



1767

Recherches sur le mouvement des rivières

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur le mouvement des rivières" (1767). *Euler Archive - All Works*. 332.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/332>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



R E C H E R C H E S
S U R
L E M O U V E M E N T D E S R I V I E R E S.
P A R M. E U L E R.

§. 1.

C'est peu de chose que ce que les Auteurs ont écrit jusqu'ici sur le mouvement des rivieres; & tout ce qu'ils en ont dit, n'est fondé que sur des hypothèses arbitraires, & souvent même tout à fait fausses. Car, quoiqu'on ait déjà assez bien réussi à appliquer les principes de mécanique au mouvement des eaux; on s'est pourtant borné à ne considérer que les cas, où l'eau coule par des tuyaux d'une figure qui n'est pas irréguliere; & dans cette considération on a même supposé, que toutes les particules de l'eau, qui se trouvent dans la même section faite perpendiculairement au tuyau, se meuvent d'un mouvement égal; de sorte que les vitesses de l'eau en chaque section du canal soient réciproquement proportionnelles aux amplitudes. Et c'est cette regle, qui sert de base à toutes les recherches qui ont été faites jusqu'ici sur le mouvement des eaux. Les profondes spéculations de Mrs. Bernoulli & d'Alembert, auxquels on est redevable de tout ce qui a été découvert jusqu'ici dans cette science, sont toutes établies sur cette hypothèse: & il faut avouer que, dans tous les cas, où ils ont appliqué leur théorie, cette hypothèse se trouve fort bien d'accord avec la vérité.

§. 2. Mais, lorsque le mouvement de l'eau est tel, que ses vitesses ne se reglent pas uniquement sur l'amplitude du canal, par lequel



quel l'eau coule, de sorte que les vitesses dans la même section du canal sont différentes entr'elles; alors il est impossible d'y appliquer les principes hydrodynamiques, dont on s'est servi avec un si bon succès dans les recherches mentionnées. Cela arrive pour la plupart, lorsque les canaux, par lesquels l'eau passe sont fort larges; car alors on s'écarteroit trop considérablement de la vérité, si l'on supposoit que l'eau passât d'un mouvement égal par chaque section du canal. Or on comprend aisément, qu'il faut rapporter ici le mouvement des rivières; car, dans la même section qu'on conçoit faite perpendiculairement au lit de la rivière, l'eau peut avoir des vitesses fort différentes; & il est évident, que les particules d'eau qui se trouvent vers le fond du lit, sont poussées par des forces tout à fait différentes, que les particules supérieures: d'où il doit nécessairement résulter un mouvement très différent dans les particules qui se trouvent dans la même section du lit.

§. 3. Donc, pour chercher le mouvement de l'eau dans une rivière, il faut abandonner les hypothèses auxquelles on a attaché jusqu'ici toutes les recherches hydrauliques, pour remonter aux premiers principes de Mécanique, par lesquels tous les mouvemens des corps tant solides que fluides sont déterminés. Il faut considérer séparément chaque particule d'eau, & chercher toutes les forces auxquelles elle est assujettie, pour en déterminer les changemens causés dans son mouvement. Cette recherche étant extrêmement difficile & enveloppée en des calculs très embarrassés, je me bornerai à commencer l'explication de cette théorie par un cas, qui servira de fondement à tous les autres, & qui ne laissera pas de nous fournir des éclaircissements fort importans dans cette matière. Après le développement de ce cas, il ne sera pas même fort difficile de rendre la recherche plus générale, & de l'appliquer à tous les cas qui se peuvent rencontrer.

§. 4. Je considérerai donc une section verticale faite le long d'une rivière qui nous représentera une rivière infiniment étroite; & quand j'aurai déterminé le mouvement de l'eau dans cette section, quoique je n'aye pas eu égard à l'action de l'eau, qui se trouve à côté
de



de part & d'autre, on conviendra, que ce mouvement ne différera pas beaucoup du vrai, quelque large que soit la riviere, pourvu que la figure de son lit ne soit pas extrêmement irréguliere. Car je suppose pour le commencement que les pressions de l'eau à côté sont égales de part & d'autre, de sorte que toutes les particules d'eau qui se trouvent dans cette section, se meuvent toujours selon des directions situées dans cette même section. Néanmoins la méthode dont je me servirai, se pourra aussi aisément appliquer aux cas, où l'eau passe d'une telle section verticale dans une autre; & quand on aura trouvé moyen d'expédier le calcul pour le cas que je m'en vai traiter, on parviendra d'autant plus facilement à bout du calcul qui renferme la solution générale.

§. 5. Soit donc AC le lit d'une telle section de riviere, ou d'une riviere infiniment étroite, qui ait partout la même largeur infiniment petite. Que ce lit AC soit une ligne courbe quelconque, qui est supposée être connue; pour cet effet je conçois une ligne horizontale EF qui serve d'axe pour y rapporter la ligne AC par des coordonnées orthogonales EP & PQ . Que $ABCD$ soit la riviere, qui se meut sur ce lit AC , & BD sa superficie supérieure; de plus je suppose, que la riviere se trouve déjà dans un état permanent ou d'équilibre, de sorte que sa superficie BD demeure continuellement la même, & qu'aux mêmes points, comme M , les particules d'eau qui y passent ayent toujours les mêmes vitesses, & qu'elles soient assujetties aux mêmes pressions.

Fig. 1.

§. 6. Toute l'eau qui forme la riviere doit avoir passée par la section AB , que je considère ici comme la principale, & par rapport à laquelle je déterminerai tant le lieu que le mouvement de chaque particule d'eau après un tems quelconque, depuis qu'elle est passée par la section AB . Soit la hauteur de cette section $AB = a$, dans laquelle je considère un point quelconque O , nommant $AO = z$, & que OMG soit le chemin que chaque particule d'eau, qui passe par le point O , décrit étant emportée par son mouvement. Ici il faut d'abord regarder le mouvement dont chaque particule d'eau passe



passé par le point O . Ce mouvement étant décomposé selon la direction horizontale & verticale, soit m la vitesse selon la direction horizontale, & n la vitesse selon la direction verticale, que je suppose dirigée de haut en bas. Donc, nommant $EA = b$, de sorte que $EO = b + z$, après un tems infiniment petit $= d\tau$, le point d'eau O avancera selon la direction horizontale par l'espace $= md\tau$, & selon la direction verticale par l'espace $= nd\tau$. Par conséquent après le tems $d\tau$, le point O parviendra en o , en sorte qu'ayant tiré la verticale oe , il soit $Ee = md\tau$, & $eo = b + z - nd\tau$. Or on voit bien que m & n sont de certaines fonctions de z .

§. 7. Qu'après un tems quelconque $= t$, le point d'eau qui est passé par O soit parvenu en M , ayant décrit pendant ce tems t la ligne OM . Qu'on tire de M sur EF la perpendiculaire MP , & nommant $EP = x$; $PM = y$; on voit que x & y seront des fonctions de deux variables t & z . Soit donc pour exprimer la dépendance de ces deux variables,

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \quad dy = Rdt + Sdz,$$

où l'on voit que ces formules différentielles doivent être complètes,

ou que $\frac{dP}{dz} = \frac{dQ}{dt}$, & $\frac{dR}{dz} = \frac{dS}{dt}$, où $\frac{dP}{dz}$, marque le diffé-

rentiel de P , en ne supposant que z variable, divisé par dz , & $\frac{dQ}{dt}$,

le différentiel de Q , en ne supposant que t variable, divisé par dt , & ainsi des autres. On voit aussi que ces valeurs de x & y , en po-

sant $z = 0$, doivent exprimer la figure du lit AC : puisque l'eau qui passe par le point A , doit glisser sur le lit même. Or, si nous posons $z = a$, ces mêmes formules de x & y exprimeront la figure de la superficie d'eau BD , ou la surface de la rivière.

§. 8. Il est encore à remarquer, que, lorsqu'on met $t = 0$, le point M doit retomber en O . Donc, les fonctions de t & z qui expriment les valeurs de x & y doivent être telles, que si l'on

met



met $t = 0$, il devienne $x = 0$, & $y = b + z = EO$. De plus, puisque $dx = P dt + Q dz$, & $dy = R dt + S dz$: si nous mettons $t = 0$, & que nous prenions z pour constante, ou $dz = 0$, faisant $dt = d\tau$, ces différentiels donneront le lieu du point o , auquel parvient le point O dans le tems $d\tau$; il fera donc, posant $t = 0$, dans les quantités P & R , $Ee = P d\tau$, & $eo = b + z + R d\tau$. Comparant ces valeurs avec celles, que nous avons trouvées en haut, nous aurons $P = m$, & $R = -n$, de sorte que les fonctions P & R , posant $t = 0$, doivent donner les vitesses horizontale & verticale du point O .

§. 9. Pour trouver la ligne OMG , que toutes les particules d'eau, qui passent par le point O , représentent dans la rivière, puisqu'il faut regarder ce point O comme fixe dans la section AB , nous aurons $dz = 0$; donc la nature de la ligne OMG sera contenue dans ces formules:

$$dx = P dt, \quad \& \quad dy = R dt,$$

qui donnent à connoître que, dans l'élément de tems dt , le point M parvient en m , en sorte que $Pp = P dt$, & $pm = y + R dt$. De là on connoit le mouvement du point M dont il est transporté en m pendant le tems dt . Car, si nous nommons la vitesse horizontale du point $M = v$, & sa vitesse verticale $= u$ dirigée en bas, après le tems dt il doit être $Pp = v dt$, & $pm = y - u dt$, & partant nous aurons $v = P$, & $u = -R$. Ainsi connoissant les fonctions P, Q, R, S , dans les formules générales:

$$dx = P dt + Q dz, \quad \& \quad dy = R dt + S dz,$$

les fonctions P & R expriment en même tems les vitesses du point M , la horizontale v , & la verticale u .

§. 10. Donnons maintenant au point O une étendue infiniment petite $OO' = dz$, pour considérer tout le filet d'eau $OO'MM'GG'$, qui passe par cette ouverture $OO' = dz$: car il faut que ce filet demeure toujours continu, sans qu'il s'y introduise aucun vuide.

Donc la vitesse horizontale du point O' sera $= m + dm$, & la verticale $= n + dn$, ces quantités m & n étant des fonctions de z . Dans le tems $d\tau$ donc le point O' parviendra en e' , en sorte que $Ee' = (m + dm)d\tau$, & $e'o' = b + z + dz - (n + dn)d\tau$. Par conséquent, dans ce même tems $d\tau$, il passe par l'ouverture $OO' = dz$, la masse d'eau $OO'o'o'$, dont le volume se trouvera en cette maniere

L'aire du trapeze $EO'o'e$ étant $= \frac{1}{2} Ee'(EO' + e'o')$,

- - du trapeze $EOoe$ - - $= \frac{1}{2} Ee(EO + eo)$,

- - du trapeze $eo'o'e'$ - - $= \frac{1}{2} ee'(eo + e'o')$,

d'où l'on tire l'aire

$$\begin{aligned} OO'o'o &= \frac{1}{2} Ee'(EO' + e'o') - \frac{1}{2} Ee(EO + eo) - \frac{1}{2} ee'(eo + e'o') \\ &= \frac{1}{2} Ee(OO' + e'o' - eo) + \frac{1}{2} ee'(EO' - eo), \end{aligned}$$

& partant elle sera $= mdzd\tau + \frac{1}{2} dmdzd\tau - \frac{1}{2} mdu^2d\tau^2 + \frac{1}{2} ndmd\tau^2$.

§. 11. Après un tems t , le point O venant en M , de sorte que $EP = x$, $PM = y$, le point O' parviendra en M' , de sorte que $EP' = x + Qdz$, & $P'M' = y + Sdz$, & encore après un tems infiniment petit $d\tau$, ces points M & M' seront transportés en m & m' , de sorte qu'il sera $Ep = x + P d\tau$, $pm = y + R d\tau$, & $Ep' = x + P d\tau + Q dz$, $p'm' = y + R d\tau + S dz$. Donc la masse $OO'o'o = mdzd\tau$, sera parvenue après le tems $= t$, en $MM'm'm$, ou elle remplira cet espace: c'est pourquoi il faut que l'aire $MM'm'm$ soit égale à $OO'o'o = mdzd\tau$. Or, pour trouver cette aire, on n'a qu'à chercher ces 4 trapezes.

$PMmp = \frac{1}{2} Pp(PM + pm) = \frac{1}{2} P d\tau(2y + R d\tau)$,

$P'M'm'p' = \frac{1}{2} P'p'(P'M' + p'm') = \frac{1}{2} P' d\tau(2y + R d\tau + 2S dz)$,

$PMM'P' = \frac{1}{2} PP'(PM + P'M') = \frac{1}{2} Q dz(2y + S dz)$,

$pm m' p' = \frac{1}{2} pp'(pm + p'm') = \frac{1}{2} Q dz(2y + 2R d\tau + S dz)$,

&c



& puisque $MM'm'm = P'M'm'p' + P'MM'P' - pmm'p' - P'Mmp$, nous aurons $MM'm'm = PSdzd\tau - QRdzd\tau$. Donc il faut qu'il soit $PS - QR = m$; & c'est la première condition à laquelle il faut satisfaire.

§. 12. Cette condition que nous venons de trouver, renferme la continuité du fluide, en vertu de laquelle il faut donc que $PS - QR$, soit égale à m , c'est à dire à une fonction de z , où le tems t n'entre point. Or le premier état en AB , nous découvre encore d'autres propriétés, que les fonctions P, Q, R, S , doivent avoir. Car, faisant varier au point O tant z , que le tems t , pour parvenir au point o' , nous aurons $Ee' = m'd\tau$, & $e'o' = b + z - n.\tau$, où $d\tau$ marque l'élément du tems t , qui lui-même est dans ce cas $= 0$. Donc, si $t = 0$, il faut qu'il soit $dx = m'd\tau + odz$, & $dy = -nd\tau + dz$. Or, ayant supposé en général $dx = Pd\tau + Qdz$, & $dy = Rd\tau + Sdz$, il est requis que posant $t = 0$, il devienne:

$$P = m; \quad Q = 0; \quad R = -n; \quad \& \quad S = 1.$$

Ces conditions jointes à celle que $PS - QR = m$, & que les formules différentielles $Pd\tau + Qdz$, & $Rd\tau + Sdz$, doivent être complètes, ou intégrables, déterminent déjà en partie la nature de ces fonctions; & outre cela il faut que, posant $z = 0$, les coordonnées x & y expriment la nature de la ligne du lit AC .

§. 13. Maintenant, pour trouver l'accélération de l'élément d'eau $MM'm'm$, dont la masse est $= m dz d\tau$, il faut avoir égard aux forces qui y agissent. Ces forces, sont premièrement le poids de cet élément, que j'exprimerai par son volume $m dz d\tau$, & par cette force cet élément est poussé en bas. Ensuite, ce même élément est assujetti aux pressions des particules d'eau dont il est environné; & ces pressions s'expriment le plus commodément par la hauteur d'une colonne d'eau, qui exerceroit la même pression. Soit donc p la hauteur qui exprime la pression au point M , & p fera une certaine fonction des coordonnées x & y , ou bien des variables t & z ; &



pour représenter cette dépendance, soit $dp = Mdt + Ndz$. De là on connoitra les pressions aux points M' , m , & m' ; car on aura la pression en $M' = p + Ndz$; en $m = p + Mdt$, & en $m' = p + Ndz + Mdt$, posant $d\tau$ pour dt ; comme nous avons fait auparavant en considérant ces points.

§. 14. Donc, sur la face MM' agira une force $= MM'(p + \frac{1}{2}Ndz)$ sur la face Mm une force $= Mm(p + \frac{1}{2}Mdt)$, sur la face $M'm'$ une force $= M'm'(p + Ndz + \frac{1}{2}Mdt)$, & sur la face mm' une force $= mm'(p + Mdt + \frac{1}{2}Ndz)$. Décomposons ces forces selon les direction de coordonnées EP , EA , car puisque ces forces agissent perpendiculairement sur les faces, la résolution donnera :

donne les forces

La force sur	selon EP	selon EA
$MM' = MM'(p + \frac{1}{2}Ndz)$;	$+ Sdz(p + \frac{1}{2}Ndz)$;	$- Qdz(p + \frac{1}{2}Ndz)$,
$Mm = Mm(p + \frac{1}{2}Mdt)$;	$- Rd\tau(p + \frac{1}{2}Mdt)$;	$+ Pa\tau(p + \frac{1}{2}Mdt)$,
$mm' = mm'(p + Mdt + \frac{1}{2}Ndz)$;	$- Sdz(p + Mdt + \frac{1}{2}Ndz)$;	$+ Qdz(p + Mdt + \frac{1}{2}Ndz)$,
$M'm' = M'm'(p + Ndz + \frac{1}{2}Mdt)$;	$+ Rd\tau(p + Ndz + \frac{1}{2}Mdt)$;	$- Pa\tau(p + Ndz + \frac{1}{2}Mdt)$.

Donc, prenant toutes ces forces ensemble, l'élément $MM'm'm$, en sera poussé selon la direction horizontale EP par la force $= -MSdzd\tau + NRdzd\tau$; & selon la direction verticale EA , ou en haut par la force $= MQdzd\tau - NPdzd\tau$; de celle-ci il faut donc retrancher la force de la gravité de cet élément, qui est $= PSdzd\tau - QRdzd\tau = mdzd\tau$.

§. 15. La masse $MM'm'm = mdzd\tau$, étant sollicitée par deux forces, l'une selon l'horizontale EP , qui est $= (NR - MS)dzd\tau$, & l'autre selon la verticale EA en haut, qui est $= (MQ - NP)dzd\tau - mdzd\tau$,

la force accélératrice selon la direction EP sera $= \frac{NR - MS}{m}$, &

la force accélératrice selon la direction EA sera $= \frac{MQ - NP}{m} - 1$.

Par

Par conséquent, le point M sera accéléré par ces deux forces accélératrices. Donc, prenant z constant, & l'élément du tems dt également constant, selon les principes de l'accélération, nous aurons :

$$\frac{NR - MS}{m} = \frac{2 dx}{dt^2}, \quad \& \quad \frac{MQ - NP}{m} - 1 = \frac{2 dy}{dt^2}.$$

Or, ayant $dx = P dt + Q dz$, & $dy = R dt + S dz$, si nous posons $dP = \mathfrak{P} dt + \mathfrak{Q} dz$, & $dR = \mathfrak{R} dt + \mathfrak{S} dz$; il sera $ddx = \mathfrak{P} dt^2$, & $ddy = \mathfrak{R} dt^2$, d'où nous tirons enfin ce deux équations

$$NR - MS = 2 m \mathfrak{P}, \quad \& \quad MQ - NP - m = 2 m \mathfrak{R}.$$

§. 16. Pour déterminer donc le mouvement de la riviere ABCD, qui est formée par l'eau qui decoule continuellement par la section AB = a , sur le lit AC, dont la figure est donnée, ayant pris la ligne horizontale EF pour axe, & nommant AE = b , soit parvenu une particule d'eau, qui passe par O, posant AO = z , après un tems écoulé = t en M, & qu'on nomme les coordonnées EP = x , & PM = y , ces quantités x & y seront certaines fonctions des variables t & z . Soit donc

$$dx = P dt + Q dz, \quad \& \quad dy = R dt + S dz,$$

où P, Q, & R, S, sont telles fonctions de t & z , que ces formules différentielles soient intégrables. Or, pour les fonctions P & R, soit de plus :

$$dP = \mathfrak{P} dt + \mathfrak{Q} dz, \quad \& \quad dR = \mathfrak{R} dt + \mathfrak{S} dz.$$

Enfin, soit la pression de l'eau au point M exprimée par la hauteur = p , qui étant pareillement une fonction des variables t & z , soit

$$dp = M dt + N dz.$$

§. 17. Il s'agit donc de trouver les fonctions P, Q, R, S, M, & N; & pour cela il faut satisfaire aux conditions suivantes.

- 1) Les coordonnées x & y doivent être telles fonctions de t & z , que lorsqu'on met $z = 0$, elles expriment la figure du lit AC; ainsi, posant $z = 0$, on aura pour la figure du lit AC ces formules $dx = Pdt$, & $dy = Rdt$. Or, lorsqu'on met $t = 0$, il faut qu'il devienne $x = 0$, & $y = h + z$.
- 2) Le mouvement de l'eau, qui coule par le point O étant supposé tel, que sa vitesse selon la direction horizontale soit $= m$, & sa vitesse selon la direction verticale dirigée en bas $= n$, il faut qu'il soit posant $t = 0$;

$$P = m; \quad Q = 0; \quad R = -n; \quad S = 1,$$
 où m & n seront des fonctions de la seule variable z , sans renfermer l'autre t .
- 3) La troisième condition exige, qu'il soit en général: $PS - QR = m$, où $PS - QR$ doit être une fonction de la seule variable z , sans qu'il y entre l'autre variable t .
- 4) La considération de l'accélération nous a fourni ces équations, auxquelles il faut satisfaire:

$$NR - MS = 2m\mathfrak{P}, \quad \& \quad MQ - NP = 2m\mathfrak{R} + m.$$
- 5) Enfin il est évident que la pression p doit être une telle fonction de t & z , que lorsqu'on met $z = a$, auquel cas la pression se rapportera à la superficie BD, la valeur de p évanouisse. Donc il faut qu'il devienne $M = 0$, si l'on met $z = a$.

§. 18. Les formules de la quatrième condition, puisqu'il est en vertu de la troisième $m = PS - QR$, donneront

$$M = -2P\mathfrak{P} - 2R\mathfrak{R} - R,$$

& $N = -2Q\mathfrak{P} - 2S\mathfrak{R} - S,$

& de là nous obtiendrons:

$$dp = -2P\mathfrak{P}dt - 2R\mathfrak{R}'dt - Rdt,$$

$$-2Q\mathfrak{P}dz - 2S\mathfrak{R}dz - Sdz.$$

Mais

Mais, ayant $Pdt + Qdz = dx$, & $Rdt + Sdz = dy$,
il fera

$$dp = - 2\mathfrak{P}dx - 2\mathfrak{R}dy - dy.$$

Donc, puisque cette formule doit être intégrable, il faut que $\mathfrak{P}dx + \mathfrak{R}dy$, soit une formule différentielle complète.

§. 19. De là on peut encore tirer la condition suivante: Puisque $\mathfrak{P}dt = dP - \Omega dz$, & $\mathfrak{R}dt = dR - \mathcal{S}dz$, la substitution de ces formules donnera:

$$dp = \frac{- 2P dP + 2P\Omega dz + 2R\mathcal{S}dz}{- 2R dR - 2Q\mathfrak{P}dz - 2S\mathfrak{R}dz} - dy,$$

dont l'intégrale, entant qu'elle peut se prendre, sera:

$$p = C - y - PP - RR + 2fdz(P\Omega - Q\mathfrak{P} - R\mathcal{S} - S\mathfrak{R}).$$

Donc il faut que la formule $P\Omega - Q\mathfrak{P} + R\mathcal{S} - S\mathfrak{R}$, soit une fonction de la seule variable z , puisque sans cela l'intégration ne pourroit avoir lieu.

§. 20. Soit donc $P\Omega - Q\mathfrak{P} + R\mathcal{S} - S\mathfrak{R} = w$, de sorte que w marque une fonction de la seule variable z , & la pression en M fera

$$p = C - y - PP - RR + 2fw dz,$$

& $fw dz$ sera pareillement une fonction de z . Or, puisque l'expression de p doit évanouir, si l'on met $z = a$, il faut que cette position $z = a$, fasse évanouir tous les t dans la formule, $y + PP + RR$, de sorte qu'elle devienne une quantité constante. Et alors on n'aura qu'à déterminer C , en sorte que p évanouisse dans ce cas $z = 0$.

§. 21. Puisque nous avons aussi $PS - QR = m$, où m est pareillement une fonction de la seule z , ces deux équations:

$$\begin{aligned} PS - QR &= m, \\ P\Omega + Q\mathfrak{P} + R\mathcal{S} - S\mathfrak{R} &= w, \end{aligned}$$

pour-

pourront servir à éliminer Q & S: & on trouve

$$Q = \frac{PP\Omega + PR\mathcal{S} - m\mathfrak{R} - wP}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$S = \frac{PR\Omega + RR\mathcal{S} + m\mathfrak{P} - wR}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& ces valeurs doivent rendre intégrables les formules

$$dx = Pdt + Qdz, \quad \& \quad dy = Rdt + Sdz.$$

Or substituant ces valeurs trouvées en y introduisant les formules $dP = \mathfrak{P}dt + \Omega dz$, & $dR = \mathfrak{R}dt + \mathcal{S}dz$, nous aurons:

$$dx = \frac{PPdP + PRdR - m\mathfrak{R}dz - wPdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{PRdP + RRdR + m\mathfrak{P}dz - wRdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

& l'une & l'autre de ces formules doit être intégrable.

§. 22. Toute la question se réduit donc à la recherche de la nature de ces deux fonctions P & R, desquelles dépendent les fonctions \mathfrak{P} & \mathfrak{R} , afin que ces deux formules

$$dx = \frac{P(PdP + RdR) - m\mathfrak{R}dz - wPdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

$$dy = \frac{R(PdP + RdR) + m\mathfrak{P}dz - wRdz}{P\mathfrak{P} + R\mathfrak{R}},$$

deviennent intégrables. Et lorsqu'on aura trouvé moyen de résoudre ce problème en général, il ne sera plus difficile de déterminer ces fonctions en sorte qu'elles satisfassent aux autres conditions. Or ce problème est si difficile, que, quoiqu'il ne dépende que de l'analyse, nous ne pouvons presque espérer de parvenir jamais à la solution générale, qui pourroit servir à déterminer le mouvement de toute sorte de rivières.

§. 23. Ces difficultés m'obligent à m'arrêter à des cas particuliers, dont l'évolution pourra en même tems servir à nous montrer comme il faut s'y prendre, pour chercher la solution générale. Puisque donc, posant $t=0$, il faut qu'il devienne $x=0$, & $y=b+z$, je supposérai

$x = Vt + Att$, & $y = b + z + Zt + Btt$,
où V & Z marquent des fonctions de la seule variable z . Nous aurons donc :

$$\begin{array}{ll} P = V + 2At; & R = Z + 2Bt, \\ Q = \frac{t dV}{dz}; & S = 1 + \frac{t dZ}{dz}, \\ \mathfrak{P} = 2A; & \mathfrak{R} = 2B, \\ \mathfrak{Q} = \frac{dV}{dz}; & \mathfrak{S} = \frac{dZ}{dz}. \end{array}$$

& par la seconde condition il sera $m = V$; & $n = -Z$. Or la troisieme condition donne

$$PS - QR = V + 2At + \frac{VtdZ}{dz} + \frac{2Att dZ}{dz} - \frac{ZtdV}{dz} - \frac{2Btt dV}{dz},$$

& cette expression doit être $= m = V$, d'où nous tirons ces deux équations :

$$2Adz + VdZ - ZdV = 0, \quad \& \quad AdZ = BdV,$$

dont la dernière donne $Z = \frac{BV}{A} + C$, qui étant remise dans la

première produit $2Adz - C dV = 0$, & partant $V = \frac{2Az}{C} + D$,

$$\text{donc } Z = \frac{2Bz}{C} + \frac{BD}{A} + C.$$

§. 24. Changeons ces constantes, & soit $D = \frac{2Ac}{C}$;
 $A = \frac{1}{2}aC$; $B = \frac{1}{2}\mathcal{E}C$, pour avoir $V = a(z + c)$; &
 $Z = C + \mathcal{E}(z + c)$, & nos formules deviendront :

$$\begin{aligned} x &= a(z + c)t + \frac{1}{2}aCtt; & y &= b + z + Ct + \mathcal{E}(z + c)t + \frac{1}{2}\mathcal{E}Ctt, \\ P &= a(z + c) + aCt; & R &= C + \mathcal{E}(z + c) + \mathcal{E}Ct, \\ Q &= at; & S &= 1 + \mathcal{E}t, \\ \mathfrak{P} &= aC; & \mathfrak{R} &= \mathcal{E}C, \\ \Omega &= a; & \mathcal{S} &= \mathcal{E}, \end{aligned}$$

De là nous obtiendrons la fonction de z , qui a été nommée $w = P\Omega - Q\mathfrak{P} + R\mathcal{S} - S\mathfrak{R}$, ce qui produit

$$\begin{aligned} w &= a\alpha(z + c) + a\alpha Ct + \mathcal{E}C + \mathcal{E}\mathcal{E}(z + c) + \mathcal{E}\mathcal{E}Ct, \\ &\quad - a\alpha Ct - \mathcal{E}C \qquad\qquad\qquad - \mathcal{E}\mathcal{E}Ct, \\ &\text{ou } w = (a\alpha + \mathcal{E}\mathcal{E})(z + c). \end{aligned}$$

Car, puisque les termes qui contenoient t se sont détruits eux-mêmes, on n'a pas besoin de réduction ultérieure.

§. 25. De là nous aurons donc $2\int w dz = (a\alpha + \mathcal{E}\mathcal{E})(zz + 2cz + cc)$, & la pression au point M deviendra

$$\begin{aligned} p &= \text{Const.} - b - z - Ct - \mathcal{E}(z + c)t - \frac{1}{2}\mathcal{E}Ctt + a\alpha(z + c)^2 \\ &\quad - a\alpha(z + c)^2 - 2a\alpha Ct(z + c) - a\alpha CCtt + \mathcal{E}\mathcal{E}(z + c)^2 \\ &\quad - \mathcal{E}\mathcal{E}(z + c)^2 - 2\mathcal{E}CCt \qquad\qquad - \mathcal{E}\mathcal{E}CCtt \\ &\quad - 2C\mathcal{E}(z + c) - 2\mathcal{E}\mathcal{E}Ct(z + c) \\ &\quad - CC \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p &= \text{Const.} - b - z - 2C\mathcal{E}(z + c) - CC - (1 + 2\mathcal{E}C)Ct \\ &\quad - (\mathcal{E} + 2a\alpha C + 2\mathcal{E}\mathcal{E}C)(z + c)t - C(\frac{1}{2}\mathcal{E} + a\alpha C + \mathcal{E}\mathcal{E}C)tt. \end{aligned}$$

Or cette expression devant évanouir, posant $z = a$, quelque valeur qu'on obtienne la variable t , nous en tirerons trois équations

Const.

$$\text{Const.} = b + a + 2C\mathcal{E}(a + c) + CC.$$

$$(1 + 2\mathcal{E}C)C + (\mathcal{E} + 2\alpha\alpha C + 2\mathcal{E}\mathcal{E}C)(a + c) = 0.$$

$$C(\frac{1}{2}\mathcal{E} + \alpha\alpha C + \mathcal{E}\mathcal{E}C) = 0,$$

dont la dernière nous fournit deux solutions, que je développerai séparément.

§. 26. Soit donc pour la première solution $C = 0$; & la seconde donne $c = -a$; & la première $\text{Const.} = b + a$. Donc nos équations pour le mouvement de l'eau seront:

$$x = a(z - a)t, \quad \& \quad y = b + z + \mathcal{E}(z - a)t,$$

& la pression $p = a - z - \mathcal{E}(z - a)t.$

Puisque z ne peut pas devenir plus grand que a , on voit bien qu'il faut prendre α négatif, de sorte qu'il soit

$$x = a(a - z)t, \quad \& \quad y = b + z - \mathcal{E}(a - z)t,$$

& la pression $p = a - z + \mathcal{E}(a - z)t.$

Posant $z = 0$, la figure du lit AC dans ce cas sera exprimée par ces formules $x = a.t$, & $y = b - \mathcal{E}at$, d'où l'on connoit, que le lit AC sera une ligne droite inclinée à l'horizon sous un angle dont la tangente $= \frac{\mathcal{E}}{a}.$

§. 27. Pour le second cas, nous aurons $C = \frac{-\mathcal{E}}{2(\alpha\alpha + \mathcal{E}\mathcal{E})}$, d'où la seconde équation devient $(1 + 2\mathcal{E}C)C = 0$, ou bien $\alpha\alpha\mathcal{E} = 0$, il sera donc ou α ou $\mathcal{E} = 0$: s'il étoit $\mathcal{E} = 0$, il seroit $C = 0$, comme dans le cas précédent, soit donc $\alpha = 0$; & il sera $C = -\frac{1}{2\mathcal{E}}$; & $\text{Const.} = b + a - a - c + \frac{1}{4\mathcal{E}\mathcal{E}} = b - c + \frac{1}{4\mathcal{E}\mathcal{E}}$: D'où nos équations pour le mouvement de l'eau seront:

$$x = a(z + c)t, \quad \& \quad y = b + z - \frac{t}{2\mathcal{E}} + \mathcal{E}(z + c)t - \frac{1}{4}tt,$$



& $p = 0$. Or a étant $= 0$, puisque $x = 0$, l'eau en coulant par AB ne sortira jamais de la perpendiculaire BAE.

§. 28. Dans ce cas donc l'eau couleroit perpendiculairement de haut en bas. Mais, si nous prenons $c = \infty$, afin que ac obtienne une valeur finie $= f$, & que nous posions également $\xi = 0$, en sorte que $\frac{1}{2\xi} - \xi c = g$, il en résultera le cas suivant

$$x = ft, \quad \& \quad y = b + z - gt - \frac{1}{4}tt,$$

& la pression fera partant $= 0$. Donc, le lit n'étant pas pressé, ce cas renferme le mouvement où l'eau tombe librement & selon une direction oblique quelconque. Or il est clair aussi que, par toute la hauteur AB, l'eau doit passer avec la même vitesse & selon la même direction, de sorte que chaque particule d'eau décrive une parabole, tout comme si elle étoit séparée du reste; puisqu'elle n'en souffre aucune pression. Aussi voyons-nous de nos formules, que la figure du lit, ou le chemin des particules qui passent par A, est une parabole comprise dans ces formules

$$x = ft, \quad \& \quad y = b - gt - \frac{1}{4}tt.$$

§. 29. Dans le premier cas, ayant posé $C = 0$, pour satisfaire à la seconde équation, au lieu de mettre $c = -a$, on peut aussi faire $\xi = 0$; & la première sera $\text{Const.} = b + a$. Dans ce cas nous aurons:

$$x = a(z + c)t, \quad \& \quad y = b + z,$$

& $p = a - z$, où au lieu de $x = a(z + c)t$, nous pouvons mettre $x = (az + \xi)t$. Ici nous voyons que le lit AC devient une ligne horizontale de même que la superficie BD: car chaque particule d'eau se mouvra uniformément dans une direction horizontale; & $az + \xi$ marque la vitesse dont l'eau passe par le point O. Aussi les diverses parties d'eau n'agiront l'une sur l'autre

tre

tre qu'en vertu de leur pesanteur, de là vient que la pression $p = a - z$ est partout la même comme si l'eau étoit en repos. Dans ce cas donc, la surface de la rivière sera parfaitement horizontale, & le mouvement de toutes les parties, se fera horizontalement & sera uniforme.

§. 30. Ayant trouvé $x = (az + \xi)t$, la vitesse de l'eau au point O seroit $= az + \xi$; mais on comprend aisément que ce même cas doit subsister, de quelque manière que varient les vitesses aux divers points O. Aussi voyons-nous que ces valeurs

$$x = Zt, \quad \& \quad y = b + z,$$

où Z marque une fonction quelconque de z , satisfont également à toutes les conditions requises. Car ayant

$$P = Z; \quad Q = \frac{t dZ}{dz}; \quad R = 0; \quad S = 1, \quad \& \text{ de là}$$

$$\mathcal{P} = 0; \quad \Omega = \frac{dZ}{dz}; \quad \mathcal{R} = 0; \quad \mathcal{S} = 0, \quad \text{il fera}$$

$$m = PS - QR = Z = \text{à une fonction de } z,$$

$$w = P\Omega - Q\mathcal{P} + R\mathcal{S} - S\mathcal{R} = \frac{Z dZ}{dz} = \text{à une fonction de } z,$$

d'où nous tirons la pression à un point quelconque M,

$$p = \text{Const.} - b - z - ZZ + 2fZdZ = a - z.$$

Ainsi une rivière peut subsister sur un lit horizontal, lorsque toutes les particules d'eau se meuvent uniformément selon des directions horizontales d'eau, & la surface supérieure demeurera horizontale. De plus, la pression de l'eau sera partout la même que si toute l'eau étoit en repos.



§. 31. Voici donc trois diverses valeurs des coordonnées x & y , qui satisfont aux conditions requises pour représenter le mouvement d'une riviere.

$$\begin{array}{ll} \text{I. } x = ft; & y = b + z - gt - \frac{1}{4}tt, \\ \text{II. } x = a(a - z)t; & y = b + z + \mathcal{E}(a - z)t, \\ \text{III. } x = Zt; & y = b + z, \end{array}$$

où Z marque une fonction quelconque de z .

Or le second cas peut encore être rendu plus général, en posant:

$$x = (a - z)Zt, \quad \& \quad y = b + z + \mathcal{E}(a - z)Zt;$$

& ce sera de la considération de ces cas particuliers qu'on pourra espérer la solution générale.

