1767

Recherches sur la courbure des surfaces

Leonhard Euler

RECHERCHES
SUR
LA COURBURE DES SURFACES.
PAR M. EULER.

Pour connoitre la courbure des lignes courbes, la détermination du rayon oſculateur en fournit la plus juſte meſure, en nous préſentant pour chaque point de la courbe un cercle, dont la courbure eſt préciſément la même. Mais, quand on demande la courbure d'une ſurface, la queſtion eſt fort équivoque, & point du tout ſuſceptible d'une reponſe abſolue, comme dans le cas précédent. Il n'y a que les ſurfaces ſphériques dont on puiſſe meſurer la courbure, attendu que la courbure d'une ſphere eſt la même que celle de ſes grands cercles, & que ſon rayon en peut être regardé comme la juſte meſure. Mais pour les autres ſurfaces on n'en ſauroit même comparer la courbure avec celle d'une ſphere, comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raiſon en eſt évidente puisque, dans chaque point d'une ſurface, il peut y avoir une infinité de courbures différentes. On n'a qu'à conſidérer la ſurface d'un cylindre, où ſelon les directions paralleles à l'axe il n'y a aucune courbure, pendant que dans les ſections perpendiculaires à l'axe, qui ſont des cercles, la courbure eſt la même, & que toute autre ſection faite obliquement à l'axe donne une courbure particuliere. Il en eſt de même de toutes les autres ſurfaces, où il peut même arriver que dans un ſens la courbure ſoit convexe, & dans un autre concave, comme dans celles qui reſſemblent à une ſelle.

Donc la queſtion ſur la courbure des ſurfaces n'eſt pas ſuſceptible d'une réponſe ſimple, mais elle exige à la fois une infinité de déter-

mi-

minations: car, puisqu'on peut tracer par chaque point d'une ſurface une infinité de directions, il faut connoitre la courbure ſelon chacune, avant qu'on puiſſe ſe former une juſte idée de la courbure de la ſurface. Or, par chaque point d'une ſurface, on peut faire paſſer une infinité de ſections, & cela non ſeulement par rapport à toutes les directions ſur la ſurface même, mais auſſi par rapport à leur inclinaiſon différente ſur la ſurface. Mais, pour le ſujet préſent, il ſuffit de ne conſidérer de toutes ces infinies ſections que celles qui ſont perpendiculaires ſur la ſurface, dont le nombre eſt pourtant encore infini. Pour cet effet, on n'a qu'à tirer à la ſurface la ligne droite perpendiculaire, & toutes les ſections qui paſſent par cette ligne ſont en même tems perpendiculaires à la ſurface, alors pour chacune de ces ſections il faut chercher la courbure, ou le rayon oſculateur, & l'aſſemblage de tous ces rayons nous donnera la juſte meſure de la courbure de la ſurface au point donné, où il faut obſerver que chacun de ces rayons tombe ſur la même direction qui eſt perpendiculaire à la ſurface, & que les arcs élémentaires de toutes ces ſections appartiennent aux lignes les plus courbes qu'on peut tirer ſur la ſurface.

Or, pour rendre ces recherches plus générales, je commencerai par déterminer le rayon oſculateur pour une ſection quelconque plane, dont on coupe la ſurface; enſuite j'appliquerai cette ſolution aux ſections qui ſont perpendiculaires à la ſurface, dans un point donné quelconque; & enfin je comparerai entr'eux les rayons oſculateurs de toutes ces ſections, par rapport à leur inclinaiſon mutuelle, ce qui nous mettra en état d'établir une idée juſte de la courbure des ſurfaces. Toutes ces recherches ſe réduiſent donc aux problemes ſuivans.

PROBLEME I.

1. *Une ſurface dont la nature eſt connue étant coupée par un plan quelconque, déterminer la courbure de la ſection, qui en eſt formée.*

SOLUTION.

Planche III. Fig. 1. Qu'on rapporte la ſurface à un plan fixe qui ſoit celui de la planche, & y ayant baiſſé d'un point quelconque Z de la ſurface la per-

perpendiculaire ZY, & du point Y à un axe fixe AC la perpendiculaire YX, soient les trois coordonnées $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$: & puisque la nature de la surface est connue, la quantité z sera égale à une certaine fonction des deux autres x & y. Supposons donc qu'on en tire par la différentiation $dz = pdx + qdy$, de sorte que $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, & $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Que la section dont on coupe la surface passe par le point Z, & que l'intersection de son plan avec notre plan fixe soit la ligne EF. Soit $z = \alpha y - \beta x + \gamma$, équation qui détermine ce plan, & posant $z = 0$, l'équation $y = \frac{\beta x - \gamma}{\alpha}$, donnera l'intersection EF, d'où nous tirons: $AE = \frac{\gamma}{\beta}$: & la tangente de l'angle $CEF = \frac{\beta}{\alpha}$, donc le sinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & le cosinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$. De là, en égalant les deux valeurs de z, nous aurons une équation pour la section $\alpha dy - \beta dx = pdx + qdy$, ou bien $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta + p}{\alpha - q}$. Mais, pour réduire cette équation à des coordonnées rectangulaires, tirons de Y à l'intersection EF la perpendiculaire YT, & la droite ZT y sera aussi perpendiculaire. Maintenant, puisque $EX = x - \frac{\gamma}{\beta}$, nous aurons

$$ET = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}, \quad \&$$

$$TY = \frac{\alpha y - \beta x}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} + \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = \frac{z}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}},$$

& partant $TZ = \frac{z\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = \frac{(\alpha y - \beta x + \gamma)\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$.

Posant donc

$$ET = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} - \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = t, \quad \&$$

$$TZ = \frac{(\alpha y - \beta x + \gamma)\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + 1)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} = u,$$

nous pourrons regarder ces lignes t & u comme des coordonnées orthogonales de la section en question. Donc, si nous posons $du = s\,dt$, le rayon osculateur de la section au point M sera $= -\frac{dt(1 + ss)^{\frac{3}{2}}}{ds}$ entant qu'il est tourné vers la base EF. Il ne s'agit donc à présent qu'à réduire cette expression aux coordonnées x & y. Pour cet effet, puisque

$$dt = \frac{\alpha dx + \beta dy}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}, \quad \& \; du = \frac{\alpha dy - \beta dx}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)},$$

à cause de $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta + p}{\alpha - q}$ nous en tirons

$$s = \frac{du}{dt} = \frac{\alpha p + \beta q}{\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p}\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)},$$

$$\text{donc } 1 + ss = \frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)(\alpha\alpha + \beta\beta - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + pp + qq)}{(\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p)^2}.$$

Ensuite, pour le différentiel de s, nous aurons

$$ds = \frac{(\alpha\alpha + \beta\beta)(\alpha dp + \beta dq - q dp + p dq)\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}{(\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p)^2}.$$

Remarquons à présent que

$$dp = dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right), \quad \& \; dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right),$$

d'où

d'où nous concluons :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(\alpha - q)\left(\frac{dp}{dx}\right) + (\beta + p)\left(\frac{dp}{dy}\right)}{\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p}\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}, \text{ \&}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(\alpha - q)\left(\frac{dq}{dx}\right) + (\beta + p)\left(\frac{dq}{dy}\right)}{\alpha\alpha + \beta\beta - \alpha q + \beta p}\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)},$$

& partant :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(\alpha\alpha+\beta\beta)^{\frac{3}{2}}\left((\alpha-q)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(\beta+p)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(\alpha-q)(\beta+p)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)\sqrt{(1+\alpha\alpha+\beta\beta)}}{(\alpha\alpha+\beta\beta-\alpha q+\beta p)^3},$$

à cause de $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{dy}\right)$, comme il eſt connu d'ailleurs. Par conſéquent, le rayon oſculateur de la ſection au point Z ſera exprimé en ſorte :

$$= \frac{(\alpha\alpha+\beta\beta-2\alpha q+2\beta p+(\alpha p+\beta q)^2+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{\left((\alpha-q)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(\beta+p)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(\alpha-q)(\beta+p)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)\sqrt{(1+\alpha\alpha+\beta\beta)}}.$$

Voilà donc la véritable expreſſion du rayon oſculateur pour une ſection quelconque, dont on coupe la ſurface propoſée.

Corollaire I.

2. L'inclinaiſon de cette ſection au plan fixe eſt meſurée par l'angle YTZ, dont la tangente eſt $\frac{YZ}{YT} = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$, & partant le ſinus $= \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}{\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & le coſinus $= \frac{1}{\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}}$, pendant que de l'angle CEF la tangente

eſt

eſt $= \frac{\beta}{\alpha}$; donc le ſinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, & le coſinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$.

COROLLAIRE II.

3. Par rapport à la ſection, il n'y a que les deux lettres α & β, qui entrent dans la détermination du rayon oſculateur, la troiſieme lettre γ étant compriſe dans la condition que la ſection paſſe par le point Z. Or ces deux lettres ſe réduiſent aux deux angles CEF, & YTZ.

COROLLAIRE III.

4. Si nous poſons ces angles CEF $= \zeta$, & YTZ $= \theta$, nous aurons $\beta = \alpha \operatorname{tang} \zeta$, & $\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} = \operatorname{tang} \theta$, d'où il s'enſuit $\alpha = \operatorname{coſ} \zeta \operatorname{tang} \theta$, & $\beta = \operatorname{ſin} \zeta \operatorname{tang} \theta$; & de plus $\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)}\ \frac{1}{\operatorname{coſ} \theta}$. Mais cette ſubſtitution ne rend pas plus ſimple l'expreſſion que nous venons de trouver pour le rayon oſculateur.

PROBLEME II.

Fig. 2. 5. *Si le plan de la ſection eſt perpendiculaire à la ſurface au point Z, déterminer le rayon oſculateur de cette ſection au même point Z.*

SOLUTION.

Pour cet effet on n'a qu'à tirer du point Z la ligne ZP, qui ſoit perpendiculaire à la ſurface, & faire en ſorte que le plan de la ſection paſſe par cette ligne ZP. Qu'on conſidere deux autres ſections faites par le point Z, l'une & l'autre perpendiculaire au plan de la planche, l'interſection de l'une étant la ligne YM parallele à l'axe AL, & celle de l'autre YN y ſoit perpendiculaire. Pour la premiere de ces deux ſections, la quantité XY $= y$ doit être priſe conſtante, & l'équation $dz = p\,dx$ donnera pour la ſousnormale

YM

$YM = \frac{z\,dz}{dy} = pz$. Or, pour l'autre ſection, prenant x conſtante, l'équation $dx = q\,dy$ donne la ſousnormale $YN = \frac{z\,dz}{dy} = qz$. Tirant maintenant par les points M & N les lignes MP & NP paralleles aux coordonnées XY & AX qui s'entrecoupent au point P, la droite ZP ſera perpendiculaire à l'une & l'autre de nos deux ſections, & partant elle ſera auſſi perpendiculaire à la ſurface au point Z. Il faut donc que les ſections dont il eſt queſtion dans le probleme paſſent par cette ligne ZP, qui donnera en même tems la poſition du rayon oſculateur, que nous cherchons. Nous n'avons donc qu'à faire paſſer l'interſection EF par le point P. Soit ζ l'angle PEL, que fait cette interſection avec l'axe AL, de ſorte que $\beta = \alpha \text{ tang } \zeta$; & puisque la perpendiculaire tirée de N ſur EP ſeroit $= NP \text{ ſin } \zeta = pz \text{ ſin } \zeta$, nous en concluons la perpendiculaire $YT = z(p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta)$, & partant la tangente de l'angle $YTZ = \frac{1}{p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta}$, qui ſera la valeur de tang θ, & de là nous tirons $\alpha = \frac{\text{coſ } \zeta}{p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta}$, & $\beta = \frac{\text{ſin } \zeta}{p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta}$: donc, puisque $\beta : \alpha = \text{ſin } \zeta : \text{coſ } \zeta$, l'une & l'autre donne $\beta p - \alpha q = 1$. Or, ſubſtituant ces valeurs pour α & β dans l'expreſſion trouvée pour le rayon oſculateur, le numérateur deviendra

$$\frac{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}} (1 + (p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}{(p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta)^3},$$

& pour le dénominateur

$$\sqrt{(1 + \alpha\alpha + \beta\beta)} = \frac{\sqrt{(1 + (p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta)^2)}}{p \text{ ſin } \zeta - q \text{ coſ } \zeta},$$

& l'autre facteur:

$$\frac{((1+qq)\cos\zeta - pq\sin\zeta)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+((1+pp)\sin\zeta - pq\cos\zeta)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2((1+qq)\cos\zeta - pq\sin\zeta)((1+pp)\sin\zeta - pq\cos\zeta)\left(\frac{dp}{dy}\right)}{(p\sin\zeta - q\cos\zeta)^2}$$

& partant le rayon osculateur au point Z sera

$$\frac{-(1+(p\sin\zeta - q\cos\zeta)^2)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{((1+qq)\cos\zeta - pq\sin\zeta)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+((1+pp)\sin\zeta - pq\cos\zeta)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2((1+qq)\cos\zeta - pq\sin\zeta)((1+pp)\sin\zeta - pq\cos\zeta)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

COROLLAIRE I.

6. Voilà donc la grandeur du rayon osculateur, tant pour tous les points de la surface que pour toutes les sections faites perpendiculairement à la surface dans chacun de ses points, le point Z de la surface étant déterminé par les quantités p & q, & la diversité des sections par l'angle ζ.

COROLLAIRE II.

7. Le point Z de la surface étant donné avec la position de la droite ZP, qui y est perpendiculaire à la surface, chaque ligne droite EF tirée par le point P fournit une telle section faite selon le plan EPZ.

Remarque.

8. Parmi toutes ces sections nous pourrons regarder comme la principale celle dont la ligne EF passe par le point Y de la base, & partant dont le plan même est perpendiculaire sur la base. Alors, puisque l'intervalle YT évanouït, pour l'angle FEI $= \zeta$, nous avons cette détermination $p \sin\zeta - q \cos\zeta = 0$, & partant $\sin\zeta = \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}$, & $\cos\zeta = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$: substituant ces valeurs, nous aurons pour le rayon osculateur de cette section

section principale

$$\frac{-(pp+qq)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{pp\left(\frac{dp}{dx}\right)+qq\left(\frac{dq}{dy}\right)+2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

laquelle expression est d'autant plus remarquable, qu'elle paroit la plus simple de toutes les sections faites par le point Z. Cependant cette autre section, où l'intervalle $PT = p \cos\zeta + q \sin\zeta$ évanouit, & l'intersection EF est perpendiculaire à la ligne PY, semble encore surpasser en simplicité celle-là. Car, puisque $\sin\zeta = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}$, & $\cos\zeta = \frac{-q}{\sqrt{(pp+qq)}}$, le rayon osculateur est exprimé par cette formule

$$\frac{-(pp+qq)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{qq\left(\frac{dp}{dx}\right)+pp\left(\frac{dq}{dy}\right)-2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

où il est bon d'observer que cette section est perpendiculaire à la précédente.

PROBLEME III.

2. *Une surface quelconque étant proposée, trouver le rayon osculateur pour une section* EPZ, *qui fait avec la section principale* YPZ *un angle donné* $= \Phi$. Planche I. Fig. 3

SOLUTION.

Pour la position de la section principale YPZ, nous venons de trouver $YM = pz$, & $MP = qz$, donc $YP = z\sqrt{(pp+qq)}$, & partant

$$\sin YPM = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)}}, \quad \& \cos YPM = \frac{q}{\sqrt{(pp+qq)}}.$$

En-

Enſuite, à cauſe de ZP $= z\sqrt{(1+pp+qq)}$, nous aurons

$$\sin \mathrm{YPZ} = \frac{1}{\sqrt{(1+pp+qq)}}, \quad \& \ \cos \mathrm{YPZ} = \frac{\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}}.$$

Soit à préſent Φ l'angle que fait la nouvelle ſection EPZ avec la principale YPZ, que nous ſuppoſons être tournée vers l'axe AL, de ſorte que, ſi l'angle Φ tendoit à l'autre côté on le devroit prendre négatif. Or, pour introduire dans le calcul cette inclinaiſon Φ, puisque le plan YPZ eſt perpendiculaire à la baſe, tirons YS en ſorte, que l'angle PYS ſoit droit, afin que cette ligne YS ſoit perpendiculaire au plan YPZ: qu'on tire de plus dans ce plan la ligne YR perpendiculaire: ſoit PZ, & nous aurons

$$\mathrm{YR} = \frac{z\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}}, \quad \& \ \mathrm{PR} = \frac{z(pp+qq)}{\sqrt{(1+pp+qq)}},$$

& parce que la ligne SR ſera auſſi perpendiculaire à la ligne PZ, qui eſt l'interſection de nos deux plans, l'angle YRS en meſure l'inclinaiſon, de ſorte que YRS $= \Phi$. De là on tire

$$\mathrm{YS} = \mathrm{YR} \tan \Phi = \frac{z \tan \Phi \sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}},$$

& partant

$$\mathrm{PS} = z\sqrt{\left(pp+qq+\frac{\tan\Phi^2(pp+qq)}{1+pp+qq}\right)} = \frac{z\sqrt{((pp+qq)(1+pp+qq)+\tan\Phi^2)}}{\sqrt{(1+pp+qq)}},$$

d'où nous concluons l'angle EPY, en ſorte que

$$\tan \mathrm{EPY} = \frac{\tan\Phi}{\sqrt{(1+pp+qq)}}.$$

Donc, puiſque tang YPM $= \frac{p}{q}$, nous aurons

$$\tan \mathrm{EPM} = \frac{p\sqrt{(1+pp+qq)}-q\tan\Phi}{q\sqrt{(1+pp+qq)}+p\tan\Phi} = \cot \mathrm{PEL} = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta},$$

en poſant comme ci-deſſus l'angle LEP $= \zeta$.

Poſons

Posons pour abréger

$$\sqrt{(pp+qq)(1+pp+qq+\operatorname{tang}\Phi^2)} = r,$$

& nous trouvons:

$$p\sin\zeta - q\cos\zeta = \frac{(pp+qq)\operatorname{tang}\Phi}{r} = \frac{\operatorname{tang}\Phi\sqrt{(pp+qq)}}{\sqrt{(1+pp+qq+\operatorname{tang}\Phi^2)}},$$

donc

$$1+(p\sin\zeta - q\cos\zeta)^2 = \frac{\sec\Phi^2\,(1+pp+qq)}{1+pp+qq+\operatorname{tang}\Phi^2}.$$

Ensuite

$$(1+qq)\cos\zeta - pq\sin\zeta = \frac{p-q\operatorname{tang}\Phi.\sqrt{(1+pp+qq)}}{r}.\sqrt{(1+pp+qq)},$$

$$\&\ (1+pp)\sin\zeta - pq\cos\zeta = \frac{q+p\operatorname{tang}\Phi.\sqrt{(1+pp+qq)}}{r}.\sqrt{(1+pp+qq)},$$

à cause de

$$\sin\zeta = \frac{q\sqrt{(1+pp+qq)}+p\operatorname{tang}\Phi}{r},\ \&\ \cos\zeta = \frac{p\sqrt{(1+pp+qq)}-q\operatorname{tang}\Phi}{r},$$

Substituons maintenant ces valeurs dans l'expression précédente, & le rayon osculateur de la section EPZ sera:

$$\frac{-(pp+qq)(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}\sec.\varphi^2}{\left(\frac{dp}{dx}\right)(p-q\operatorname{tag}\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})^2+\left(\frac{dq}{dy}\right)(q+p\operatorname{tag}\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})^2+2\left(\frac{dp}{dy}\right)(p-q\operatorname{tag}\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})(q+p\operatorname{tag}\varphi.\sqrt{(1+pp+qq)})}$$

COROLLAIRE I.

10. Pour abréger cette formule, posons $\sqrt{(1+pp+qq)} = u$, & l'expression pour notre rayon osculateur deviendra:

$$\frac{-u^3(pp+qq)\sec.\Phi^2}{(p-qu\operatorname{tang}\Phi)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(q+pu\operatorname{tang}\Phi)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(p-qu\operatorname{tang}\Phi)(q+pu\operatorname{tang}\Phi)\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

qui

qui ſe réduit à celle-ci :

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(p\,\mathrm{cos}\,\Phi - qu\,\mathrm{sin}\,\Phi)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(q\,\mathrm{cos}\,\Phi + pu\,\mathrm{sin}\,\Phi)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(p\,\mathrm{cos}\,\Phi - qu\,\mathrm{sin}\,\Phi)(q\,\mathrm{cos}\,\Phi + pu\,\mathrm{sin}\,\Phi)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

COROLLAIRE II.

11. Si nous poſons enſuite

$$p\,\mathrm{cos}\,\Phi - qu\,\mathrm{sin}\,\Phi = s(q\,\mathrm{cos}\,\Phi + pu\,\mathrm{sin}\,\Phi),$$

notre expreſſion pour le rayon oſculateur deviendra encore plus ſimple, & ſe réduit à celle-ci :

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(q\,\mathrm{cos}\,\Phi + pu\,\mathrm{sin}\,\Phi)^2\left(ss\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)+2s\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)},$$

où l'on a $\frac{\mathrm{sin}\,\Phi}{\mathrm{cos}\,\Phi} = \frac{p - sq}{u(q + sp)}$, & de là cette expreſſion devient

$$\frac{-u(1+qq+2spq+ss(1+pp))}{ss\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)+2s\left(\frac{dp}{dy}\right)},$$

où, prenant s à volonté, on en connoitra aiſément l'inclinaiſon Φ, que la ſection fait avec la ſection principale.

COROLLAIRE III.

12. Ici il ſe préſente d'abord deux ſections fort remarquables, l'une ou $s = 0$, ou bien $\mathrm{tang}\,\Phi = \frac{p}{qu}$, donc

$$\mathrm{sin}\,\Phi = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)(1+qq)}}, \quad \& \quad \mathrm{cos}\,\Phi = \frac{q\sqrt{(1+pp+qq)}}{\sqrt{(pp+qq)(1+qq)}},$$

pour laquelle le rayon oſculateur eſt $= \frac{-u(1+qq)}{\left(\frac{dq}{dy}\right)}$.

L'autre

L'autre ſection eſt où $s = \infty$, & tang $\Phi = \frac{-q}{pu}$, donc

$$\sin\Phi = \frac{p}{\sqrt{(pp+qq)(1+pp)}}, \ \& \ \cos\Phi = -\frac{p\sqrt{(1+pp+qq)}}{\sqrt{(pp+qq)(1+pp)}},$$

pour laquelle le rayon oſculateur eſt $= -\frac{u(1+pp)}{\left(\frac{dp}{dx}\right)}$. Or la tangente de l'inclinaiſon mutuelle de ces deux ſections eſt $= -\frac{1}{pq}$, en ſuppoſant celle de la derniere avec la principale plus grande.

Corollaire IV.

13. Pour le même point Z de la ſurface, tous les rayons oſculateurs des diverſes ſections ne ſauroient être égaux entr'eux, à moins que ces trois formules $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, ne ſoient proportionelles à ces trois expreſſions $1+pp$, $1+qq$, pq: ou bien à moins que ces trois équations n'ayent lieu.

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = R(1+pp); \ \left(\frac{dq}{dy}\right) = R(1+qq), \ \& \ \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) = Rpq,$$

ou $pq\left(\frac{dp}{dx}\right) = (1+pp)\left(\frac{dq}{dx}\right)$, & $pq\left(\frac{dq}{dy}\right) = (1+qq)\left(\frac{dp}{dy}\right)$.

Remarque.

14. La derniere formule eſt la plus commode pour en faire l'application à des cas propoſés quelconques. L'équation pour la ſurface étant réduite par la différentiation à cette forme $dz = pdx + qdy$, on aura pour le rayon oſculateur d'une ſection quelconque faite perpendiculairement à la ſurface au point Z ſera exprimé par cette formule

$$\frac{-(1+qq+2spq+ss(1+pp))\sqrt{(1+pp+qq)}}{\left(\frac{dq}{dy}\right)+2s\left(\frac{dp}{dy}\right)+ss\left(\frac{dp}{dx}\right)},$$

où la lettre s marque toutes les valeurs possibles, chaque valeur appartenant à une section déterminée : savoir, ayant fixé la section principale, qui est en même tems perpendiculaire à la base, la section qui répond à la lettre s est inclinée à celle-là d'un angle Φ, en sorte que

$$\text{tang}\ \Phi = \frac{p - sq}{(q + sp)\sqrt{(1 + pp + qq)}},$$

en supposant cet angle tourné vers l'axe AL. Ou bien cet angle Φ étant donné, il faut prendre s en sorte qu'il soit

$$s = \frac{p \cos\Phi - q \sin\Phi . \sqrt{(1 + pp + qq)}}{q \cos\Phi + p \sin\Phi . \sqrt{(1 + pp + pp)}}.$$

Quelques exemples serviront à nous mieux éclaircir sur cette recherche.

Exemple I.

15. Soit le solide proposé un cylindre couché par son axe sur le plan fixe de la base, & posant le rayon de sa base $= a$, on aura cette équation $z = \sqrt{(aa - yy)}$, d'où l'on tire par la différentiation $dz = \frac{-ydy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, de sorte que $p = 0$, & $q = \frac{-y}{\sqrt{(aa - yy)}}$, donc

$$\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}},$$

& les formules différentielles

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-aa}{(aa - yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

La section principale étant perpendiculaire à l'axe du cylindre pour une

une autre section quelconque, qui est inclinée à la principale de l'angle $= \Phi$, il faut prendre $s = \frac{-a \operatorname{tang} \Phi}{\sqrt{(aa - yy)}}$: & alors le rayon osculateur sera:

$$-\frac{(1 + qq + ss)}{-aa : (aa - yy)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}} = \frac{1 + qq + ss}{a}(aa - y^2),$$

qui se réduit à cette forme: $a(1 + \operatorname{tang} \Phi^2) = \frac{a}{\operatorname{cof} \Phi^2}$; d'où l'on voit que pour la section principale le rayon osculateur est $= a$, à cause de $\Phi = 0$, & pour la section qui y est perpendiculaire & passe par l'axe du cylindre, il devient infini: ce qui marque que la section est une ligne droite.

Remarque.

16. Si, au lieu d'une base circulaire, on donne au cylindre une base quelconque, l'abscisse x, avec la lettre p, n'entre pas non plus en compte; & puisque l'équation pour ce corps est la même que celle pour sa base $dz = q dy$, où q est une fonction de y, on trouve pour tous les rayons osculateurs à chaque point cette expression

$$-\frac{dy(1 + qq)\sqrt{(1 + qq)}}{dq \operatorname{cof} \Phi^2};$$

d'où l'on voit comment la courbure decroit à mesure que les sections s'écartent de la principale qui est perpendiculaire à l'axe, & où le rayon osculateur est le plus petit $= -\frac{dy}{dq}(1 + qq)^{\frac{3}{2}}$.

EXEMPLE II.

17. Soit le solide proposé un cone, dont l'axe est couché sur le plan fixe selon la direction AL, le sommet étant en A, & l'équation sera $z = \sqrt{(nnxx - yy)}$, posant nx pour le rayon de la section perpendiculaire à l'axe du cone au point X. Donc, puisque $dz = \frac{nnx dx - y dy}{\sqrt{(nnxx - yy)}}$, nous aurons

$p =$

$$p = \frac{nnx}{\sqrt{(nnxx - yy)}}; \quad \& \; q = \frac{-y}{\sqrt{(nnxx - yy)}},$$

& partant $\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{nx\sqrt{(1 + nn)}}{\sqrt{(nnxx - yy)}}$. Enſuite les formules différentielles

$$\left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-nnxx}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}}; \; \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{nnxy}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}}, \; \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{-nnyy}{(nnxx - yy)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'expreſſion générale pour le rayon oſculateur réſulte

$$\frac{nnxx - 2nnsxy + nn(1 + nn)ssxx - ssyy}{xx - 2sxy + ssyy} \cdot \frac{x\sqrt{(1 + nn)}}{n}.$$

Or, pour la ſection principale, le point P où tombe la perpendiculaire ZP on a AL $= (1 + nn)x$, & LP $= 0$, de ſorte que la ſection principale ſe trouve dans le plan ZYL. Donc, pour toute autre ſection qui y eſt inclinée de l'angle Φ, il faut prendre

$$s = \frac{nxy \sin\Phi \sqrt{(1 + nn)} + nnx \cos\Phi . \sqrt{(nnxx - yy)}}{n^3 xx \sin\Phi \sqrt{(1 + nn)} - y \cos\Phi . \sqrt{(nnxx - yy)}},$$

& ſi l'on ſubſtitue cette valeur dans l'expreſſion trouvée pour le rayon oſculateur, on aura

$$\frac{yy + n^4 xx}{(n \sin\Phi . \sqrt{(nnxx - yy)} - y \cos\Phi . \sqrt{(1 + nn)})^2} \, nx\sqrt{(1 + nn)}.$$

Sans reſtraindre la ſolution on peut ſuppoſer $y = 0$, où la ſection principale paſſe par l'axe du cone, & pour toute autre ſection perpendiculaire à la ſurface du cone, le rayon oſculateur ſera

$$= \frac{nx\sqrt{(1 + nn)}}{\sin\Phi^2}.$$

Exemple III.

18. Soit le ſolide propoſé un ellipſoïde quelconque exprimé par l'équation $zz = aa - mxx - nyy$, dont le centre étant en

en A, les trois demi-axes principaux font $AB = \frac{a}{\sqrt{m}}$, $AC = \frac{a}{\sqrt{n}}$, Fig. 4.
& $AD = a$, perpendiculaires entr'eux: où les quarts elliptiques BAC, BAD, & CAD repréfentent les trois fections principales faites par le centre A. Maintenant, pour un point quelconque Z de la furface, l'équation $z = \sqrt{(aa - mxx - nyy)}$, entre les coordonnées $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, donne

$$p = \frac{-mx}{\sqrt{(aa - mxx - nyy)}} = \frac{-mx}{z}; \quad q = \frac{-ny}{\sqrt{(aa - mxx - nyy)}} = \frac{-ny}{z}.$$

Donc, tirant par Z la droite ZP perpendiculaire à la furface elliptique, on aura

$$AL = x + pz = (1 - m)x, \quad \& \ PL = y + qz = (1 - n)y,$$

& la fection principale en Z fe faifant felon le plan PYZ, fon interfection avec la bafe BAC, ou bien la ligne PY, fera avec l'axe AB un angle dont la tangente eft $= \frac{XY - LP}{LX} = \frac{ny}{mx}$. Or toutes les autres fections faites par le point Z doivent paffer par la ligne ZP; pofant donc ϕ l'inclinaifon d'une telle fection quelconque à la principale PZY, le rayon ofculateur de cette fection en Z fera déterminé de la maniere fuivante.

$$\sqrt{(1 + pp + qq)} = \frac{\sqrt{(aa - m(1 - m)xx - n(1 - n)yy)}}{\sqrt{(aa - mxx - nyy)}} = u.$$

Pofant donc pour abréger

$$\sqrt{(aa - m(1 - m)xx - n(1 - n)yy)} = v,$$

on a $u = \frac{v}{z}$. Enfuite nous avons:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{-m(aa - nyy)}{z^3}; \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{-mnxy}{z^3}; \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{-n(aa - mxx)}{z^3},$$

$$\& \ pp + qq = \frac{mmxx - nnyy}{zz}.$$

Ser-

Servons nous plutôt de la formule trouvée dans le §. 10. que de celle, qui en a été derivée, & ayant

$$p\cos\Phi - qv\sin\Phi = \frac{-mx}{z}\cos\Phi + \frac{nvy}{zz}\sin\Phi = \frac{-mxz\cos\Phi + nyv\sin\Phi}{zz},$$

$$q\cos\Phi + pv\sin\Phi = \frac{-ny}{z}\cos\Phi - \frac{mvx}{zz}\sin\Phi = \frac{-nyz\cos\Phi - mxv\sin\Phi}{zz},$$

le rayon osculateur sera exprimé par une fraction, dont le numérateur est $= v^3 zz(mmxx + nnyy)$, & le dénominateur

$$+m(aa-nyy)(mmxxzz\cos\Phi^2 - 2mnxyvz\sin\Phi\cos\Phi + nnyyvv\sin\Phi^2)$$
$$+n(aa-mxx)(nnyyzz\cos\Phi^2 + 2mnxyvz\sin\Phi\cos\Phi + mmxxvv\sin\Phi^2)$$
$$+2mnxy(mnxyzz\cos\Phi^2 + (mmxx-nnyy)vz\sin\Phi\cos\Phi - mnxyvv\sin\Phi^2)$$

qui se réduit à cette forme:

$$+ zz\cos\Phi^2(aa(m^3xx + n^3yy) - mn(m-n)^2xxyy)$$
$$- 2mn(m-n)xyvz^3\sin\Phi\cos\Phi$$
$$+ mnvvzz\sin\Phi^2(mxx + nyy),$$

Donc, divisant le numérateur & le dénominateur par zz, nous aurons le rayon osculateur:

$$\frac{v^3(mmxx+nnyy)}{aa(m^3xx+n^3yy)c\Phi^2 - mn(m-n)^2xxyyc\Phi^2 - 2mn(m-n)xyvzs\Phi c\Phi + mnvv(mxx+nyy)s\Phi^2}$$

Ou bien, si nous posons ce rayon osculateur $= R$, nous aurons

$$\frac{1}{R} = \frac{aa(m^3xx+n^3yy) - mn(m-n)^2xxyy}{v^3(mmxx+nnyy)}c\Phi^2 - \frac{2mn(m-n)xyz}{vv(mmxx+nnyy)}s\Phi c\Phi + \frac{mn(mxx+nyy)}{v(mmxx+nnyy)}s\Phi^2$$

COROLLAIRE I.

19. Si nous posons $m = 1$, & $n = 1$, nous aurons le cas d'un globe dont le rayon $= a$, & puisque $v = a$, le rayon osculateur sera $\dfrac{a^3(xx + yy)}{aa(xx + yy)\cos\Phi^2 + aa(xx + yy)\sin\Phi^2} = a$, tout comme la nature de ce solide l'exige.

Co-

COROLLAIRE II.

20. Si $m = n$, & partant $AB = AC = \frac{a}{\sqrt{n}}$, donc notre solide sera un sphéroïde allongé ou applati, formé par la revolution de l'ellipse ABD autour de l'axe AD, la base ABC devenant un cercle. Dans ce cas le rayon osculateur sera

$$R = \frac{v^3}{naa\,\mathrm{cos}\,\Phi^2 + nvv\,\mathrm{sin}\,\Phi^2} = \frac{(naa + (1-n)zz)^{\frac{3}{2}}}{naa\,\mathrm{cos}\,\Phi^2 + nnaa\,\mathrm{sin}\,\Phi^2 + n(1-n)zz\,\mathrm{sin}\,\Phi^2}.$$

Donc, pour le point D, où $x = 0$, $y = 0$, $z = a$, & $v = a$, on aura $R = \frac{a}{n}$; mais, pour tous les points pris dans le cercle BC, ou l'équateur où $z = 0$, il y aura

$$R = \frac{a\sqrt{n}}{\mathrm{cos}\,\Phi^2 + n\,\mathrm{sin}\,\Phi^2}.$$

COROLLAIRE III.

21. Mais en général, quelle que soit la forme de l'ellipsoïde pour un point quelconque M de la base BMC, où $z = 0$, & $aa = mxx + nyy$, donc $vv = mmxx + nnyy$, l'expression pour le rayon osculateur y sera

$$R = \frac{v^3}{vv\,\mathrm{cos}\,\Phi^2 + nnaa\,\mathrm{sin}\,\Phi^2},$$

& partant, pour la section principale qui est perpendiculaire à la base où $\Phi = 0$, l'on a $R = v$, & pour la section faite par la base même $R = \frac{v^3}{nnaa}$, qui est le rayon osculateur de la courbe BMC au point M.

Remarque.

22. Dans ce cas il est remarquable que les rayons osculateurs ne sauroient être immédiatement tirés pour le sommet D. Il y faudroit

droit mettre $x = o$, & $y = o$, donc $z = a$, & $v = a$. Or, faiſant ces ſubſtitutions, tant le numérateur que le dénominateur de notre formule évanouïr, & on n'en ſauroit tirer aucune concluſion. La raiſon en eſt que dans ce cas la ſection principale à laquelle ſe rapportent les autres par l'angle Φ, devient indéterminée, puiſque toutes les ſections faites par le ſommet D ſont également perpendiculaires à la baſe BAC. Donc, pour en fixer une qui ſoit la principale ne poſons d'abord que $y = o$, & conſidérons le point N où

$$z = \sqrt{(aa - mxx)}, \quad \& \ v = \sqrt{(aa - m(1 - m)xx)}.$$

Maintenant il n'eſt pas douteux, que la ſection principale ne ſe trouve dans le plan BNDA, & que pour toute autre ſection inclinée à celle-ci de l'angle Φ, le rayon oſculateur ne ſoit:

$$\frac{mmv^3}{m^3 aa \cos\Phi^2 + mmnvv \sin\Phi^2} = \frac{v^3}{maa \cos\Phi^2 + nvv \sin\Phi^2}.$$

A préſent poſons auſſi $x = o$, pour avoir le ſommet D, dont on conſidere la ſection principale dans le plan DAB, & puiſque $v = a$, nous aurons $R = \dfrac{a}{m \cos\Phi^2 + n \sin\Phi^2}$.

Donc, pour la ſection faite dans le plan DAB, le rayon oſculateur ſera $= \dfrac{a}{m}$, le même que de la courbe BD au point D; & pour la ſection faite dans le plan DCA, il ſera $= \dfrac{a}{n}$, le même que de la courbe CD au point D.

CONCLUSION.

23. Après ces exemples rapportés pour éclaircir les recherches précédentes, on peut tirer la concluſion ſuivante pour juger de la courbure de toutes les ſurfaces en général. Qu'on conſidere le plan qui touche la ſurface au point où l'on veut connoître la courbure. Soit le plan
Fig. 5. de la planche ce plan, qui touche la ſurface au point Z, & toutes les ſections

sections pour lesquelles je viens de définir les rayons osculateurs, seront perpendiculaires à ce plan, & le couperont par quelque ligne droite EF, ou MN, qui passe par le point Z; de sorte que toutes les sections possibles soient représentées par quelque ligne droite tirée par le point Z, sur le plan touchant. Soit EF la section, que j'ai nommée ci-dessus la principale, & considérant une autre section quelconque MN, qui fasse avec celle-là un angle EZM $= \Phi$, & puisque le rayon osculateur de cette section MN a été trouvé au §. 10.

$$\frac{-u^3(pp+qq)}{(p\cos\Phi - qu\sin\Phi)^2\left(\frac{dp}{dx}\right)+(q\cos\Phi+pu\sin\Phi)^2\left(\frac{dq}{dy}\right)+2(p\cos\Phi-qu\sin\Phi)(q\cos\Phi+pu\sin\Phi)\left(\frac{dp}{dy}\right)}$$

le dénominateur de cette expression se dévelope en cette forme:

$$+\cos\Phi^2.\left(pp\left(\frac{dp}{dx}\right)+qq\left(\frac{dq}{dy}\right)+2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)$$

$$+2u\sin\Phi\cos\Phi\left(-pq\left(\frac{dp}{dx}\right)+pq\left(\frac{dq}{dy}\right)+(pp-qq)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)$$

$$+uu\sin\Phi^2.\left(qq\left(\frac{dp}{dx}\right)+pp\left(\frac{dq}{dy}\right)-2pq\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)$$

où il faut remarquer que les quantités u, p, q, avec les formules $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy}\right)$, & $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, appartiennent uniquement à la détermination du point Z, & sont par conséquent communes à toutes les sections, dont la variété est renfermée dans le seul angle Φ. Donc en général, l'expression de tous les rayons osculateurs pour quelque surface que ce soit, doit toujours avoir cette forme

$$\frac{V}{P\cos\Phi^2+Q\sin\Phi^2+2R\sin\Phi\cos\Phi},$$

qui, à cause de $\cos\phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi$, $\sin\phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\phi$, & $\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$, se réduit à celle-ci

$$\frac{1}{L + M\cos 2\phi + N\sin 2\phi},$$

qui me fournit les réflexions suivantes.

I Réflexion.

24. C'est donc cette formule qui renferme la nature de la courbure des surfaces à chacun de leurs points. Il est évident que cette formule peut varier à l'infini, à cause de l'infinité des valeurs dont chacune de ces trois lettres L, M, & N, est susceptible, & deux élémens d'une même ou de différentes surfaces ne sauroient être estimés avoir la même courbure, à moins que ces trois lettres n'aient les mêmes valeurs de part & d'autre ou qu'elles n'y soient réductibles en augmentant ou diminuant l'angle ϕ d'une quantité constante. Car, puisque la section EF est arbitraire, l'identité de courbure en deux élémens subsiste également, quoique les angles ϕ de l'un & de l'autre ne commencent point de la même section, pourvu que la loi suivant laquelle les rayons osculateurs augmentent ou diminuent soit la même dans tous les deux.

II Réflexion.

25. Mais il faut ici principalement observer, que, dès qu'on connoit les rayons osculateurs pour trois sections différentes, ceux pour toutes les autres en sont parfaitement déterminés. Soient a, b, c, les rayons osculateurs pour les trois sections, qui répondent aux angles α, β, γ, pris pour ϕ, & ces trois équations:

$$\frac{1}{a} = L + M\cos 2\alpha + N\sin 2\alpha;$$

$$\frac{1}{b} = L + M\cos 2\beta + N\sin 2\beta, \qquad \&$$

$$\frac{1}{c} = L + M\cos 2\gamma + N\sin 2\gamma,$$

nous

nous découvriront les valeurs des trois lettres L, M, & N, lesquelles étant ſubſtituées dans notre formule déterminent les rayons oſculateurs pour toutes les autres ſections. Par conſéquent dès que deux élémens ſe reſſemblent par rapport aux trois rayons oſculateurs, qui repondent à des ſections également inclinées entr'elles de part & d'autre, toute la courbure de ces deux élémens eſt parfaitement la même.

III Réflexion.

26. De notre formule générale nous pourrons aſſigner les ſections auxquelles répondent le plus grand & le plus petit rayon oſculateur. La méthode des plus grands & plus petits nous fourniſſant cette égalité

$$-2M \sin 2\phi + 2N \cos 2\phi = 0,$$

nous en tirons $\tang 2\phi = \frac{N}{M}$. Donc, ſi ζ eſt l'angle dont la tangente eſt $= \frac{N}{M}$, l'angle $180° + \zeta$, convient également, & de là nous trouvons ces deux valeurs pour l'angle ϕ.

$$\text{I. } \phi = \tfrac{1}{2}\zeta, \qquad \& \qquad \text{II. } \phi = 90° + \tfrac{1}{2}\zeta,$$

dont l'un répond au plus grand rayon oſculateur & l'autre au plus petit: d'où l'on tire cette conſéquence bien importante, que, quelle que que ſoit la courbure d'un élément, les deux ſections, dont l'une contient la plus grande courbure & l'autre la plus petite, ſont toujours normales entr'elles.

IV Réflexion.

27. Donc, ſi le plus grand rayon oſculateur convient à la ſection EF, le plus petit ſe trouvera certainement dans la ſection GH, qui y eſt perpendiculaire, & réciproquement. Suppoſons donc que EF ſoit une de ces ſections, où le rayon oſculateur eſt le plus grand ou le plus petit; & pour toute autre ſection MN, qui y eſt inclinée de

 l'angle

l'angle EZM $= \phi$, le rayon osculateur sera nécessairement $= \frac{1}{L + M \cos 2\phi}$, la quantité N devant évanouïr pour cette situation, puisque d'ailleurs les plus grand & plus petit ne répondroient point aux valeurs $\phi = 0$, & $\phi = 90°$, comme nous le supposons.

V Réflexion.

28. Pour comparer donc les courbures de deux élémens entr'elles, on n'à qu'à chercher pour chacun les sections qui donnent le plus grand & le plus petit rayon osculateur, & si l'on trouve ces deux rayons les mêmes dans l'une & l'autre, on peut prononcer hardiment, que ces deux élémens sont doués de la même courbure. Et partant, pour connoitre la véritable courbure d'un élément quelconque de surface, il suffit d'en chercher le plus grand & le plus petit rayon osculateur: puisque ceux de toutes les autres sections en sont déterminés parfaitement, en sorte qu'aucune variété n'y sauroit plus avoir lieu.

VI Réflexion.

30. Soit le plus grand rayon osculateur $= f$, qui convienne à la section EF, & le plus petit $= g$, pour la section GH perpendiculaire à la précédente. Cela posé, pour toute autre section MN inclinée à la premiere EF de l'angle EZM $= \phi$, le rayon osculateur qui soit $= r$, sera déterminé uniquement des deux précédens, & l'angle ϕ de la maniere suivante. La formule générale

$$r = \frac{1}{L + M \cos 2\phi},$$

posant $\phi = 0$, donne $L + M = \frac{1}{f}$, or posant $\phi = 90°$, il en résulte $L - M = \frac{1}{g}$, d'où l'on tire $L = \frac{f+g}{2fg}$, & $M = \frac{-(f-g)}{2fg}$, & partant nous aurons: $r = \frac{2fg}{f + g - (f - g) \cos 2\phi}$.

Pour

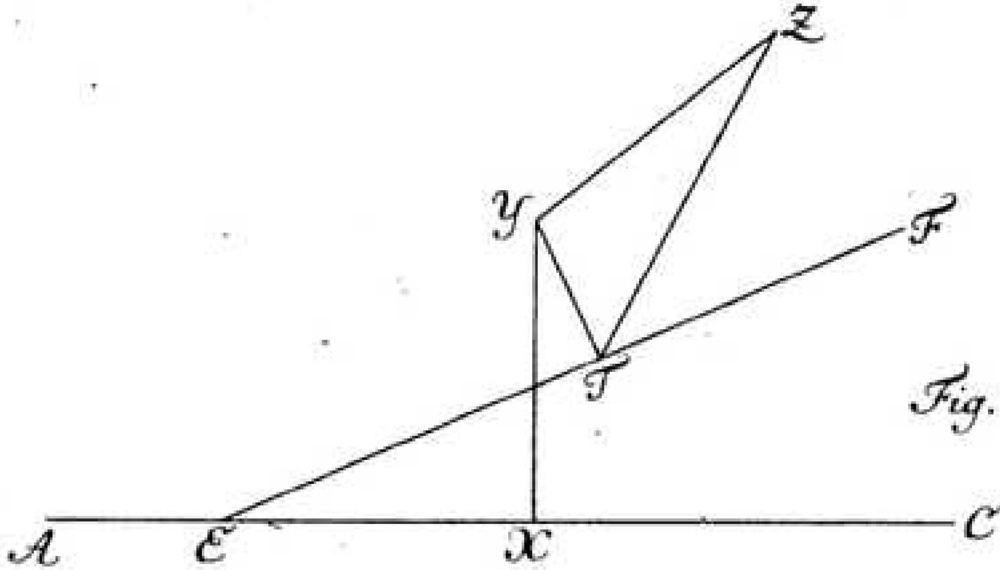

Fig. 1.

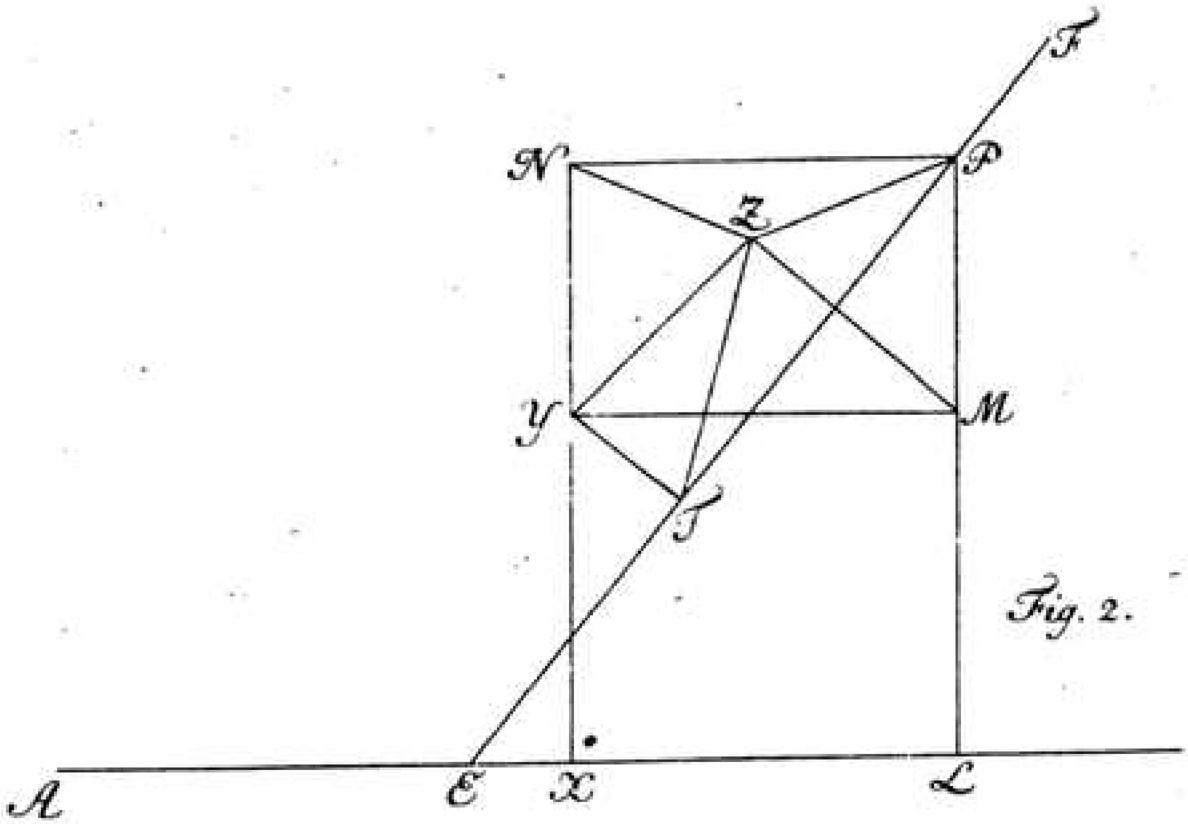

Fig. 2.

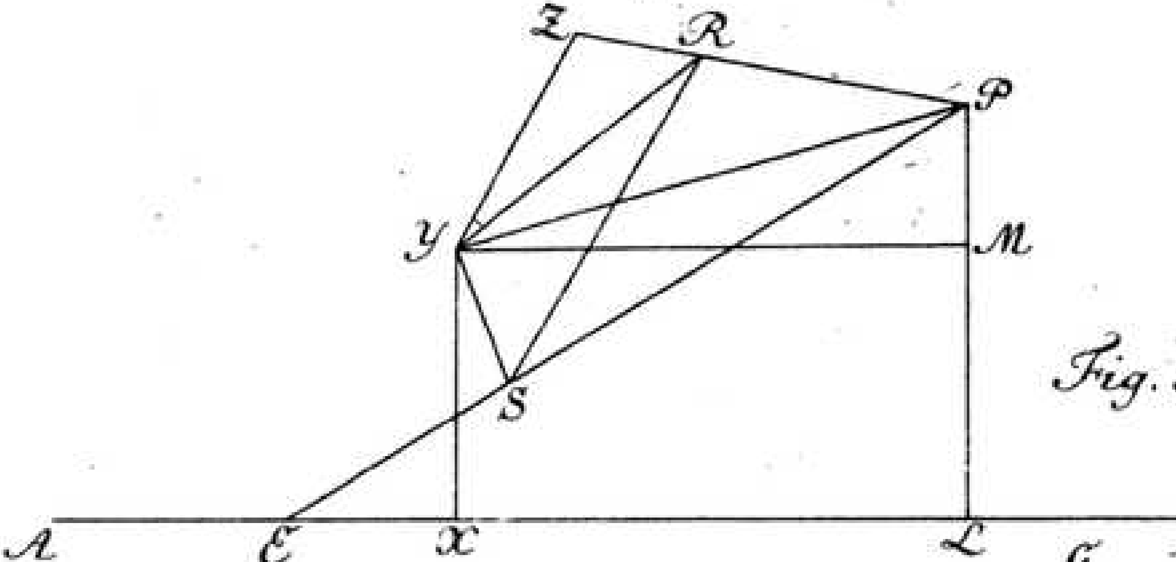

Fig. 3.

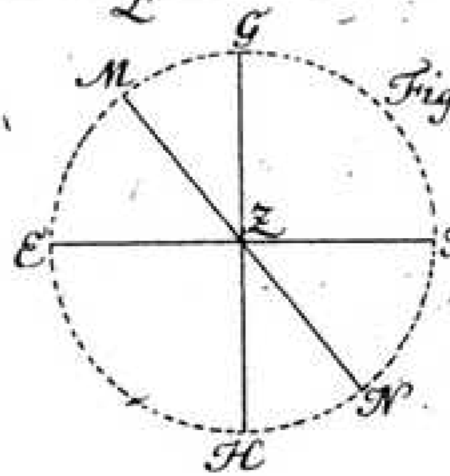

Fig. 5.

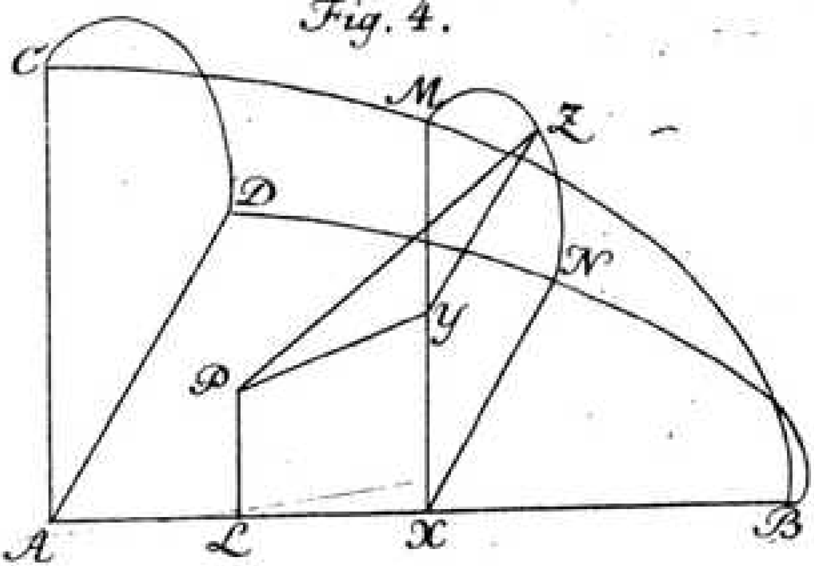

Fig. 4.

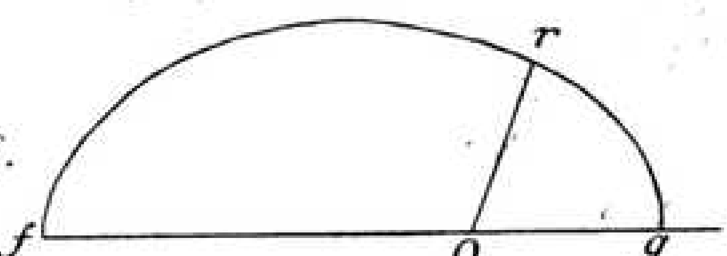

Fig. 6.

Pour donner une conſtruction aiſée de cette formule, qu'on Fig. 5. & 6.
joigne enſemble le plus grand rayon oſculateur & le plus petit en prenant $Of = f$, & $Og = g$, & qu'on décrive ſur la ligne fg, une demi-ellipſe dont un foyer ſoit au point O: alors, pour la ſection MN on n'a qu'à prendre l'angle fOr, le double de l'angle EZM, & la ligne Or ſera égale au rayon oſculateur pour la ſection MN. Ainſi le jugement ſur la courbure des ſurfaces, quelque compliqué qu'il ait paru au commencement, ſe réduit pour chaque élément à la connoiſſance de deux rayons oſculateurs, dont l'un eſt le plus grand & l'autre le plus petit dans cet élément; ces deux choſes déterminent entierement la nature de la courbure en nous découvrant la courbure de toutes les ſections poſſibles, qui ſont perpendiculaires ſur l'élément propoſé.

Mais, pour juger du plus grand ou plus petit rayon oſculateur, il faut avertir, que ce jugement doit être reglé ſur le réciproque du rayon oſculateur $\frac{1}{R}$, en ſorte que, ſi R eſt tantôt poſitif tantôt négatif, la valeur $R = \infty$, ou $\frac{1}{R} = 0$, n'eſt ni un plus grand ni un plus petit.

Enfin on comprend aiſément, que, comme dans les lignes courbes il y a certaines irrégularités par rapport aux points doubles & multiples, il en faut reconnoitre de ſemblables dans les ſurfaces, qui ne ſont pas aſſujetties à notre regle d'ailleurs générale.