1767

De usu functionum discontinuarum in analysi

Leonhard Euler

DE VSV FVNCTIONVM DISCONTINVARVM IN ANALYSI

Auctore

L. EVLERO.

I.

Quae in Analysi de functionibus, seu quantitatibus per quampiam variabilem vtcunque determinatis, tradi solent, ad eas tantum functiones restringuntur, quae continuae vocantur, et quarum formatio certa quadam lege continetur. Ex doctrina linearum curuarum hoc maxime illustratur, vbi applicatae, quatenus per abscissas determinantur, vicem gerunt functionum, ita vt indoles omnium functionum aptissime per lineas curuas repraesentari possit. Ita quomodocunque quantitas y per x determinatur, seu quaecunque functio fuerit y ipsius x, semper curua describi potest, cuius abscissae cuicunque x conueniat ea ipsa applicata y, haecque linea curua congrue naturam illius functionis repraesentare aestimatur. Hinc etiam vicissim proposita linea curua quacunque, eius applicatae certas quasdam functiones abscissarum exhibent, quarum

 natura

natura in ipſa lineae curuae natura inuoluitur, dum ſcilicet cuique abſciſſae certa reſpondet applicata, huius valor tanquam functio quaedam abſciſſae recte ſpectatur, et quando applicata vel ſit imaginaria, vel ſimul plures valores ſortitur, haec ipſa varietas luculentiſſime ex natura functionis perſpicitur.

2. Iam vero notiſſimum eſt, in Geometria ſublimiori alias lineas curuas conſiderari non ſolere, niſi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas, per quampiam aequationem expreſſa definiatur, ita vt omnia eius puncta per eandem aequationem tanquam legem determinentur. Quae lex cum principium continuitatis in ſe complecti cenſeatur, quippe qua omnes curuae partes ita vinculo arctiſſimo inter ſe cohaerent, vt nulla in illis mutatio ſaluo continuitatis nexu locum inuenire poſſit; hanc ob rem iſtae lineae curuae continuae appellantur, nihilque intereſt, ſiue aequatio illarum naturam continens ſit algebraica ſiue tranſcendens, ſiue cognita ſiue etiamnum incognita, dummodo intelligamus dari quandam aequationem, qua natura huiusmodi linearum curuarum exprimatur. Hoc loco non ſpectatur continuitas tractus, quo rami curuarum porriguntur: ac binae hyperbolae coniugatae aeque lineam curuam continuam conſtituunt, ac parabola vel ellipſis, etiamſi bini eius tractus penitus a ſe inuicem ſint ſeiuncti. Ob eam enim cauſam his ſeparatis hyperbolis continuitas tribuitur, quod ambae in vna eademque aequatione contineantur, ex

eaque

eaque formari possint. Atque ex hoc fonte, quae vulgo vage de lege continuitatis disputari solent, interpretari atque ad determinatum significatum reuocari conueniret.

3. Constituto continuitatis criterio sponte patet, quid sit functio discontinua, seu lege continuitatis destituta: omnes enim lineae curuae per nullam certam aequationem determinatae, cuiusmodi libero manus tractu delineari solent, tales functiones discontinuas suppeditant, quandoquidem in iis valores applicatarum nulla certa lege abscissis definire licet. Huiusmodi lineae curuae, quatenus superiori generi continuitatis lege definito opponuntur, vulgo mechanicae, aptius vero discontinuae, seu continuitatis lege carentes vocantur: idque non quod earum partes non inter se cohaereant, sed quoniam nulla certa aequatione determinantur. Ita quicunque tractus libera manu super charta ducuntur, etiamsi continuo procedant, tamen secundum hanc definitionem pro discontinuis sunt habendae, siquidem profecto nunquam eueniet, vt huiusmodi tractus certa quadam aequatione contineatur. Atque huc etiam referri conuenit lineas vulgo mixtas vocatas, quando partes ex diuersis lineis curuis desumtae inter se coniunguntur, vel etiam partes eiusdem lineae alio modo vniuntur. Ita perimeter polygoni ex meris lineis rectis constans aeque huc pertinet, ac lineae ex rectis et arcubus circularibus, vel aliarum quarumcunque curvarum formatae. Etsi enim hic quaeuis portio

certa quadam aequatione continetur, pro toto tamen tractu nulla aequatio vnica, in quo character continuitatis est statuendus, exhiberi potest, quo circa omnes huiusmodi tractus pro lineis discontinuis sunt habendi, perinde ac ii, qui libera manu ducuntur.

4. Iam omnibus huiusmodi lineis et functionibus discontinuis in Analysi geometrica nullum locum concedi, per se est manifestum, cum vniversa haec speculatio in linearum, quae considerantur, proprietatibus inuestigandis sit occupata, quod negotium nullo modo suscipi posset, nisi natura linearum certa quadam lege et aequatione contineretur. Hinc plerique Geometrae hac ratione inducti non dubitauerunt, omnes lineas et functiones discontinuas, tam ex Geometria, quam vniuersa Analysi, penitus proscribere, et inter obiecta, a quibus haec scientia abhorreat, detrudere. Hanc sententiam certe palam est professus Celeb. *Alembertus*, cum ego motus cordarum vibrantium ita in genere determinauissem, vt solutio ad omnes motus et figuras, quae cordae initio fuerint impressae, pateret. Mox enim Vir excellentissimus mihi obiecit, motum plane definiri non posse, nisi figura cordae initio impressa fuerit continua ac certa quadam aequatione comprehensa, si secus acciderit, et cordae figura initio fuerit discontinua, tum motus secuturi determinationem nullo modo ad Analysin pertinere, atque adeo nefas esse illam inuestigare velle. Cui obiectioni equidem satis respondi, ac nuper Cel. *La Grange* in Actis Taurinensi-

rinensibus meam solutionem ita solide propugnauit, vt nulli amplius dubio locus sit relictus.

5. Grauissimi ergo momenti quaestio hic exoritur, quid de functionibus discontinuis, vel lineis sine vlla certa lege descriptis, sit iudicandum, et num, et quatenus illis locus in Analysi concedi possit? In problemate certe modo memorato nullum est dubium, quin corda, quae initio ita fuerit diducta, vt eius figura nulla aequatione comprehendi possit, motum sit consecutura, eoque durante singulis momentis ea sit certam figuram et motum receptura, cuius determinatio sane ad Analysin motusque scientiam est referenda, siue fines cognitioni nostrae praescripti huic quaestioni soluendae sufficiant, siue secus. Vtroque casu quaestio semper foret omni nostra attentione digna, et cum circa quantitates versetur, ad Analysin certe pertinere est censenda; neque hic quaeritur, quousque sagacitas nostra pateat, cum vix quisquam sit Geometrarum, qui non saepius in quaestionibus vires suas superantibus desudauerit. Neutiquam igitur nefas est putandum, huiusmodi quaestiones attingere; quin potius eo maiori studio in iis esset elaborandum. Omnibus autem difficultatibus diligenter perpensis, etiamnum asseuerare audeo, solutionem meam problematis de cordis vibrantibus latissimo sensu accepti recte se habere, in eaque felici successu functionum discontinuarum rationem esse habitam. Verum etiam agnosco, hoc problema ad peculiare Analyseos

lyſeos genus adhuc parum excultum, eſſe referendum, cuius generis adeo vis et natura in hoc conſiſtat, vt functiones etiam diſcontinuas neceſſario in ſe complectatur.

6. Ad litem hanc componendam obſeruo, neque in Algebra communi, neque in ea Analyſeos infinitorum parte, quae adhuc potiſſimum eſt tractata, functiones diſcontinuas admitti poſſe. Multo latius autem Analyſis infinitorum patere, atque eiusmodi partes complecti eſt iudicanda, quae a functionibus diſcontinuis non ſolum non abhorreant, ſed eas adeo ita natura ſua inuoluant, vt nullum problema eo pertinens rite ſolutum ſit cenſendum, niſi functiones prorſus arbitrariae, hincque etiam diſcontinuae, in ſolutionem fuerint introductae. Iſtae quidem Analyſeos partes etiamnum parum ſunt excultae, etiamſi egregia ſpecimina paſſim reperiantur; neque etiam earum vera indoles ſatis perſpecta videtur. Quare quo hanc indolem luculenter exponam, neceſſe eſt, vt varias iſtas ac diuerſas Analyſeos partes accuratius deſcribam, et pro cuiusque indole a ſe inuicem diſtinguam. Quemadmodum enim vulgo Analyſis infinitorum definiri ſolet, inde vix quicquam lucis ad hoc argumentum illuſtrandum peti poteſt, cum pleraeque definitiones maxime ſint vagae et confuſae, neque ſubiecti, de quo agitur, naturam ſatis dilucide ac diſtincte explicent. Ex quo frequentiſſimae querelae, quod idea Analyſeos infinitorum nusquam accurate deſcripta ac ſtabilita reperia-

periatur, fundamento non carent, hic autem illi vitio imprimis est occurrendum, quo diuersae huius scientiae partes non satis diligenter a se inuicem distinguuntur.

7. Tota autem vis Analyseos infinitorum conuenientissime ex notione et indole functionum explicatur, quae commodissime pro numero quantitatum variabilium, per quas certo quodam modo determinantur, in classes distinguuntur. Sic prima classis continebit functiones vnicae quantitatis variabilis. Tales functiones sunt applicatae quarumuis linearum, respectu abscissarum. Ita posita abscissa $= x$ et applicata $= y$, erit y functio variabilis x, cuius natura per lineam curuam, seu aequationem, quae inter x et y datur, exprimitur; qua fit, vt statim atque abscissae x determinatus valor tribuitur, etiam applicata y valorem determinatum consequatur, siue is fuerit simplex, siue etiam multiplex, siue etiam imaginarius; vnde intelligitur etiam vicissim abscissam x tanquam functionem applicatae y spectari posse. Simili modo si corpus per quampiam lineam moueatur, eius celeritas in singulis locis etiam ad functiones vnicae variabilis est referenda; est quippe functio eius quantitatis variabilis, qua eius lineae puncta continuo determinantur. In hac classe pleraeque quaestiones adhuc tractatae sunt collocandae, etiamsi saepius plures variabiles in computum ingrediantur, siquidem cunctae tandem per vnicam determinantur. Veluti si motus lunae inuestigatur, ad

quoduis tempus eius longitudo, latitudo, ac distantia a terra quaerenda proponitur; cum autem haec singula elementa tandem per solum tempus determinari debeant, tam longitudo, quam latitudo et distantia, quaeque per se tanquam functio temporis, ideoque vnica variabilis spectari poterit.

8. At functiones binarum pluriumue variabilium per eiusmodi binas pluresue variabiles determinantur, quae a se inuicem nullo modo pendent, sed cuique seorsim omnes prorsus valores tribuere licet. Tales functiones occurrunt, quando natura solidorum ac superficierum expenditur. Fieri hoc solet per ternas coordinatas x, y et z, quarum binae x et y in plano quodam accipiuntur, tertia vero z, huic plano perpendicularis ad superficiem porrigitur. Cum igitur cuique baseos puncto, quod per binas variabiles x et y definitur, certa perpendicularis z immineat, erit vtique z functio binarum variabilium x et y a se inuicem neutiquam pendentium. Quodsi enim omnia superficiei puncta assignare velimus, tam ipsi x quam ipsi y seorsim omnes prorsus valores tribui oportet, vt hoc modo pro omnibus basis punctis perpendicula illa obtineantur. Deinde si corpus ex particulis heterogeneis sit compositum, vt cuique puncto intra corpus accepto sua peculiaris densitas conueniat, primo quidem situs cuiusque puncti ternis coordinatis x, y et z definitur, nullo modo a se inuicem pendentibus, quoniam vt omnia puncta intra corpus obtineantur, his

his tribus coordinatis omnes plane valores successiue assignari debent. Quare si densitas in quouis puncto quantitate v designetur, ea tanquam functio ternarum variabilium x, y et z spectari debet. Ac si particulae huius corporis motu quocunque agitentur, cuiusque puncti motus non solum ab eius situ ternis coordinatis determinando, sed etiam a tempore pendebit, vnde motus tanquam functio quatuor variabilium spectari debebit.

9. Constituta hac functionum notione ac diuisione, fundamenta Analyseos infinitorum clarissime tradi poterunt, quae disciplina commodissime in tot partes distribuitur, quot dantur functionum classes, propterea quod singulae peculiaribus principiis ac praeceptis sunt superstruendae. Prima igitur pars, quae fere sola adhuc est exculta, et ad quam principia calculi differentialis et integralis potissimum sunt accommodata, circa functiones vnicae variabilis versantur. Primo ergo si y fuerit functio quaecunque vnius variabilis x, considerari solent incrementa vel decrementa illius functionis y, dum quantitas x quocunque augmento increscit. Deinde hoc augmentum continuo imminui concipitur, donec tandem prorsus euanescat, quo quidem casu etiam incrementum functionis y in nihilum abit, quae augmenta euanescentia cum differentialia vocentur, euidens est, ea omnia quantitate esse destituta, nihiloque adeo aequalia; ita vt de eorum quantitate nulla quaestio institui possit. Neque etiam calculus differentialis in

 quan-

quantitate differentialium, quae nulla est, indaganda occupatur, sed in eorum ratione mutua definienda; quae ratio vtique certam obtinet quantitatem. Functionis scilicet y non tam ipsum differentiale dy, quam eius ratio ad differentiale dx, inuestigatur, valor nimirum fractionis $\frac{dy}{dx}$, qui quouis casu determinatam quantitatem sortitur, et ipse tanquam noua functio ipsius x spectari potest.

10. Cum plerisque haec differentialium notio, et rationis, quae inter quantitates euanescentes intercedit, inuestigatio, maxime suspecta videri soleat, vnico exemplo omnia dubia euanescent. Proposita igitur sit talis functio $y = axx + bx + c$, ac primum videamus, quantum incrementum haec functio capiat, dum quantitati x augmentum quodcunque ω tribuitur; posito autem $x + \omega$ loco x, functio nostra abit in $axx + 2ax\omega + a\omega\omega + bx + b\omega + c$, ideoque incrementum accipit $= 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$, quod hoc charactere Δy designemus, et ad similitudinem quantitas ω, tanquam augmentum ipsius x, etiam hoc signo Δx denotetur. Cum igitur sit

$$\Delta x = \omega \text{ et } \Delta y = 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$$

$$\text{erit } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b$$

sicque habetur ratio inter incrementa Δx et Δy, quae vera est, quantumuis augmentum ω quantitas x capiat; eadem ergo ratio etiam veritati erit consentanea, si augmentum ω plane euanescens accipiatur, quo casu incrementa illa Δx, Δy his signis dx et dy denotari et differentialia vocari solent: vnde perspi-

cuum

cuum est, posito $\omega = 0$ prodire $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, hancque rationem veram esse, etiamsi termini, inter quos subsistit, sint euanescentes. Solum hoc exemplum sufficere videtur omnibus dubiis, quibus vulgo notio infinite parui in Analysi vsurpata impugnari solet, diluendis, huicque calculo ab omni suspicione vindicando.

11. Quia haec differentialium ratio $\frac{dy}{dx}$ denuo est functio ipsius x, si ea littera p indicetur, ratio eius differentialis dp ad dx, seu fractio $\frac{dp}{dx}$ simili modo definiri potest, quae, ne opus sit nouam litteram in calculum inducere, ob $p = \frac{dy}{dx}$ tali scriptione $\frac{ddy}{dx^2}$ designari solet, quae differentialia secundi gradus inuoluere dicitur; atque ita porro progrediendo differentialia in has formulas $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. ingredientia tertii, quarti altiorumque ordinum vocantur, quorum significatus, quemadmodum de primo ordine ostendi, semper ad rationem inter differentialia binarum quantitatum, quarum altera alterius est functio, reducitur. Hocque modo omnes controuersiae, quae olim circa differentialia omnium ordinum eorumque naturam sunt motae, sponte concidunt, cum quicquid in hoc calculo definitur, semper ad proportionem differentialium, cuius realitas nulli dubio est subiecta, reuocetur, neque amplius veritates per hunc calculum erutae Geometricis vllo pacto postponendae videbuntur. Equidem non diffiteor, eiusmodi rationes loquendi in hac disciplina esse receptas, quae differentialibus quantitatem quampiam valde

valde exiguam tribuere videantur, ſed cum earum ſignificatio ſemper ex ſtabilitis principiis ſit interpretanda, tales loquendi formulas, etſi minus congruas, tolerari conuenit. Quin etiam cum expreſſio $p = \frac{dy}{dx}$, prorſus ſit realis, etiam haec aequalitas $dy = p\,dx$ merito admittitur, tametſi in neutro membro vlla quantitas agnoſcitur.

12. Haec igitur definitio calculi differentialis nullis amplius tenebris eſt inuoluta, qua is vocatur methodus, propoſita quacunque functione vnius pluriumue variabilium, rationes, quae inter differentialia tam primi quam altiorum ordinum intercedunt, inueſtigandi. De functionibus quidem vnius variabilis, ad quas ſolas hic etiamnum reſpicio, iſta definitio maxime eſt perſpicua: ſi enim y fuerit functio quaecunque ipſius x, calculus differentialis docet, quomodo valor fractionis $\frac{dy}{dx}$ ſit eliciendus: eademque regula, qua hoc praeſtatur, valet quoque pro differentialibus altioribus: cum poſito $\frac{dy}{dx} = p$, ex hac etiam functione ipſius x eadem methodo valor $\frac{dp}{dx}$ ſeu $\frac{ddy}{dx^2}$ obtineatur: ac ſi vlterius ſtatuatur $\frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = q$ item $\frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r$, tum $\frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s$ etc. eadem methodus ſufficit his omnibus valoribus q, r, s etc. inueniendis: atque huc ſunt trahenda, quae vulgo de calculo differentio-differentiali et differentialibus altiorum ordinum tradi ſolent, quae, ſi rite intelligantur, nihil ſane continent, quod primis noſtrae cognitionis principiis aduerſetur. Quando etiam in elemen-

elementis calculi differentialis saepe plures quantitates variabiles occurrunt, et praecepta ad eas partes, quas constituo sequentes, referenda videantur, tamen semper in eas certus quidam nexus admittitur, vt tandem omnes tanquam functiones vnius variabilis spectari queant. Interim tamen regulae differentiandi sequentium partium a prima non discrepant.

13. Calculum autem integralem in genere ita definio, vt sit methodus inueniendi indolem functionum ex data quacunque differentialium relatione; quam definitionem pro casu functionum vnicae variabilis ante clarius euoluam, quam ad functiones plurium variabilium sum progressurus. Posito scilicet pro functione vnius variabilis $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ etc. Si aequatio proponatur quaecunque, in quam, praeter quantitates x et y, etiam istae p, q, r etc. ex differentialibus ortae, ingrediantur, in hoc officium calculi integralis versatur, vt ex ista aequatione seu relatione differentialium data natura functionis y, quemadmodum scilicet per x determinatur, eliciatur; quae operatio vocari solet integratio. Plurimum autem abest, quo minus haec methodus adhuc satis sit elaborata, et si omnes quaestiones in eam cadentes perpendamus, paucissimas eius ope resoluere licet; variis autem ea, quatenus est exculta, continetur praeceptis pro ordine differentialium, quae in relationem datam ingrediuntur. Ita si proponatur relatio quaecunque inter quantitates x, y

et

et $p = \frac{dy}{dx}$, quae aeqnatio primi gradus differentialis vocatur; pluribus quidem casibus integratio succedit; sin autem ea relatio insuper quantitatem q inuoluat, aequatio vocatur differentialis secundi gradus, duplicique integratione opus est, antequam ad desideratam relationem inter x et y, vnde ratio istius functionis y innotescat, perueniatur. Hic multo pauciores sunt casus, quibus ad scopum pertingere licet; simulque patet, quid de aequationibus differentialibus tertii altiorumque ordinum sit iudicandum.

14. Verum circa has integrationes, quae functionibus vnius tantum variabilis inuestigandis inseruiunt, singularis quaedam affectio, qua istius methodi praecipua indoles continetur, probe est obseruanda. Affectio autem ista in hoc consistit, quod aequatio integrata semper nouam quandam constantem quantitatem recipiat, cuius in aequatione differentiali ne vestigium apparet, hancque quantitatem constantem prorsus arbitrio nostro relinqui. Ita si habeatur ista aequatio differentialis $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, seu $dy = 2axdx + bdx$, vbi quidem litterae a et b denotant quantitates constantes datas, aequatio integralis in omni extensione ita se habet: $y = axx + bx + C$, vbi C designat quantitatem constantem a praecedentibus minime pendentem, et cuius valor penitus arbitrio nostro relinquitur, neque integratio cuiusquam aequationis differentialis pro completa et perfecta est habenda, nisi huiusmodi quantitas constans arbitraria fuerit introducta.

ducta Simili modo si relatio proposita inuoluat differentialia secundi gradus, quoniam duplici opus est integratione, solutio completa duas eiusmodi constantes arbitrarias complecti debet; tres vero eiusmodi constantes requiruntur, si aequationes differentiales tertii gradus perfecte resoluuntur. De his autem constantibus id praecipue est notandum, quod cum natura problematum arctissimo nexu cohaereant, atque omnia problemata, quorum resolutio ad aequationes differentiales perducitur, ita sint comparata, vt post peractam integrationem constantes illae ingressae ex ipsa rei natura et circumstantiis adiunctis determinationem suam adipiscantur.

15. His igitur constat prima pars Analyseos infinitorum, quae circa functiones vnius tantum variabilis versantur, atque ex his multo facilius intelligetur, quid de reliquis partibus, in quibus functiones duarum pluriumue variabilium, sit tenendum. In differentialibus autem iam diuersa deprehenditur ratio, cum ea hic non absolute inter se comparare liceat. Si enim z fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et y, circa differentiationem quaestio bipartita est statuenda: primo scilicet quaeritur differentiale ipsius z, dum seruante y eundem valorem, altera variabilis x differentiali suo dx augetur, vt inde valor fractionis $\frac{dz}{dx}$ obtineatur. Simili modo tractata x vt constante, altera y incrementum dy capere assumitur, et collecto inde incremento dz, quo functio z augetur, fractio $\frac{dz}{dy}$ rationem differentia-

lem ex variabilitate solius quantitatis y natam exprimit. Vtraque autem haec fractio $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, vti casu praecedente, meris terminis finitis continebitur, et ambae tanquam nouae functiones binarum variabilium x et y spectari poterunt. Inuentis autem his binis valoribus vera ratio differentialis functionis propositae z perspicitur; ex iis enim coniunctis demum patet, quomodo differentiale ipsius z ratione variabilitatis vtriusque quantitatis x et y se habeat. Hanc distinctionem ipsa rei natura postulat, sine qua ratio differentiationis huiusmodi functionum ne intelligi quidem posset, quae autem nunc per se est manifesta.

16. Quicquid igitur ad differentiationem functionum duarum variabilium spectat, id totum ad binas istas formulas $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ reducitur, quarum valores quouis casu terminis finitis per ambas variabiles x et y exprimuntur. Ne autem huiusmodi fractiones cum praecedentibus confundantur, vncinulis includi, hocque modo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ scribi solent. Quodsi has fractiones litteris p et q designemus, erit vtique $dz = p\,dx + q\,dy$ differentiale completum functionis z: et quoniam p et q iterum vt functiones ipsarum x et y spectari possunt, intelligitur etiam, quid sibi velint hae formulae $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$; $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ et $\left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, quae differentialia secundi gradus in se complectuntur, similique modo progressio fit ad differentialia altiorum graduum. Proposita ergo functione quacunque z binarum variabi-

riabi-

riabilium x et y, calculus differentialis regulas praescribit, quibus valores omnium istarum formularum differentialium inueniri queant: primo scilicet primi gradus, quae sunt $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, tum secundi gradus, quae sunt $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, porro tertii gradus, quae sunt

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

et sic deinceps. Vbi quidem notandum, ipsam methodum, has formulas definiendi, a prima parte non discrepare, cum in qualibet differentiatione vnica tantum quantitas pro variabili habeatur. Superfluum foret, haec eadem momenta de functionibus trium pluriumue variabilium exponere, quippe quae ex allatis iam satis sunt perspicua.

17. Integralis autem calculi munus in hoc consistit, vt proposita relatione quacunque inter quantitates x, y, z et formulas differentiales modo allatas, inde natura functionis z, quemadmodum ex variabilibus x et y conflatur, inuestigetur. Relatio vero illa data per aequationem exprimitur, quae si tantum formulas differentiales primi ordinis $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ praeter quantitates ipsas x, y, et z complectitur, aequatio differentialis primi gradus vocatur; sin autem in eam insuper formulae differentiales secundi ordinis $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, vel porro tertii altiorumue ordinum ingrediantur, tum aequatio illa eiusdem ordinis differentialis dicitur. Haecque est forma generalis calculi integralis, quatenus circa

functiones duarum variabilium eſt occupatus; ex quo ſimul intelligitur, quomodo reliquae partes Analyſeos infinitorum, in quibus functiones trium pluriumue variabilium tractantur, ſint definiendae. At calculus integralis ad functiones duarum variabilium accommodatus, plurimum differt a calculo integrali communi, vbi non niſi functiones vnius variabilis occurrunt, et praecepta omnino ſingularia poſtulat, praeterquam quod in eo omnia quoque artificia prioris partis ſint in vſum vocanda. Verum illud diu eſt, ex quo haec pars Analyſeos coli eſt coepta, ita vt vix adhuc prima eius elementa ſatis ſint euoluta. Eximia quidem huius calculi ſpecimina iam paſſim reperiuntur, quorum tractatio autem minus ad praecepta calculi communis eſt adſtricta; vnde latiſſimus campus aperitur, in quo ſumma ingenia ad maximum ſcientiae incrementum vires ſuas exercere poterunt.

18. Huius autem noui calculi vis et quaſi proprius character minime adhuc ſatis perſpectus videtur. Quemadmodum enim calculi integralis communis vis in eo conſiſtit, vt qualibet integratione noua quantitas conſtans arbitrio noſtro permiſſa in calculum introducatur: ita in hac parte, circa functiones binarum variabilium occupata, ſingulis integrationibus, non ſolum noua quantitas conſtans, ſed adeo noua functio cuiuſpiam variabilis prorſus indeterminata, in calculum inuehitur, quae ita ab arbitrio noſtro pendet, vt eius loco etiam functiones diſcon-

diſcontinuae aſſumi queant. Quare functionum diſcontinuarum vſu ab hoc fere nouo calculi genere nonſolum non excluditur, ſed etiam quaſi eſſentialiter ad eius naturam pertinere ſit iudicandus; neque etiam vlla integratio in hoc calculo pro completa et abſoluta eſt habenda, niſi in aequationem integralem huiusmodi functio prorſus arbitraria fuerit introducta: ac ſi aequatio differentialis propoſita fuerit ſecundi altiorisue gradus, ita vt binis pluribus ve integrationibus ſit opus, neceſſe eſt, totidem functiones arbitrariae in vltima aequatione integrali reperiantur, quod niſi eueniat, integrale non magis pro completo haberi poteſt, quam in calculo integrali ordinatio, vbi introductio conſtantium arbitrariarum negligitur. Quando autem de functionibus trium variabilium agitur, qualibet integratione functio arbitraria binarum variabilium in calculum introducitur; qua circumſtantia iſte calculus a praecedentibus ita diſtinguitur, vt genus peculiare conſtituere ſit cenſendus, cum natura cuiusque generis, ex indole quantitatis arbitrariae per integrationem inuectae, conuenientiſſime diiudicetur. Tum vero ſi quaeſtio circa functiones quatuor variabilium verſatur, haec quantitas arbitraria quauis integratione introducenda ſit functio trium variabilium et ita porro.

19. Haec autem neutiquam calculi cuipiam moroſitati ſunt tribuenda, quae omni vſu deſtituantur, et inani ſpeculationi tantummodo inſeruiant, ſed potius naturae rerum maxime innituntur, et

cum veritatum concatenatione pulcherrime cohaerent. Quemadmodum enim omnia problemata circa functiones vnicae variabilis, cuiusmodi sunt fere omnia, quae adhuc in Analysi sunt tractata, perfecte non soluuntur, nisi qualibet integratione noua quantitas constans inferatur, quam deinceps ex circumstantiis problematis determinari oportet: ita etiam omnia problemata, quorum solutio ad functiones binarum variabilium perducitur, natura sua ita sunt comparata, vt, nisi quauis integratione noua functio arbitraria, seu indefinita vnius variabilis, induceretur, omnibus conditionibus problema determinantibus nullo modo satisfieri posset. Eximium huius rei specimen cernitur in problemate de cordis vibrantibus; si enim cuiusque cordae puncti, quod ab altero termino distat interuallo $= x$, pro tempore elapso $= t$, elongatio ab axe, seu statu aequilibrii, ponatur $= z$, euidens est, z esse functionem duarum variabilium t et x, quoniam vtique ista elongatio, tam pro diversis cordae punctis, quam pro temporis fluxu, variatur. Cum igitur posito tempore $t = 0$ is cordae status prodire debeat, qui ipsi initio fuerit inductus, et vbi elongatio z functioni cuidam datae interualli x erat aequalis, solutio perfecta esse nequit, nisi huiusmodi functionem indefinitam complectatur, quae deinceps ex statu cordae initiali definiri queat; et quoniam iste status ab arbitrio nostro ita pendet, vt cordae figura quaecunque irregularis et discontinua induci potuerit, etiam functio illa per Analysin introducta ita late patere debet, vt etiam discontinua,

seu

ſeu a continuitatis lege abhorrentia, in ſe complectatur.

20. Ne autem hic vlli dubio locus relinquatur, eiusmodi problema euoluam, cuius ſolutio adeo ex elementis facile deducitur, et quae ita eſt comparata, vt in ea functiones diſcontinuae, ſeu lineae curuae pro lubitu ductae, neceſſario admitti debeant; deinde idem problema analytice expediam, quo clarius neceſſitas functionum arbitrariarum, quae integratione introducuntur, ex conſenſu cum priori ſolutione, eluceſcat. Problema autem ita ſe habet: *vt omnia ſolida, ad quorum ſuperficiem in ſingulis punctis normales ductae, eiusdem ſint quantitatis.* Quando de lineis agitur, notum eſt, praeter circulum nullam dari lineam curuam, cuius omnes normales ſint inter ſe aequales; at ſi haec aequalitas normalium ad ſolida extenditur, vt omnes rectae, a dato plano tanquam baſi ad ſuperficiem normaliter ductae, debeant eſſe inter ſe aequales, infinita exhiberi poſſunt ſolida, in quae haec proprietas competit. Primo ſcilicet hoc manifeſto euenit in hemisphaerio, vel etiam ſphaera, cuius centrum in plano illo ſeu baſi eſt ſitum, dum omnes rectae normales ſimul ſunt radii ſphaerae. Deinde ſi cylindrus ita collocetur, vt eius axis in baſem incidat, omnes quoque normales inter ſe aequales habentur. Hinc autem colligitur ſolutio multo latius patens, quoniam ſalua hac proprietate axis cylindri quomodocunque incuruari poteſt, quam ſolutionem generalem ita enunciare licet. Deſcripta ſuper plano fixo linea quacunque

cunque curua, ſiue continua ſiue diſcontinua, eiusmodi ſolidum ſuper ea exſtruatur, cuius omnes ſectiones, ad illam lineam normaliter factae, ſint ſemicirculi, quorum centra in eam lineam incidant. Niſi ergo ſolutio analytica pariter ita late pateat, vt lineam pro lubitu ductam, ſeu, quod eodem redit, functionem indefinitam in ſe contineret, ea certe pro perfecta et abſoluta haberi non poſſet.

21. Poſitis igitur binis coordinatis in plano fixo aſſumtis x et y, perpendiculo autem inde ad ſuperficiem quaeſitam pertingente $= z$, quia z conſideratur vt functio binarum variabilium x et y, ſtatuantur formulae differentiales $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, vt ſit $dz = p\,dx + q\,dy$. Hinc autem normalis in ſuperficiem ad planum vsque fixum porrecta colligitur $= z\sqrt{(1 + pp + qq)}$; quae quia debet eſſe conſtantis magnitudinis, ponatur $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$ et pro z eiusmodi inueſtigari oportet functionem binarum variabilium x et y, vt haec conditio, quae eſt aequatio differentialis primi gradus, impleatur. Quo facilius autem ad reſolutionem per integrationem perueniamus, his vtamur ſubſtitutionibus: ſit $p = \frac{\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\Phi}$ et $q = \frac{\text{ſin.}\,\Phi \,\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\Phi}$, vt fiat $pp + qq = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{\text{coſ.}\,\Phi^2}$, hincque $\frac{z}{\text{coſ.}\,\Phi} = a$, ſeu $z = a\,\text{coſ.}\,\Phi$, vnde aequatio differentialis aſſumta transformatur in hanc: $-a\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}(dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega)$ ſeu $-a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega$, vbi cum pars prior integrationem admittat, etiam pars poſterior in-

integrabilis eſt reddenda, qua conditione certa relatio inter variabiles x, y et ω ſtabilitur. Cum igitur integrando obtineamus:

$$-a\,\text{ſin.}\,\Phi = x\,\text{coſ.}\,\omega + y\,\text{ſin.}\,\omega - \int d\omega(y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega)$$

euidens eſt, hoc integrale exhiberi non poſſe, niſi formula $y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega$ fuerit functio vnius variabilis ω. Statuatur ergo: $y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega = F':\omega$, vt fiat $\int d\omega(y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega) = F:\omega$, eritque $-a\,\text{ſin.}\,\Phi = x\,\text{coſ.}\,\omega + y\,\text{ſin.}\,\omega - F:\omega$. Vel denotet Ω functionem quamcunque ipſius ω vtcunque indefinitam, vt etiam functiones diſcontinuae inde non excludantur, et poſito $F':\omega = \Omega$, erit $F:\omega = \int \Omega\, d\omega$, et problematis ſolutio ob $a\,\text{ſin.}\,\Phi = \sqrt{(aa - zz)}$ his aequationibus continetur:

$$y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega = \Omega \text{ et } \sqrt{(aa - zz)} = \int \Omega\, d\omega - \text{coſ.}\,\omega - y\,\text{ſin.}\,\omega$$

vbi quidem ſignum radicale aeque negatiue ac poſitiue capi poteſt.

22. Videamus iam, quomodo hae formulae ad conſtructionem perduci queant. Referat ipſa tabula planum illud, fixam baſin corporis quaeſiti conſtituens, in quo ſint binae coordinatae $AX = x$ et $XY = y$, ita vt puncto Y perpendiculariter immineat tertia coordinata z. In ipſo iſto plano axi AX, normaliter iungatur recta AO, ducaturque recta AP, ita vt ſit angulus $OAP = \omega$, ad hanc ex Y agatur normalis YP, eritque $AP = y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega$ et $PY = y\,\text{ſin.}\,\omega + x\,\text{coſ.}\,\omega$. Quibus lineis in calculum introductis ambae noſtrae aequationes ita ſe habebunt: Tab. I. Fig. 1.

$$AP = \Omega \text{ et } PY + \sqrt{(aa - zz)} = \int \Omega\, d\omega.$$

 Pro-

Producatur ergo recta PY in M, vt fit $YM = \sqrt{(aa-zz)}$, fiatque propterea $PM = \int \Omega . d\omega$, quae relatio inter lineas AP et PM probe eſt perpendenda. Cum iam in ſitu proximo, angulo ſcilicet OAP aucto ſuo differentiali $PAp = d\omega$, fit arculus radio AP deſcriptus $Pp = \Omega . d\omega$, hic arculus ſimul differentiale lineae MP exhibebit, ita vt fit $pm = PM + Pp$, ex quo intelligitur, rectam PM altero termino M in eiusmodi curua EMF terminari, in quam ea iugiter fit normalis, qua proprietate tota noſtra ſolutio analytica continetur. Quocirca conſtructio quaeſita ita erit comparata: Deſcripta pro lubitu curua quacunque EMF, quae ſiue ſit continua ſiue ſecus nihil refert, ad ſingula eius puncta M ducantur normales MP, vtrinque producendae, et ex harum rectarum ſingulis punctis Y verticaliter erigantur perpendicula $YZ = z$, vt fit $YZ^2 + MY^2 = aa$, quod praeſtabitur, ſi ſingulis centris M radio $= a$, cui normales debent eſſe aequales, deſcribantur circuli in planis ad baſin ipſamque curuam EMF normalibus; horum enim circulorum peripheriae in ipſa ſuperficie corporis quaeſiti erunt poſitae, et rectae in hanc ſuperficiem normales omnes erunt $= a$, et in lineam EMF pro lubitu ductam incident.

23. Leuiſſima autem attentione adhibita perſpicuum eſt, hanc conſtructionem ex ſolutione analytica petitam prorſus congruere cum ſuperiori conſtructione, quam ſola elementorum conſideratio ſuppeditauerat. Manifeſtum enim eſt, corpus ita fore com-

comparatum, vt omnes eius ſectiones ad lineam EMF normaliter factae ſint circuli inter ſe aequales, centra ſua in ipſa hac linea habentes. Ob vtriusque autem ſolutionis conſenſum hoc imprimis notandum eſt, ſolutionem analyticam non futuram eſſe completam, niſi functio Ω per integrationem ingeſta latiſſime pateret, atque adeo omnes omnino valores, tam continuos, quam diſcontinuos, in ſe complecteretur, quandoquidem linea illa EMF, functioni Ω reſpondens, penitus arbitrio noſtro relinquitur, vt etiam lineas libero manus tractu ductas in vſum vocare liceat. Quod autem de hoc problemate eſt oſtenſum, ſimul de omnibus aliis eiusdem generis valet, quorum ſcilicet ſolutio functiones binarum variabilium implicat, ex quo quaeſtio initio propoſita de vſu functionum diſcontinuarum in Analyſi ita eſt reſoluta, vt in Analyſi quidem communi, quae circa functiones vnius variabilis tantum verſatur, huiusmodi functionibus nullus locus ſit concedendus, in ſublimioribus autem Analyſeos partibus, vbi functiones binarum pluriumve variabilium tractantur, tales functiones ita neceſſario ad calculi eſſentiam pertinere ſint cenſendae, vt nulla integratio pro abſoluta et completa haberi queat, niſi ſimul functio maxime indefinita, atque adeo etiam diſcontinua, in calculum introducatur.