1766

# Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon

Leonhard Euler

SUR
# L'AVANTAGE DU BANQUIER
AU
# JEU DE PHARAON.
PAR M. EULER.

Pour rendre la recherche plus générale, je marquerai le nombre des Cartes que le Banquier a en main par la lettre $n$. Parmi ces cartes, il y en aura ou une ou deux ou trois ou quatre ſemblables à celle ſur laquelle le Ponte aura mis. Je nommerai ces cartes *ſignifiantes* pour les diſtinguer des autres, dont l'eſpece n'entre pas en conſidération. Quoique le nombre des cartes ſignifiantes ne ſurpaſſe pas quatre, pour rendre le calcul plus complet, je paſſerai à des nombres plus grands; un tel cas pourroit avoir lieu, ſi par exemple le Ponte mettoit ſans diſtinction ſur un Roi ou une Dame à la fois, de ſorte qu'il gagne ou perde, ſoit qu'un Roi ou une Dame ſorte la premiere; dans ce cas le nombre des cartes ſignifiantes pourroit monter jusqu'à huit. J'aurai donc autant de cas à examiner, qu'il y a de cartes ſignifiantes, & je déterminerai pour chacun l'avantage du Banquier: pour cet effet je marquerai par l'unité la miſe du Ponte, & je chercherai la prétention que le Banquier y pourra faire conformément aux regles de la probabilité. Car, ſi le jeu étoit égal, le Banquier n'y ſauroit former aucune prétention; & ce n'eſt qu'à cauſe de ſon avantage, qu'il peut pretendre à une certaine partie.

## PROBLEME I.

1. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il n'y a qu'une ſeule carte ſignifiante, trouver l'avantage du Banquier.

SOLU-

SOLUTION.

Que le Banquier tire une carte après l'autre, & la probabilité que la premiere Carte ſoit la ſignifiante, eſt $\frac{1}{n}$, & qu'elle ne la ſoit pas, la probabilité ſera $\frac{n-1}{n}$. Au premier cas il gagne la miſe $= 1$, ce qui vaut $\frac{1}{n}. 1 = \frac{1}{n}$, au ſecond cas il faut paſſer outre. Suppoſant donc que l'avantage du Banquier, quand il va tirer la ſeconde carte, lui vaille $a$; & puisque la probabilité que ce cas arrive eſt $\frac{n-1}{n}$, ſon avantage au commencement eſt $x = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} a$, poſant $x$ pour l'avantage du Banquier au commencement du jeu. Maintenant, pour trouver $a$, je conſidere la ſeconde carte, & à cauſe du nombre des cartes $= n - 1$, la probabilité que la ſeconde carte ſoit la ſignifiante, eſt $\frac{1}{n-1}$, & qu'elle ne la ſoit pas, $= \frac{n-2}{n-1}$, là il perd $1$, & ici il paſſe à l'eſperance, qu'il aura à la troiſieme carte, laquelle ſoit poſée $= b$, de là nous aurons $a = -\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}. b$, & partant $x = \frac{n-2}{n} b$. Qu'il tire à préſent la troiſieme carte, & pour qu'elle ſoit la ſignifiante, la probabilité eſt $\frac{1}{n-2}$, & qu'elle ne la ſoit pas, $= \frac{n-3}{n-2}$: le premier cas lui fait gagner $1$, & l'autre le met à l'eſpérance qu'il aura à la quatrieme carte, laquelle ſoit $= c$; d'où nous aurons $b = \frac{1}{n-2} + \frac{n-3}{n-2} c$, & partant $x = \frac{1}{n} + \frac{n-3}{n} c$. Qu'il tire la quatrieme carte, & la pro-

probabilité qu'elle ſoit la ſignifiante étant $= \frac{1}{n-3}$, & qu'elle ne la ſoit pas $= \frac{n-4}{n-3}$; il perdra 1 dans le premier cas, & dans l'autre, il obtient l'eſpérance qu'il peut avoir à la cinquieme, laquelle ſoit $= d$: de là nous aurons $c = -\frac{1}{n-3} + \frac{n-4}{n-3}d$, & $x = \frac{n-4}{n}d$. De la même maniere ſi nous poſons

| | | l'eſpérance du Banquier |
|---|---|---|
| au commencement | $=$ | $x$. |
| à la ſeconde carte | $=$ | $a$. |
| à la troiſieme carte | $=$ | $b$. |
| à la quatrieme carte | $=$ | $c$. |
| à la cinquieme carte | $=$ | $d$. |
| à la ſixieme carte | $=$ | $e$. &c. |

nous aurons les valeurs ſuivantes.

$$x = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}a; \qquad x = \frac{n-2}{n}b;$$

$$x = \frac{1}{n} + \frac{n-3}{n}c; \qquad x = \frac{n-4}{n}d;$$

$$x = \frac{1}{n} + \frac{n-5}{n}e; \qquad x = \frac{n-6}{n}f; \quad \&c.$$

Mais il faut remarquer que le nombre de toutes les cartes $n$ eſt pair, & que le Banquier ne perd rien, quand la carte ſignifiante eſt la derniere, quoiqu'elle ſoit paire en ordre. Donc, s'il étoit $n = 2$, il ſeroit $a = 0$; ſi $n = 4$, il ſeroit $c = 0$; ſi $n = 6$, il ſeroit $e = 0$, & ainſi de ſuite: d'où l'on voit qu'il y aura en général $x \doteq \frac{1}{n}$, quelque nombre pair que ſoit $n$.

*Remar-*

### *Remarque I.*

2. Il eſt évident que cet avantage du Banquier $x = \frac{1}{n}$, vient uniquement de la loi, que la derniere carte ne fait pas gagner au Ponte: car, ſi ſans cette exception toutes les cartes paires lui étoient favorables, comme toutes les impaires le ſont au Banquier, le parti ſeroit parfaitement égal, & l'avantage de celui-ci ſeroit $x = 0$.

### *Remarque II.*

3. Cette ſeule conſidération m'auroit pu d'abord conduire à la ſolution du probleme. Car, puiſque la probabilité que la carte ſignifiante ſoit la derniere, eſt $= \frac{1}{n}$, & que dans ce cas le Banquier ne perd pas 1, comme il devroit, ſi le parti étoit égal, il eſt autant que ſi ce cas lui rapportoit 1, outre l'égalité; d'où ſon avantage eſt eſtimé $x = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}$.

### *Remarque III.*

4. Puiſqu'un entier jeu de cartes, qui en contient 52, renferme quatre cartes ſignifiantes, ce cas ne ſauroit avoir lieu, que lorſque la taille eſt déjà diminuée au deſſous de 49 cartes. Mais, puiſqu'on tire les cartes toujours deux à deux, le nombre des cartes, dans ce cas, $n$ ſera 48 tout au plus, ou quelqu'autre nombre pair plus petit. Donc, le plus petit avantage du Banquier dans ce cas, qu'il aura quand $n = 48$, ſera $= \frac{1}{48}$, ou vaudra un peu plus que deux pour 100: & ſi le Banquier n'avoit plus que 10 cartes en main, ſon avantage vaudroit $\frac{1}{10}$ ou 10 pour cent.

## PROBLEME II.

5. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il y a deux cartes ſignifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

SOLUTION.

Soit $x$ l'avantage du Banquier au commencement du jeu, & puisqu'il tire les cartes deux à deux, soit $a$ son avantage, après qu'il aura tiré deux cartes, (supposé qu'aucune des cartes signifiantes ne soit sortie), & $b$ celui après qu'il aura tiré 4 cartes, $c$ celui après qu'il aura tiré 6, $d$ celui après qu'il aura tiré 8, & ainsi de suite jusqu'à la fin. Maintenant, pour la premiere paire de cartes, il faut considerer 4 cas.

1°. lorsque la premiere & la seconde sont signifiantes, où le jeu finit, & le Banquier gagne la moitié de la mise, ou $\frac{1}{2}$, selon les regles du jeu.

2°. lorsque la premiere est signifiante, & l'autre non; dans ce cas le Banquier gagne toute la mise 1.

3°. lorsque la premiere n'est pas signifiante, mais que la seconde est signifiante: dans ce cas le Banquier perd 1.

4°. lorsque ni la premiere ni la seconde n'est signifiante; dans ce cas on continue le jeu, & le Banquier arrive à l'avantage que j'ai marqué par la lettre $a$.

Or, puisqu'il y a 2 cartes signifiantes parmi toutes dont le nombre est $n$, la probabilité que la premiere soit signifiante est $= \frac{2}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-2}{n}$.

Soit la premiere signifiante; & puisque dans le reste des cartes, dont le nombre est $n-1$, il n'y a plus qu'une signifiante, la probabilité qu'elle soit la seconde, est $= \frac{1}{n-1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-2}{n-1}$: donc, pour que le premier cas arrive, la probabilité

est

est $= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$, & que le second arrive la probabilité est $= \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1}$.

Que la premiere ne soit pas signifiante; & puisqu'il y a encore 2 cartes signifiantes parmi les autres, dont le nombre $n-1$, la probabilité que la seconde soit signifiante est $= \frac{2}{n-1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n-3}{n-1}$. Donc qu'il arrive

le troisieme cas, la probabilité est $= \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$.

le quatrieme cas, la probabilité est $= \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$.

La probabilité de l'arrivée de ces quatre cas, avec le profit ou la perte que chacun apporte au Banquier, est donc.

$$x = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a,$$

ou bien $x = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} a$.

De la même maniere nous trouverons l'avantage du Banquier $a$, qu'il aura après avoir déjà tiré 2 cartes; car, ayant alors encore $n-2$ cartes, parmi lesquelles se trouvent deux signifiantes, mettant $n-2$ au lieu de $n$, & $b$ au lieu de $a$ nous aurons:

$$a = \frac{1}{(n-2)(n-3)} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)} b,$$

 &

& continuant le même raisonnement nous trouverons

$$b = \frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{(n-6)(n-7)}{(n-4)(n-5)}\,c,$$

$$c = \frac{1}{(n-6)(n-7)} + \frac{(n-8)(n-9)}{(n-6)(n-7)}\,d,$$

$$d = \frac{1}{(n-8)(n-9)} + \frac{(n-10)(n-11)}{(n-8)(n-9)}\,e.$$

&c.

Mais il faut ici avoir égard à une exception, que les regles du jeu renferment, qui eſt, que lorsque les deux cartes ſignifiantes ſont les dernieres, le Banquier gagne la miſe toute entiere, & non pas ſeulement la moitié, comme il arrive lorsque les deux cartes ſignifiantes ſe rencontrent dans une autre paire quelconque. Or la probabilité que les deux cartes ſignifiantes ſoient les dernieres étant $= \frac{2}{n(n-1)}$, & ce cas lui rapportant un gain d' $\frac{1}{2}$ au deſſus de l'ordinaire, nous n'aurons qu'à ajouter encore $\frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n-1)}$, à l'avantage, que nous fourniſſent les déterminations précédentes.

Subſtituons donc ſucceſſivement les valeurs trouvées pour $a$, $b$, $c$, $d$, &c. & nous trouverons:

$$x = \frac{1 + 1 + (n-4)(n-5)\,b}{n(n-1)},$$

$$x = \frac{1 + 1 + 1 + (n-6)(n-7)\,c}{n(n-1)},$$

$$x = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + (n-8)(n-9)\,d}{n(n-1)},$$

&c.

Donc

Donc, s'il étoit $n = 4$, nous aurions $x = \frac{2}{n(n-1)}$; s'il étoit $n = 6$, nous aurions $x = \frac{3}{n(n-1)}$; s'il étoit $n = 8$, nous aurions $x = \frac{4}{n(n-1)}$, &c. & partant en général quelque nombre pair que puiſſe être $n$, nous aurons

$$x = \frac{n:2}{n(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Nous n'avons donc qu'a ajouter l'avantage qui reſulte du cas, lorsque les deux cartes ſignifiantes ſont les dernieres, & nous obtiendrons l'avantage entier du Banquier

$$x = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n+2}{2n(n-1)}.$$

*Remarque I.*

6. Lorsque parmi les $n$ cartes il n'y a qu'une ſeule carte ſignifiante, l'avantage du Banquier vaut $\frac{1}{n} = \frac{2n-2}{2n(n-1)}$: donc, à moins que $n$ ne ſoit 4 ou deux, l'avantage du Banquier eſt plus grand, lorsqu'il n'y a qu'une carte ſignifiante que lorsqu'il y en a deux.

*Remarque II.*

7. Il eſt donc au contraire plus profitable pour le Ponte qu'il y ait encore deux cartes ſignifiantes dans la taille, pourvu que la taille contienne encore plus de 4 cartes.

*Remarque III.*

8. Ce cas peut avoir lieu lorsque $n = 50$, & alors l'avantage du Banquier ſera $\frac{52}{100 \times 49} = \frac{13}{1225}$, ou vaudra un peu plus qu'un

pour

pour 100. Mais, si le nombre des cartes $n$ n'étoit que 10, son avantage seroit $\frac{12}{20 \times 9} = \frac{1}{15}$, ou vaudroit presque 7 pour Cent.

## PROBLEME III.

9. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, s'il y a trois cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

### SOLUTION.

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$, & que $a, b, c, d,$ &c. marquent ses avantages, qu'il aura après avoir tiré 2, 4, 6, 8, &c. cartes; nous aurons à considérer les mêmes quatre cas, qui sont exposés dans la solution du second probleme.

Donc, puisqu'il y a 3 cartes signifiantes parmi $n$ cartes, la probabilité que la premiere tirée soit signifiante, sera $= \frac{3}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 3}{n}$.

Soit la premiere signifiante; & puisqu'il y en a encore 2 parmi $n - 1$ cartes, la probabilité que la seconde soit signifiante sera $\frac{2}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 3}{n - 1}$: donc, qu'il arrive

le premier cas, la probabilité est $= \frac{3 \cdot 2}{n(n - 1)}$,

le second cas, la probabilité est $= \frac{3(n - 3)}{n(n - 1)}$.

Or, si la premiere n'est pas signifiante, puisque parmi les $n - 1$ cartes restantes il y a 3 cartes signifiantes, la probabilité que la seconde soit signifiante, est $= \frac{3}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 4}{n - 1}$.

Donc

Donc pour qu'il arrive

le troiſieme cas, la probabilité eſt $= \frac{3(n-3)}{n(n-1)}$,

le quatrieme cas, la probabilité eſt $= \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$,

De là nous concluons l'avantage du Banquier

$$x = \frac{3.2}{n(n-1)}.\tfrac{1}{2} + \frac{3(n-3)}{n(n-1)}.1 - \frac{3(n-3)}{n(n-1)}n + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}a,$$

ou bien $x = \frac{3 + (n-3)(n-4)a}{n(n-1)}$.

Par un raiſonnement tout ſemblable nous déterminerons la valeur de $a$, en poſant le nombre des cartes $= n-2$;

$a = \frac{3 + (n-5)(n-6)b}{(n-2)(n-3)}$, & enſuite

$b = \frac{3 + (n-7)(n-8)c}{(n-4)(n-5)}$,

$c = \frac{3 + (n-9)(n-10)d}{(n-5)(n-7)}$, &c.

Subſtituons ces valeurs trouvées, & nous en tirerons:

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}b,$$

$$x = \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3(n-4)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{3(n-6)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)}c,$$

&c.

& pourſuivant ces ſubſtitutions jusqu'à la fin:

$$x = \frac{3}{n(n-1)(n-2)}((n-2) + (n-4) + (n-6) + (n-8) + \ldots\ldots 0),$$

 nous

nous avons donc une progreſſion arithmétique à ſommer, dont le nombre des termes eſt $\frac{n}{2}$, & la ſomme du premier & dernier $= n - 2$, d'où la ſomme de la progreſſion eſt $= \frac{n(n - 2)}{4}$, & partant $x = \frac{3}{4(n - 1)}$. C'eſt auſſi la véritable valeur de l'avantage du Banquier, puisque le cas irrégulier des deux dernieres cartes ne ſauroit ici avoir lieu. Donc l'avantage cherché du Banquier eſt dans ce cas en général $x = \frac{3}{4(n - 1)}$.

*Remarque I.*

10. Si parmi les $n$ cartes il n'y en a qu'une ſignifiante, l'avantage du Banquier eſt $= \frac{1}{n}$, & s'il n'y a que deux, ſon avantage eſt $= \frac{n + 2}{2n(n - 1)}$: Donc, ſelon qu'il y a une, ou deux, ou trois cartes ſignifiantes, l'avantage du Banquier ſuit le rapport de ces trois nombres: $4n - 4$; $2n + 4$; $3n$. Donc, pourvu qu'il ſoit $n > 4$, l'avantage du Banquier eſt le plus petit, lorsque la taille contient encore deux cartes ſignifiantes.

*Remarque II.*

11. Or, ſi $n > 4$, l'avantage du Banquier eſt plus grand, ſi la taille contient une carte ſignifiante, que ſi elle en contient trois. Donc, lé nombre des cartes de la taille demeurant le même, le Ponte agira le plus avantageuſement lorsqu'il met ſur une carte qui ſe trouve encore deux fois dans la taille.

*Remarque III.*

12. Lorsque la taille contient trois cartes ſignifiantes, l'avantage du Banquier eſt d'autant plus petit, plus le nombre des cartes eſt grand.

grand. Le plus petit avantage sera donc, lorsque $n = 50$, qui vaut $\frac{3}{4 \times 49} = \frac{3}{196}$, ou $1\frac{1}{2}$ pour cent à peu près. Lorsque la taille ne contient plus que 10 cartes, l'avantage du Banquier sera $= \frac{3}{4 \times 9} = \frac{1}{12}$, ou $8\frac{1}{3}$ pour cent.

## PROBLEME IV.

13. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a quatre cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

### SOLUTION.

En opérant de la maniere précédente; puisqu'il y a 4 cartes signifiantes, la probabilité que la premiere tirée en soit une sera $\frac{4}{n}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 4}{n}$.

Soit donc la premiere signifiante, & puisqu'il y en a encore 3 parmi les $n - 1$ cartes restantes, la probabilité que la seconde soit signifiante, est $\frac{3}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 4}{n - 1}$.

Donc, pour qu'il arrive

le premier cas, la probabilité est $= \frac{4 \times 3}{n(n - 1)}$,

le second cas, la probabilité est $= \frac{4(n - 4)}{n(n - 1)}$.

Or, si la premiere n'est pas signifiante, puisqu'il y en a encore 4 parmi les $n - 1$ restantes, la probabilité que la seconde soit signifiante est $= \frac{4}{n - 1}$, & qu'elle ne le soit pas, $= \frac{n - 5}{n - 1}$.

Donc, pour qu'il arrive

le troisieme cas, la probabilité est $= \frac{4(n-4)}{n(n-1)}$,

le quatrieme cas, la probabilité est $= \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}$

De là nous concluons:

$$x = \frac{12}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 - \frac{4(n-4)}{n(n-1)} \cdot 1 + \frac{(n-4)(n-5)a}{n(n-1)},$$

ou bien $x = \frac{6}{n(n-1)} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} a$,

& de la même maniere:

$$a = \frac{6 + (n-6)(n-7)b}{(n-2)(n-3)},$$

$$b = \frac{6 + (n-8)(n-9)c}{(n-4)(n-5)},$$

$$c = \frac{6 + (n-10)(n-11)d}{(n-6)(n-7)},$$

&c.

De là nous tirerons la valeur de $x$ cherchée:

$$x = \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)}((n-2)(n-3) + (n-4)(n-5) + (n-6)(n-7) + \ldots\ldots 0).$$

Cette progression étant algébrique, si nous en cherchons la somme par les regles connues, nous la trouvons $= \frac{n(n-2)(2n-5)}{12}$,

& partant l'avantage du Banquier sera:

$$x = \frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}.$$

L'AVANTAGE DU BANQUIER

*vaut autant pour cent, que la table suivante montre.*

| Nombre de toutes les Cartes. | Pour une Carte signifiante. | Pour deux Cartes signifiantes. | Pour trois Cartes signifiantes. | Pour quatre Cartes signifiantes. |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 50, 000 | 100, 000 | * | * |
| 4 | 25, 000 | 25, 000 | 25, 000 | 50, 000 |
| 6 | 16, 667 | 13, 333 | 15, 000 | 23, 333 |
| 8 | 12, 500 | 8, 929 | 10, 714 | 15, 714 |
| 10 | 10, 000 | 6, 667 | 8, 333 | 11, 905 |
| 12 | 8, 333 | 5, 303 | 6, 818 | 9, 596 |
| 14 | 7, 143 | 4, 395 | 5, 769 | 8, 042 |
| 16 | 6, 250 | 3, 750 | 5, 000 | 6, 923 |
| 18 | 5, 556 | 3, 268 | 4, 412 | 6, 078 |
| 20 | 5, 000 | 2, 895 | 3, 947 | 5, 418 |
| 22 | 4, 545 | 2, 597 | 3, 571 | 4, 887 |
| 24 | 4, 167 | 2, 355 | 3, 261 | 4, 451 |
| 26 | 3, 846 | 2, 154 | 3, 000 | 4, 087 |
| 28 | 3, 571 | 1, 984 | 2, 778 | 3, 777 |
| 30 | 3, 333 | 1, 839 | 2, 586 | 3, 512 |
| 32 | 3, 125 | 1, 714 | 2, 419 | 3, 272 |
| 34 | 2, 941 | 1, 604 | 2, 273 | 3, 078 |
| 36 | 2, 778 | 1, 508 | 2, 143 | 2, 901 |
| 38 | 2, 632 | 1, 422 | 2, 027 | 2, 741 |
| 40 | 2, 500 | 1, 346 | 1, 923 | 2, 599 |
| 42 | 2, 381 | 1, 277 | 1, 829 | 2, 470 |
| 44 | 2, 273 | 1, 216 | 1, 744 | 2, 354 |
| 46 | 2, 174 | 1, 160 | 1, 667 | 2, 248 |
| 48 | 2, 084 | 1, 108 | 1, 596 | 2, 151 |
| 50 | * | 1, 061 | 1, 531 | 2, 061 |
| 52 | * | * | * | 1, 981 |

*Remarque I.*

14. En considérant cette Table, on peut donner aux Pontes cette regle, afin qu'ils risquent le moins. *Qu'ils attendent jusqu'à ce que deux cartes d'une espece soient sorties, & aussitôt que cela est arrivé, qu'ils choisissent cette carte pour leur mise.*

*Remarque II.*

15. Le cas le plus avantageux pour les Pontes est donc, lorsque le Banquier tire au premier coup deux cartes semblables, de sorte qu'il lui reste encore 50 Cartes dans la main. Car alors quand le Ponte met sur cette carte, l'avantage du Banquier sera le plus petit possible.

*Remarque III.*

16. Cependant s'il n'arrivoit pas, que deux cartes semblables sortissent avant que le Banquier eut tiré 16 cartes, il vaudroit autant, que le Ponte mette d'abord au second coup, sur une carte qui seroit sortie au premier coup: mais, comme il n'y a que 13 cartes de chaque espece, ce cas ne sauroit arriver.

*Remarque IV.*

17. Quand le Banquier n'a plus que 28 cartes dans la main, où encore moins, il n'est plus à propos de mettre sur une carte quoiqu'elle ne se trouve que 2 fois dans la taille. Il vaudra mieux d'attendre que le Banquier recommence, & de mettre alors sur une carte quelconque; mais le plus seur moyen est toujours d'attendre encore alors le second coup, & de mettre sur une carte qui sera sortie au premier.

*Remarque V.*

18. C'est encore une regle fort essentielle pour les Pontes, qu'ils ne mettent jamais sur une carte, qu'elle qu'elle soit, lorsque la taille a déjà fort diminué. Il n'est aussi jamais bon, de mettre sur une carte qui ne se trouve plus qu'une seule fois dans la taille. Car, quand

quand même cela arriveroit déjà au troisieme coup, le Banquier auroit plus que 2 pour cent d'avantage sur lui. Or un prudent Ponte peut toujours faire en sorte que l'avantage du Banquier surpasse à peine un pour cent.

## PROBLEME V.

18. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a cinq cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

### SOLUTION.

Posant l'avantage cherché du Banquier $= x$, & faisant le même raisonnement comme auparavant, on parviendra enfin à cette équation:

$$x = \frac{10((n-2)(n-3)(n-4) + (n-4)(n-5)(n-6) + (n-5)(n-6)(n-7) + \ldots + 0)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.$$

Or la somme de la progression, qui fait ici partie du numérateur, se trouve $= \frac{n\,(n-2)^2\,(n-4)}{8}$, d'où nous tirons l'avantage du Banquier $x = \frac{5\,(n-2)}{4\,(n-1)\,(n-3)}$.

## PROBLEME VI.

20. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a six cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

### SOLUTION.

Pour trouver cet avantage, que je nomme $= x$, on parvient à cette progression:

$$s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + (n-4)(n-5)(n-6)(n-7) + \ldots + 0,$$

dont on trouve la valeur

$$s = \frac{n\,(n-2)\,(n-4)\,(2nn-13n+16)}{20},$$

&

& celle de $x$ fera

$$x = \frac{15s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}.$$

Par conséquent l'avantage du Banquier sera:

$$x = \frac{3(2nn - 13n + 16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}.$$

## PROBLEME VII.

21. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a 7 cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

### SOLUTION.

On parviendra à cette équation

$$x = \frac{21s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)},$$

& $s = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) + (n-4)\ldots(n-8) + \ldots\ldots + 0,$

Or la somme est $s = \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(2nn-12n+13)}{24}$.

Donc: $x = \frac{7(2nn - 12n + 13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)}$: ce qui est l'avantage du Banquier.

## PROBLEME VIII.

22. Le nombre des cartes étant $= n$, s'il y a 8 cartes signifiantes, trouver l'avantage du Banquier.

### SOLUTION.

Maintenant il s'agit de trouver la somme de cette progression:

$s = (n-2)\ldots\ldots(n-7) + (n-4)\ldots\ldots(n-9) + (n-6)\ldots\ldots(n-11) + \ldots\ldots + 0,$

Or les regles connues nous fournissent cette somme:

$s = \frac{1}{12} n(n-2)(n-4)(n-6)(4n^3 - 50nn + 176n - 151),$

&

& alors on aura:

$$x = \frac{28s}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}$$

Par conſéquent l'avantage du Banquier ſera:

$$x = \frac{4n^3 - 50nn + 176n - 151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}.$$

*Remarque I.*

23. Si l'on veut aller plus loin, & ſuppoſer le nombre des cartes ſignifiantes plus grand, tout revient à la formation de ſemblables progreſſions, qui étant algebriques, on n'a qu'à faire l'application des régles connues pour en trouver la ſomme.

*Remarque II.*

24. Pour mettre devant les yeux tout ce que nous venons de trouver, en marquant le nombre de toutes les cartes par $n$, on a

l'avantage du Banquier.

Pour 1 Carte ſignifiante - $\frac{1}{n}$,

Pour 2 Cartes ſignifiantes - $\frac{n+2}{2n(n-1)}$,

Pour 3 Cartes ſignifiantes - $\frac{3}{4(n-1)}$,

Pour 4 Cartes ſignifiantes - $\frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}$,

Pour 5 Cartes ſignifiantes - $\frac{5n-10}{4(n-1)(n-3)}$,

Pour 6 Cartes ſignifiantes - $\frac{3(2nn-13n+16)}{4(n-1)(n-3)(n-5)}$,

Pour 7 Cartes ſignifiantes - $\frac{7(2nn-12n+13)}{8(n-1)(n-3)(n-5)}$,

Pour 8 Cartes ſignifiantes - $\frac{4n^3-50nn+176n-151}{2(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}$.



Re-

### *Remarque III.*

25. Il eſt difficile de découvrir une loi dans ces expreſſions ; auſſi n'en faut il pas chercher parmi toutes, puisque la premiere & la ſeconde ſont aſſujetties à des irrégularités, qui n'ont pas lieu dans les ſuivantes. Or, ſi nous negligeons ces anomalies des cas d'une & deux cartes ſignifiantes, l'avantage ſe trouve au premier $= 0$, & au ſecond $= \frac{1}{2(n-1)}$; & ce ſont les formules, qui avec les ſuivantes doivent obſerver une certaine loi de progreſſion.

### *Remarque IV.*

26. Quelque embrouillée que paroiſſe cette loi, elle paroitra aſſés clairement, ſi nous décompoſons les fractions trouvées en des fractions ſimples ſelon les facteurs du dénominateur de chacune. Par ce moyen on changera ces expreſſions dans les ſuivantes :

| N. des Cartes ſign. | Avantage du Banquier |
|---|---|
| . . . . . | $0$ |
| . . . . . | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$ |
| 3 | $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{n-1}$ |
| 4 | $\frac{1}{8}\left(\frac{6}{n-1} + \frac{2}{n-3}\right)$ |
| 5 | $\frac{1}{16}\left(\frac{10}{n-1} + \frac{10}{n-3}\right)$ |
| 6 | $\frac{1}{32}\left(\frac{15}{n-1} + \frac{30}{n-3} + \frac{3}{n-5}\right)$ |
| 7 | $\frac{1}{64}\left(\frac{21}{n-1} + \frac{70}{n-3} + \frac{21}{n-5}\right)$ |
| 8 | $\frac{1}{128}\left(\frac{28}{n-1} + \frac{110}{n-3} + \frac{84}{n-5} + \frac{4}{n-7}\right)$. |

En

En considérant ces formules, on y découvrira aisément la loi de la progression, & posant en général le nombre des cartes signifiantes $= \nu$, le nombre de toutes les cartes étant, $= n$ l'avantage du Banquier sera:

$$\frac{1}{2^{\nu-1}}\left(\frac{\nu(\nu-1)}{1.\ 2}.\frac{1}{n-1}+\frac{2\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\frac{1}{n-3}+\frac{3\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.\frac{1}{n-5}+\text{etc.}\right),$$

qui se change en celle-ci:

$$\frac{\nu}{2^{\nu}}\left(\frac{\nu-1}{1(n-1)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3\ (n-3)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ (n-5)}+\&c.\right).$$

## PROBLEME GÉNÉRAL.

27. Le nombre de toutes les cartes étant $= n$, si le nombre des cartes signifiantes est $= \nu$, trouver l'avantage du Banquier

### SOLUTION.

Nous venons de voir que l'avantage du Banquier sera:

$$\frac{\nu}{2^{\nu}}\left(\frac{\nu-1}{1\ (n-1)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3\ (n-3)}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ (n-5)}+\&c.\right),$$

excepté les cas, où l'on a $\nu = 1$, ou $\nu = 2$. Or, si nous considérons cette progression, nous verrons aisément, qu'elle peut être renfermée dans une expression finie intégrale.

$$\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-1}dz\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\nu-1}-\int z^{n-1}dz\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\nu-1}\right).$$

Car, ayant pris ces integrales en sorte qu'elles évanouissent posant $z = 0$, on n'a qu'à mettre ensuite $z = 1$.

En observant cette regle dans les intégrations, l'avantage du Banquier pourra aussi être exprimé en sorte:

$$\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-\nu}dz\,(z+1)^{\nu-1}-\int z^{n-\nu}dz\,(z-1)^{\nu-1}\right),$$

posant après l'intégration $z = 1$. On voit d'abord que cette formule

mule ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne soit $n > \nu$, puisqu'on ne sauroit rendre l'intégrale $= 0$, au cas $z = 0$, ce qui est conforme à la nature de la question.

*Remarque I.*

28. Suivant la méthode directe nous aurions eu à sommer cette progression:

$$s = (n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1) + (n-4)\ldots\ldots(n-\nu-1) + \ldots\ldots\ldots + 0,$$

& l'avantage du Banquier auroit été:

$$x = \frac{\nu(\nu-1)s}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1)}.$$

Donc, réciproquement, on obtiendra la somme de la progression:

$$s = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1)}{(\nu-1)2^{\nu+1}}\left(\int z^{n-\nu}dz(z+1)^{\nu-1} - \int z^{n-\nu}dz(z-1)^{\nu-1}\right),$$

*Remarque II.*

29. Or, posant $n - 2 = 2t$, ou $n = 2t + 2$, la quantité $s$ marque la somme d'une progression algébrique, dont le terme général, ou celui qui répond à l'exposant $t$, est

$$T = 2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\ldots\ldots(2t-\nu+3).$$

Et partant nous pourrons assigner la somme S. T qui convient à ce terme général, par l'expression intégrale suivante.

$$S.T = \frac{(t+1)(2t+1)}{(\nu-1)2^{\nu}}T\left(\int z^{2t+2-\nu}dz((z+1)^{\nu-1} - (z-1)^{\nu-1}\right).$$

*Remarque III.*

30. Mais, en développant cette formule intégrale, nous aurons:

$$S.T = \frac{(t+2)(2t+1)}{2^{\nu-1}}T\left(\frac{1}{2t+1} + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2.\,3\,(2t-1)} + \frac{(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{2.\,3.\,4.\,5\,(2t-3)} + \&c.\right),$$

& cette sommation est juste, quelques nombres entiers qu'on mette pour les lettres $t$ & $\nu$, en sorte que $\nu < 2t + 2$, ou plutot que $\nu$ ne soit pas plus grand que $2t + 2$. Cette somme répond donc au terme général,

$$T = 2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)\ldots\ldots(2t-\nu+3),$$

l'exposant du dernier terme de la progression étant $= t$.

CON-