University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works Euler Archive

1767

De motu fluidorum a diverso caloris gradu oriundo

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu fluidorum a diverso caloris gradu oriundo" (1767). *Euler Archive - All Works*. 331.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/331

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE MOTV FLVIDORVM A DIVERSO CALORIS GRADV ORIVNDO.

Auctore

L. EVLERO.

I.

A calore in fluidis certum quendam motum inteſtinum generari, a naturae ſcrutatoribus ſatis probabili ratione oſtendi ſolet; cum autem hic motus in minimis tantum elementis ſubſiſtat, neque in vniuerſa fluidi maſſa cernatur, eius ratio in Theoria motus fluidorum neutiquam habetur, ſed fluida omni motu in ſenſus incurrente deſtituta in aequilibrio verſari cenſentur, etiamſi minimae particulae, quibus ſunt compoſita, motu quocunque inter ſe agitentur. Neque ergo hic de motu illo inteſtino, qui fluidorum elementis a calore inducitur, hic ſum acturus, ſed Mechanicae principiis inhaerens in eos fluidorum motus ſum inquiſiturus, qui in eorum tota mole a diuerſo caloris gradu, quo eius partes ſunt affectae, produci debet. Quae motus cauſa cum vix adhuc ſit cognita, tametſi plurima phaenomena inde originem ſuam trahunt, eius accuratior

curatior euolutio non solum mathematicam fluidorum cognitionem, sed etiam physicam maxime amplificabit.

2. Cum olim Theoriam aequilibrii fluidorum accuratius perscrutarer, luculenter ostendi neque atmosphaeram neque vllum aliud fluidum in aequilibrio consistere posse, nisi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus deprehendatur. Quodsi enim de fluido graui quaestio instituitur, ad statum aequilibrii absolute requiritur, vt in aequalibus altitudinibus non solum pressio sed etiam densitas fluidi vbique sit eadem. Quoniam igitur fluidorum densitas a calore variatur, siquidem a frigore in minus spatium constringuntur, a calore vero in maius expanduntur: simul est euictum, nisi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, aequilibrium omnino locum habere non posse. Atque in hoc principio non dubitaui praecipuam ventorum causam constituere, cum statim atque atmosphaera in quapiam regione maiorem calorem concipit quam in finitimis, ob sublatum aequilibrium necessario ventus debeat oriri.

3. Cuiusmodi autem motus in fluido, cuius partes aeque eleuatae diuerso caloris gradu perfunduntur, ab hac ipsa causa produci debeat, tum temporis definire non sum ausus; quandoquidem haec inuestigatio vberiorem motus cognitionem po-

 stulare

ſtulare videbatur. Poſtquam autem hoc argumentum denuo examini ſubieciſſem, inſignem hanc proprietatem ſemper locum habere debere deprehendi, vt quoties maſſa fluida ad pares altitudines in vno fuerit calidior, quam in alio, tum perpetuo in regione inferiori fluidum a loco frigidiore in calidiorem, contra vero in regione ſuperiori a calidiore in frigidiorem ferri debere. Quae concluſio cum per experientiam mirifice confirmetur, quoniam talem motum in caminis et hypocauſtis calefactis clariſſime obſeruamus, omnino digna videtur, vt eam accuratius euoluam, atque adeo ipſam huius motus generationem, quatenus quidem licet, diſtincte exponam.

Tab. IX. Fig. 1. 4. Conſideremus ergo vas ſatis amplum ABCD fluido quocunque repletum, in cuius parte ABEF ope ignis ſubiecti multo maior caloris gradus ſuſtineatur, quam in parte reliqua EFCD, ita vt fluidum in illa parte ob maiorem calorem minore praeditum ſit denſitate quam in hac, vbi frigidum aſſumitur. Concipiamus primo has duas partes pariete verticali EF a ſe inuicem ſeparari, huncque parietem inferius in f exiguo foramine eſſe pertuſum; atque vt iam fluidum in aequilibrio exiſtat, ideoque preſſio in foramine f vtrinque aequalis habeatur, euidens eſt fluido in parte ABFE maiorem altitudinem $BK = FL$ tribui debere, quam in in altera parte EFCD vbi altitudo fluidi ſit FM $=$CN; vt ſcilicet quantum fluidi denſitas in illa parte minor eſt, defectus preſſionis inde in foramine f natae exceſſu altitudinis LM compenſetur.

5. Cum igitur hoc modo fluidum ad aequilibrium fuerit perductum, eiusque particula in foraminulo f vtrinque parem vim ſuſtineat, ponamus parietem in loco altiori quoque foraminulo e perforari. Atque iam manifeſtum eſt particulam fluidi in e haerentem a fluido in parte calidiori contento ob maiorem altitudinem Le multo magis vrgeri, quam a fluido partis frigidioris; etſi enim illud minorem habet denſitatem, altitudo tamen fluidi calidioris Le prae altitudine frigidioris Me multo maior eſt quam hic ad aequilibrium requireretur. Quo hoc clarius perſpiciatur, ſit denſitas fluidi frigidi $=d$, calidi vero $=d-\delta$, atque pro aequilibrio in foraminulo f neceſſe eſt ſit $(d-\delta)\mathrm{L}f=d.\mathrm{M}f$ ſeu $d.\mathrm{LM}=\delta.\mathrm{L}f$. Pro foraminulo autem e preſſio fluidi calidi eſt $=(d-\delta)\mathrm{L}e$ frigidi vero $=d.\mathrm{M}e$, illa igitur hanc ſuperat parte $d.\mathrm{LM}-\delta\mathrm{L}e$. Quia vero eſt $d.\mathrm{LM}=\delta.\mathrm{L}f$; hic exceſſus fit $=\delta.\mathrm{L}f-\delta.\mathrm{L}e$ $=\delta.ef$; vnde patet, quo magis foramen e ſupra f fuerit eleuatum, eo magis ibi preſſionem a fluido calido ortam ſuperaturam eſſe preſſionem alteram a frigido ortam.

6. Ab exceſſu ergo hoc particula fluidi in foramine e verſans ad motum concitabitur, fluidum-

que ex vasis parte calidiori ABEF per foramen *e* in partem frigidam propelletur: sicque manifestum est hoc casu per foramen superius *e* fluido necessario motum e loco calido in frigidum impressum iri. Statim autem ac propter hunc fluxum altitudo fluidi frigidi crescit, calidi vero decrescit, aequilibrium ad foramen inferius *f* tollitur, et ob auctam pressionem in vasis parte frigida fluidum ibi hinc in partem calidam transibit. Si prius fluido eiusmodi statum tribuissemus, vt aequilibrium circa foramen superius *e* fuisset, tum quoque fluxus per foramen inferius *f* e loco frigidiori in calidiorem euenisset; ex quo concludere licet, etiam sublato pariete EF fluxum perennem in fluido generari, quo inferne fluidum ex parte frigida in calidam, superne vero ex calida in frigidam promoveatur, quamdiu scilicet discrimen caloris durat.

7. Idem hoc etiam ita ostendi potest, vt neque diaphragmate opus sit, neque superna fluidi superficie; hocque ratiocinium idcirco quoque ad atmosphaeram traduci possit. Sumamus ergo in regione ABF insignem caloris, in regione vero DCG insignem frigoris gradum adesse: tum vero huic fluido alioquin continuo duos tubos horizontales immersos concipiamus, alterum *ad* in regione superiori, alterum vero *bc* in regione inferiori, quorum vterque e regione calida in frigidam porrigatur. Fingamus nunc fluidum in eiusmodi statu, vt pro tubo inferiori *bc* pressio fluidi vtrinque sit eadem,

Tab. IX. Fig. 2.

eadem, ac perſpicuum eſt in tubi ſuperioris *ad* termino *a* preſſionem maiorem eſſe futuram quam in termino *d*. Quam ob rem fluidum per ſuperiorem *ad* ex regione calida in frigidam moueri incipiet; Sin autem initio pro tubo ſuperiori *ad* preſſio vtrinque par eſſet, tum fluidum per inferiorem *cb* ex regione frigida in calidam tranſibit. Ex quibus colligitur, quomodocunque fluidum fuerit diſpoſitum, ſemper in regione ſuperiori fluxum ex parte calida in frigidum, in regione inferiori autem fluxum contrarium ex calida parte in frigidam oriri debere.

8. Egregie haec cum experientia conueniunt; ſi enim vas huiusmodi ſatis amplum aqua repletum altero tantum latere AB igni admoueatur, vt aquae pars huic lateri vicina calorem adipiſcatur, in oppoſita autem parte CD frigida maneat, tum mox obſeruare licet in ſuperficie ſuprema aquam continuo a parte calida in frigidam proferri; quod fieri non poſſet niſi ſimul circa fundum fluxus contrarius oriretur. Si hoc modo piſa vel lentes in aqua coquantur, dum vas ex vna tantum parte vim ignis experitur, iſte motus multo facilius agnoſcitur. Tum etiam idem phaenomenum in aëre maxime cernitur; dum enim conclauis calefacti ianua in conclaue frigidum aperitur, mox aëris motus per aperturae partem ſummam, ex conclaui calido in frigidum, per infimam autem ex frigido

in calidum sentitur. Quin etiam ascensus aeris per caminum, vi ignis vulgo tributus, eidem causae debetur, dum in regione inferiori aër continuo ad ignem affluit; ac prope fornacem calefactum in hypocausto aër continuo ascendere obseruatur, in locis frigidioribus iterum descensurus.

9. Nullum etiam est dubium, quin ex hoc principio venti constanter ab oriente spirantes sub zona torrida explicari queant, verum ne coniecturis atque adeo determinationibus quodammodo vagis nimis tribuere videar, ipsam horum motuum generationem et celeritatem ex primis mechanicae principiis definire conabor. Quod cum in genere pro fluido quaqua versus expanso praestare non liceat, inuestigationes meas ad motum fluidorum in tubis cuiuscunque figurae adstringam, quae quidem limitatio veritati conclusionum inde deducendarum nullam vim afferet; cum quomodocunque etiam motus fuerit comparatus, via qua quaelibet particula promouetur, mente saltem vt tubus considerari possit. Hos igitur tubos ita angustos assumo vt in qualibet sectione ad eorum directionem normaliter facta nulla motus inaequalitas locum habere possit, sed tota massa huiusmodi sectionem implens communi motu proferatur. Quantumuis autem haec hypothesis limitata videatur, tamen probe notandum est fere omnia quae adhuc circa motum fluidorum

dorum ſunt inueſtigata, ex hac hypotheſi eſſe deriuata; quae cum egregie cum experientia conſentiant, eo minus verendum eſt, ne ei innixi in errorem praecipitemur.

10. Sit igitur AB huiusmodi tubus, figurae cuiuscunque, et cuius amplitudo vtcunque ſit variabilis; in quo fluidum indolis cuiuscunque moueatur. Ad hunc motum definiendum ad duas quantitates variabiles principales ſpectari oportet, quarum altera loci in tubo, altera vero temporis determinationem contineat. Pro priori ſumto in tubo loco fixo A, ſtatuamus puncti cuiuscunque S ab eo diſtantiam ſeu arcum $AS = s$, curuaminis ſcilicet tubi ſimul ratione habita; tum vero pro poſteriori epocha quaedam fixa ſtabiliatur, a qua tempora deinceps computentur; et nunc quidem ponamus tempus inde elapſum eſſe $= t$, quod in minutis ſecundis exprimamus, ad quod propterea calculum ſequentem accommodari conueniet. Quaecunque iam ad motum pertinent, ea per has duas variabiles exprimi oportebit, vt intelligatur, quomodo fluidi ſtatus tam in quouis tubi loco, quam ad quoduis tempus futurus ſit comparatus. Tab. IX. Fig. 3.

11. Nunc igitur, hoc eſt elapſo ab illa epocha tempore $= t$ ſec. ponamus fluidi particulae in S haerentis denſitatem eſſe $= q$, preſſionem $= p$ et celeritatem qua verſus B progreditur $= v$; tum

vero

vero ſit amplitudo tubi ad S $= rr$, eiusque altitudo ſuper quodam plano horizontali $= z$ quae duae poſteriores quantitates cum a ſolo tubi loco S pendeant, vt functiones ſolius variabilis s ſunt ſpectandae. Praecedentes vero tres quantitates q, p, v, quoniam in eodem loco ſucceſſu temporis variationes recipere poſſunt, vt functiones ambarum variabilium s et t conſiderari, et in calculo conformiter tractari debent. Celeritatis autem v ſignificatum ita definio, vt hac littera ſpatium, quod iſta celeritate vniformiter vno minuto ſecundo percurreretur. Tum vero certa quadam denſitate per vnitatem expreſſa, littera q numerum quendam denotabit; at littera p altitudinem quandam exhibet, columnae ſcilicet ex materia illa, cuius denſitas vnitate deſignatur, conſtantis, et pondere ſuo preſſionem in S referentis.

12. His poſitis euidens eſt, cum quantitates rr et z vt functiones cognitae variabilis s ſpectari queant, totum negotium huc reuocari, vt cuiusmodi tres illae quantitates q, p et v ſint functiones binarum noſtrarum variabilium s et t definiatur, in quem ſcopum omnes vires calculi ſunt intendendae; ex quo intelligitur tribus opus eſſe aequationibus ad illas quantitates determinandas; pro noſtro autem inſtituto duae ſufficiunt, quandoquidem in quouis tubi loco gradum caloris, a quo denſitas pendet, vt cognitum aſſumimus. Si enim fluidum ſit aqua, ex calore immediate denſitas innoteſcit,

ſin

ſin autem ſit aër, preſſio inſuper in computum duci debet, quae hoc caſu elaſticitatem repraeſentat, ideoque recte denſitati et calori coniunctim proportionalis aeſtimatur. Quemadmodum igitur praeterea duas aequationes obtinere liceat, accuratius inueſtigabo.

13. Primum igitur obſeruo per aſſumta elementa moleculae fluidi cuiusque Ss promotionem tempuſculo infinite paruo dt factum aſſignari poſſe; quam ergo ſi in $S's'$ perueniſſe ſumamus, quia etiam hic denſitas definitur, neceſſe eſt vt maſſa $S's'$ praeciſe aequalis ſit maſſae Ss, vnde vnam aequationem eliciemus. Poſito igitur elemento $Ss = ds$, erit moleculae Ss volumen $= rrds$, quod in denſitatem q ductum dabit eius maſſam $= qrrds$. Cum iam puncti S celeritas ſit $= v$ ea hoc punctum tempuſculo dt proferetur per ſpatiolum $SS' = vdt$; puncti vero s nunc celeritas eſt $= v + ds(\frac{dv}{ds})$, qua eodem tempuſculo dt proferetur per ſpatiolum $ss' = vdt + dsdt(\frac{dv}{ds})$: vnde fit $S's' = Ss + ss' - SS' = ds + dsdt(\frac{dv}{ds})$. Quaeratur amplitudo tubi in S', quae ob $SS' = vdt$ erit $= rr + vdt.\frac{d.rr}{ds}$, ex quo volumen particulae $S's'$ erit $= rrds + rrdsdt(\frac{dv}{ds}) + vdtds.\frac{d.rr}{ds}$ vbi notandum eſt $\frac{d.rr}{ds}$ eſſe functionem datam ipſius s. At denſitas quae in S erat $= q$, nunc poſt tempuſculum dt et per ſpatiolum $SS' = vdt$ progrediendo colligitur $= q + dt(\frac{dq}{dt})$

$+v\,dt\left(\frac{dq}{ds}\right)$, hincque massa particulae in $S's'$ translatae:

$$=qrr\,ds+qrr\,ds\,dt\left(\frac{dv}{ds}\right)+qv\,dt\,ds.\frac{d.rr}{ds}+rr\,ds\,dt\left(\frac{dq}{dt}\right)+rrv\,ds\,dt\left(\frac{dq}{ds}\right)$$

neglectis scilicet terminis, in quibus differentialia secundum gradum essent superaturae.

14. Quoniam itaque haec massa praecedenti $qrr\,ds$ debet esse aequalis facta diuisione per $ds\,dt$ hanc consequimur aequationem, qua iam vna motus conditio determinatur:

$$qrr\left(\frac{dv}{ds}\right)+qv\frac{d.rr}{ds}+rrv\left(\frac{dq}{ds}\right)+rr\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$$

cuius tria membra priora manifesto in hoc vnum coëunt $\left(\frac{d.qrrv}{ds}\right)$, ita vt nostra aequatio in hanc formam contrahatur:

$$\left(\frac{d.qrrv}{ds}\right)+rr\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$$

cuius prius membrum ex sola variabilitate ipsius s, posterius vero ipsius t tantum est repetendum, quemadmodum motus signandi iam satis receptus declarat, quam ob rem eius vlteriori explicationi supersedeo. Quia amplitudo tubi est data, hac aequatione certa relatio inter densitatem et celeritatem exprimitur.

15. Altera aequatio qua adhuc indigemus, ex acceleratione concludi potest. Scilicet cum celeritas nunc in S sit v, haecque particula tempusculo dt per spatiolum $SS'=v\,dt$ promoueatur, hic eius cele-

celeritas erit $v + v\,dt\left(\frac{dv}{ds}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$, ideoque acceleratio $= v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$, quae vi acceleranti eſt proportionalis ſtatuenda. Conſideremus ergo particulam Ss, cuius maſſa $= qrrds$, quae primo ob grauitatem ſecundum Ss' vrgetur vi acceleratrice $= -\frac{dz}{ds}$, tum vero ob preſſionem in S vi motrice $= prr$, ab altera vero parte s contra vi $= rr\left(p + ds\left(\frac{dp}{ds}\right)\right)$ hinc ergo naſcitur vis motrix $= -rrds\left(\frac{dp}{ds}\right)$ et vis acceleratrix $= -\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right)$ in eandem directionem. Quodſi iam g denotet altitudinem, ex qua grauia tempore vnius minuti ſecundi delabuntur, nouimus poni debere:

$$v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = -\frac{2g\,dz}{ds} - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) \text{ ſeu}$$
$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) + \frac{2g\,dz}{ds} + v\left(\frac{dv}{ds}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

quae ergo eſt altera aequatio deſiderata et priori adiuncta omnes fluidorum motus in tubis complectitur.

16. Vt nunc has formulas ad caſum propoſitum accommodemus; ſumamus tubum in ſingulis punctis tam efficaci caloris gradu eſſe praeditum, vt ſimulac fluidum eo peruenit cum eo idem caloris gradus communicetur, quod quidem ſi tubus ingentem habeat extenſionem ſimulque fuerit valde anguſtus, etiam in praxi facile obtinetur, quandoquidem tum per inſignem tractum caloris gradus parum immutatur, fluidoque transfluenti eadem

mutatio mox inducitur, nisi forte eius motus vehementer fuerit rapidus. Quia autem hic ad primam motus generationem potissimum spectamus, hic casus nostram inuestigationem haud perturbabit. Tubi ergo loco cuique S eiusmodi tribuo calorem, eumque perennem, vt fluidi eo versantis densitas sit $=q$, quae cum in eodem tubi loco semper sit eadem, neque successu temporis varietur, erit haec quantitas q functio solius variabilis s ab altera t neutiquam pendens, ideoque $\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$.

17. Cum igitur sit $\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$, prima aequatio pro motu definiendo inuenta hanc habebit formam $\left(\frac{d.qrrv}{ds}\right)=0$ ita vt quantitatis $qrrv$ differentiale ex solius s variabilitate ortum sit nullum; ex quo sequitur istam quantitatem plane non ab s pendere, sed vel esse constantem vel functionem solius temporis t, ex quo deducimus hanc aequationem integratam $qrrv=\Gamma:t$, hincque $v=\frac{\Gamma:t}{qrr}$ ita vt eodem tempore per totum tubum celeritas sit reciproce vt tubi amplitudo in densitatem ducta. Cum iam quantitates q et rr non a tempore t pendeant erit $\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\Gamma':t}{qrr}$ ex quo altera aequatio fit $\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right)+\frac{2g\,dz}{ds}+v\left(\frac{dv}{ds}\right)+\frac{1}{qrr}\Gamma':t=0$

multiplicetur ea per qds, et tempus t pro constante habetur, vt haec prodeat aequatio:

$$2g\,dp+2gq\,dz+qv\,dv+\frac{ds}{rr}\Gamma':t=0$$

quae

quae ergo integrata praebet:

$$2gp + 2g\int q\,dz + \int qv\,dv + \Gamma' : t\int\frac{ds}{rr} = \Delta : t.$$

18. In hac aequatione quia q, rr et z sunt functiones ipsius s tantum, integralia $\int q\,dz$ et $\int\frac{ds}{rr}$ nullam habent difficultatem; at cum sit $\int qv\,dv = \frac{1}{2}qvv - \frac{1}{2}\int vv\,dq$ ob $v = \frac{\Gamma : t}{qrr}$ erit

$$\int qv\,dv = \frac{(\Gamma : t)^2}{2qr^4} - \tfrac{1}{2}(\Gamma : t)^2\int\frac{dq}{qqr^4}$$

sed est $\int\frac{dq}{qqr^4} = -\frac{1}{qr^4} - 4\int\frac{dr}{qr^5}$ vnde fit

$$\int qv\,dv = (\Gamma : t)^2\left(\frac{1}{qr^4} + 2\int\frac{dr}{qr^5}\right)$$

vnde etiam haec integratio quouis casu facile expeditur. Ponamus breuitatis gratia $\Gamma : t = T$ vt sit $v = \frac{T}{qrr}$ denotante littera T functionem ipsius t tantum, et quia est $\Gamma' : t = \frac{dT}{dt}$ altera aequatio motum determinans erit:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT\int\frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr},$$

vbi notetur litteram T exhibere celeritatem fluidi in eo tubi loco vbi est $qrr = 1$.

19. Quia hic assumsimus densitatem fluidi vnice a calore pendere, perspicuum est hanc hypothesin ad eiusmodi fluida esse restrictam, quae a viribus comprimentibus nullam mutationem patiuntur, cuiusmodi est aqua; neque ergo has aequationes ad aërem transferre licet, quippe cuius densitas insuper a pressione seu elasticitate determinatur. Interim

terim autem facile intelligitur, si motum aquae in tubis diuerso calore affectis definire nouerimus, aëris motum haud multo fore absimilem, easdemque fere leges esse secuturum. Quam ob rem quaestionem resoluendam ita constituam:

Tab. IX. Fig. 4. *Si habetur tubus in se rediens figurae cuiuscunque ACBD et amplitudinis vtcunque variabilis, in cuius singulis locis certus caloris gradus vigeat cum fluido ibi transfluente mox communicandus; hicque tubus aqua repleatur, quae primo ope diaphragmatis Aa tubo alicubi inserti in quiete seruetur; tum vero diaphragmate remoto quaeritur motus, qui aquae ob diversam caloris temperiem inducetur.*

20. Sumto pro lubitu in tubo puncto fixo A, ab eo vocetur puncti cuiusuis S distantia seu arcus $AS = s$, amplitudo tubi ibidem $= rr$, et gradus caloris tantus, vt aqua ibi versans densitatem obtineat $= q$; tum vero puncti huius S altitudo super certo quodam plano horizontali sit $= z$, ita vt hae tres quantitates rr, q et z tanquam functiones datae ipsius s spectari queant. Deinde elapso tempore $= t$ min. sec. sit aquae celeritas in loco $S = v$ in plagam SCB tendens, ibique statuatur pressio $= p$. His positis pro motu cognoscendo habebimus primo $v = \frac{T}{qrr}$, existente T certa functione temporis T deinceps definienda, tum vero insuper hanc aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT\int\frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr}$$

vbi

vbi g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, quam nouimus esse 15, 625 ped. Rhen.

21. Tota quaestio ergo huc reducitur; quomodo hinc temporis functionem T definiri oporteat, quandoquidem ea cognita motus aquae in toto tubo ad quoduis tempus innotescit, dum altera temporis functio $\Delta : t$ tantum in pressionis p determinationem ingreditur, atque adeo a lubitu nostro pendet, quia quouis tempore tubum constringendo pressionem vel intendere vel remittere licet. Ex rei autem natura functio illa temporis T sequenti ratiocinio elici debet: ponatur primo arcus $AS = s = 0$, tempore vt constante spectato, vt p praebeat pressionem in loco A; tum ipsi s detur valor toti tubi longitudini ACBDA aequalis, vt in eundem locum A reuertamur, atque valor pro p hinc resultans necessario praecedenti aequalis esse debet: atque ex hac aequatione functionem illam T determinare licebit; quae quoniam per integrationem elicitur, ita debet esse comparata, vt posito tempore $t = 0$ ea euanescat, quia initio omnis aqua in quiete fuisse assumitur. Quare si tempore succedente quantitas T non amplius fuerit nulla, hinc concludendum erit, aquam deinceps non amplius in quiete permanere posse.

22. Quo autem clarius perspiciatur a quanam causa aqua primum ad motum concitetur, ponamus

septum

septum Aa, quo omnis motus coercetur, adhuc adesse et quia in hoc statu quantitas T necessario est nulla, pro pressione in singulis punctis S altera nostra aequatio praebet $2gp = \Delta : t - 2g\int q dz$ seu $p = f : t - \int q dz$, vnde si integrale $\int q dz$ ita capiatur vt euanescat sumto arcu $AS = s = 0$, functio $f : t$ dat pressionem aquae supra septum Aa. Quodsi iam integrale $\int q dz$ per totum tubum ACBDA extendatur, eiusque valor tum fiat $= k$, infra septum pressio erit $= f : t - k$; vnde patet sublato septo Aa guttulam aquae ibi deorsum vrgeri pressione $f : t$, sursum vero pressione $f : t - k$, ideoque deorsum pressione k, cui cum iam nihil obsistat, manifestum est totam aquam in tubo ad motum concitatum iri. Quare nisi ille integralis $\int q dz$ per totum tubum extensi valor k euanescat, sublato septo fieri nequit, vt aqua in quiete perseueret; simul vero etiam hinc causa perspicitur motum producens, quae vbicunque septum Aa concipiatur, eadem prodire debet ita vt omnia aquae elementa in toto tubo simul ad motum pari vi impellantur.

23. Hinc autem primo perspicuum est, si densitas q vbique esset eadem, seu $q = b$, ob $\int q dz = bz$, siquidem planum horizontale, a quo altitudinem z metimur, per ipsum locum A ducamus, reuersione per totum facta, altitudinem z iterum euanescere, ideoque fore $k = 0$; quo ergo casu etiam remoto septo Aa aequilibrium conseruabitur. Idem quoque

quoque innumerabilibus aliis casibus, quibus densitas q est variabilis euenire potest, veluti si fuerit $q = A + Bz^{\alpha} + Cz^{\beta} + Dz^{\gamma}$ etc. quoniam integrale $\int q dz = Az + \frac{B}{\alpha+1} z^{\alpha+1} + \frac{C}{\beta+1} z^{\beta+1} + \frac{D}{\gamma+1} z^{\gamma+1}$ etc. ita sumtum vt euanescat posito $z = 0$, facta integra reuolutione, vbi fit iterum $z = 0$ denuo euanescit. Atque in genere hoc euenire debere perspicuum est; quoties densitas q a sola altitudine z pendet, ita vt vbique in paribus altitudinibus densitas sit eadem; quam conditionem ad aequilibrium absolute necessariam esse iam olim demonstraui.

24. Eatenus autem quantitas k non euanescit, quatenus in aequalibus altitudinibus non eadem densitas deprehenditur, id quod sequenti modo luculentissime ostenditur. Ponamus in A densitatem esse minimam, indeque per C vsque ad B progrediendo continuo augeri, vt in B sit maxima, hinc vero per D a A reuertendo iterum diminui; iam ducta recta verticali CABD, cuius puncta A, C, B, D altitudines eorundem tubi locorum referant, ad quae constituantur applicatae Aa, Cc, Bb, Dd densitates aquae in his locis repraesentantes; eorumque puncta a, c, b, d, in curua quadam in se redeunte $acbda$; ac si punctum S altitudini loci in tubo S respondeat, vt sit $AS = z$, erit hic applicata $Ss = q$, ideoque integrale $\int q dz$ exprimit aream $AaSs$; vnde si punctum S vsque ad summum C promoueamus, area habebitur $AaCc$: hinc autem vlterius vsque ad Tab. X. Fig. 5.

ad B progrediendo, quia areae per altitudines im-
minutas negatiue capi debent, pro hoc loco B in-
tegrale $\int q\,dz$ erit $AaCc - CcbB$ pro puncto autem
imo D erit $= AaCc - CcbdD$. Atque iterum a
D ad A ascendendo fit id $AaCc - CcbdD + DdaA$,
quod cum det valorem ipsius k erit $k =$ areae $acbda$,
vnde patet littera k designari aream a linea $acbda$
in se redeunte inclusam.

Tab. X. Fig. 6. 25. Hic obseruo fieri posse, vt aqua in tubo quiescat, etiamsi in paribus altitudinibus eius densitas non sit eadem. Euenit hoc si curua illa in se rediens eiusmodi lemnisci $Oasc\sigma\alpha O\beta dbO$ habeat figuram, vt areae a nodo O separatae inter se sint aequales; quia enim hoc casu altera area negatiue accipi debet, area tota k in nihilum abire est censenda. Hic ergo casus locum habet, si a puncto imo D sinistrorsum per A ad summum C ascendendo scala densitatum q sit curuae ramus $dbOasc$, tum vero a puncto summo C ad infimum D dextrorsum per B descendendo scala densitatum sit ramus $c\sigma\alpha O\beta d$. Etsi ergo in aequalibus altitudinibus AS densitates sunt inaequales in altero loco scilicet sinistro Ss dextro vero $S\sigma$, tamen haec inaequalitas non obstat quo minus aqua in tubo contenta statum aequilibrii seruare possit; dummodo ambo illi rami eiusmodi lineam in se redeuntem constituant cuius tota area ad nihilum reducatur.

26. Ne-

26. Nequaquam autem hi casus Theoriae iam olim stabilitae, qua ad aequilibrium in altitudinibus paribus aequales densitates requiruntur, aduersatur; namque Theoria illa in genere ad fluida quaqua versus patentia et secum communicantia est accommodata, in quibus vtique nullum aequilibrium sine ista conditione dari potest. Quando autem fluida tubis sunt inclusa, ita vt diuersae fluidi partes non aliter nisi per tubum inter se communicare queant, tum illa conditio vehementer restringitur, vt non amplius absolute sit necessaria. Atque adeo iam insignem exceptionem hic notauimus, dum tubi continuitate septo interclusa fluidum semper necessario in aequilibrio coercetur quantumuis etiam densitates in paribus altitudinibus fuerint diuersae. Deinde vero etiam remoto septo, dummodo tubus non prorsus aqua sit plenus, sed portio quaedam eius vacua relinquatur, iam dudum constat semper aequilibrium existere posse, etiamsi in paribus altitudinibus non aequalis fluidi densitas reperiatur. Quare eo magis mirum videri debet, hoc non semper euenire posse, quando tubus in se rediens omnino fluido est repletus, adhuc magis autem hoc paradoxum augebitur, quando ostendero ad id vt aequilibrium certo obtineri queat, requiri vt ad minimum certum aliquod spatium vacuum relinquatur, cuius adeo quantitatem quouis casu assignare licet.

Tab. X. Fig. 7. 27. His praemissis, vt tandem quaestionis principalis §. 19. propositae solutionem determinatam exhibeam, ne vniuersalitas calculum impediat, tubo primum figuram circularem tribuam eumque in plano verticali constitutum considerabo; tum vero etiam quo facilius calculi difficultates superem, amplitudinem eius vbique eandem statuam; vt quantitas rr sit constans. Deinde ducto diametro horizontali AB, in eius termino A calorem maximum in B vero minimum esse assumam, vt aquae densitas in A sit minima in B vero maxima, in loco autem summo C et imo D valorem quendam medium teneat. Parum autem referet, quomodo variatio densitatis constituatur, igne autem ad A suscitato quia calor in ratione duplicata distantiarum decrescere aestimatur, pro quouis autem tubi puncto S distantiae seu cordae AS quadratum sinui verso AZ est proportionale, posito angulo $AOS = \Phi$ statuamus aquae in S densitatem $q = 1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi$, vt densitas minima in A sit $= 1 - \alpha$ maxima in $B = 1 + \alpha$, et media in C vel $D = 1$. Tum vero posito circuli radio $OA = a$, erit arcus $AS = s = a\Phi$, et puncti S altitudo $sZ = z = a \operatorname{fin.} \Phi$.

28. Sit porro amplitudo tubi constans $rr = ff$, et elapso tempore $= t$ celeritas aquae in C vel $D = u$, vt sit $T = ffu$, celeritas vero in $S = \frac{ff.u}{qrr} = \frac{u}{1 - \alpha \operatorname{cof.} \Phi} = v$, quam in plagam ACBD dirigi assumo. Iam singula

gula membra aequationis §. 20. exhibitae feorfim euoluamus, et primo ob $dz = a\,d\Phi \,\mathrm{cof.}\,\Phi$ habebimus
$\int q\,dz = a\int d\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi(1-\alpha\,\mathrm{cof.}\,\Phi) =$
$a\int d\Phi(\mathrm{cof.}\,\Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{cof.}\,2\Phi)$ vnde fit:

$$\int q\,dz = a\,\mathrm{fin.}\,\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha a\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha a\,\mathrm{fin.}\,2\Phi.$$

Deinde eft $\frac{TT}{qr^4} = \frac{uu}{1-\alpha\,\mathrm{cof.}\,\Phi}$, et $\int\frac{dr}{qr^4} = 0$ ob rr conftans, ac denique $\frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr} = \frac{s\,du}{dt} = \frac{a\Phi\,du}{dt}$
vnde aequatio pro motu determinando colligitur:
$2gp = \Delta : t - 2ga(\mathrm{fin.}\,\Phi - \frac{1}{2}\alpha\Phi - \frac{1}{4}\alpha\,\mathrm{fin.}\,2\Phi) - \frac{uu}{1-\alpha\,\mathrm{cof.}\,\Phi} - \frac{a\Phi\,du}{dt}$
nunc pofito angulo $\Phi = 0$ pro preffione in puncto A nanciscimur: $2gp = \Delta : t - \frac{uu}{1-\alpha}$, at pofito $\Phi = 2\pi$ feu 4 angulis rectis pro eodem loco confequimur:

$$2gp = \Delta : t + 2\pi\alpha g a - \frac{uu}{1-\alpha} - \frac{2\pi a\,du}{dt}$$

qui duo valores aequales pofiti praebent:

$$\alpha g - \frac{du}{dt} = 0 \text{ et integrando } u = \alpha g t.$$

29. Hinc intelligimus, cum primo inftanti quo feptum remouetur, vniuerfa aqua fuiffet in quiete, dehinc eam mox motum effe concepturam eumque vniformiter acceleratum, ita vt celeritas in ipfa temporis ratione increfcat. Videmus quoque motum fore eiusmodi, vti initio dixi, fcilicet in parte inferiori e loco frigido B per D ad locum calidum A accedentem, fupra vero hinc per C ad frigidum B recedentem. Deinde etiam perfpicimus

hunc motum eo fore vehementiorem, quo maior fuerit littera α, ſeu quo magis denſitas aquae in B ſuperet denſitatem in A. Cum igitur quo maior fuerit tubi diameter AB refrigeratio in B quaſi in ratione fiat duplicata, manifeſtum eſt, quo maior fuerit tubus eo celeriorem motum generatum iri. Perpetuo autem ex diſcrimine quo calor in A excitatus ſuperat caloris vel frigoris gradum in B, motus acceleratio eſt iudicanda.

30. Primo quidem initio ſatis tuto colligere poſſumus, celeritatem motus in ratione temporis increſcere, ſtatim autem ac motus tam velox euaſerit, vt aquae calor ſe ad tubi temperaturam componere nequeat, ideoque iam in B aqua multo calidior, in A vero frigidior reperiatur quam in calculo aſſumſimus, mirum non eſt ſi acceleratio mox multo minorem rationem ſequatur, ac tandem ad certum vniformitatis gradum ſit peruentura, quod autem fieri nequit niſi aqua vel ad eundem caloris gradum vbique fuerit perducta vel ſaltem in locis aeque altis eundem gradum conceperit. Ad quietem autem nunquam redigi poterit, quoniam ſimul ac paulisper quieuerit, ignisque effectum in A ſenſerit, contra vero ad B fuerit refrigerata, motus de nouo inſtauraretur. Ex quo quamdiu tubus in A calidior fuerit quam in B, motus aquae continuo debet durare. Ceterum facile intelligitur ad motum producendum hunc caſum, quo gradus maxi-

maximi minimique caloris in diametro horizontali sibi oppositos assumimus maxime esse efficacem, lentioremque motum esse futurum, si haec oppositio in diametro obliquo fieret quod ostendisse operae erit praetium.

31. Ponamus ergo maximum calorem in A minimum in B, vt diameter AB ad horizontalem HK inclinatus sit angulo $HOA = \zeta$, sit vt ante angulus $AOS = \Phi$, radius $AO = a$, hinc arcus $AS = s = a\Phi$ et densitas in S nempe $q = 1 - \alpha \cos. \Phi$; atque omnia se habebunt vt ante nisi quod altitudo SZ sit hic $z = a \sin. (\Phi - \zeta)$, vnde ob $dz = a d\Phi \cos. (\Phi - \zeta)$ erit

$$\int q dz = a \int d\Phi (\cos. (\Phi - \zeta) - \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \zeta - \tfrac{1}{2} \alpha \cos. (2\Phi - \zeta))$$

seu $\int q dz = a \sin. (\Phi - \zeta) - \frac{1}{2} \alpha a \Phi \cos. \zeta - \frac{1}{4} \alpha a \sin. (2\Phi - \zeta)$

ita vt iam habeamus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\sin. (\Phi - \zeta) - \tfrac{1}{2} \alpha \Phi \cos. \zeta - \tfrac{1}{4} \alpha \sin. (2\Phi - \zeta)) - \frac{uu}{1 - \alpha \cos. \Phi} - \frac{a \Phi du}{dt}$$

quae cum eadem esse debeat siue ponatur $\Phi = 0$ siue $\Phi = 2\pi$ oportet esse: $2\pi \alpha g a \cos. \zeta - \frac{2\pi a du}{dt} = 0$ ideoque $u = \alpha g t \cos. \zeta$, vnde discimus motum etiam fore vniformiter acceleratum; sed minus quam ante in ratione cosinus anguli AOH, ita vt si hic angulus fuerit rectus, motus plane nullus sit oriturus. Euenit ergo hoc si maximus calor in tubi loco siue summo siue imo excitetur, minimusque e regione

gione reperiatur; tum enim vtique in paribus altitudinibus denſitas erit eadem.

Tab. X. Fig. 7. 32. Maneat autem vt ſupra maximus calor in A minimusque in B vt diameter AB ſit horizontalis; tum vero etiam ſit aquae in S verſantis denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$ exiſtente angulo $AOS = \Phi$, ideoque arcu $AS = s = a\Phi$ ob radium $OA = a$; et altitudo $sZ = z = a \operatorname{ſin.} \Phi$. At amplitudo tubi iam non amplius vbique ſit eadem, ſed eam ita variari aſſumamus, vt ſit $rr = \frac{ff}{1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi}$, ponamusque iterum $T = ffu$, vt ſit $v = \frac{ffu}{qrr} = \frac{u}{q}(1 + \beta \operatorname{coſ} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi)$. His poſitis habebimus vt ante:

$$\int q\,dz = a \operatorname{ſin.} \Phi - \tfrac{1}{2}\alpha a \Phi - \tfrac{1}{4}\alpha a \operatorname{ſin.} 2\Phi.$$

Verum pro hoc caſu adipiſcimur:

$$\frac{TT}{qr^4} = \frac{uu(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi)^2}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}$$

et ob $d.\frac{1}{r^4} = \frac{1}{f^4} d.(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin} \Phi)^2 = \frac{-4dr}{r^5}$ erit $\frac{-\beta d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi + \gamma d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi}{f^4}(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin} \Phi) = \frac{-2dr}{r^5}$ hincque

$$2TT\int \frac{dr}{qr^5} = uu\int \frac{d\Phi(\beta \operatorname{ſin.} \Phi - \gamma \operatorname{coſ.} \Phi)(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi)}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}.$$

Quia vero fractio α vt valde parua ſpectari poteſt, loco $\frac{1}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}$ ſcribendo $1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$ prodibit integrando:

$$2TT\int \frac{dr}{qr^5} = uu \left\{ \begin{array}{l} -\beta \operatorname{coſ.} \Phi - \gamma \operatorname{ſin.} \Phi - \tfrac{1}{4}(\beta\beta - \gamma\gamma) \operatorname{coſ.} 2\Phi - \tfrac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{ſin.} 2\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha\beta \operatorname{coſ.} 2\Phi \\ -\tfrac{1}{2}\alpha\gamma\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha\gamma \operatorname{ſin.} 2\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha(\beta\beta - \gamma\gamma) \operatorname{coſ.} \Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma \operatorname{ſin.} \Phi \\ \qquad - \tfrac{1}{12}\alpha(\beta\beta - \gamma\gamma) \operatorname{coſ.} 3\Phi - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma \operatorname{ſin.} 3\Phi) \end{array} \right.$$

ac

ac denique $\frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr} = \frac{\alpha du}{dt}\int d\Phi(1+\beta\,\text{cof.}\,\Phi+\gamma\,\text{fin.}\,\Phi)$ $= \frac{\alpha du}{dt}(\Phi+\beta\,\text{fin.}\,\Phi-\gamma\,\text{cof.}\,\Phi)$. Quare cum valor ipſius p idem prodire debeat ſiue ponatur $\Phi = 0$ ſiue $\Phi = 2\pi$, peruenimus ad hanc aequationem:

$$2\pi\alpha g a + \pi\alpha\gamma uu - \frac{2\pi\alpha du}{dt} = 0$$

$$\text{ſeu } dt = \frac{2\alpha du}{\alpha(2ga+\gamma uu)} \text{ ſeu } \alpha g\,dt = \frac{du}{1+\frac{\gamma uu}{2ga}}$$

33. Hic ergo primum obſeruo, ſi fuerit $\gamma = 0$, ſeu amplitudo $rr = \frac{ff}{1+\beta\,\text{cof.}\,\Phi}$, fore vt ante pro tubo aequaliter vbique amplo $u = \alpha g t$; hoc igitur euenit ſi in aequalibus a puncto A diſtantiis tam ſupra diametrum AB quam infra amplitudo fuerit eadem, ſiue in A amplitudo ſit maxima ſiue in B. Cum igitur ob quantitatem β nulla mutatio in motu oriatur, niſi quatenus celeritas $v = \frac{u}{1-\alpha\,\text{cof.}\,\Phi}(1+\beta\,\text{cof.}\,\Phi+\gamma\,\text{fin}\,\Phi)$ ab ea pendet, dum celeritas media u eadem manet; ponamus $\beta = 0$, vt ſit $rr = \frac{ff}{1+\gamma\,\text{fin.}\,\Phi}$; ac ſi γ habeat valorem poſitiuum, amplitudo tubi in loco ſummo C ſit minima $= \frac{ff}{1+\gamma}$ in imo vero D maxima $\frac{ff}{1-\gamma}$; at contra ſi γ valorem habeat negatiuum puta $\gamma = -\delta$ tubi amplitudo in C ſit maxima $\frac{ff}{1-\delta}$ in D vero minima $= \frac{ff}{1+\delta}$. Perſpicuum eſt autem hos duos caſus probe a ſe inuicem diſtingui oportere, cum aequationis inuentae integratio priori caſu per loga-

 rithmos,

rithmos, posteriori vero per arcus circulares absolui debeat: quam ob rem vtrumque casum seorsim euolui, operae erit pretium, quo deinceps in genere facilius iudicare queamus, quantum motus aquae in tubo immutetur, si tubus in parte superiori fuerit vel amplior vel tenuior quam in parte inferiori.

34. Sit γ quantitas positiua seu tubus in C angustior quam in D, ponaturque $\gamma = \frac{2ga}{cc}$ vt sit $rr = \frac{ccff}{cc + 2ga\,\text{sin.}\,\Phi}$ eritque $\alpha g\,dt = \frac{cc\,du}{cc + uu}$ et $\alpha gt = c\,\text{Ang. tang}\,\frac{u}{c}$ seu $u = c\,\text{tang.}\,\frac{\alpha gt}{c}$ vnde patet celeritatem u iam fieri infinitam elapso tempore finito $t = \frac{\pi c}{2\alpha g}$; hoc ergo casu motus aquae multo magis acceleratur, quam casu, quo tubus vtique est aeque amplus, quia vt vidimus tum elapso demum tempore infinito celeritas fit infinita. Contrarium euenit quando $\gamma = \frac{-2ga}{cc}$ seu $rr = \frac{ccff}{cc - 2ga\,\text{sin.}\,\Phi}$, ideoque tubus in superiori parte C amplior est quam in parte inferiori D, cum enim tum sit $\alpha g\,dt = \frac{cc\,du}{cc - uu}$ erit $\alpha gt = \frac{1}{2} c\,l\,\frac{c+u}{c-u}$, vnde patet elapso tempore infinito celeritatem u non vltra terminum c crescere posse. Hoc ergo casu motus aquae multo minus acceleratur, quam si tubus esset vbique aeque amplus. Quam ob rem in genere affirmare licet, quoties tubi pars superior ad C angustior fuerit quam inferior ad D tum motum aquae in tubo magis accelerari, minus vero, si superior pars fuerit amplior inferiori.

35. Quae

35. Quae hactenus de tubo circulari sunt inventa ad tubos figurae cuiuscunque haud difficulter extenduntur. Quomodocunque enim figura et amplitudo tubi fuerit comparata, formulam generalem § 20. traditam facile simili modo tractare licet. Ponatur enim $T = ffu$, vt u denotet aquae celeritatem in eo tubi loco, vbi amplitudo est $= ff$ et densitas aquae $= 1$, tum vero sit $rr = \frac{ff}{\omega}$ vt in loco quouis S sit celeritas $v = \frac{\omega u}{q}$; quia nunc est $\frac{1}{r^4} = \frac{\omega\omega}{f^4}$ erit $-\frac{2dr}{r^5} = \frac{\omega d\omega}{f^4}$, vnde haec habebitur aequatio: Tab. IX. Fig. 4.

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{\omega^2 uu}{q} + uu\int\frac{\omega d\omega}{q} - \frac{du}{dt}\int\omega ds$$

sumantur iam haec integralia ita vt euanescant posito $s = 0$, tum vero loco s scribatur tota tubi longitudo ASCBDA, fiatque

$$\int q dz = A; \int\frac{\omega d\omega}{q} = B \text{ et } \int\omega ds = C.$$

Atque tum necesse est vt sit:

$$-2gA + Buu - \frac{Cdu}{dt} = 0 \text{ seu } dt = \frac{Cdu}{Buu - 2gA}$$

vnde ad quoduis tempus celeritas u facile definitur.

36. Iam supra obseruaui eatenus tantum in tubo, qui ex vna parte A calidior est quam e regione B, fluidum necessario ad motum concitari, quatenus tubus vel prorsus vel propemodum plenus statuatur; si enim ex parte tantum plenus assumatur, semper eiusmodi fluidi situs assignari poterit, in

in quo aequiescat. Quocirca hunc statum aequilibrii quoties locum habere potest, ex formulis nostris ita definiam, vt inde pateat, quousque aquae infusae quantitatem augere liceat, antequam status aequilibrii penitus excludatur. Consideremus in hunc finem
Tab. X. Fig. 9. iterum tubum circularem aequaliter amplum in plano verticali constitutum in quo diuersus caloris gradus ita sit distributus, vt in A sit maximus in B vero minimus existente AB diametro horizontali; iterumque hypothesi vtamur, vt sumto angulo $AOS = \Phi$ densitas aquae ibi versantis sit $q = 1 - \alpha \cos \Phi$. Radius quoque sit vt ante $OA = a$, et arcus $AS = s = a\Phi$, hincque altitudo $sZ = z = a \sin. \Phi$. Amplitudo porro tubi sit $rr = ff$; atque cum aequilibrium adesse ponamus, ob celeritatem $u = 0$, nostra aequatio hanc induet formam:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz = \Delta : t - 2ga(\sin.\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2\Phi)$$

37. Ponamus nunc in statu aequilibrii aquam ex vna parte ad Mm pertingere ex altera vero ad Nn, sintque arcus $AM = m$, $BN = n$, et anguli $AOM = \mu$ et $BON = \nu$ vt sit $m = a\mu$ et $n = a\nu$, atque tubi spatium vacuum $MN = a(\pi - \mu - \nu)$ quod siue sit prorsus vacuum siue aërem contineat, necesse est vt pressio ad M praecise sit aequalis pressioni ad N. At pro pressione ad M ponendo $\Phi = \mu$ habebimus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\sin. \mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha \sin. 2\mu)$$

pressio-

pressionem vero ad N obtinebimus si ab A retrocedendo pro Φ ponamus $-\pi-\nu$, vt sit $\sin.\Phi = \sin.\nu$, et $\sin.2\Phi = -\sin.2\nu$, vnde fiet:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\sin.\nu + \tfrac{1}{2}\alpha(\pi+\nu) + \tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\nu).$$

Pro aequilibrio ergo requiritur vt sit:

$$\sin.\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\mu = \sin.\nu + \tfrac{1}{2}\alpha(\pi+\nu) + \tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\nu$$

vnde patet si esset $\alpha = 0$, seu idem caloris gradus per totum tubum regnaret, tum vtique fore $\nu = \mu$, terminosque M et N ad libellam dispositos, quemadmodum notissima aequilibrii natura postulat.

38. Nisi autem spatium vacuum $MN = \alpha(\pi-\mu-\nu)$ sit minimum ob α fractionem semper valde exiguam, perspicuum est ex nostra aequatione semper situm ita definiri posse, vt aequilibrium resultet. Ponamus enim esse $\pi-\mu-\nu=\omega$ seu $\nu = \nu-\mu-\omega$, hincque $\sin.\nu = \sin.(\mu+\omega) = \sin.\mu\cos.\omega + \cos.\mu\sin.\omega$ et $\sin.2\nu = -\sin.2\mu\cos.2\omega - \cos.2\mu\sin.2\omega$, eritque nostra aequatio $\sin.\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\mu = \sin.\mu\cos.\omega + \cos.\mu\sin.\omega + \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi-\mu-\omega)$

$$-\tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\mu\cos.2\omega - \tfrac{1}{4}\alpha\cos.2\mu\sin.2\omega$$

seu

$$\sin.\mu(1-\cos.\omega) - \cos.\mu\sin.\omega - \tfrac{1}{4}\alpha\sin.2\mu(1-\cos.2\omega) + \tfrac{1}{4}\alpha\cos.2\mu\sin.2\omega = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi-\omega)$$

cui aequationi non amplius satisfieri potest, si capiatur $\omega=0$, quia tum prius aequationis membrum euanescit, posteriori manente $\alpha\pi$. Statuamus

 ergo

ergo ω valde paruum et ob $\text{fin.}\,\omega = \omega$, $1 - \text{cof.}\,\omega = \frac{1}{2}\omega\omega$ fiet:

$$\tfrac{1}{2}\omega\omega\,\text{fin.}\,\mu - \omega\,\text{cof.}\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\omega\omega\,\text{fin.}\,2\mu + \tfrac{1}{2}\alpha\omega\,\text{cof.}\,2\mu = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega)$$

vnde proxime colligitur $\text{cof}\,\mu = \frac{-\alpha\pi}{\omega}$, ficque patet ftatim atque ω minus fit quam $\alpha\pi$, tum hanc aequationem ac proinde etiam aequilibrium nullum amplius locum habere poffe Extremo autem cafu quo aequilibrium adhuc eft poffibile, fit $\mu = \pi$ hincque:

$$\omega + \tfrac{1}{2}\alpha\omega = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega) \text{ feu } \omega = \frac{\alpha\pi}{1 + \alpha}.$$

39. Quamdiu ergo fpatium vacuum $MN = \alpha\omega$ maius eft quam $\frac{\alpha}{1+\alpha}\pi a$, tamdiu aqua eiusmodi fitum recipere poteft, in quo acquiefcat, ac fi fuerit $MN = \frac{\alpha}{1+\alpha}\pi a$ feu $MN = \alpha\pi a$, (quoniam α eft fractio valde parua), hic cafus erit aequilibrii poftremus in quo fpatium vacuum MN circa locum maxime frigidum B verfabitur. Sin autem hoc fpatium adhuc fit minus, tum nullum aequilibrium amplius locum habere poterit, fed vtcunque aqua in tubo fuerit difpofita, neceffario ad motum concitabitur. Quodfi tubus loco aquae contineat aërem, ob analyfeos defectum motus fimili modo determinari nequit; neceffario autem motum oriri debere fequenti ratione demonftrabitur.

Tab. X. Fig. 7. 40. Aërem igitur tantum tubus nofter contineat, cui figuram circularem et amplitudinem vni-

vniformem tribuamus, ſitum autem teneat verticalem, et ita calore diuerſo ſit affectus, vt in A ſit calor maximus $= 1 + \alpha$, in B vero minimus $= 1 - \alpha$, in loco autem quouis medio S poſito angulo $AOS = \Phi$ ſit caloris gradus $= 1 + \alpha \cos . \Phi$, exiſtente diametro AB horizontali. Vnde ſi in S denſitas aeris ſit $= q$, et preſſio ſeu elaſticitas $= p$, experientia nouimus preſſionem p eſſe in ratione compoſita denſitatis q et caloris $1 + \alpha \cos . \Phi$, vnde ponamus $p = bq(1 + \alpha \cos . \Phi)$. Iam cum motum ipſum determinare non liceat, ſtatuamus in A ſeptum, quo omnis motus compeſcatur, et ob $v = 0$ aequatio ſtatum aëris exprimens erit:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) + \frac{2g\,dz}{ds} = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{dp}{q} + dz = 0$$

vbi z denotat altitudinem $sZ = a \sin . \Phi$ poſito radio circuli $= a$.

41. Cum nunc ſit $q = \frac{p}{b(1 + \alpha \cos . \Phi)}$, aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{b\,dp}{p} + \frac{dz}{1 + \alpha \cos . \Phi} = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{b\,dp}{p} + \frac{a\,d\Phi \cos . \Phi}{1 + \alpha \cos . \Phi} = 0$$

vel $\frac{\alpha b\,dp}{a p} + d\Phi - \frac{d\Phi}{1 + \alpha \cos . \Phi} = 0$

cuius integrale reperitur:

$$\frac{\alpha b}{a} lp + \Phi - \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha\alpha)}} \text{Ang. ſin.} \frac{\sin . \Phi \sqrt{(1 - \alpha\alpha)}}{1 + \alpha \cos . \Phi} = C$$

vnde pro preſſione ſupra ſeptum Aa ponendo $\Phi = 0$ prodit pro preſſione $\frac{\alpha b}{a} lp = C$ ſeu $p = e^{\frac{C a}{\alpha b}}$.

Facia-

Faciamus nunc $\Phi = 2\pi$, vt reuolutione integra facta infra ſeptum Aa perueniamus, reperiemusque pro preſſione p hanc aequationem:

$$\frac{\alpha b}{a} lp = C + \frac{2\pi(1-\sqrt{(1-\alpha\alpha)})}{\sqrt{(1-\alpha\alpha)}}$$

et cum α ſpectari poſſit vt fractio valde parua, erit:

$$\frac{\alpha b}{a} lp = C + \pi\alpha\alpha \text{ ſeu } lp = \frac{Ca}{\alpha b} + \frac{\pi\alpha a}{b}$$

ſit $\frac{Ca}{\alpha b} = m$ vt preſſio ſupra ſeptum ſit $= e^m$, et infra ſeptum ea erit $= e^{m + \frac{\pi\alpha a}{b}} = e^m(1 + \frac{\pi\alpha a}{b})$.

42. Hinc ergo manifeſtum eſt preſſionem infra ſeptum maiorem eſſe preſſione ſupra id, quare ſepto remoto aër in tubo contentus neceſſario ad motum concitabitur, idque eo maiori vi, quo magis diſcrimen inter calorem maximum in A minimumque in B verſatur. Quanquam ergo ipſum motum ob analyſeos defectum determinare haud valemus, primam tamen eius generationem diſtincte perſpicuimus, atque intelligimus ſtatim atque in A tubo maior calor conciliatur quam in B, aërem non amplius in aequilibrio ſubſiſtere poſſe, atque ita motum iri, vt in tubi parte inferiori ad locum calidum A accedat, hinc vero per partem ſuperiorem ad locum frigidum B deferatur, ſicque motu continuo per tubum reuoluatur, ſimili modo quo id in aqua euenire oſtendimus. Quin etiam omnia phaenomena, quae experientia ſuppeditat, talem motum apertiſſime declarant.

43. Vi-

43. Vidimus etiam vbicunque ignis vel saltem calor excitatur, eo per regiones humiliores aërem constanter affluere, dummodo per regiones sublimiores iterum dissipari possit, atque hic aëris fluxus cum ignis natura tam arcte coniunctus videtur, vt ne ignis quidem subsistere possit, nisi in aëre talis motum locum inuenire queat; neque etiam tam ipse aër, quam talis eius motus ad ignis sustentationem absolute necessarius videtur, quoniam simul ac motus iste compescitur, ignis extinguitur, etiam si alias sufficiens aëris copia adsit. Probe igitur cauendum est ne hoc phaenomeno decepti putemus ad ignem ideo nouum aërem continuo requiri, quod eo quasi pabulum quoddam igni suppeditur, quo absumto aër non amplius aptus sit igni alendo. Quin potius iam olim eiusmodi experimenta instituta esse comperio, quibus adeo fumus per tubos inflexos iterum inferne ad ignem reductus, per eumque ascendens fere penitus consumtus est deprehensus, sine vllo ignis detrimento.

44. Quae experimenta si omni cura sint instituta, nullaque causa physica adhuc ignota obstet, eadem aëris copia igni sustentando sufficere poterit, dummodo tubis ita includatur, vt inferne libere ad ignem affluere, superne vero inde defluere possit. Ex hoc principio eiusmodi fornaces construi posse videntur, quibus nulli camini fumum egerentes sint adiuncti, sed potius fumus per tubos rite dispositos con-

continuo inferne ad ignem reducatur, ibique quasi destruatur, ac simul ignis ab hac continua aeris circulatione sustineatur. Huiusmodi fornacem fig. 10 repraesentat vbi A est fornax proprie sic dicta et craticula instructa, super qua ignis suscitatur. Haec fornax iuxta parietem conclauis construatur, et tam superne ad E quam inferne ad G in tubum desinat in se redeuntem ECFBHDG, et parieti affixum, in quo aer libere circulari, et per tubi partem inferiorem D continuo ad ignem reuerti queat. Sic enim eadem aeris copia in tubo contenta motu suo ignem conseruabit, ac si forte nouo subinde aëre fuerit opus, is facile per ostiolum fornacis intromittetur.

Tab. X. Fig. 10.

45. Quo haec constructio facilius succedat, conueniat vt tubus EFHG ita totum parietem occupet, vt tam altitudo CD, quam distantia AB tanta fiat, quantum circumstantiae admittunt. Quo enim maior fuerit altitudo CD, eo maiori vi aër motum impelletur, tum vero maior distantia AB ad motum impelletur; tum vero maior distantia AB plurimum conferet ad motum accelerandum; quoniam quo magis tubus FH a fornace est remotus, eo magis aër eo delatus refrigerabitur, motusque causa intendetur. Deinde vero etiam supra vidimus, si tubus supremus C angustior fuerit infimo D, hinc quoque motum rapidiorem generari. Quodsi talis fornax successu non careat nullum est dubium, quin hoc modo conclauia minimo ligni dispendio calefieri queant,