1766

Recherches sur les microscopes simples et les moyens de les perfectionner

Leonhard Euler

RECHERCHES
SUR
LES MICROSCOPES SIMPLES ET LES MOYENS DE LES PERFECTIONNER.

PAR M. EULER.

1.

Je commence mes recherches par la considération d'une lentille simple PAP, dont la distance de foyer soit $= p$, & le demi-diametre de son ouverture AP $= x$. Il faut donc que l'objet $a\alpha$, soit placé devant le verre à la distance A$a = p$, précisément égale à la distance de foyer du verre; me rapportant à la vue parfaite qui demande une distance infinie de l'image qui est l'objet de la vision. Or, pour juger du grossissement que le microscope produit, ce jugement étant arbitraire, on se regle sur une distance de 8 pouces, au lieu de laquelle je mettrai la lettre l, & le grossissement indiqué par le nombre m, marque combien de fois le diametre de l'objet paroit plus grand par le microscope, que si on le voyoit à l'oeil nu à la distance l ou de 8 pouces, d'où l'on aura pour notre cas $m = \frac{l}{p}$; & partant, pour produire un grossissement donné $= m$, il faut se servir d'une lentille, dont la distance de foyer est $p = \frac{l}{m}$, ou bien $p = \frac{8}{m}$ pouces. Planche I. Fig. 1.

2. Pour le degré de clarté dont l'objet sera vu, soit y le demi-diametre du cylindre lumineux, qui est transmis dans l'oeil de chaque point de l'objet, & on aura $y = \frac{lx}{mp}$, ou bien $y = x$, à cause de

$mp = l$. Où j'obſerve que tant que y ſurpaſſe le demi-diametre de la pupille, que je nomme $= \omega$, l'objet ſera vu avec ſa pleine clarté: la diminution de la clarté ne vient donc, qu'entant que l'ouverture de la lentille eſt moindre que celle de la pupille, & le degré de clarté pourra être exprimé par $\frac{x}{\omega}$, ou plutot par ſon quarré $\frac{xx}{\omega\omega}$. On ſuppoſe communément $\omega = \frac{1}{20}$, pouce, & partant le degré de clarté ſera $= 400xx$, exprimant x en pouce. Donc, tant que x ſurpaſſe la vingtieme partie d'un pouce, on jouira d'une pleine clarté.

3. De là il s'enſuit que, pour augmenter la clarté, on n'a qu'à donner au verre la plus grande ouverture, que ſa figure ou ſa grandeur admet. Or, ayant établi cette regle générale, qu'aucune ouverture ne doit jamais embraſſer un arc au delà de 30 degrés, ſi la lentille étoit également convexe des deux côtés, auquel cas elle admettroit la plus grande ouverture, on ne ſauroit donner à x une plus grande valeur, que $x = \frac{1}{4}p$, ou bien $x = \frac{l}{4m}$; le degré de clarté ſeroit donc $= \frac{400ll}{16mm} = \frac{25ll}{mm}$, ou bien $= \frac{1600}{mm}$, à cauſe de $l = 8$. Donc, tant que le groſſiſſement m, ne ſurpaſſe point 4, les objets ſeront vûs auſſi clairs qu'il eſt poſſible: mais en augmentant le groſſiſſement au delà, la clarté décroitra en raiſon du quarré: un groſſiſſement $m = 80$, ne fourniroit plus que la 4me partie, & $m = 200$ la 25me partie de la clarté naturelle.

4. Mais il s'en faut beaucoup, que nous puiſſions jouir de ce degré de clarté, qui ſeroit encore très conſidérable pour le cas $m = 200$; nous ſommes bien obligés de nous contenter d'un degré beaucoup plus petit. Si nous donnions à notre lentille l'ouverture que je viens de ſuppoſer $x = \frac{p}{4}$, la confuſion ſeroit inſupportable. Il faut donc ici principalement avoir égard au degré de confuſion, qui eſt encore

core ſupportable, ſans que la repréſentation en ſoit troublée. Ici la figure du verre renfermée dans le nombre λ, entre auſſi en conſidération, ſelon les principes expoſés dans le XIII Volume de nos Mémoires, où ayant indiqué le limite de la confuſion ſupportable par la lettre κ, on trouve $\frac{mx^3}{ppl}.\lambda = \frac{1}{\kappa^3}$; où s'il s'agiſſoit des Teleſcopes il faudroit bien mettre $\kappa > 40$, mais dans les microſcopes on ſe contente d'un moindre degré de diſtinction.

5. Ayant donc trouvé $p = \frac{l}{m}$, cette condition nous fournit $\frac{\lambda m^3 x^3}{l^3} = \frac{1}{\kappa^3}$ donc $x = \frac{l}{m\kappa}\sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa}\, p \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}$. Or, pour la valeur du nombre κ, après avoir examiné quelques microſcopes, de l'effet deſquels on avoit lieu d'être content, j'en ai conclu $\kappa = 16$, de ſorte que $x = \frac{1}{16} p \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}$, ou $x = \frac{l}{16m}\sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}$, & partant le degré de clarté $= \frac{25\,ll}{16\,mm}\sqrt[3]{\frac{1}{\lambda\lambda}} = \frac{100}{mm}\sqrt[3]{\frac{1}{\lambda\lambda}}$. Or, puiſque λ ne ſauroit être plus petit que l'unité, poſons $\lambda = 1$, ou bien il faut travailler la lentille enſorte que les rayons de ſes faces ſoient $\begin{cases} \text{de devant} = 5{,}24 : 6p \\ \text{de derriere} = 0{,}6145p, \end{cases}$ ou bien, ſi on la faiſoit également convexe des deux côtés, à cauſe de $\lambda = 1{,}63$, on auroit $x = \frac{1}{19} p$, & la clarté $= \frac{72}{mm}$. Il eſt donc fort important de donner au verre la figure que je viens de déterminer par la poſition $\lambda = 1$; & alors la diſtance de foyer du verre étant $p = \frac{8}{m}$ pouce, le demi-diametre de ſon ouverture doit être $x = \frac{1}{16} p = \frac{1}{2m}$ pouce, ou bien le diametre même $= \frac{1}{m}$ pouce, & alors le degré de clarté ſera $= \frac{100}{mm}$.

 6. S'il

6. S'il étoit possible d'appliquer l'oeil immédiatement au verre, le champ apparent ne seroit terminé que par les bornes de la vue simple, à moins que l'épaisseur du verre n'en mît de plus étroites. Mais, supposant la distance de l'oeil au verre $AO = k$, l'ouverture de la pupille terminera le champ en sorte que l'angle $aAa = \frac{\omega}{k}$, & partant le demi-diametre de l'objet vû $z = \frac{\omega}{k}\, p = \frac{\omega l}{mk}$. Donc, puisque $\omega = \frac{1}{20}$ pouce, si nous supposons la distance la plus petite entre l'oeil & le verre $k = \frac{1}{5}$ pouce, nous aurons $z = \frac{l}{4m} = \frac{2}{m}$ pouce, ou bien on verra de l'objet une partie dont le demi-diametre sera $= \frac{2}{m}$ pouce. Mais, si l'on approchoit l'oeil davantage du verre, on en découvriroit une d'autant plus grande partie, comme au contraire un plus grand éloignement rétréciroit le champ.

7. La détermination des faces de notre lentille est tirée de l'hypothese de réfraction de 1, 55 : 1, mais comme la plupart des verres suit la raison de 1, 54 : 1, il faut former notre verre en sorte qu'il soit

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} = 4,\ 7982p \\ \text{de derriere} = 0,\ 6085p, \end{cases}$$

d'où j'ai calculé la Table suivante

TABLE

TABLE
des Microscopes simples.

Grossissement m	Distance de foyer p	Rayons des faces de devant $4,7982\,p$	de derriere $0,6085\,p$	Degré de clarté $\frac{100}{mm}$	Diametre de la partie vüe $\frac{4}{m}$
10	0, 800	3, 838	0, 487	1, 0000	0, 400 pouce
20	0, 400	1, 919	0, 243	0, 2500	0, 200
30	0, 267	1, 279	0, 162	0, 1111	0, 133
40	0, 200	0, 959	0, 122	0, 0625	0, 100
50	0, 160	0, 768	0, 097	0, 0400	0, 080
60	0, 133	0, 640	0, 081	0, 0278	0, 067
70	0, 114	0, 548	0, 069	0, 0204	0, 057
80	0, 100	0, 479	0, 061	0, 0156	0, 050
90	0, 089	0, 426	0, 054	0, 0123	0, 044
100	0, 080	0, 384	0, 049	0, 0100	0, 040
120	0, 067	0, 320	0, 041	0, 0069	0, 033
140	0, 057	0, 274	0, 035	0, 0051	0, 028
160	0, 050	0, 240	0, 030	0, 0039	0, 025
180	0, 044	0, 213	0, 027	0, 0031	0, 022
200	0, 040	0, 192	0, 024	0, 0025	0, 020
250	0, 032	0, 154	0, 019	0, 0016	0, 016

8. Il eſt fort douteux, ſi le plus habile Artiſte puiſſe réuſſir à faire des lentilles encore plus petites, de ſorte qu'on puiſſe ſe fier ſur leur juſteſſe; & partant je n'ai pas continué plus loin cette table, puisqu'un degré de clarté, qui n'eſt que la 625me partie de la naturelle, eſt trop petit pour pouvoir diſtinguer quelque choſe. Au reſte il eſt impoſſible de procurer à cette eſpece un plus grand degré de perfection, ſans y ajouter encore un ou quelques verres. Mais, pour ne pas tomber dans le cas des microſcopes compoſés, je regarde ces verres comme immédiatement joints enſemble, de ſorte qu'on les puiſſe conſidérer

comme un ſeul verre. Mais, comme il eſt impoſſible que l'intervalle entre deux verres ſoit $= 0$, à cauſe de leur épaiſſeur, qui ſurpaſſe ordinairement dans de tels petits verres la dixieme partie de leur diſtance de foyer, l'intervalle entre de tels verres doit être ſuppoſé plus grand que la dixieme partie de la diſtance de foyer du plus grand:

Fig. 2. 9. Soit donc notre microſcope composé de deux verres PAP, & QBQ, joints presque immédiatement enſemble; que les lettres p & q marquent leurs diſtances de foyer, & d leur diſtance. Soit de plus le demi-diametre de l'ouverture du premier $= x$, & la diſtance de l'objet $Aa = a$. Cela poſé, le groſſiſſement étant propoſé $= m$, nous avons d'abord pour le degré de clarté $y = \frac{lx}{ma}$, & enſuite $p = \frac{Aa}{A + 1}$; $q = \frac{Aa\Phi}{\pi - \Phi}$; & $d = \frac{Aa\pi}{\pi - \Phi}$; & pour le groſſiſſement $\frac{m}{l} = \frac{\Phi - \pi}{a\Phi}$, où $\Phi a = z$ marque le demi-diametre de l'objet viſible. Ayant donc $\frac{q}{d} = \frac{\Phi}{\pi}$, ou $\pi = \frac{\Phi d}{q}$, cette ſubſtitution donne $\frac{m}{l} = \frac{q - d}{aq}$, ou $maq = (q - d)l$. Enſuite $q = \frac{Aaq}{d - q}$, donne $A = \frac{d - q}{a}$, & de là on aura $p = \frac{d - q}{a + d - q}\,a$. Donc, puisque $a = \frac{(q - d)l}{mq}$, nous aurons $A = \frac{-mq}{l}$, & $p = \frac{(q - d)l}{mq - l}$.

10. Enſuite, pour rendre la confuſion inſenſible, il faut ſatisfaire à cette égalité

$$\frac{1}{\kappa^3} = \frac{mx^3}{aal}\left(\frac{\lambda(mq - l)^3}{m^3q^3} - \frac{\nu l(mq - l)}{m^2q^2} + \frac{\lambda' l^3 q}{m^3q^3(q - d)}\right),$$

d'où

d'où l'on tire $x = \frac{q}{\kappa} \sqrt[3]{\frac{aalmm}{\lambda(mq-l)^3 - \nu mlq(mq-l) + \lambda' l^3 q:(q-d)}}$

ou $x = \frac{l}{\kappa m} \sqrt[3]{\frac{m^3 q(q-d)^3}{\lambda(q-d)(mq-l)^3 - \nu lmq(q-d)(mq-l) + \lambda' l^3 q}}$,

& partant, si nous prenions $q = \infty$, ce qui seroit le cas précédent, nous aurions comme auparavant $x = \frac{l}{m\kappa} \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}$. Il s'agit donc maintenant de donner à q une telle valeur, que celle de x devienne plus grande, où il faut pourtant observer, qu'on ne sauroit jamais prendre $x = \frac{1}{4}p$, mais toujours plus petit.

11. Pour rendre cette valeur de x la plus grande qu'il soit possible, il est d'abord évident, qu'il faut supposer $\lambda = 1$, & $\lambda' = 1$, puisque ces nombres ne sauroient être plus petits. Ensuite, puisque la distance des verres $= d$ dépend de la distance de foyer des verres, je pose $d = (1 - n)q$, de sorte que $a = \frac{n}{m} l$, & $p = \frac{nq}{mq - l} l$. De là notre formule pour x sera

$$x = \frac{l}{\kappa m} \sqrt[3]{\frac{m^3 n^3 q^4}{nq(mq-l)^3 - \nu lmnqq(mq-l) + l^3 q}},$$

& il faut que l'expression suivante soit un *minimum:*

$$n\left(m - \frac{l}{q}\right)^3 - \nu lmn\left(\frac{m}{q} - \frac{l}{qq}\right) + \frac{l^3}{q^3},$$

donc $\frac{3nl}{qq}\left(m - \frac{l}{q}\right)^2 + \nu lmn\left(\frac{m}{qq} - \frac{2l}{q^3}\right) - \frac{3l^3}{q^4} = 0$,

ou $3n(mq - l)^2 + \nu mnq(mq - 2l) - 3ll = 0$,

d'où l'on trouve $mq = l + l\sqrt{\frac{3 + \nu n}{3 + \nu}}$.

12. Puis-

12. Puisque n approche fort de l'unité, & que d'ailleurs il suffit de prendre la valeur de q à peu près, je poserai $mq = 2l$, ou $q = \frac{2l}{m}$, de sorte que $d = \frac{2(1 - n)l}{m}$, & $p = nq = \frac{2n}{m}l$. Or alors nous aurons

$$x = \frac{l}{\varkappa m} \sqrt[3]{\frac{8n^3}{n - 2\nu n + 1}},$$

où il faut remarquer que $\nu = 0,226$ dans l'hypothese de la réfraction $1,54 : 1$, de sorte que

$$x = \frac{2nl}{\varkappa m} \sqrt[3]{\frac{1}{1 + 0,548n}}.$$

Posons donc $n = \frac{7}{8}$, & nous aurons les déterminations suivantes pour un tel microscope qui grossit m fois:

$a = \frac{7l}{8m} = \frac{7}{m}$ pouce: $p = \frac{14}{m}$ pouce: $q = \frac{16}{m}$ pouce, & $d = \frac{2}{m}$ pouce.

$x = \frac{12,29}{\varkappa m} = \frac{3}{4m}$ pouce, & $y = \frac{lx}{ma} = \frac{6}{7m}$, donc la clarté $= 400yy = \frac{294}{mm}$,

d'où l'on voit, que le degré de clarté est non seulement presque trois fois plus grand qu'auparavant, mais que les deux verres qui composent le microscope sont presque deux fois plus grands que le microscope simple, ce qui fait qu'on peut pousser plus loin le grossissement.

13. Maintenant, pour déterminer la figure de nos deux verres, puisque $\lambda = 1$, & $\lambda' = 1$, il faut remarquer que $A = \frac{d - q}{a} = -2$, & de là par les regles que j'ai données on trouvera

Pour le premier verre PAP

$$\text{le rayon de sa face} \begin{cases} \text{de devant} & = -0,8153p \\ \text{de derriere} & = +0,3248p, \end{cases}$$

or

or pour l'autre verre QBQ

$$\text{le rayon de sa face}\begin{cases}\text{de devant} = +\ 4{,}7982\,q\\ \text{de derriere} = +\ 0{,}6085\,q.\end{cases}$$

TABLE

pour la construction de ces microscopes.

Grossissement m	Distance de l'objet $aA = a$	Du verre PAP Rayons des faces de devant	Du verre PAP Rayons des faces de derriere.	Du verre QBQ Rayons des faces de devant.	Du verre QBQ Rayons des faces de derriere.	Diametre de l'ouverture des verres.	Degré de clarté.	Intervalle des verres $AB = d$
10	0,700	−1,141	+0,455	+7,677	+0,974	0,150	plena	0,200
20	0,350	−0,571	+0,227	+3,834	+0,487	0,075	0,7500	0,100
30	0,233	−0,380	+0,152	+2,559	+0,325	0,050	0,3333	0,067
40	0,175	−0,285	+0,114	+1,917	+0,243	0,038	0,1875	0,050
50	0,140	−0,228	+0,091	+1,535	+0,195	0,030	0,1200	0,040
60	0,117	−0,190	+0,076	+1,278	+0,162	0,025	0,0833	0,033
70	0,100	−0,163	+0,065	+1,097	+0,139	0,021	0,0612	0,029
80	0,088	−0,143	+0,057	+0,959	+0,122	0,019	0,0469	0,025
90	0,078	−0,127	+0,051	+0,853	+0,108	0,017	0,0370	0,022
100	0,070	−0,114	+0,046	+0,768	+0,097	0,015	0,0300	0,020
120	0,059	−0,095	+0,038	+0,639	+0,081	0,013	0,0208	0,017
140	0,050	−0,081	+0,032	+0,548	+0,070	0,011	0,0153	0,015
160	0,044	−0,071	+0,028	+0,480	+0,061	0,010	0,0117	0,013
180	0,039	−0,063	+0,025	+0,426	+0,054	0,009	0,0092	0,011
200	0,035	−0,057	+0,023	+0,384	+0,049	0,008	0,0075	0,010
240	0,030	−0,048	+0,019	+0,320	+0,041	0,007	0,0052	0,009
280	0,025	−0,041	+0,016	+0,274	+0,035	0,006	0,0038	0,008
320	0,022	−0,036	+0,014	+0,240	+0,030	0,005	0,0029	0,007
360	0,020	−0,032	+0,013	+0,213	+0,027	0,005	0,0023	0,006
400	0,018	−0,028	+0,011	+0,192	+0,024	0,004	0,0019	0,005
480	0,015	−0,024	+0,009	+0,160	+0,020	0,004	0,0013	0,005
560	0,012	−0,020	+0,008	+0,137	+0,017	0,003	0,0010	0,004

14. Ces microſcopes paroiſſent d'autant plus parfaits, que les verres à cauſe de leur courbure ne ſauroient presque recevoir une plus grande ouverture. Cependant, pour les très grands groſſiſſemens, on rencontre de très grands obſtacles, non ſeulement dans la formation de ſi petits verres, qui demandent ſans doute une très grande adreſſe, mais il y faut tant approcher l'objet, qu'il touche presque le verre; & la diſtance marquée doit être obſervée ſi exactement que la moindre erreur cauſe la plus grande confuſion. De là vient que, ſi la ſurface de l'objet a les moindres inégalités, il eſt impoſſible de les voir diſtinctement. C'eſt auſſi principalement à ce défaut qu'on tâche de remedier par les microſcopes composés, quoi qu'on n'y réuſſiſſe ordinairement qu'aux dépens de la clarté. Mais je remarque encore un autre arrangement de nos deux verres, tout différent de celui que je viens de développer, où la diſtance de l'objet peut devenir un peu plus grande.

15. Pour cet effet il faut ſuppoſer la diſtance de foyer du verre QBQ négative: ſoit donc $q = -r$, pour avoir

$$a = \frac{r+d}{r} \cdot \frac{l}{m}; \quad p = \frac{r+d}{mr+l} \cdot l, \quad \& \ \Lambda = \frac{mr}{l}, \quad \& \text{ enſuite}$$

$$x = \frac{l}{v.m} \sqrt[3]{\frac{m^3 r (r+d)^3}{\lambda (r+d)(mr+l)^3 + vlmr(r+d)(mr+l) - \lambda' l^3 r}}$$

Poſons de plus $r = \frac{il}{m}$, & $d = \frac{\delta l}{m}$, pour rendre nos formules plus commodes, qui ſeront

$$a = \frac{i+\delta}{i} \cdot \frac{l}{m}; \quad p = \frac{i+\delta}{i+1} \cdot \frac{l}{m}; \quad \Lambda = i, \quad \&$$

$$x = \frac{l}{v.m} \sqrt[3]{\frac{i(i+\delta)^3}{\lambda (i+\delta)(i+1)^3 + vi(i+\delta)(i+1) - \lambda' i}}$$

Main-

Maintenant, pour qu'on puisse prendre $x = \frac{2l}{\varkappa m}$, & même aussi grand que la figure des verres le permet, on n'a qu'à faire

$$\lambda' = \frac{\lambda(i+\delta)}{i}(i+1)^3 + \nu(i+\delta)(i+1).$$

Qu'on fasse le premier verre également convexe des deux côtés, afin qu'il admette la plus grande ouverture, & on aura $\lambda = 1 + 0,6149\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2$, & la valeur de ν est $= 0,2260$.

16. Pour voir quels avantages on peut retirer de cette espece, dévelopons le cas où $i = 2$, & $\delta = 4$ de sorte que

$$a = \frac{3l}{m};\ p = \frac{2l}{m};\ d = \frac{4l}{m},\ r = \frac{2l}{m},\ \text{ou } q = -\frac{2l}{m}.$$

& pour le premier verre PAP, que je suppose également convexe des deux côtés, & partant le rayon de chaque face $= 2,16.\frac{l}{m}$, nous aurons $\lambda = 1,0683$, & pour l'autre verre QBQ

$$\lambda' = 81\lambda + 18\nu = 90,6003,$$

d'où résulte cette construction:

Rayon de sa face

de devant $= \dfrac{q}{0,20841 + 0,91499\sqrt{(\lambda'-1)}} = +0,11274q,$

rayon de sa face

de derriere $= \dfrac{q}{1,64344 - 0,91499\sqrt{(\lambda'-1)}} = -0,14250q,$

ou bien on aura le rayon de sa face $\begin{cases}\text{de devant} = -0,22548\frac{l}{m}\\ \text{de derriere} = +0,28500\frac{l}{m},\end{cases}$

 d'où

d'où l'on voit que ces rayons ſont trop petits, pour qu'on s'en puiſſe ſervir dans les grandes multiplications.

17. Comme nous ſommes donc obligés de renoncer à l'aggrandiſſement des verres, ſuppoſons $i = 1$, & $\delta = 1$, pour avoir comme ci-deſſus la diſtance de l'objet $a = 2\,\frac{l}{m}$, ou deux fois plus grande que dans le premier cas, & nous aurons

$p = \frac{l}{m}$; $d = \frac{l}{m}$; $r = \frac{l}{m}$, ou $q = -\frac{l}{m}$, & $\lambda = 1$, & de là $\lambda' = 16 + 4\nu = 16{,}904$ d'où nous trouvons

$$\text{le rayon de ſa face} \begin{cases} \text{de devant} = -\,0{,}25924.\,\frac{l}{m} \\ \text{de derriere} = +\,0{,}49862.\,\frac{l}{m} \end{cases}$$

où le même inconvénient ſe trouve encore, que le demi-diametre de ce verre ne ſauroit ſurpaſſer $\frac{l}{16m}$, & partant on ne gagneroit rien dans le degré de clarté. Il ſemble donc que cette diſpoſition des verres n'eſt pas propre à porter les microſcopes ſimples à un plus haut degré de perfection que le cas précédent. Et ſi l'on veut éviter la trop grande proximité des objets, de même que l'extreme petiteſſe des verres, il faut abſolument recourir aux microſcopes réellement compoſés, dont la conſtruction la plus parfaite fera le ſujet de mes recherches ſuivantes.