



1767

De phaenomenis coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De phaenomenis coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati" (1767). *Euler Archive - All Works*. 329.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/329>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
PHAENOMENIS COELI
PER SEGMENTA SPHAERICA DIAPHANA
SPECTATI.

Auctore
L. EVLERO.

I.

Si coelum spectatur per hemisphaerum vitreum oculo ad eius centrum applicato, omnes stellae quaeque in suo loco conspiciuntur, perinde ac si nudo oculo cernerentur; propterea quod radii ad oculum pertingentes in superficiem vitri normaliter ingrediuntur, ideoque nullam refractionem patiuntur. Sin autem vitri figura sit segmentum sphaerae siue minus siue maius haemisphaerio, eique oculus in ipso axe applicetur, stellae extra axem sitae non solum de loco suo depulsae apparebunt, sed etiam euenire potest, vt quaedam plane non fiant conspicua, aliae geminatae in diuersis coeli punctis videantur, atque aliqua coeli regio omnino vacua spectetur. Quae phaenomena singularia digna videntur vt accuratius euoluantur.

2. Quae autem ad segmenta sphaerae tam maiora quam minora spectant, ea vna inuestigatione

Tom. XI. Nou. Comm.

A 2

com-

Tab. IV.
Fig. I.

complecti licet, si sphaeram vitream integram contemplemur, in qua alicubi oculus sit constitutus. Sit igitur proposita sphaera resolutione semicirculi APB circa diametrum AB genita, in cuius puncto O constitutus sit oculus, extra centrum C, unde coelum spectetur. Quod si iam secundum OP plano ad diametrum AB normali sphaera secetur, bina segmenta alterum minus APO, alterum maius BPO obtinebimus, per quae separata oculus utriusque in O applicatus coelum intueatur. In calculo autem instituendo nihil impedit, quo minus haec segmenta coniuncta consideremus et oculum in O intra sphaeram quasi inclusum assumamus, ut hoc modo utrique casui satisfaciat, simulque ratio continui habeatur.

3. Iam primum obseruo stellas E et F in ipso sphaerae axe AB sitas sine ulla loci mutatione conspici, quia radii inde ad oculum O pertinentes normaliter in sphaeram intrant. At si extra axem stella nobis in V sita appareat, quam scilicet per radium MO spectemus, haec stella re vera non in V haerere est censenda, sed ad eius locum verum, ubi nudo oculo conspiceretur, explorandum ex centro C per punctum M agatur recta CMN, utpote normalis in superficiem sphaerae, et constituatur angulus NMS, cuius sinus sit ad sinum anguli NMV in ratione refractionis ex aëre in vitrum, ac verus stellae locus alicubi in recta MS reperietur.

tur, cuius distantia cum fit quasi infinita, ex O ducatur Os ipsi MS parallela, et a nudo oculo stella in directione Os cerneretur, quae nunc per vitrum in directione OV conspicitur, ita vt ob refractionem angulo SOV de suo loco vero deturbetur.

4. Hanc visionis mutationem in utroque segmento in figura expressi, vnde colligere licet per segmentum minus AOP stellam in directione Os venientem propius ad axem vitri OE admoveri, atque spatium coeli E. ob refractionem sub minore angulo EOY apparere, vnde magnitudo stellarum imminuitur. Contra autem per segmentum maius BOP stella in directione Os sita et angulo FOs ab axe remota in directione OV sub maiore angulo FOY ab axe videbitur vnde etiam stellae magnitudo aucta prodibit. Atque haec potissimum de stellis axi utrinque proximis sunt intelligenda, in maioribus enim elongationibus singularia phaenomena, quorum initio mentionem feci, locum habere possunt.

5. Ad haec diligentius inuestiganda, ponamus:
 radium sphaerae $CA = CB = CM = a$
 distantiam oculi O a centro sphaerae, $CO = d$
 Distantiam apparentem stellae ab axe, seu angulum $AOV = \phi$

A a 2

angu-

angulum refractionis $OMC = \eta = NMV$

angulum incidentiae $NMS = \zeta$

rationem refractionis $\sin. \zeta : \sin. \eta = n : 1$.

Hinc erit angulus $VMS = \zeta - \eta$, cui cum fit angulus VOs aequalis, erit distantia vera stellae ab axe OAE , hoc est ang. $AOs = \phi + \zeta - \eta$, ideoque definiri oportet, quomodo ex distantia apparente seu angulo $AOV = \phi$, distantia vera seu angulus $AOs = \phi + \zeta - \eta$ ac vicissim determinetur. Hic quidem nulla difficultas occurrit, verum euolutio singulorum phaenomenorum eo maiorem diligentiam ac circumspectionem requirit.

6. Consideremus angulum $AOV = \phi$ tanquam datum, qui cum fit externus trianguli OMC , in quo dantur duo latera $CM = a$ et $CO = d$, erit $\sin. \phi : \sin. \eta = a : d$, ideoque $\sin. \eta = \frac{d}{a} \sin. \phi$; ubi obferuo angulum η semper esse acutum, etiam si angulus ϕ euadat obtusus, ita vt haec determinatio nullam ambiguitatem implicet inde oriundam, quod eidem sinui gemini anguli conueniant. Cum nunc fit $\sin. \zeta = n \sin. \eta$, inuento angulo η erit $\sin. \zeta = \frac{n d}{a} \sin. \phi$, qui angulus pariter nunquam obtusus esse potest. Ad rectum potest increfcere, si $nd = a$ vel $nd > a$. Inuentis ergo his binis angulis η et ζ ex formulis $\sin. \eta = \frac{d}{a} \sin. \phi$ et $\sin. \zeta = \frac{n d}{a} \sin. \phi$, colligitur elongatio vera ab axe $AOs = \phi + \zeta - \eta$, ita vt $\zeta - \eta$ fit effectus refractionis.

7. Quem-

7. Quemadmodum nulla turbatio oritur, si oculus in centro C teneatur seu $d=0$, ita si internallum $CO=d$ prae radio sphaerae a sit valde exiguum, turbatio parum sentitur. Quo magis autem locus oculi a centro C remouetur, eo magis phaenomena a veritate discrepant, quae tum imprimis prorsus fiunt singularia, quando $d > \frac{a}{n}$. Tum enim angulo Φ eo usque aucto ut sit $\sin \Phi > \frac{a}{n d}$, ob $\sin \angle > 1$, fit angulus \angle imaginarius, neque ergo sub his angulis Φ vllum obiectum apparere potest. Sit $\frac{a}{n d} = \sin \alpha$, et quamdiu angulus Φ inter limites α et $180^\circ - \alpha$ continetur, in hoc intervallo visionis nulla prorsus stella videbitur: et quoniam nullus radius in oculum ingreditur, tota regio intra angulos α et $180^\circ - \alpha$ contenta obscurissima et nigra apparebit, omnes autem stellae, quas quidem videre licet extra istos limites conspicientur.

8. Intervallum hoc obscurum evanescit, si capitur $d = \frac{a}{n}$ oculusue adhuc propius centro C admoveatur; quo magis autem a centro remouetur, intervallum illud obscurum amplificatur, fit maximum sumto $d = a$, quo casu segmentum sphaericum in integram sphaeram abit, cui oculus in A applicatur, intervallo AO evanescente. Hi ergo duo casus $d = \frac{a}{n}$ et $d = a$ sunt quasi praecipui, qui secundum eorum merentur, ac postquam aspectum fiderum pro his casibus definiuerimus, quoniam ca-

190 DE PHAENOMENIS COELI

sius $d=0$ per se est perspicuus, inde facile, qua ratione coelum reliquis casibus sit appariturum, colligere licebit.

L. De aspectu coeli per sphaeram diaphanam integram.

Tab. IV. 9. Oculo O sphaerae in A applicato appareat
Fig. 2. stella in directione OM quasi esset in V sita, quae reuera existit in directione Os. Referantur haec loca ad directionem fixam ABF, sitque hinc elongatio stellae apparens, seu angulus BOV = ψ , positisque ut ante angulis OMC = η et SMN = ζ ob $d=a$ erit $\sin. \eta = \frac{a}{r} \sin. \psi = \sin. \psi$ et $\sin. \zeta = \frac{n a}{r} \sin. \psi = n \sin. \psi$ unde fit elongatio vera seu angulus BOs = $\psi - \zeta + \eta$. Cum igitur sit $\sin. \eta = \sin. \psi$, et ψ angulus acutus, erit $\eta = \psi$, ideoque elongatio vera BOs = $2\psi - \zeta$. Hic primo apparet angulum ψ maiorem esse non posse, quam ut sit $\sin. \psi = \frac{1}{n}$. Ducatur ergo recta AG, ut sit $\sin. BAG = \frac{1}{n}$ seu AB ad cordam BG in ratione refractionis $n:1$, eritque totus arcus AG obscurus, omnesque stellae intra angulum BOG conspiciuntur.

10. Sit angulus BOG = α seu $\sin. \alpha = \frac{1}{n}$, ita ut angulus ψ hunc limitem α transgredi nequeat, vera autem elongatio BOs apparenti BOV = ψ respondens, ponatur = ω , erit ut vidimus $\omega = 2\psi - \zeta$, existente $\sin. \zeta = n \sin. \psi$. Hinc primo patet si sit angulus

angulus ψ quam minimus, ob $\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 = n\psi - \frac{n}{2}\psi^2$,
 seu $\zeta = n\psi + \frac{n(n-1)}{6}\psi^2$, fore $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(n-1)}{6}\psi^2$,
 seu proxime $\omega = (2-n)\psi$, quare cum sit $n > 1$,
 neque vero unquam n ad 2 increfcere queat, erit
 utique $\omega < \psi$, seu stellae prope F apparentes, re-
 vera puncto F sunt propiores, refraçtio fcilicet
 stellas axi proximas magis inde deducit, quo maior
 fuerit sphaerae refraçtio.

Consideremus nunc stellam in directione
 extrema OG, apparentem, vbi $\psi = \alpha$, et ob sin. ζ
 $= n \sin \alpha = 1$ seu $\zeta = 90^\circ$, erit huius stellae elon-
 gatio vera ab axe $= 2\alpha - 90^\circ$, ideoque si $\alpha < 45^\circ$
 seu $n > \sqrt{2}$, stella adeo ad alteram axis AF par-
 tem erit sita. Sit nunc $\psi = \alpha - \delta$, existente angulo
 δ minimo, ob sin. $\zeta = n \sin \alpha - n\delta \cos \alpha = 1 - n\delta \cos \alpha$ po-
 natur $\zeta = 90 - \varepsilon$, vt sit $\cos \varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 = 1 - n\delta \cos \alpha$,
 et colligitur $\varepsilon = \sqrt{2n\delta \cos \alpha}$, ex quo elongatio vera
 stellae ab axe erit $\omega = 2\alpha - 90^\circ - 2\delta + \sqrt{2n\delta \cos \alpha}$ seu
 $\omega = 2\alpha - 90^\circ + \sqrt{2n\delta \cos \alpha}$

quandoquidem particula 2δ prae $\sqrt{2n\delta \cos \alpha}$ eua-
 nescit; ita vt minimae mutationi in loco apparente
 respondeat maxima mutatio in loca stellae vero.

2. Quoniam stella in ipso axe visa, ibidem
 quoque sita est, et quae in directione extrema OG
 conspicitur, parum ab axe distat, videmus quanta
 sit maxima distantia vera ω , ad quam stellae etiam

nunc

nunc sint conspicuae. Cum igitur poni oporteat $2d\psi - d\zeta = 0$ ob $d\zeta \cos \zeta = n d\psi \cos \psi$ fit $2 \cos \zeta = n \cos \psi$, ideoque $4 - 4nn \sin^2 \psi = nn - nn \sin^2 \psi$ unde colligitur $\sin \psi = \frac{\sqrt{4-nn}}{n\sqrt{3}}$, hinc $\cos \psi = \frac{\sqrt{nn-1}}{n\sqrt{3}}$ et $\cos \zeta = \frac{\sqrt{nn-1}}{\sqrt{3}}$ ac $\sin \zeta = \sqrt{\frac{4-nn}{3}}$. His ergo valoribus elongatio vera $\omega = 2\psi - \zeta$ fit maxima, eiusque sinus et cosinus ita determinantur:

$$\sin \omega = \frac{(4-nn)\sqrt{4-nn}}{3nn\sqrt{3}}, \text{ et } \cos \omega = \frac{(nn-1)\sqrt{nn-1}}{3nn\sqrt{3}}$$

nullae ergo stellae per sphaeram spectanti apparebunt, nisi quae axi fuerint propiores, et quae satis modico intervallo continentur.

13. Dum igitur angulus ψ ab axe OB utque ad limitem α digreditur, ut fit $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ angulus ω primo quoque ita crescit, ut quamdiu angulus ψ est minimus, fit $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6\sqrt{3}}\psi$ tum vero angulus ω maximum valorem attingit, ubi fit $\sin \psi = \frac{\sqrt{4-nn}}{n\sqrt{3}}$, ibique est $\sin \omega = \frac{(4-nn)\sqrt{4-nn}}{3nn\sqrt{3}}$, ulteriusque aucto angulo ψ ad limitem α usque, angulus ω iterum decrescit, donec tandem fiat $\omega = 2\alpha - 90$. Ultimus hic valor ipsius ω fit negativus si $n > \sqrt{2}$ quemadmodum evenit in vitro, ideoque antequam eo pertingit, denuo evanuerit necesse est, quod scilicet fit ubi $2\psi = \zeta$, ideoque $\sin \zeta = n \sin \psi = 2 \sin \psi \cos \psi$, seu $\cos \psi = \frac{n}{2}$. In vitro igitur ubi $n > \sqrt{2}$, stella in axe OF sita non solum per sphaeram ibidem cernitur, sed etiam eadem

dem. in elongatione ab axe ad angulum ψ vt fit
 $\cos \psi = \frac{n}{2}$ apparet, quod cum quaqua versus in
 omnibus meridianis contingat, eadem stella instar
 circuli lucidi polum B. ambientis spectabitur, in
 cuius quoque centro simul videbitur.

14. Per sphaeram ergo pellucidam stellae tan-
 tum circum axem OF sitae, quarum distantia non
 superat angulum, cuius sinus est $\frac{(4-nn)\sqrt{4-nn}}{3nn\sqrt{3}}$,
 sunt conspicuae, nisi forte distantia negativa $2\alpha - 90^\circ$,
 cuius \sin illa sit maior; tum enim etiam has
 remotiores cernere liceret. Operae igitur pretium
 est inuestigare, quo casu angulus $90^\circ - 2\alpha$ illi
 distantiae, cuius sinus est $\frac{(4-nn)\sqrt{4-nn}}{3nn\sqrt{3}}$ fiat aequa-
 lis. Aequato autem hoc sinu ipsi $\sin(90^\circ - 2\alpha)$ seu
 $\cos 2\alpha = 1 - \frac{2}{nn}$, prodit aequatio $(4-nn)\sqrt{4-nn}$
 $= 3(nn-2)\sqrt{3}$, qua euoluta, et diuisione per $nn-1$
 facta, obtinetur $n + 16nn - 44 = 0$, vnde elicitur
 $nn = 6\sqrt{3} - 8$, et vero proxime $n = 1,5467$.

15. Cum in vitro refractione ita sit comparata,
 vt pro radio rubris sit $n = 1,54$, et pro violaceis
 $n = 1,56$, valor inuentus $n = 1,5467$ vtiq; in vi-
 tro locum habet, quae proprietas haud parum no-
 tati digna videtur. Per huiusmodi ergo sphaeram
 vitream singulae stellae, quae quidem sunt conspi-
 cuae neque ultra angulum $90^\circ - 2\alpha$ ab axe remotae,
 triplicatae, seu in ternis diuersis coeli punctis con-
 spicientur, ac praeterea stella quidem in ipso axe
 sita per totum quendam circulum diffusa spectabitur.

194 DE PHAENOMENIS COELI

Pro hoc ergo casu tabulam adiungam, in qua pro singulis elongationibus ab axe apparentibus ψ , elongationes verae exhibentur; unde deinceps cuiuslibet stellae conspicuae terna loca apparentia colligere licebit.

ψ	ω	ψ	ω
$0^{\circ}, 0', 0''$	$0^{\circ}, 0', 0''$	$23^{\circ}, 0', 0''$	$8^{\circ}, 49', 2''$
1, 0, 0	0, 27, 12	24, 0, 0	9, 0, 58
2, 0, 0	0, 54, 21	25, 0, 0	9, 10, 49
3, 0, 0	1, 21, 25	26, 0, 0	9, 18, 36
4, 0, 0	1, 48, 22	27, 0, 0	9, 23, 44
5, 0, 0	2, 15, 10	28, 0, 0	9, 26, 12
6, 0, 0	2, 41, 45	28, 14, 55	9, 26, 19
7, 0, 0	3, 8, 5	29, 0, 0	9, 25, 10
8, 0, 0	3, 34, 9	30, 0, 0	9, 20, 38
9, 0, 0	3, 59, 42	31, 0, 0	9, 11, 29
10, 0, 0	4, 25, 12	32, 0, 0	8, 57, 42
11, 0, 0	4, 50, 7	33, 0, 0	8, 36, 26
12, 0, 0	5, 14, 30	34, 0, 0	8, 7, 40
13, 0, 0	5, 38, 18	35, 0, 0	7, 27, 49
14, 0, 0	6, 1, 31	36, 0, 0	6, 36, 52
15, 0, 0	6, 24, 3	37, 0, 0	5, 23, 9
16, 0, 0	6, 45, 55	38, 0, 0	3, 46, 40
17, 0, 0	7, 6, 51	39, 0, 0	1, 15, 5
18, 0, 0	7, 26, 52	39, 20, 39	0, 0, 0
19, 0, 0	7, 45, 49	40, 0, 0	-3, 49, 41
20, 0, 0	8, 3, 42	40, 16, 0	-8, 4, 5
21, 0, 0	8, 20, 15	40, 16, 51	-9, 26, 18
22, 0, 0	8, 35, 28		

limes ultimus.

16. Re-

16. Relatio inter hos binos angulos ψ et ω quorum ille distantiam stellae apparentem, hic vero distantiam eius veram ab axe sphaerae OF designat, commodissime linea curua repraesentari potest; sumtis enim in directrice FG abscissis FV distantiae apparenti ψ proportionalibus, ad singulas constituantur applicatae VS distantiam veram referentes, hincque formabitur linea curua FSQRH, primo quidem a recta vix differens, tum vero ad axem se magis inflectens, ut abscissae $FP = 28^{\circ}, 14', 55''$ conveniant applicata maxima $PQ = 9^{\circ}, 26', 19''$. Inde vero satis subito ad axem vergit, eum secans in R, ut sit $FR = 39^{\circ}, 20', 39''$, hincque in alteram partem porrigitur fere normaliter ad axem, ubi denique in puncto H terminatur, cuius abscissa $FG = 40^{\circ}, 16', 51''$ et applicata $GH = 9^{\circ}, 26', 18''$ illi maximae PQ aequali.

17. Si axis FG retro ultra F continuetur ei similis curua inuicem conveniet, applicatis in partem contrariam cadentibus; quandoquidem sumto angulo ω negativo alterius anguli ψ signum tantum mutari oportet; unde cum utrinque sit $GH = PQ$, omnes rectae axi FG parallelae has binas curvas, siue in sumtis in tribus punctis interfecbunt, nulli earum distantia ab axe maior sit, quam PQ. Quare unicuique stellae, non ultra $9^{\circ}, 26', 18''$ ab axe sphaerae remotae, terni conveniunt anguli apparentes ψ , totidem in coelo loca denotan-

tes, vbi eadem stella simul conspicietur. Stella autem in ipso axe sita, primo quidem in loco vero apparebit, simul vero sub figura annuli lucidi conspicietur, cuius ab axe distantia $= 39^{\circ}, 20', 39''$, vti iam supra obseruauimus.

18. Ex tabula data sequentes conclusiones deduxisse iuuabit. Primo omnes stellae ab axe F ad elongationem $9^{\circ}, 26', 19''$ in coelo sitae per sphaeram hanc vitream simili fere ordine per spatium $28^{\circ}, 14', 55''$ ideoque fere triplo maius dispersae conspicientur; deinde eadem stellae sed ordine inuerso a distantia $28^{\circ}, 14', 55''$ vsque ad distantiam $39^{\circ}, 20', 39''$ ab axe denuo apparebunt. Tertio vero ad alteram axis partem eadem stellae in exiguo spatio intra $39^{\circ}, 20', 39''$ et $40^{\circ}, 16', 51''$ comprehenso iterum inuerso ordine spectabuntur, ita vt singulae stellae in ternis coeli locis per huiusmodi globum vitreum represententur. Hic autem de representatione qualicunque loquor; quippe quae minime erit distincta, cum singulae imagines pone oculum cadant. Sin autem globus fuerit maximus, oculis presbytis haec apparentia satis erit distincta.

19. Multo aliter autem visio se habebit, si coelum per globum aqueum, seu quod eodem reddit, per sphaeram vitream cavam aqua repletam intueamur, si modo vitrum sit tenuissimum, vt eius refractionem negligere liceat. Hic enim cum sit $n = \frac{4}{3}$ ideoque

ideoque $n < \sqrt{2}$, non solum nulla stella triplicata apparebit, sed etiam quaedam semel tantum repraesentabuntur. Similem ergo tabulam pro tali sphaera adiciam, ex his elementis computatam, quod si distantia ab axe apparens vocetur $= \psi$ indeque angulus colligatur ζ , ut sit $\sin \zeta = \sin \psi$ eius stellaris distantia vera ab axe futura sit $= 2\psi - \zeta = \omega$. Pater autem maximum valorem anguli apparentis ψ esse $38^{\circ} 35' 25''$, anguli autem veri $= 21^{\circ} 0' 53''$, qui responderet angulo $\psi = 40^{\circ} 12' 11''$ ita, ut hic maximis spatium aperiat, maiorque coeli portio offeratur.

ψ	ω	ψ	ω
$0^{\circ} 0' 0''$	$0^{\circ} 0' 0''$	$14, 0, 0$	$9^{\circ} 10', 47''$
$1, 0, 0$	$0, 40, 6$	$15, 0, 0$	$9, 48, 45$
$2, 0, 0$	$1, 20, 6$	$16, 0, 0$	$10, 26, 11$
$3, 0, 0$	$2, 0, 1$	$17, 0, 0$	$11, 3, 11$
$4, 0, 0$	$2, 39, 51$	$18, 0, 0$	$11, 39, 41$
$5, 0, 0$	$3, 19, 36$	$19, 0, 0$	$12, 16, 12$
$6, 0, 0$	$3, 59, 14$	$20, 0, 0$	$12, 52, 8$
$7, 0, 0$	$4, 38, 46$	$21, 0, 0$	$13, 27, 24$
$8, 0, 0$	$5, 18, 12$	$22, 0, 0$	$14, 2, 51$
$9, 0, 0$	$5, 57, 32$	$23, 0, 0$	$14, 36, 10$
$10, 0, 0$	$6, 36, 46$	$24, 0, 0$	$15, 1, 31$
$11, 0, 0$	$7, 15, 35$	$25, 0, 0$	$15, 42, 9$
$12, 0, 0$	$7, 54, 11$	$26, 0, 0$	$16, 13, 57$
$13, 0, 0$	$8, 32, 35$	$27, 0, 0$	$16, 44, 53$

ψ	ω	ψ	ω
27°, 0', 0"	16°, 44', 53"	40°, 12', 11"	21°, 0', 53"
28, 0, 0	17, 14, 50	41, 0, 0	20, 59, -6
29, 0, 0	17, 43, 42	42, 0, 0	20, 51, 9
30, 0, 0	18, 11, 23	43, 0, 0	20, 35, 13
31, 0, 0	18, 37, 49	44, 0, 0	20, 8, 54
32, 0, 0	19, 2, 40	45, 0, 0	19, 28, 16
33, 0, 0	19, 25, 57	46, 0, 0	18, 26, 22
34, 0, 0	19, 47, 25	47, 0, 0	16, 48, 11
35, 0, 0	20, 6, 49	48, 0, 0	13, 45, 8
36, 0, 0	20, 23, 53	48, 30, 0	10, 1, 27
37, 0, 0	20, 38, 19	48, 35, 0	8, 0, 37
38, 0, 0	20, 49, 36	48, 35, 25	7, 10, 50
39, 0, 0	20, 57, 19	limes	ultimus
40, 0, 0	21, 0, 47		

20. Per sphaeram ergo vitream spatium lucidum ab axe ad angulum $48^\circ, 35', 25''$ extensum conspicitur, in quo autem stellae ab axe non ultra $21^\circ, 0', 53''$ remotae conspiciuntur; stella quidem in ipso axe sita ibidem ac semel tantum apparet, sicuti etiam eae, quae minus quam $7^\circ, 10', 50''$ ab axe distant: remotiores vero singulae bis cernuntur, et ea, cuius distantia est $21^\circ, 0', 53''$ in distantia $40^\circ, 12', 11''$ quasi duplicata spectatur. Quae vero stellae, ultra $40^\circ, 12', 11''$ ab axe videntur, eadem iam in minoribus intervallis erant conspicuae, nunc autem ordine inverso exhibentur.

II. De

II. De Aspectu coeli per segmenta diaphana sphaerica casu quo $d = \frac{a}{n}$.

21. Loco igitur oculi O intra sphaeram as- Fig. 1.
sumto, vt fit $d = \frac{a}{n}$, seu CB:CO in ratione re-
fractionis $n:1$, aspectum coeli per ambo segmenta
simul definire licet. Pro minore scilicet segmento,
posito angulo apparente $EOV = \Phi$, cum fit $\sin. \zeta$
 $= \sin. \Phi$ et $\sin. \eta = \frac{1}{n} \sin. \Phi$, ideoque $\zeta = \Phi$ angulus
ab axe verus EOS erit $= 2\Phi - \eta$. Pro maiore
autem segmento posito angulo apparente $FOV = \psi$
ob $\sin. \zeta = \sin. \psi$ ideoque $\zeta = \psi$ et $\sin. \eta = \frac{1}{n} \sin. \psi$,
erit angulus ab axe verus FOS $= \psi - \zeta + \eta = \eta$, vnde
idem calculus, quo anguli η determinantur, vtriusque
segmenti phaenomena patefaciet, etiam si ea non con-
tinuitatis lege inter se cohaereant. Calculum ergo
hunc pro vitro quo $n = 1,5467$ instituamus.

22. Pro vitro et segmento minore

ang. ap. EOV	ang. verus EOS	ang. ap. EOV	ang. verus EOS
0°	0°, 0', 0''	45°	62°, 47', 43''
5	6, 46, 11	50	70, 18, 43
10	13, 33, 14	55	78, 1, 14
15	20, 22, 1	60	85, 56, 59
20	27, 13, 29	65	94, 7, 44
25	34, 8, 34	70	102, 35, 15
30	41, 8, 21	75	111, 21, 13
35	48, 13, 57	80	120, 27, 9
40	55, 26, 37	85	129, 54, 12
45	62, 47, 43	90	139, 43, 8

Pro

Pro vitro et segmento maiore.

ang. app. FOV	ang. verus FOV	ang. app. FOV	ang. verus FOV
0°	0°, 0', 0"	45°	27°, 12', 17"
5	3, 13, 49	50	29, 41, 17
10	6, 26, 46	55	31, 58, 46
15	9, 37, 59	60	34, 3, 1
20	12, 46, 31	65	35, 52, 16
25	15, 51, 26	70	37, 24, 45
30	18, 51, 39	75	38, 38, 47
35	21, 46, 3	80	39, 32, 51
40	24, 33, 23	85	40, 5, 48
45	27, 12, 17	90	40, 16, 52

23. Hic ergo nulla stella bis spectatur, neque etiam vlla conspectui subtrahitur, et tota sphaera radius ad oculum directis impletur, ita ut nulla portio obicura relinquatur. Per segmentum vero minus multo maior coeli portio detegitur, ad gradus 279 expansa dum ea quae per segmentum maius cernitur, non ultra 80°, 33', 44" patet. Coelum igitur per segmentum minus intuentibus intervalla stellarum contrahuntur, et quidem maxime circa oras ubi ad semissem rediguntur. Contra autem per segmentum maius stellarum intervalla amplificantur, atque adeo maxime earum, quae ab axe ad 90° remotae apparent. Ac si centrum solis ab axe distet 139°, 43', 8" semissis per segmentum minus conspicuus tantum 8', alter vero per segmen-
tum

tum maius visus propemodum 7 gradus in coelo occupare videbitur, ita vt hoc loco aspectus maximus maxime turbetur, et continuitatis legi aduersetur.

24. Similia erunt phaenomena in sphaera aquea, vbi cum refractione n sit minor, distantia oculi a centro maior est capienda, vt inter ambo segmenta maior aequalitas intercedat, contra vero portiones coeli per vtrumque seorsim spectabiles magis ad aequalitatem reducantur, sicque perturbatio visionis imminuat. Quam ob rem superfluum foret huiusmodi tabulam quoque pro aquae refractione computare, cum autem sphaera vitrea integra singulas stellas, quae quidem sunt conspicuae, in ternis diuersis locis spectandas exhibeant, dum hoc casu quo $d = \frac{a}{n}$ subito vnica repraesentatio locum habeat, haud abs re erit casum quendam intermedium euoluere, quo facilius intelligatur, quomodo saltus a casu priori ad posteriorem progrediatur; ex quo casum quo $\frac{d}{a} = \sqrt{\frac{1}{n}}$ examini subiiciam.

III. De aspectu coeli per segmenta sphaerica diaphana casu quo

$$d = a \sqrt{\frac{1}{n}}$$

25. Sumto ergo interuallo $CO = CA \sqrt{\frac{1}{n}}$, pro Tab. IV. segmento minore AOP si angulus apparens EO V Fig. 1. vocetur $= \Phi$, indeque definiantur anguli acuti ζ et η , vt sit $\sin \zeta = \sqrt{n}$, $\sin \Phi$ et $\sin \eta = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \Phi$, erit angulus verus EO s $= \Phi + \zeta - \eta$. At pro segmen-

Tom. XI. Nou. Comm.

C c

to

to maiore BOP, vocato angulo apparente $FOV = \psi$ indeque deductis angulis pariter acutis ζ et η , vt fit $\sin. \zeta = V n \sin. \psi$ et $\sin. \eta = \frac{1}{V n} \sin. \psi$, erit angulus verus $FOs = \psi - \zeta + \eta$. Quodsi iam sphaeram statuamus vitream et $n = 1,5467$, erit $V n = 1,24366$ et $\frac{1}{V n} = 0,804078$ vnde ne angulus ζ fiat imaginarius, angulum Φ vel ψ non ultra $53^\circ, 31', 16''$ augere licet; sicque in vtroque segmento illuminationis, vterius non porrigetur, ita vt vtrinque circa rectam OP spatium $36^\circ, 28', 44''$ obscurum relinquatur, vnde nulli radii ad oculum pertingant.

Pro segmento minore		Pro segmento maiore	
ang. app. EOV	ang. verus EOs	ang. app. FOV	ang. verus FOs
0°	0°, 0', 0''	0°	0°, 0', 0''
5	7, 12, 13	5	2, 47, 47
10	14, 26, 46	10	5, 33, 14
15	21, 45, 55	15	8, 14, 5
20	29, 12, 39	20	10, 47, 21
25	36, 50, 34	25	13, 9, 26
30	44, 34, 40	30	15, 25, 20
35	53, 2, 33	35	16, 57, 27
40	61, 57, 9	40	18, 2, 51
45	71, 55, 12	45	18, 4, 48
50	84, 17, 8	50	15, 42, 52
52	91, 12, 31	52	12, 47, 29
53	96, 22, 37	53	9, 37, 23
53, 31'	102, 36, 48	53, 31'	4, 25, 12
53, 31, 16''	103, 14, 24	53, 31, 16''	3, 48, 8
			26. Hic

26 Hic circa segmentum minus nihil admodum notatu dignum occurrit, nisi quod, quo magis oculus O a centro C remouetur, tam spatium illuminatum quam campus coeli in eo conspicuus magis contrahatur, ideoque stellarum intervalla minuantur, ordine seruato. In segmento autem maiore, haec intervalla dilatantur, donec perveniatur ad distantiam maximam ab axe, quae colligitur $18^\circ, 14', 37''$ et respondet angulo apparenti $FOV = 42^\circ, 46', 54''$ neque enim stellas magis remotas cernere licebit, apparebunt in maioribus ab axe distantis eadem stellae, quae propius conspiciebantur, sed ordine inuerso, quoad recurat stella ab axe $3^\circ, 48', 8''$ remota, quae in extremitate conspicietur, ita ut omnes stellae magis remotae bis repraesententur; propiores vero tantum semel. Vnde colligere licet, si oculus magis a centro remoueatur, mox ipsam stellam in F sitam dupliciter conspici, tum vero etiam quasdam stellas triplicari.

27. Hand facile hic pro segmento maiore definitur locus, ubi angulus $FOs = \psi - \zeta + \eta$ fit maximus. Cum enim sit $\sin. \zeta = \frac{n d}{a} \sin. \psi$ et $\sin. \eta = \frac{d}{a} \sin. \psi$, ob $d \zeta \cos. \zeta = \frac{n d}{a} d \psi \cos. \psi$ et $d \eta \cos. \eta = \frac{d}{a} d \psi \cos. \psi$, pro hoc loco habetur:

$$0 = 1 - \frac{n d \cos. \psi}{a \cos. \zeta} + \frac{d \cos. \psi}{a \cos. \eta}$$

Cum nunc sit $\frac{n d}{a} = \frac{\sin. \zeta}{\sin. \psi}$ et $\frac{d}{a} = \frac{\sin. \eta}{\sin. \psi}$, aequatio haec

C c 2

istam

istam induet formam:

$$0 = 1 - \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \psi} + \frac{\text{tang. } \eta}{\text{tang. } \psi} \text{ seu } \text{tang. } \psi = \text{tang. } \zeta - \text{tang. } \eta$$

ita ut angulus FOs ibi fit maximus, ubi fit $\text{tang } \psi = \text{tang. } \zeta - \text{tang. } \eta$. Verum si hinc angulum ψ definire velimus, ad aequationem quarti ordinis delabimur, quam nonnisi operosa illa methodo *Cartesiana* resolvere licet.