomme de tous les cas qui produiſent cette eſpece eſt $= 4\, \frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, & partant la probabilité $= 4 \cdot \frac{5(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}$.

VII. Enfin, pour la ſeptieme eſpece, le nombre de tous les cas qui la produiſent, eſt $= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, & partant la probabilité $= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n\,(n-1)(n-2)(n-3)}$.

Corollaire I.

15. Mettons devant les yeux à la fois les nombres des cas & les probabilités que nous venons de trouver pour les ſept eſpeces de tirages, quand on tire cinq nombres de n.

nombre

	Nombre des cas	Probabilité
I. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4$	$\frac{n-4}{1}$	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
II. $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ b$ ...	$2.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2.}$	$2.\frac{3.\ 4.\ 5\ (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
III. $a,\ a+1,\ a+2,\ b,\ b+1$ ...	$2.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2}$	$2.\frac{3.\ 4.\ 5\ (n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
IV. $a,\ a+1,\ a+2,\ b,\ c$ ..	$3.\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}$	$3.\frac{4.\ 5\ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
V. $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c$ ..	$3\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}$	$3.\frac{4.\ 5\ (n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
VI. $a,\ a+1,\ b,\ c,\ d$ ..	$4\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	$4.\frac{5\ (n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
VII. $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ ..	$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

Corollaire II.

15. Si l'on demande la probabilité qu'il y ait au moins une séquence de deux dans les 5 nombres tirés, toutes les especes, hormis la derniere, satisfont: & puisque la somme de toutes les probabilités est $= 1$, la probabilité cherchée est

$$= 1 - \frac{(n-5)\ (n-6)\ (n-7)\ (n-8)}{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)}.$$

Corollaire III.

16. Si l'on demande la probabilité, qu'il y ait parmi les 5 nombres tirés au moins deux séquences de deux, puisqu'une séquence de 3 en contient deux de 2, toutes les especes sans les

deux dernieres ſatisfont, & partant la probabilité cherchée ſera $=$
$$1 - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n+12)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Corollaire IV.

17. Or la probabilité qu'il ſe trouvera parmi les 5 nombres tirés une ſéquence de trois, ſera
$$\frac{3.4.5(2+4(n-5)+(n-5)(n-6))}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{3.\ 4.\ 5\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)},$$
& qu'il y ait une ſéquence de 4 la probabilité ſera
$$= \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5\ (n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$
Enfin, qu'il y ait une ſéquence de tous les cinq, la probabilité eſt
$$= \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Application à la Lotterie de Genes.

18. Pour appliquer ces formules à la Lotterie de Genes, où l'on tire chaque fois 5 *numeros* de 90, nous aurons $n = 90$, & pour marquer plus diſtinctement les différens cas par rapport aux ſéquences, j'employerai les caracteres ſuivans.

(1) marque un nombre ſolitaire hors de toute ſéquence,

(2) marque une ſéquence de deux,

(3) marque une ſéquence de trois,

(4) marque une ſéquence de quatre,

(5) marque une ſequence de tous les cinq.

Cela

Cela posé, nous aurons pour chacune des sept différentes especes les probabilités suivantes.

Espece	Probabilité
I. . . (5)	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5}{90.89.88.87} = \frac{1}{511038}$,
II. . . (4), (1)	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 85}{90.89.88.87} = \frac{85}{511038}$
III. (3), (2)	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 85}{90.89.88.87} = \frac{85}{511038}$
IV. (3), (1), (1)	$\frac{3.4.\ 5.\ 85.84}{90.89.88.87} = \frac{3570}{511038}$
V. (2), (2), (1)	$\frac{3.4.\ 5.\ 85.84}{90.89.88.87} = \frac{3570}{511038}$
VI. (2), (1), (1), (1)	$\frac{4.5.85.84.83}{90.89.88.87} = \frac{98770}{511038}$
VII. (1), (1), (1), (1), (1) . . .	$\frac{85.84.83.82}{90.89.88.87} = \frac{404957}{511038}$.

De là je tire les conclusions suivantes :

1°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il se trouve au moins une séquence de deux, la probabilité est $= \frac{106081}{511038}$: donc, si l'on permettoit de mettre sur ce cas, le gain devroit être fixé à $4\frac{817}{1000}$ fois la mise : & si l'on n'accordoit que 4 fois la mise, la Lotterie y gagneroit 17 pour cent.

2°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il se trouve au moins deux séquences de 2, ou une de trois, ou plusieurs, la probabilité est $= \frac{7311}{511038}$: & partant, en permettant de mettre sur ce cas, le gain doit être fixé à $69\frac{9}{10}$ fois la mise, donc, si l'on n'accordoit que 50 fois la mise, la Lotterie gagneroit 199 sur 699, ou $28\frac{1}{2}$ pour cent.

3°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il se trouve une séquence de trois, ou plusieurs, la probabilité est $= \frac{3741}{511038}$, & partant en permettant de mettre sur ce cas, le gain devroit être fixé à $136\frac{6}{10}$ fois la mise; donc, si l'on n'accordoit que 90 fois la mise, on gagneroit 466 sur 1366, ou bien $34\frac{1}{9}$ pour cent.

4°. Que, parmi les 5 nombres tirés, il se trouve une séquence de 4, ou de tous les cinq, la probabilité est $= \frac{86}{511038}$, & partant si l'on mettoit sur ce cas, le gain devroit être fixé à 5940 fois la mise: donc, si la Lotterie n'accordoit que 3000 fois la mise, elle gagneroit 2940 sur 5940, ou bien $49\frac{1}{2}$ pour cent.

REMARQUE.

19. Quelque difficile qu'il ait paru d'abord d'étendre ces recherches à des plus grands nombres de billets tirés, la route particuliere que j'ai employée dans la solution de ce probleme pour l'espece VI, rend ces recherches fort aisées, de sorte qu'on sera en état de les étendre à un aussi grand nombre de billets tirés qu'on voudra. Toute cette méthode revient à trouver la somme d'une telle progression descendante:

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots m}+\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-m)}{1.\ 2\ldots\ldots m}\ \&c.$$

jusques à ce que les termes évanouissent. Or on sait que la somme de cette progression s'exprime fort simplement en sorte

$$\frac{(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2)\ldots\ldots(k-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\ldots\ldots(m+1)}.$$

Je me servirai donc de cette méthode pour résoudre le probleme suivant.

PROBLEME V.

20. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels* 1, 2, 3, *&c. étant quelconque* = n, *si l'on en tire six au hazard, trou-*

trouver toutes les probabilités, qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.

SOLUTION.

Il est aisé d'établir toutes les especes différentes qui peuvent se rencontrer parmi les six nombres tirés, que je développerai l'une après l'autre.

I Espece. $a,\quad a+1,\quad a+2,\quad a+3,\quad a+4,\quad a+5.$

Le nombre des cas est ici ouvertement $= \frac{n-5}{1}$: donc, puisque le nombre de tous les cas possibles est

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6},$$

la probabilité que cette espece ait lieu, est

$$= \frac{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}.$$

II Espece. $a,\quad a+1,\quad a+2,\quad a+3,\quad a+4,\quad b,$

Soit a le plus petit des nombres tirés, & b doit être pris de cette progression $a+6,\ a+7,\ a+8 \ldots \ldots n$, dont le nombre de termes est $= n - a - 5$, qui donne le nombre des valeurs de b pour chaque nombre a. Mais, si b est le plus petit des nombres tirés, la séquence de cinq $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4$, doit être prise de cette progression $b+2,\ b+3 \ldots \ldots n$ dont le nombre de termes est $= n - b - 1$, ce qui par le probleme IV. peut arriver en $\frac{n-b-5}{1}$ manieres différentes. Ainsi, pour trouver le nombre des cas, nous n'avons qu'à sommer les deux progressions suivantes:

si a est	valeurs de b	si b est	valeurs de a
1	$\frac{n-6}{1}$	1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$	2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$	3	$\frac{n-8}{1}$
&c.		&c.	
somme	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$	somme $=$	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$.

Donc le nombre des cas est $= 2\ \frac{(n-5)\ (n-6)}{1.\ 2}$, & la probabilité $= 2.\ \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}$.

III Espece. a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, $b+1$.

Si a est le plus petit des nombres tirés, la séquence de deux b, $b+1$, doit être prise de cette progression : $a+5$, $a+6$, $a+7$ . . . . . n, dont le nombre des termes $= n - a - 4$. Donc, par le probleme I. le nombre des valeurs de b est $= \frac{n - a - 5}{1}$. Si b est le plus petit des 6 nombres tirés, la séquence de quatre a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, doit être prise de cette progression $b+3$, $b+4$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n - b - 2$. Donc, par le probleme III, le nombre des valeurs de a est $=$

$$\frac{n - b - 5}{1}.$$

Voilà

Voilà donc les deux progreſſions que avons à ſommer..

ſi a eſt	valeurs de b	ſi b eſt	valeur de a
1	$\frac{n-6}{1}$	1	$\frac{n-6}{1}$
2	$\frac{n-7}{1}$	2	$\frac{n-7}{1}$
3	$\frac{n-8}{1}$	3	$\frac{n-8}{1}$
&c.		&c.	
ſomme $= \frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$		ſomme $= \frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$.	

Donc le nombre des cas eſt $= 2. \frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$, & la probabilité $= 2. \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

IV Eſpece. a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, c,

Soit a le plus petit des nombres tirés, & les deux ſolitaires b, c, doivent être pris de cette progreſſion $a+5$, $a+6$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n-a-4$. Donc, par le probleme I. le nombre des cas eſt $= \frac{(n-a-5)(n-a-6)}{1.\ 2}$.

Soit l'un des nombres ſolitaires c le plus petit, & la ſéquence de 4 avec l'autre ſolitaire a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, b, doit être priſe de cette progreſſion: $c+2$, $c+3$ . . . . . . n, dont le nombre de termes $= n-c-1$. Donc, par le probleme IV. le nombre des cas eſt $= 2. \frac{(n-c-5)(n-c-6)}{1.\ 2}$.

Nous

Nous aurons donc à ſommer les deux progreſſions ſuivantes:

ſi a eſt	le nombre des cas	ſi c eſt	le nombre des cas
1	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 2}$	1	$2\,\frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 2}$
2	$\frac{(n-7)(n-8)}{1.\ 2}$	2	$2\,\frac{(n-7)(n-8)}{1.\ 2}$
3	$\frac{(n-8)(n-9)}{1.\ 2}$	3	$2\,\frac{(n-8)(n-9)}{1.\ 2}$
&c.		&c.	
ſomme $= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$		ſomme $= 2\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	

Donc le nombre des cas eſt $= 3\,\frac{(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$,

& la probabilité $= 3.\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)\,(n-7)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}$.

V Eſpece. a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, $b+2$.

Puiſqu'il y a ici deux ſéquences ſemblables de trois, il eſt indifférent lequel des deux nombres a & b ſoit le plus petit, & la ſéquence de trois, a, $a+1$, $a+2$, doit être priſe de cette progreſſion $b+4$, $b+5$ . . . . n dont le nombre de termes eſt $= n-b-3$. Donc, par le probleme II, le nombre des cas eſt $= \frac{n-b-5}{1}$, & la progreſſion à ſommer $\frac{n-6}{1}$, $\frac{n-7}{1}$, $\frac{n-8}{1}$ &c. Donc le nombre des cas eſt $= \frac{(n-5)\,(n-6)}{1.\ 2}$, & la probabilité $= \frac{3.\ 4.\ 5\ 6\ (n-6)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}$.

VI Espece. a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, c.

Si a eſt le plus petit des nombres tirés, les autres b, $b+1$, c, doivent être pris de cette progreſſion $a+4$, $a+5$ . . . . . n, dont le nombre de termes $= n - a - 3$, d'où le probleme II. le nombre des cas eſt $= 2\,\frac{(n - a - 5)}{1.}\frac{(n - a - 6)}{2}$,

& poſant $a = 1$, on a $2\,\frac{(n - 6)}{1.}\frac{(n - 7)}{2}$.

Si b eſt le plus petit des nombres tirés, les autres a, $a+1$, $a+2$, c, doivent être pris de cette progreſſion $b+3$, $b+4$ . . . . n, dont le nombre des termes eſt $n - b - 2$, d'où par le probleme III. le nombre des cas eſt $=$

$$2\,\frac{(n - b - 5)}{1.}\frac{(n - b - 6)}{2},$$

& poſant $b = 1$ on a $2\,\frac{(n - 6)}{1.}\frac{(n - 7)}{2}$.

Si c eſt le plus petit, les autres a, $a+1$, $a+2$, b, $b+1$, doivent être tirés de cette progreſſion $c+2$, $c+3$ . . . . n, dont le nombre de termes $= n - c - 1$, d'où par le probleme IV. le nombre des cas eſt $= 2\,\frac{(n - c - 5)}{1.}\frac{(n - c - 6)}{2}$,

& poſant $c = 1$, on a $2\,\frac{(n - 6)}{1.}\frac{(n - 7)}{2}$.

Les trois progreſſions à ſommer ſe réduiſent donc à cette ſeule

$$6\,\frac{(n - 6)}{1.}\frac{(n - 7)}{2} + 6\,\frac{(n - 7)}{1.}\frac{(n - 8)}{2} + \&c.$$

 Donc

Donc le nombre des cas est $= 6 \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1. \quad 2. \quad 3}$,

& la probabilité $= 6. \frac{4. \quad 5. \quad 6 \quad (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

VII Espece. $a, \quad a+1, \quad a+2, \quad b, \quad c, \quad d.$

Si a le plus petit des nombres tirés, au lieu duquel on peut d'abord prendre l'unité, les autres b, c, d, doivent être pris de cette progression: $5, 6, 7 \ldots n$, dont le nombre des termes $= n-4$.

Donc, par le probleme II, le nombre des cas est

$$= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1. \quad 2. \quad 3}.$$

Si un des solitaires est le plus petit, comme $d = 1$, les autres $a, \quad a+1, \quad a+2, \quad b, \quad c,$ doivent être pris de cette progression $3, 4, 5 \ldots n$, dont le nombre des termes $= n-2$.

Donc, par le probleme IV, le nombre des cas

$$= 3 \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1. \quad 2. \quad 3}.$$

Il s'agit donc de sommer la progression descendante qui commence par $4 \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1. \quad 2. \quad 3}$.

Donc le nombre de tous les cas $= 4 \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$,

& la probabilité $= 4. \frac{5. \quad 6 \quad (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

VIII Espece. $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c,\ c+1.$

Ici il n'y a qu'un seul cas à considérer. Soit donc $c = 1$, & les autres $a,\ a+1,\ b,\ b+1,$ doivent être tirés de cette progression: $4, 5, 6 \ldots n$, dont le nombre des termes $= n - 3$, d'où par le probleme III. le nombre des cas $= \frac{(n-6)(n-7)}{1.\ 2}$, qui donne la progression à sommer.

Donc le nombre de tous les cas est $= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$,

& la probabilité $= \frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

IX Espece. $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c,\ d.$

Soit $a = 1$ & les autres $b,\ b+1,\ c,\ d$, doivent être tirés de cette progression: $4, 5, 6 \ldots n$, dont le nombre des termes $= n - 3$.

Donc par le probleme III. le nombre des cas

$$= 3\ \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3},$$

& dans cette formule est déjà comprise la position $b = 1$.

Soit $d = 1$, où est déjà comprise la lettre c, les autres: $a,\ a+1,\ b,\ b+1,\ c$, doivent être tirés de cette progression: $3, 4 \ldots n$, dont le nombre de termes $= n - 2$.

Donc, par le probleme IV. le nombre des cas

$$= \frac{3\ (n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2\ 3},$$

& partant on n'a qu'à sommer la progression descendante qui commence par le terme $6\ \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3}$.

D'où

D'où le nombre de tous les cas $= 6\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$,

& la probabilité $= 6.\,\frac{5.\ 6\ (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

X Espece. $a,\ a+1,\ b,\ c,\ d,\ e.$

Soit premierement $a = 1$, & les quatre nombres solitaires b, c, d, e, doivent être tirés de cette progression: $4, 5, 6 \ldots\ldots n$, dont le nombre des termes $= n - 3$, & par le probleme III. le nombre des cas $= \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

Soit ensuite un des solitaires $e = 1$, & les autres $a, a+1, b, c, d$, doivent être tirés de cette progression: $3, 4, 5 \ldots\ldots n$, dont le nombre des termes $= n - 2$, & par le probleme IV. le nombre des cas $= 4\,\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$, de sorte qu'il s'agit de sommer la progression descendante qui commence par le terme $5\,\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$.

Donc le nombre de tous les cas

$$= 5\,\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}.$$

& la probabilité $= 5.\,\frac{6\,(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

XI Espece. $a, b, c, d, e, f.$

Ici n'ayant qu'un cas à considérer, posons $f = 1$, & les autres a, b, c, d, e, doivent être tirés de cette progression: $3, 4, 5 \ldots\ldots n$, dont le nombre des termes $= n - 2$.

Ainsi,

Ainſi, par le probleme IV. le nombre des cas

$$= \frac{(n-6)\,(n-7)\,(n-8)\,(n-9)\,(n-10)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}.$$

Donc le nombre de tous les cas

$$= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6},$$

& la probabilité

$$= \frac{(n-6)\,(n-7)\,(n-8)\,(n-9)\,(n-10)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}.$$

COROLLAIRE I.

21. Pour mettre tout cela clairement devant les yeux, je ferai uſage des mêmes caracteres pour marquer les différentes eſpeces de ſéquences que j'ai expoſées §. 18, & nous aurons pour chaque eſpece.

Eſpeces	Nombre des cas	Probabilité
I. . . (6)	$\frac{n-5}{1}$	$\frac{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
II. . . (5) + (1)	$\frac{2(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$	$2.\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
III. (4) + (2)	$\frac{2(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$	$2.\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
IV. (4)+2(1) . . .	$3\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3}$	$3.\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
V. 2(3)	$\frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}$	$\frac{3.\ 4.\ 5.\ 6\ (n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

Especes	Nombre des cas	Probabilité
VI. (3)+(2)+(1) . . .	$6\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$	$6.\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VII. (3)+3(1) . .	$4\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$	$4.\frac{5.\ 6\ (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
VIII. 3(2)	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$	$\frac{4.\ 5.\ 6\ (n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
IX. 2(2)+2(1) . . .	$6\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$	$6.\frac{5.\ 6\ (n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
X. (2)+4(1) . .	$5\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}$	$5.\frac{6\ (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
XI. 6(1) . .	$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}$	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

Corollaire II.

22. La loi de ces expressions pour le nombre des cas de chaque espece est assez évidente, puisque le nombre des facteurs dans les numérateurs est le même que celui des différentes lettres dont j'ai caracterisé auparavant les différentes especes, en commençant par $n - 5$, & les diminuant d'une unité: or le dénominateur contient toujours autant de facteurs en commençant par 1, 2, 3, &c. Mais la loi des coëfficiens numériques n'est pas si évidente; cependant elle le deviendra assez en réprésentant les nombres des cas de la maniere suivante.

Especes	Nombre des cas
$1(6)$	$\frac{n-5}{1}$
$1(5)+1(1)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{1}$
$1(4)+1(2)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{1}$
$1(4)+2(1)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{1} \cdot \frac{n-7}{2}$
$2(3)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{2}$
$1(3)+1(2)+1(1)$ . . .	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{1} \cdot \frac{n-7}{1}$
$1(3)+3(1)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{1} \cdot \frac{n-7}{2} \cdot \frac{n-8}{3}$
$3(2)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{2} \cdot \frac{n-7}{3}$
$2(2)+2(1)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{2} \cdot \frac{n-7}{1} \cdot \frac{n-8}{2}$
$1(2)+4(1)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{1} \cdot \frac{n-7}{2} \cdot \frac{n-8}{3} \cdot \frac{n-9}{4}$
$6(1)$	$\frac{n-5}{1} \cdot \frac{n-6}{2} \cdot \frac{n-7}{3} \cdot \frac{n-8}{4} \cdot \frac{n-9}{5} \cdot \frac{n-10}{6}$,

où les dénominateurs ſuivent manifeſtement les coëfficiens des ſéquences de chaque ordre, qui caractériſent chaque eſpece.

REMARQUE.

23. Nous voilà donc maintenant en état de rendre ces recherches tout à fait générales: cependant on ne sauroit commencer par le probleme général, puisque chaque nombre des billets tirés dépend de tous les précédens. Mais, quoique cette derniere méthode que je viens d'employer, ait de si grands avantages, il est pourtant à présumer, qu'on en découvrira encore une plus simple.

PROBLEME GÉNÉRAL.

24. *Le nombre des billets marqués des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. étant quelconque* $= n$; *si l'on en tire* m *billets au hazard, déterminer toutes les probabilités, qui y peuvent avoir lieu à l'égard des séquences.*

SOLUTION.

Pour distinguer les différentes sortes de séquences qui peuvent se trouver dans chaque tirage de m nombres, je me servirai de ces signes:

(1) marque un nombre solitaire,

(2) marque une séquence de deux nombres,

(3) marque une séquence de trois nombres,

(4) marque une séquence de quatre nombres.

&c.

Cela posé, chaque tirage sera caractérisé par une telle formule $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c) + \delta(d)$ &c. ce qui signifie, qu'il y a α séquences de a nombres, β séquences de b nombres, γ séquences de c nombres, δ séquences de d nombres &c. & puisque la multitude des nombres tirés est $= m$, il faut qu'il soit

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d \text{ \&c.} = m.$$

Posons

Posons maintenant de plus $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ &c. $= k$, & le nombre de tous les cas qui produisent ledit tirage $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c) + \delta(d)$ &c. sera exprimé en sorte

$$\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots\ldots(n-m-k+2)}{1.2\ldots\alpha,\ 1.2\ldots\beta,\ 1.2\ldots\gamma,\ 1.2\ldots\delta\ \&c.},$$

lequel nombre étant divisé par le nombre de tous les cas possibles qui est $= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots m}$, donnera la probabilité que ce même cas existe. C'est en quoi consiste la solution complette de notre probleme.

Corollaire I.

25. On aura donc autant d'especes de tirage, qu'il est possible de trouver de différentes formules $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c)$ &c. dont la somme $\alpha a + \beta b + \gamma c +$ &c. soit $= m$, c'est à dire, autant qu'il est possible de partager le nombre m de différentes manieres en parties: ainsi, prenant pour m successivement les nombres 1, 2, 3, 4, &c. les nombres des especes formeront la progression suivante:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,
1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, &c.

dont j'ai expliqué la nature dans mes recherches sur la partition des nombres.

Corollaire II.

26. Le nombre des facteurs qui composent le nombre des cas pour chaque espece $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c) +$ &c. est toujours égal au nombre $k = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c. qui marque en combien de parties le nombre m est partagé. Et prenant toutes les especes ensemble, où k a la même valeur, leurs nombres de cas font conjointement cette somme:

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.\ 2\ldots k-1}\cdot\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots(n-m-k+2)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots k}.$$

Ainsi

Ainſi ſi k eſt	les nombres des cas de toutes les eſpeces, qui appartiennent à cette valeur de k ſont
1	$\frac{n-m+1}{1}$
2	$\frac{m-1}{1} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m)}{1.\quad 2}$
3	$\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)}{1.\quad 2.\quad 3}$
4	$\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$
	&c.

& tous ces nombres de cas ajoûtés enſemble doivent produire le nombre de tous les cas poſſibles, qui eſt

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\ldots m}.$$

Corollaire III.

27. La premiere eſpece étant $1(m)$, où tous les m nombres tirés forment une ſuite, on aura $k=1$, & le nombre des cas eſt $=\frac{n-m+1}{1}$; mais la derniere eſpece étant $m(1)$ où il n'y a aucune ſéquence, il devient $k=m$, & le nombre des cas $=\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots(n-2m+2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots m}$.

Donc la probabilité qu'il n'y ait aucune ſéquence parmi les m nombres tirés eſt

$$\frac{(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots(n-2m+2)}{n\quad(n-1)\quad(n-2)\ldots\ldots,(n-m+1)},$$

ou

ou bien $\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\ldots\ldots(n-2m+2)}{n\quad(n-1)\quad(n-2)\ldots\ldots(n-m+2)}$.
Or cette même formule exprime auſſi la probabilité, que de $m-1$ nombres donnés il ne ſe trouve aucun parmi les m nombres tirés.

EXEMPLE.

28. Faiſons l'application, où de n billets marqués des nombres 1, 2, 3 . . . . n, on tire 7 billets: & l'on trouvera le nombre des cas, qui produiſent chacune des 15 eſpeces qui peuvent avoir lieu dans un tirage de 7 nombres.

Eſpeces	nombre des cas
I. (7)	$\frac{n-6}{1}$,
II. (6) + (1)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 1}$,
III. (5) + (2)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 1}$,
IV. (4) + (3)	$\frac{(n-6)(n-7)}{1.\quad 1}$,
V. (5) + 2 (1) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 1.\quad 2}$,
VI. (4) + (2) + (1) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 1.\quad 1}$,
VII. 2 (3) + (1) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 2.\quad 1}$,
VIII. (3) + 2 (2) . . .	$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\quad 1.\quad 2}$.

IX. $(4)+3(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{1.}\frac{(n-8)}{2.}\frac{(n-9)}{3}$,

X. $(3)+(2)+2(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{1.}\frac{(n-8)}{1.}\frac{(n-9)}{2}$,

XI. $3(2)+(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{2.}\frac{(n-8)}{3.}\frac{(n-9)}{1}$,

XII. $(3)+4(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{1.}\frac{(n-8)}{2.}\frac{(n-9)}{3.}\frac{(n-10)}{4}$,

XIII. $2(2)+3(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{2.}\frac{(n-8)}{1.}\frac{(n-9)}{2.}\frac{(n-10)}{3}$,

XIV. $(2)+5(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{1.}\frac{(n-8)}{2.}\frac{(n-9)}{3.}\frac{(n-10)}{4.}\frac{(n-11)}{5}$,

XV. $7(1)\ldots\frac{(n-6)}{1.}\frac{(n-7)}{2.}\frac{(n-8)}{3.}\frac{(n-9)}{4.}\frac{(n-10)}{5.}\frac{(n-11)}{6.}\frac{(n-12)}{7}$.

Chacun de ces nombres diviſés par le nombre de tous les cas poſſibles qui eſt $\frac{n}{1.}\frac{(n-1)}{2.}\frac{(n-2)}{3.}\frac{(n-3)}{4.}\frac{(n-4)}{5.}\frac{(n-5)}{6.}\frac{(n-6)}{7}$, donne la probabilité que l'eſpece correſpondante exiſte.