1767

De figura dentium rotarum

Leonhard Euler

SVPPLEMENTVM.

DE FIGVRA DENTIVM ROTARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in volumine quarto nouorum Commentariorum Academiae Petropolitanae de figura dentium rotarum sum commentatus, calculos satis prolixos sequenti modo contrahi indeque conclusiones ad praxin accommodatas deduci posse obseruaui. Cum igitur ibi ostendissem fieri omnino non posse, vt in dentium apprehensione omnis affrictus tollatur, in id erit incumbendum, vt dum altera rota vniformiter circumagitur, alteri simul motus vniformis imprimatur: quo simul hoc obtinetur, vt quae vis ad alteram rotandam impenditur, ea perpetuo aequale momentum ad alteram circumagendam exerceat. Cuiusmodi igitur figuram dentibus vtriusque rotae tribui oporteat, vt hunc scopum obtineamus, sequenti modo sum inuestigaturus, et quoniam hoc infinitis modis praestari poterit, inde quouis casu eum, qui ad praxin maxime accommodatus videbitur, eligere licebit.

2. Sint

Tab. V. Fig. 1. 2. Sint igitur A et B centra binarum rotarum se mutuo impellentium, quorum distantia ponatur $AB = c$; illius autem rotae circa A mobilis dens sit EOM, huius vero quae circa B est mobilis dens sit FON, qui nunc quidem ab illo in puncto O contingatur. Ad planum contactus in O producatur recta normalis secans radium prioris rotae AE in P, radium alterius rotae BF in Q, ipsam vero rectam AB centra rotarum iungentem in T; puncta scilicet E et F in apicibus vtriusque dentis assumo. His constitutis manifestum est dum rota prior circa A ita circumuertitur, vt angulus BAE augeatur, alteram rotam circa B ita conuersum iri, vt angulus ABF increscat, atque ex incrementis horum angulorum vtriusque rotae motus angularis aestimabitur, quorum ergo ratio perpetuo constans esse debet.

3. Ponamus angulos, vti in figura sunt notati:

$$BAE = \zeta;\ ABF = \eta;\ EPO = \phi;\ FQO = \psi \text{ et } BTO = \omega$$

eritque $\zeta = \omega - \phi$ et $\eta = \psi - \omega$.

Tum vero posita distantia $AB = c$ sint reliquae lineae in computum ducendae:

$$AP = p;\ BQ = q;\ PO = r;\ QO = s.$$

Hinc erit per resolutionem triangulorum APT et BQT

sin.

$$\sin.\omega : p = \sin.\zeta : PT = \sin.\Phi : AT \quad \text{et}$$

$$\sin.\omega : q = \sin.\eta : QT = \sin.\psi : BT \quad \text{vnde colligitur}$$

$$PT = \frac{p \sin.\zeta}{\sin.\omega};\ QT = \frac{q \sin.\eta}{\sin.\omega};\ AT = \frac{p \sin.\Phi}{\sin.\omega};\ BT = \frac{q \sin.\psi}{\sin.\omega}.$$

Cum igitur fit $QT - PT = r + s$ et $AT + BT = c$ erit

$$\frac{q \sin.\eta - p \sin.\zeta}{\sin.\omega} = r + s \quad \text{et} \quad \frac{p \sin.\Phi + q \sin.\psi}{\sin.\omega} = c.$$

Vnde elicitur:

$$p = \frac{(c \sin.\eta - (r+s) \sin.\psi) \sin.\omega}{\sin.\zeta \sin.\psi + \sin.\eta \sin.\Phi} \quad \text{et} \quad q = \frac{(c \sin.\zeta + (r+s) \sin.\Phi) \sin.\omega}{\sin.\zeta \sin.\psi + \sin.\eta \sin.\Phi}$$

at eft $\sin.\zeta \sin.\psi + \sin.\eta \sin.\Phi = \sin.\omega \sin.(\psi - \Phi)$; ita

$$p = \frac{c \sin.\eta - (r+s) \sin.\psi}{\sin.(\psi - \Phi)} \quad \text{et} \quad q = \frac{c \sin.\zeta + (r+s) \sin.\Phi}{\sin.(\psi - \Phi)}.$$

4. Sit nunc Π preffio, qua dentes in O fe mutuo impellunt, cuius directio cum vtrinque in rectam PQ incidat, erit eius momentum in rotam $A = \Pi p \sin.\Phi$, in rotam vero $B = \Pi q \sin.\psi$. Quare fi M fit momentum, qua rota A circumagitur in eum fenfum, quo angulus ζ augetur, ob $\Pi = \frac{M}{p \sin.\Phi}$, erit momentum, quo inde altera rota ad motum impelletur circa $B = \frac{q \sin.\psi}{p \sin.\Phi} . M$, hocque fiet in eum fenfum, quo angulus η augetur. Quare fi rota B continuo ab eodem momento virium follicitari debeat, dum rota A dato momento M circumagitur, fractio $\frac{q \sin.\psi}{p \sin.\Phi}$ valorem conftantem habere debet. Tum autem quoque ratio fegmentorum AT et BT conftans manere debet, cum fit $AT : BT = p \sin.\Phi : q \sin.\psi$. Ex quo punctum T erit invariabile feu fixum, ita vt fit AT ad BT vt mo-

 mentum

mentum rotam A circumagens ad momentum rotam B circumagens.

5. Cum fit vti inuenimus:

$$p\,\text{fin.}\,\Phi + q\,\text{fin.}\,\psi = c\,\text{fin.}\,\omega \quad \text{et} \quad q\,\text{fin.}\,\eta - p\,\text{fin.}\,\zeta = (r+s)\,\text{fin.}\,\omega$$

fi rationem habeamus relationis angulorum:

$$\zeta = \omega - \Phi \quad \text{et} \quad \eta = \psi - \omega$$

hosque valores in pofteriori aequatione fubftituamus, erit:

$$q\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\omega - q\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\omega - p\,\text{cof.}\,\Phi\,\text{fin.}\,\omega + p\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\omega = (r+s)\,\text{fin.}\,\omega$$

hincque ob $q\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\omega + p\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\omega = c\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega$, diuidendo per fin. ω adipifcimur:

$$c\,\text{cof.}\,\omega - q\,\text{cof.}\,\psi - p\,\text{cof.}\,\Phi = r + s \quad \text{feu}$$

$$p\,\text{cof.}\,\Phi + q\,\text{cof.}\,\psi = c\,\text{cof.}\,\omega - r - s$$

fimili modo fi hos valores $\Phi = \omega - \zeta$ et $\psi = \omega + \eta$ in priori aequatione fubftituamus, prodit

$$p\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\omega - p\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\omega + q\,\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\omega + q\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\omega = c\,\text{fin.}\,\omega$$

quare cum fit $q\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\omega - p\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\omega = (r+s)\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega$, habebimus per fin. ω diuidendo:

$$p\,\text{cof.}\,\zeta + q\,\text{cof}\,\eta + (r+s)\,\text{cof.}\,\omega = c \quad \text{feu}$$

$$p\,\text{cof.}\,\zeta + q\,\text{cof.}\,\eta = c - (r+s)\,\text{cof.}\,\omega.$$

Tab. V. Fig. 2. 6. Praeter has determinationes fatis obuias notari oportet pro curua EOM dari certam relationem inter ternas variabiles $AP = p$, $PO = r$ et angulum

gulum $EPO = \Phi$, quam hic imprimis inueſtigari oportet. Conſideremus ergo ſtatum proximum in quo $Ap = p + dp$; $po = r + dr$, et $Epo = \Phi + d\Phi$; vnde productis normalibus OP, op ad concurſum V, erit VO radius oſculi curuaturae dentis in O. Centro V inſuper ducatur arculus Pr et cum ſit $Pp = -dp$; $pr = dr$; ang. $Ppr = \Phi + d\Phi$, et $OVo = d\Phi$ colligimus:

$pr = dr = -dp \operatorname{coſ.}\Phi$, $Pr = -dp \operatorname{ſin}\Phi$; et $PV = \frac{-dp \operatorname{ſin.}\Phi}{d\Phi}$ hincque radium oſculi $VO = r - \frac{dp \operatorname{ſin.}\Phi}{d\Phi} = r + \frac{dr \operatorname{ſin.}\Phi}{d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi} = \frac{d.r \operatorname{ſin.}\Phi}{d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi}$ tum vero elementum curuae $Oo = rd\Phi + \frac{dr \operatorname{ſin.}\Phi}{\operatorname{coſ.}\Phi} = \frac{d.r \operatorname{ſin.}\Phi}{\operatorname{coſ.}\Phi}$. Quod cum ſimili modo ſe habeat pro altero dente habebimus has nouas determinationes:

$dr = -dp \operatorname{coſ.}\Phi$; rad. osc. curuae EM in $O = \frac{d.r \operatorname{ſin.}\Phi}{d\Phi \operatorname{coſ.}\Phi}$;
elementum $Oo = \frac{d.r \operatorname{ſin.}\Phi}{\operatorname{coſ.}\Phi}$

$ds = -dq \operatorname{coſ.}\psi$; rad. osc. curuae FN in $O = \frac{d.s \operatorname{ſin.}\psi}{d\psi \operatorname{coſ.}\psi}$;
elementum $O\omega = \frac{d.s \operatorname{ſin.}\psi}{\operatorname{coſ.}\psi}$.

7. Cum igitur nunc dentes ſe mutuo in puncto O contingant, elapſo autem temporis elemento puncto o et ω inuicem applicentur, euidens eſt interea affrictum fieri per ſpatiolum $oO + \omega O$ ita vt totum ſpatiolum affrictus ſit $= \frac{d.r \operatorname{ſin.}\Phi}{\operatorname{coſ.}\Phi} + \frac{d.s \operatorname{ſin.}\psi}{\operatorname{coſ.}\psi}$; quod ſi ad nihilum redigi poſſet, omnis frictio tolleretur. At in ſuperiori diſſertatione oſtendi hoc fieri non poſſe: ſemper ergo ader:: frictio, quae in

 eo

eo maius ſpatium exeretur, quo maiorem valorem obtinuerit formula $\frac{d.\, r\,\sin.\Phi}{\cos.\Phi} + \frac{d.\, s\,\sin.\psi}{\cos.\psi}$. Quod enim ipſam frictionis quantitatem attinet, ea eſt preſſioni mutuae proportionalis, quae preſſio fuerit $=\Pi$, frictio certae cuipiam eius parti $\delta\Pi$ aequabitur, cuius directio cum ſit normalis ad OP, erit eius momentum in rotam $A=\delta\Pi(r+p\cos.\Phi)$, in rotam vero $B=\delta\Pi(s+q\cos.\psi)$, quorum momentorum ſumma eſt $=\delta\Pi(r+s+p\cos.\Phi+q\cos.\psi)$ $=\delta\Pi c\cos.\omega$. Vnde momentum vis rotam A circumagentis, quod ponimus $=M$ debet eſſe $M=\Pi p\sin.\Phi + \delta\Pi(r+p\cos.\Phi)$.

8. His expoſitis perpendamus ipſum motum rotarum, et dum angulus ζ elemento $d\zeta$ augetur, videamus quantum angulus η interea creſcat. Commodiſſime hoc colligimus ex aequatione $c\cos.\omega=r+s+p\cos.\Phi+q\cos.\psi$, quae differentiata dat

$$-c\,d\omega\sin.\omega=dr+ds+dp\cos.\Phi-pd\Phi\sin.\Phi+dq\cos.\psi-qd\psi\sin.\psi$$

at $dr=-dp\cos.\Phi$ et $ds=-dq\cos.\psi$ vnde fit

$$c\,d\omega\sin.\omega=pd\Phi\sin.\Phi+qd\psi\sin.\psi$$

quare cum ſit $c\sin.\omega=p\sin.\Phi+q\sin.\psi$ erit

$$0=(d\Phi-d\omega)p\sin.\Phi+(d\psi-d\omega)q\sin.\psi$$

verum eſt $d\omega-d\Phi=d\zeta$ et $d\psi-d\omega=d\eta$, vnde ſequitur:

$$pd\zeta\sin.\Phi=q\,d\eta\sin.\psi \text{ ideoque } \frac{p\sin.\Phi}{q\sin.\psi}=\frac{d\eta}{d\zeta}.$$

Angu-

Angulorum ergo ζ et η mutationes eandem inter se tenent rationem quam momenta ex pressione II nata.

9. Nunc igitur effici debet, vt haec ratio perpetuo sit constans, seu vt motus angularis rotae A ad motum angularem rotae B constanter eandem seruet rationem. Cum igitur ratio p sin. $\phi : q$ sin. ψ constans esse debeat, erit punctum T fixum. Statuamus ergo $AT = a$ et $BT = b$ vt sit $c = a + b$, eritque p sin. $\phi = a$ sin. ω et q sin. $\psi = b$ sin. ω; hinc neglecta frictione, si virium momentum rotam A circumagens sit $= M$ altera rota circumagetur momento $= \frac{b}{a} M$. Tum vero ratio motuum angularium erit $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{a}{b}$, seu $a\,d\zeta = b\,d\eta$, hincque $a\zeta = b\eta$: vnde dum rota A integram reuolutionem absoluit, vt sit $\zeta = 360°$ altera rota circumagetur angulo $= \frac{a}{b} \cdot 360°$, scilicet dum rota A facit b reuolutiones rota B faciet interea a, sumtis pro a et b numeris, qui his lineis $AT = a$ et $BT = b$ sint proportionales.

10. Hinc data figura dentis EOM dentis alterius rotae FON figura et positio determinari poterit. Pro figura enim dentis EOM ponamus dari aequationem inter distantiam $AP = p$ et angulum $EPO = \phi$, vnde erit $PO = r = b - \int dp$ cos. ϕ: hincque statim reperitur angulus ω cum sit sin. $\omega = \frac{p \cdot \text{sin.}\,\phi}{a}$; scilicet ad rectam OP productam applicetur $AT = a$,

 quod

quod cum duplici modo fieri poſſit, duplex valor pro angulo ω obtinetur, alter acutus alter obtuſus, quo inuento erit angulus $\zeta = \omega - \Phi$. Tum ex poſitione rectae AT innoteſcit, ſumta $AB = a + b = c$, centrum alterius rotae B, hincque porro $q \sin.\zeta = b \sin.\omega = \frac{bp \sin.\Phi}{a}$. Verum etiam eſſe debet $q \cos.\psi = c \cos.\omega - r - s - p \cos\Phi$, exiſtente $ds = -dq \cos.\psi$. Vel cum ſit $ad\zeta = bd\eta$ ſeu $cd\omega = ad\Phi + bd\psi$ ob $\zeta = \omega - \Phi$ et $\eta = \psi - \omega$, erit $a\Phi + b\psi = c\varepsilon + c\omega$ denotante ε angulum quendam conſtantem pro lubitu accipiendum: vnde definitur angulus $FQO = \psi = \frac{c\varepsilon + c\omega - a\Phi}{b}$, ſeu $\eta = \frac{c\varepsilon + a\omega - a\Phi}{b} = \frac{c\varepsilon + a\zeta}{b}$; ſicque habetur poſitio rectae BF, in qua capiatur $BQ = q = \frac{bp \sin.\Phi}{a \sin.\psi}$. Ex puncto autem Q, quod etiam recta TPO producta indicat, cognoſcitur dentis FON punctum O.

11. Hinc ergo ex quolibet dentis EOM puncto O definitur punctum reſpondens O dentis alterius FON. Cum autem actio huiusmodi binorum dentium per breue temporis ſpatium durare ſoleat, ſufficiet pro elemento Oo prioris dentis Oo conueniens elementum alterius dentis $O\omega$ determinare. Hunc in finem quaeri oportet radium curuedinis elementi $O\omega$, qui iam ſupra inuentus eſt $= \frac{d.\, s \sin.\psi}{d\psi \cos.\psi} = s + \frac{ds \sin.\psi}{d\psi \cos.\psi} = s - \frac{dq \sin.\psi}{d\psi}$. Cum autem ſit $q \sin.\psi = \frac{bp \sin.\Phi}{a}$ erit $d\eta \sin.\psi = \frac{b}{a} d.\, p \sin.\Phi - q d\psi \cos.\psi$ ita vt ſit iſte radius curuedinis $= s + q \cos.\psi - \frac{b\, d.\, p \sin.\Phi}{a\, d\psi}$.

Exemplum I.

13. Pro rota priori circa A mobili fiat contactus in plano per A transeunte, seu curua EM in ipsum radium AE et punctum contactus O in punctum P incidat. Cum ergo recta TP ad radium AE erit normalis, erit $\Phi = 90°$ et $r = 0$, vnde $\sin.\omega = \frac{p}{a}$; et $\zeta = \omega - 90°$, atque pro altero dente ob $d\Phi = 0$ erit radius curuedinis:

$$OQ = c \cos.\omega - \frac{bb \cos.\omega}{c} = \frac{cc-bb}{c} \cos.\omega.$$

Primum ergo patet distantiam $p = AP$ maiorem accipi non posse quam $AT = a$, sin autem capiatur $p = a$, fit $\omega = 90°$, $\zeta = 0$, et $OQ = 0$, ita vt dens FON curuaturam infinite magnam habere debeat, quod cum non conueniat, necesse est vt distantia $AP = p$ minor accipiatur quam a. Vnde si pro momento actionis medio statuatur $p = f$, vt sit $\sin.\omega = \frac{f}{a}$ fiet $OQ = \frac{cc-bb}{c} \cdot \frac{\sqrt{(aa-ff)}}{a} = \frac{c+b}{c} \sqrt{(aa-ff)}$.

Tab. V. Fig. 3. 14. Constructio ergo ita se habebit; sumto rotae prioris radio $AE = a$, capiatur in eo punctum P centro A propius, indeque erecto perpendiculo PTQ ex A applicetur $AT = AE = a$, eaque producatur in B vt sit $BT = b$ erit B centrum alterius rotae. Tum ob $AP = f$, et $AT = a$, erit $PT = \sqrt{(aa-ff)}$; hinc capi oportet $PQ = \frac{c+b}{c} . PT = PT + \frac{BT}{AB} . PT$. Quare ducta ad EA in A perpendipendiculari $AD = PT$, recta BD ipsum punctum Q indicabit, ex quo radio QP arcus circularis FPN descriptus dabit figuram dentis ad alteram rotam B pertinentis. Hunc autem arcum valde paruum esse oportet, neque maiorem, quam vt dum dentes sequentes se mutuo apprehendunt, hic omnis actio cesset; quem in finem si F et N sint termini istius dentis, vltra eos arcum continuari non conuenit, sed potius dentem vltra F et N ita excidi oportet, vt nullus amplius contactus hic fiat, cum sequentes dentes se mutuo prehendere coeperint.

Exemplum 2.

15. Sit pro rota A figura dentis iterum plana, neque vero per centrum rotae A transiens. Ex A ducatur radius APe illi plano parallela, eritque ϕ angulus rectus, et $PO = r$ quantitas constans $= b$, vnde erit $\sin.\omega = \frac{p}{a}$, ita vt p maior quam a capi nequeat. Tum vero ob $\phi = 90^\circ$, et $d\phi = 0$, reperitur radius osculi $OQ = c\cos.\omega - b - \frac{bb\cos.\omega}{c}$ $= \frac{cc-bb}{c}\cos.\omega - b$. Cum autem sit $\cos.\omega = \frac{\sqrt{(aa-pp)}}{a}$, Tab. VI. Fig. 4.
erit $OQ = \frac{c+b}{c}\sqrt{(aa-pp)} - b$, vnde haec constructio fluit: si EOM sit figura dentis rotae A, et in medio actionis contactus fiat in O, ducatur recta QOP ad EM normalis in eamque ex A demittatur perpendiculum AP; tum applicetur $AT = a$, et producatur in B, vt sit $TB = b$, erit B centrum al-

 terius

terius rotae. Ad AP in A constituatur perpendicularis $AD = PT$, iunctaque BD dabit punctum Q ex quo radio $= QO$ describatur arcus circuli FON, hicque praebebit figuram dentis pro rota B. Si PO euanescat, habetur casus exempli praecedentis: siue autem PO maior fuerit minorue, siue etiam negatiua constructio eadem manet.

Exemplum 3.

16. Si pro rota A figura dentis sit arcus circuli EOM centro P descripti, ex A ducatur per P radius APe sitque $AP = f$, et radius circuli $PO = r = b$. Erit ergo $\sin. \omega = \frac{f \sin. \Phi}{a}$, et $d. p \sin. \Phi = d. f \sin. \Phi = f d\Phi \cos. \Phi$ pro altera rota inuenitur radius curuedinis $OQ = c \cos. \omega - b - f \cos. \Phi - \frac{bbf \cos. \Phi \cos. \omega}{cf \cos. \Phi - aa \cos. \omega}$.

Tab. VI. Fig. 5. Sumto ergo radio $AP = f$, angulo $ePO = \Phi$, et $PO = b$, vt sit arcus EOM centro P descriptus figura dentis rotae A, iungatur $AT = a$, sumaturque $TB = b$, erit B centrum alterius rotae. In PO productam ex A et B demittantur perpendicula AR et BS erit $PR = f \cos. \Phi$; $TR = a \cos. \omega$, $TS = b \cos. \omega$; et $RS = c \cos. \omega$; vnde conficitur

$$OQ = RS - PO - PR - \frac{BT.PR.TS}{AB.PR - AT.TR} \text{ siue}$$

$$OQ = SO - \frac{BT.PR.TS}{AB.PR - AT.TR} \text{ hincque}$$

$$SQ = \frac{BT.PR.TS}{AB.PR - AT.TR}$$

vnde

vnde per constructionem geometricam definitur punctum Q quod est centrum arcus FON figuram dentis rotae B repraesentantis.

17. Ex his perspicuum est amborum dentium EOM et FON descriptionem pendere a punctis P et Q in recta RS accipiendis, quae si fuerint debite inuenta, punctum O pro lubita assumere licet, per quod centris P et Q arcus illi EOM et FON ducantur. Quare posita recta AB rotarum centra A et B iungente, eaque in T diuisa, vt sit $AT = a$, $BT = b$, primo per T pro lubitu ducatur recta RS, in eamque ex A et B demittantur perpendicula AR et BS, ac tum vti vidimus puncta P et Q ita capi necesse est, vt sit

$$AB.\, RP.\, SQ = AT.\, RT.\, SQ + BT.\, RP.\, ST.$$

Vel cum sit $AB : AT : BT = RS : RT : ST$ erit

$$(RT + ST) RP.\, SQ - RT.\, RT.\, SQ - ST^2.\, RP = 0$$

vel $-RT.\, SQ.\, TP - ST.\, RP.\, RQ = 0$

hincque $\frac{RT.\, TP}{RP} + \frac{ST.\, TQ}{SQ} = 0.$

Vnde patet si punctum P intra TR cadat, punctum Q extra rectam TS capi debere, secus ac figura ostendit.

18. Pro situ ergo binorum huiusmodi punctorum P et Q sequens constructio negotium facillime conficere videtur: Tab. VI. Fig. 6.

Ad rectam RS in T normaliter constituatur recta ipsi aequalis rs, vt sit $Tr = TR$ et $Ts = TS$: tum per T ducatur recta indefinita GTH angulos rectos RTs, STr bisecans, in qua sumto pro lubitu puncto V, si per id ex punctis r et s agantur rectae rV et sV, eae in recta RS producta si opus fuerit, dabunt bina puncta P et Q. Analytice autem haec puncta ita definiri possunt, cum sit $TR = a \operatorname{cos.} \omega$, et $TS = b \operatorname{cos.} \omega$, ponatur $TP = x$ et $TQ = y$, eritque ex superiori aequatione $\frac{a x \operatorname{cos.} \omega}{a \operatorname{cos.} \omega - x} + \frac{b y \operatorname{cos.} \omega}{b \operatorname{cos.} \omega - y} = 0$, seu $\frac{a x}{a \operatorname{cos.} \omega - x} = \frac{b y}{y - b \operatorname{cos.} \omega}$. Statuatur vtrumque membrum $= u$, et sumta hac linea u pro lubitu, ambae distantiae x et y ita definientur, vt sit:

$$TP = x = \frac{a u \operatorname{cos.} \omega}{a + u} \text{ et } TQ = y = \frac{b u \operatorname{cos.} \omega}{u - b}$$

suntque P et Q centra, ex quibus arcus circulares EOM et FON per idem punctum O etiam pro lubitu assumendum duci debent.

Constructio generalis Figurae binorum dentium se mutuo prehendentium.

Tab. VII. Fig. 7. 19. Sint A et B centra binarum rotatum se mutuo impellentium, quorum distantia AB ita secetur in C, vt AC ad BC sit in ratione reciproca motuum angularium, et vocetur $AC = a$ et $BC = b$. Tum per C sub angulo quocunque $ACP = BCQ = \omega$

agatur

agatur recta GH, in qua capiantur puncta P et Q, vt sit:

$$CP = \frac{au\,\text{cos}.\,\omega}{a+u} = a\,\text{cos}.\,\omega - \frac{aa\,\text{cos}.\,\omega}{a+u} \text{ et } CQ = \frac{bu\,\text{cos}.\,\omega}{u-b} = b\,\text{cos}.\,\omega + \frac{bb\,\text{cos}.\,\omega}{u-b}$$

sumta etiam pro lubitu quantitate u. Denique in eadem recta GH sumto etiam pro lubitu puncto O, centris P et Q per O describantur arcus circulares EOM et FON, quorum ille dabit figuram dentis rotae A, hic vero figuram dentis rotae B. Hic igitur tres res arbitrio nostro relinquuntur, primo scilicet angulus ACG sub quo recta GH per punctum C ducitur, secundo quantitas u: ac tertio punctum O, in quo fit contactus, medio actionis momento, dum hi duo dentes se mutuo impellunt. Vnde patet infinities infinitis modis conditiones praescriptas obtineri posse, vt ambo motus aeque ac vis impellentis momenta perpetuo eandem inter se seruent rationem.

20. Circa haec autem, quae arbitrio nostro relinquuntur primum obseruo angulum $ACG = \omega$ rectum statui non posse quia alio, quin vel ambae distantiae CP et CQ euanescunt, vel alterutra saltem, vnde alter dens vel ambo figuram nimis curvam habere deberent, quam vt amplitudo tota, per quam fit contactus durante actione pro arcu circulari haberi possit; ex quo angulum ACG vel modice acutum vel obtusum capi oportet. Deinde obseruo ob eandem rationem quantitatem u neque eua-

euanescentem neque nimis paruam assumi posse: modice igitur magnam siue positiuam siue negatiuam capi conueniet; vbi imprimis notari meretur casus, quo capitur $u=\infty$, quia fit $CP=a\cos.\omega$ et $CQ=b\cos\omega$, ita vt puncta P et Q sint ea ipsa, in quae perpendicula ex A et B in rectum GH demissa cadunt; tum enim erit CP ad CQ vt AC ad BC. Denique punctum O non longe a puncto C accipi conuenit; ac si casu modo memorato $u=\infty$ in ipso puncto C capiatur, dentes ipsis radiis rotarum fient proportionales et inter se similes.

De amplitudine dentium eorumque actione mutua tota.

21. Dum rota A momento virium $=M$ in gyrum agitur, inter dentes se mutuo impellentes oritur pressio $\Pi=\frac{M}{p\sin.\phi}=\frac{M}{a\sin.\omega}$, vbi $a\sin.\omega$ est perpendiculum ex A in rectam GH demissum. Haec ergo pressio foret minima, si angulum ω rectum accipere liceret, vnde ne pressio fiat nimis magna, angulum ω tam parum a recto discrepare conuenit, quantum praecedentes conditiones permittunt. Deinde cum in medio actionis contactus fiat in puncto O, ex dentium numero iudicari potest, quamdiu bini dentes in se mutuo agere debeant, vt inde amplitudo vtriusque arcus EOM et FON definiatur. Sit ergo m numerus dentium in rota A et n numerus

merus dentium in rota B, ac primo quidem necesse est vt sit $m : n = a : b$. Iidem ergo bini dentes tamdiu in se mutuo agunt, quoad rota B motu angulari absoluerit angulum $= \frac{360^\circ}{m}$, seu rota B angulum $= \frac{360^\circ}{n}$ Statuamus ergo $d\zeta = \frac{180}{m}$, et elementum curuae EOM huic differentiali $d\zeta$ conueniens, dabit dimidium arcum circularem EOM; similique modo ex differentiali $d\eta = \frac{180}{n}$ dimidius arcus FON innotescet.

22. Cum nunc in figura 1. si P sit centrum arcus EOM, et $PO = r$ radius, dum angulus Φ incrementum $d\Phi$ capit, punctum contactus O in o transfertur, vt sit $Oo = r d\Phi$. Tum vero notetur esse $d\zeta = d\omega - d\Phi$, et ob $\sin.\omega = \frac{p \sin.\Phi}{a} = \frac{f \sin.\Phi}{a}$ posito $AP = f$, erit $d\omega \cos.\omega = \frac{f d\Phi \cos.\Phi}{a}$ et $d\omega = \frac{f d\Phi \cos.\Phi}{a \cos.\omega}$, vnde colligitur $d\zeta = \frac{f d\Phi \cos.\Phi}{a \cos.\omega} - d\Phi$ et $d\Phi = \frac{a \cos.\omega}{f \cos.\Phi - a \cos.\omega} d\zeta$. Quocirca erit elementum arcus $Oo = \frac{a r \cos.\omega}{f \cos.\Phi - a \cos.\omega} d\zeta$. Scribamus iam $\frac{180^\circ}{m}$ loco $d\zeta$, et pro dente EOM habebimus dimidiam amplitudinem $OE = OM = \frac{a \cos.\omega}{f \cos.\Phi - a \cos.\omega} \cdot \frac{180}{m} \cdot r$: Ideoque pro fig. 5. adipiscimur $OE = OM = \frac{TR}{TP} \cdot PO \cdot \frac{180^\circ}{m}$, simulque intelligimus punctum M initio actionis fuisse in contactu, punctum E vero in fine. Simili modo pro altero dente erit $OF = ON = \frac{TS}{TQ} \cdot QO \cdot \frac{180^\circ}{n}$; atque initio actionis puncta M et N in fine autem puncta E et F sibi mutuo applicantur.

Con-

Constructio dentium.

Tab.VII. Fig. 8. 23. Definita arcuum circularium, quibus dentes formari conuenit, amplitudine, facile erit singulos dentes exscindere. Cum autem punctum O vbi in media binorum dentium actione fit contactus, arbitrio nostro relinquatur, commodissime id in ipsa recta AB ideoque in eius puncto C capitur, vt actio, in vtrumuis sensum rotae agantur, maneat similis. Quare si A et B sint centra rotarum, ac rota A habere debeat m dentes, rota vero B, n dentes, secetur recta AB in C, vt sit $AC : BC = m : n$, et centris A et B per C ducantur circuli, quorum illius peripliaeria in m partes aequales in punctis C, a, a', α, α', huius vero in n partes aequales in punctis C, b, b', β, β' diuidatur, vt sint arcus $Ca = C\alpha = \frac{360}{m}$ graduum et $Cb = C\beta = \frac{360}{n}$ graduum. Seu positis interuallis $AC = a$, $BC = b$ et ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, erunt ipsi arcus $Ca = C\alpha = \frac{2\pi a}{m}$ et arcus $Cb = C\beta = \frac{2\pi b}{n}$, qui ob $a : b = m : n$ sunt inter se aequales.

24. Deinde per C vtcunque oblique agatur recta RS in quam ex A et B demittantur perpendicula AR et BS, atque vt vidimus haec ipsa puncta R et S pro centris arcuum dentes formantium accipi possunt, quem casum vtpote simplicissimum merito potissimum consideramus. Centro igitur

igitur R per C defcribatur arcus ECM, vt fit $EC = CM = CR. \frac{180^0}{m}$, et totus arcus $ECM = CR. \frac{360^0}{m}$ qui ergo fe habebit ad arcum Ca vt $CR : CA$, feu totidem erit graduum. Simili modo centro S per C ducatur arcus FCN vt fit $CF = CN = CS. \frac{180^0}{n}$, et totus arcus $FCN = CS. \frac{360^0}{n}$, qui ergo ad arcum Cb eandem habet rationem; vnde cum fit $Cb = Ca$, etiam arcus ECM et FCN magnitudine erunt aequales. Addatur vtrique arcui vtrinque particula Ee, Mm et Ff, Nn, quae autem intra vtriusque arcus continuationes cadant, vt nunquam ad contactum perueniant, dabuntque ductis eA et fB figurae $eECMmp$ et $fFCNnq$ femiffes vtriusque dentis; quae ad alteram partem rectarum ep et fq fimiliter defcriptae dentes integros referent.

25. Verum hic imprimis obferuandum eft totam vtriusque dentis craffitiem non fuperare debere femiffem interualli Ca vel Cb, quia inter binos dentes vnius rotae tantum fpatii relinqui debet, cui dens alterius rotae inferi queat. Quare fi quantitatem arcuum $Ca = Cb$ ponamus $= e$, craffities vnius dentis non fuperare debet $\frac{1}{2}e$. Ponamus ergo angulum $ACR = BCS = \omega$ et cum fit arcus $ECM = e \operatorname{cof.} \omega$, eiusque femiffis $CE = CM = \frac{1}{2} e \operatorname{cof.} \omega$, punctorum extremorum E et M neglecta curuatura diftantiae ab axe AB erunt $= \frac{1}{2} e \operatorname{cof.} \omega^2$, quarum fumma $e \operatorname{cof.} \omega^2$ dabit dimidiam craffitiem vnius dentis,

tis, vnde tota craſſities erit $= 2e\cos.\omega^2$, quae autem ob adiectam particulam Ee aliquantillum erit maior: ex quo quantitas $2e\cos.\omega^2$ minor eſſe debet quam $\frac{1}{2}e$, ideoque $\cos.\omega^2 < \frac{1}{4}$, et $\cos.\omega < \frac{1}{2}$, quocirca angulum $ACR = \omega$ maiorem $60°$ capi oportet, neque ergo hic arcus amplius arbitrio noſtro relinquitur.

26. Perinde ſe res habet quando arcus ECM et FCN non ex centris R et S ſed ex aliis punctis P et Q ſupra definitis deſcribuntur. Sumta enim littera u negatiua, ſit

$$CP = a\cos.\omega + \frac{aa\cos.\omega}{u-a} = CR\left(1 + \frac{a}{u-a}\right) \quad \text{et}$$
$$CQ = b\cos.\omega - \frac{bb\cos.\omega}{b+u} = CS\left(1 - \frac{b}{b+u}\right)$$

ac centris P et Q deſcriptis arcubus ECM et FCN pro eorum amplitudine eſſe debet:

$$CE = CM = CR.\frac{180°}{m} = \tfrac{1}{2}e\cos.\omega \quad \text{et}$$
$$CF = CN = CS.\frac{180°}{n} = \tfrac{1}{2}e\cos.\omega$$

ob $Ca = Cb = e = a.\frac{360}{m} = b.\frac{360}{n}$ et $CR = a\cos.\omega$ atque $CS = b\cos.\omega$. Hinc vbicunque puncta P et Q ſuperiori determinationi conformiter accipiantur, arcus ECM et FCN eandem magnitudinem $= e\cos.\omega = \frac{CR}{CA}.Ca$ habere debent ex quo vti caſu praecedente craſſities ſingulorum dentium prodit $= 2e\cos.\omega^2$ neglectis particulis Ee et Ff, vnde vt ibi angulus ω maior eſſe debet quam $60°$. Tum vero

vero longitudo dentis cuiusque ep maior esse debet quam $e \operatorname{cos}.\omega \operatorname{sin}.\omega = \frac{1}{2} e \operatorname{sin}.2\omega$.

27. Quantitatem u ita accipere licet, vt ambo centra P et Q a puncto C aequaliter remoueantur, radiique CP et CQ fiant inter se aequales, vnde commodissima dentium constructio peti videtur, propterea quod, dum ambo arcus ECM et FCN aeque fiunt curui, neuter nimis erit curuus quod eueniret, si radii CP et CQ essent inaequales; tum enim alteruter necessario foret minor. Statuamus ergo CP = CQ seu $\frac{au \operatorname{cos}.\omega}{u-a} = \frac{bu \operatorname{cos}.\omega}{b+u}$, erit $u = \frac{2ab}{b-a}$, et $u - a = \frac{a(a+b)}{b-a}$, vnde $CP = CQ = \frac{2ab \operatorname{cos}.\omega}{a+b}$ seu $CP = CQ = \frac{2 CR . CS}{CR + CS}$. Quare super recta RS in Tab.VIII. Fig. 9.
I bisecta describatur circulus, et ex C applicetur recta CK ipsius radio aequalis, qua in L producta, capiatur CP = CQ = CL, atque centris P et Q per punctum C describantur arcus ECM et FCN, ex quibus vt ante dentes vtriusque rotae formabuntur, qui inter se erunt aequales, quantum quidem rotarum inaequalitas permittit.

28. Hinc nanciscimur istam constructionem Fig. 10.
dentium: Recta iungente rotarum centra AB ita in C diuisa, vt sit AC ad BC vt dentium numerus rotae A ad dentium numerum rotae B, per C centris A et B describantur circuli, qui in punctis C, a, a', α, α' et C, b, b', β, β' pro numero dentium in partes aequales diuidantur. Tum per C

agatur

agatur recta RS cum AB angulum $60°$ vel aliquanto maiorem constituens, in quam ex A et B demissis perpendiculis AR et BS, capiatur $CP = CQ = \frac{2 CR . CS}{RS}$, et centris P et Q per C describantur arcus circulares ECM et FCN, in C bisecti, vt sit vterque totus arcus ECM vel FCN ad arcum Ca vel Cb vt CR ad CA seu in ratione subdupla, si quidem angulus ACR sit $60°$. Vtrinque adiiciatur exigua particula, quae nunquam ad contactum perueniat, et circa EA et FB ad alteram partem similes figurae describantur, eritque MCEM dens rotae A et NCFN dens rotae B, tum igitur nil aliud restat, nisi vt in singulis punctis a, a', α, α' itemque b, b', β, β' similes figurae extruantur, hocque modo vtraque peripheria dentibus compleatur.

Accuratior determinatio figurae dentium.

29. Praecedens figurae dentium determinatio proxime tantum satisfacit, quoniam vtrinque figuram circularem assumsimus, perspicuum autem est, si altera sit arcus circularis, alteram re vera fore curuam satis complicatam, cuius loco arcum circuli osculantis assumsimus. Quo igitur hoc negotium accurate prosequamur, ex praecedentibus repetamus formulas principales, quae sunt p sin. $\Phi = a$ sin. ω et

Tab. V. et VI. Fig. 1. et 5.

et $q\,\text{fin.}\,\psi = b\,\text{fin.}\,\omega$, feu $AR = a\,\text{fin.}\,\omega$ et $BS = b\,\text{fin.}\,\omega$ tum vero $r + s + p\,\text{cof.}\,\Phi + q\,\text{cof.}\,\psi = (a+b)\,\text{cof.}\,\omega$, feu $RS = (a+b)\,\text{cof.}\,\omega$ quae formulae etiam immediate ex figura confequantur, cum AR et BS fint perpendicula ex punctis A et B in rectam RS per T pro libitu ductam demiffa, OR autem et OS funt rectae ad curuas ambas normales. Quodfi iam angulus ω ftatuatur conftans, erunt quoque perpendicula AR et BS conftantia, ideoque vtraque curva EOM et FON ex euolutione circuli nata, illa nempe ex circulo, qui centro A radio AR, haec vero ex circulo qui centro B radio BS defcribitur, quae curuae cum fint defcriptae facillime, folutionem commodiffimam praebere videntur.

30. Sumto autem angulo ω conftante erit differentiando:

$$dp = \frac{-p\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} \text{ et } dq = \frac{-q\,d\psi\,\text{cof.}\,\psi}{\text{fin.}\,\psi}, \text{ tum vero}$$

$$dr + ds - \frac{p\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi^2}{\text{fin.}\,\Phi} - \frac{q\,d\psi\,\text{cof.}\,\psi^2}{\text{fin.}\,\psi} - p\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi - q\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi = 0.$$

At eft $dr = -dp\,\text{cof.}\,\Phi$ et $ds = -dq\,\text{cof.}\,\psi$, vnde $p\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + q\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi = 0$, feu $a\,d\Phi + b\,d\psi = 0$, quod quidem per fe patet. Tum vero eft $d\zeta = -d\Phi$. Iam dum rota A angulo $d\zeta$ gyratur, in dente eius punctum contactus ex O in o tranfit, vt fit $Oo = r\,d\Phi + \frac{dr\,\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi} = r\,d\Phi - dp\,\text{fin.}\,\Phi = r\,d\Phi + p\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi = d\Phi.\,RO = -RO.\,d\zeta$. In dente autem alterius rotae punctum contactus ex O in ω transfertur, vt fit

fit $O\omega = -SO.\,d\eta$, eftque $ad\zeta = bd\eta$. Vnde fi $ad\zeta$ denotet diftantiam dentium in vtraque rota, magnitudo arcus dentem rotae A conftituentis erit $= RO.\,d\zeta$ et magnitudo arcus dentem rotae B conftituentis $= SO.\,d\eta$, vnde magnitudo dentium definitur, vbi notari oportet, angulum ω tantum accipi debere, vt craffities vnico dentis dimidium interuallum duorum dentium non fuperet.

Tab. VIII. Fig. 11. 31. Hoc modo adhuc iftud lucramur, vt vtriusque rotae dentes feorfim delineare poffimus. Diuifa enim centrorum diftantia AB in ratione reciproca motuum angularium in C, radio AC defcribatur circulus fecundum dentium numerum in partes aequales diuidendus, cuiusmodi pars vna fit CC′, tum fub dato angulo ω, quo etiam in altera rota eft vtendum, ducatur recta CR, in eamque ex A demittatur perpendiculum AR, quo tanquam radio nouus circulus illi concentricus defcribatur, pariter ab R vtrinque fecundum dentium numerum diuidendus, cuiusmodi pars fit RR′, quae autem fingulae denuo bifecentur in r, r'. Deinde recta RC cum ad circulum interiorem inuoluatur vsque ad r, tum vero euoluatur vsque ad r', quo pacto altera facies dentis ECM defcribitur, fimilique modo per C′ dentis fequentis E′ C′ M′. Denique fumto arcu Cc minore femiffe arcus CC′ per c modo inverfo ducatur curua ecm, itemque $e'c'm'$, ficque nifi nisi binae curuae se decussent clausis spatiolis E e, E' e' habebitur integri dentis figura MEem: ab m ad M' autem rotam profundius incidi conuenit. Ceterum ne punctum e in E incidat, vel adeo praetereat, cauetur angulum ACR satis magnum accipiendo; quo maior enim assumitur, eo minorem profunditatem dentes obtinebunt.

DE