



1766

Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations" (1766). *Euler Archive - All Works*. 310.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/310>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



NOUVELLE MÉTHODE D'ÉLIMINER LES QUANTITÉS INCONNUES DES EQUATIONS.

PAR M. EULER.

Quand, pour résoudre un problème, on est obligé d'introduire dans le calcul plusieurs quantités inconnues, la solution conduit aussi à plusieurs équations, d'où il faut ensuite chercher la valeur de chacune de ces quantités inconnues. Cela se pratique par le moyen de l'élimination; on commence par une des quantités inconnues en regardant les autres comme connues; & on en cherche la valeur en y employant une ou plusieurs des équations trouvées, pour en tirer cette valeur exprimée par une formule rationnelle, & aussi simple, qu'on pourra. Alors on substitue cette valeur dans les autres équations, & par ce moyen tant le nombre des inconnues que des équations deviendra d'une unité plus petit. De la même manière on élimine ensuite une autre inconnue, & on continue ces opérations jusqu'à ce qu'il ne reste dans le calcul qu'une seule équation, dont la résolution fournira la solution du problème.

2. Or, ayant plusieurs équations, dont chacune contient la quantité inconnue qu'on veut éliminer, on voit d'abord, qu'on n'en pourroit prendre qu'une seule pour en chercher la valeur de cette inconnue, qui, étant substituée dans les autres équations, rendroit déjà tant le nombre des inconnues que des équations d'une unité plus petit. Cette voye est aussi fort propre si l'inconnue à éliminer ne contient



pas plus d'une dimension dans l'équation qu'on aura choisie pour en tirer sa valeur: mais, si l'inconnue y montoit à deux ou plusieurs dimensions, on ne seroit pas souvent en état d'en trouver la valeur: & si on l'étoit, sa valeur irrationnelle qu'on obtiendrait, conduiroit à des calculs extrêmement embarrassans, qui rendroient la solution souvent impraticable.

3. Donc, lorsqu'il ne se trouve aucune équation, où l'inconnue qu'on veut éliminer, n'ait qu'une seule dimension, Il en faut choisir deux pour en tirer la valeur. Car il est démontré, à combien de dimensions que puisse monter l'inconnue en deux équations, qu'il est toujours possible d'y abaisser successivement les dimensions, & cela jusques à ce qu'on parvienne à une équation qui ne renferme plus du tout cette inconnue. Par la même maniere, en combinant deux autres équations, on en tirera une nouvelle, qui ne contiendra plus cette inconnue; & ainsi on formera autant d'équations dégagées de cette inconnue, qu'il faudra, pour en éliminer par une semblable méthode les autres inconnues, jusqu'à ce qu'on parviendra à une seule équation, qui fournira la solution du probleme proposé.

4. La méthode d'éliminer se réduit donc au cas de deux équations qui contiennent routes les deux la quantité qu'on se propose d'éliminer; & tout l'ouvrage revient à ce qu'on en trouve une équation, qui ne contienne plus cette quantité. On voit bien que l'opération pour parvenir à ce but, deviendra d'autant plus difficile que les dimensions auxquelles monte la quantité qu'on veut éliminer, dans ces deux équations, seront plus hautes, à moins qu'une circonstance toute particuliere ne diminue le travail. Et afin qu'on ne soit pas obligé de faire cette opération pour chaque cas proposé, on trouve dans l'Arithmétique Universelle de Mr. Newton des formules propres à ce dessein, à l'aide desquelles l'élimination se peut faire aisément, quand même la quantité à éliminer monteroit, dans les deux équations, jusqu'à quatre dimensions. Car Mr. Newton ayant pris deux équations générales, qui ne surpassent pas ce degré, il rapporte l'équation, qui résulte après
l'éli-

l'élimination, de sorte qu'on n'a besoin que d'en faire l'application pour chaque cas proposé. Avant que d'expliquer ma nouvelle méthode, il sera à propos de donner une idée de celle dont Mr. Newton paroît s'être servi.

5. Je commencerai par deux équations, où la quantité à éliminer qui soit z , ne monte qu'à une dimension, lesquelles soient

$$A + Bz = 0, \quad \& \quad a + bz = 0,$$

afin qu'on voye mieux, comment les opérations se multiplient en passant à de plus hautes équations. Or d'abord, il est clair qu'on n'a qu'à multiplier la première équation par b , & l'autre par B ; car soustrayant ce produit de celui-là, on aura

$$Ab - Ba = 0,$$

qui est l'équation qui résulte par l'élimination de la quantité z . On pourroit aussi multiplier la première par a , & l'autre par A , afin qu'après la soustraction de l'une de l'autre les termes constans se détruisent; & alors on aura $Baz - Abz = 0$, qui étant divisée par z , donne comme auparavant $Ba - Ab = 0$, ou $Ab - Ba = 0$.

6. Soient maintenant proposées les deux équations suivantes, où la quantité à éliminer z , monte à deux dimensions.

$$A + Bz + Cz^2 = 0, \quad \& \quad a + bz + cz^2 = 0.$$

Qu'on multiplie la première par c , & l'autre par C , & la différence sera

$$Ac - Ca + (Bc - Cb)z = 0.$$

Ensuite, qu'on multiplie la première par a , & l'autre par A , & la différence étant divisée par z , sera.

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z = 0.$$

Maintenant, ayant deux équations, où la quantité z , ne monte qu'à une dimension, ce cas est réduit au précédent; & partant l'élimination se fera par la formule trouvée ci dessus, & donnera:

$$(Ac - Ca)(Ca - Ac) - (Bc - Cb)(Ba - Ab) = 0.$$

ou bien en changeant les signes

$$AAcc - 2AC.c + CCaa + BBac - ABbc - BCab + ACbb = 0.$$

7. Si les deux équations proposées sont cubiques :

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 = 0$, & $a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$,
multipliant la première par d , & l'autre par D , leur différence sera

$$Ad - Da + (Bd - Db)z + (Cd - Dc)z^2 = 0.$$

Or multipliant la première par a , & l'autre par A , la différence étant divisée par z , donnera

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z + (Da - Ad)z^2 = 0.$$

Nous voilà donc parvenues à deux équations quarrées, d'où l'on éliminera la quantité z , par le §. précédent. De la même manière, si les deux équations proposées sont du quatrième degré, on les réduira à deux équations cubiques; & en général, de quelque degré que soient les deux premières équations, on les réduira à deux équations d'un degré plus basses. Continuant donc cette réduction, on parviendra enfin nécessairement à une équation, qui ne contiendra plus la quantité z .

8. Pour rendre cette élimination plus aisée pour les deux équations cubiques.

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 = 0$, & $a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$,
on fera les substitutions suivantes :

$$\begin{array}{ll} Ad - Da = A' & aB - bA = a' \\ Bd - Db = B' & aC - cA = b' \\ Cd - Dc = C' & aD - dA = c' \end{array}$$

& les équations quarrées seront

$$A' + B'z + C'z^2 = 0, \quad \& \quad a' + b'z + c'z^2 = 0.$$

Alors



Alors, qu'on pose de plus :

$$\begin{array}{l} A'c' - C'a' = A'' \\ B'c' - C'b' = B'' \end{array} \quad \begin{array}{l} a'B' - b'A' = a'' \\ a'C' - c'A' = b'' \end{array}$$

pour avoir ces deux équations simples :

$$A''b'' - B''a'' = 0, \quad \& \quad a'' + b''z = 0,$$

& l'équation cherchée qui ne contiendra plus z , sera

$$A''b'' - B''a'' = 0.$$

9. Si nous comptons le nombre des lettres A, B, C, D, a, b, c, d , qui se trouvent multipliées ensemble en chaque terme, nous voyons, que les expressions marquées par A', B', C', a', b', c' , en contiennent deux dimensions: & partant les lettres A'', B'', a'', b'' , en contiendront quatre, de sorte que la dernière équation $A''b'' - B''a'' = 0$, sera de 8 dimensions, ou chaque terme sera composé de 8 lettres. Or, en développant cette équation, on trouve, qu'elle est divisible par $Ad - Da$, de sorte qu'elle ne sera que de 6 dimensions, savoir

$$\begin{aligned} (Ad - Da)^3 + (Ac - Ca)^2(Cb - Dc) - 2(Ab - Ba)(Ad - Da)(Cd - Dc) \\ + (Bd - Db)^2(Ab - Ba) - (Ab - Ba)(Bc - C')(Cb - Dc) = 0, \\ - (Ad - Da)(Ac - Ca)(Bd - Db) \end{aligned}$$

Si les deux équations proposées sont du quatrième degré, cette méthode conduira à une équation de 16. dimensions, mais qui se réduira à 8 dimensions, étant divisible par une formule de 8 dimensions; & ainsi de suite.

10. On voit donc que cette méthode conduit souvent à des équations trop compliquées, qui renferment des facteurs tout à fait inutiles pour le dessein qu'on a en vue. Car dans le cas des équations cubiques, il est évident que le facteur $Ad - Da$, ne satisfait point à la question, puisque l'élimination ne sauroit conduire à cette équation $Ad - Da = 0$. Donc, tant que ce facteur est contenu dans l'équation finale, on ne la peut regarder comme juste; puisqu'une équation de plusieurs dimensions ne fournit pas une solution juste d'un



d'un problème, à moins que toutes les racines ne remplissent les conditions du problème. Car, ne sachant point discerner les racines fausses des véritables, on risque de tomber dans une solution tout à fait fautive. Ainsi, quoique les équations auxquelles on parvient en suivant cette méthode, contiennent la solution véritable, elles contiennent aussi souvent des solutions fausses: ce qui est un défaut très considérable.

11. Cette circonstance m'a donné occasion de chercher une autre méthode d'éliminer, qui étant délivrée de ce défaut soit en même tems tellement fondée sur la nature des équations, qu'on puisse comprendre plus clairement la raison de toutes les opérations qu'on est obligé de faire. Or d'abord, l'idée de l'élimination ne paroissant pas assez précise, je commencerai par mieux développer cette idée, & par déterminer plus exactement, à quoi se réduit la question. Car, dès que nous nous serons formé une idée juste du sujet auquel aboutit l'élimination, nous verrons d'abord, quelles opérations on sera obligé d'entreprendre pour arriver à ce but. De plus, on se trouvera en état de donner à cette recherche une plus grande étendue, & de l'appliquer à plusieurs autres questions, qui peuvent être utiles dans l'analyse & dans la Théorie des lignes courbes.

12. Pour rendre le raisonnement plus intelligible, je ne considérerai d'abord qu'un cas particulier, où la quantité à éliminer z , monte dans une équation au troisième degré, & dans l'autre au second. Soient donc ces deux équations:

$$zz + Pz + Q = 0, \quad \& \quad z^3 + pzz + qz + r = 0,$$

où les lettres P, Q, p, q, r , renferment les autres quantités inconnues. Et on veut savoir le rapport, qui subsistera entre ces autres inconnues, après qu'on aura éliminé la quantité z . Ce rapport sera contenu dans une équation, à laquelle on parvient en éliminant z ; & cette équation contiendra les lettres P, Q, p, q, r , & déterminera par conséquent leur relation mutuelle, afin que les deux équations proposées puissent subsister. Mais, pour que ces deux équations
puissent

puissent subsister à la fois, il faut qu'il y ait une certaine valeur, qui étant mise pour z , fasse évanouir tant cette formule $zz + Pz + Q$, que l'autre $z^3 + pzz + qz + r$: c'est à dire, il faut que les deux équations proposées ayent une racine commune, qui convienne également à l'une & à l'autre.

13. Voilà donc à quoi se réduit l'élimination de la quantité z : c'est de déterminer un tel rapport entre les coefficients ou les quantités P, Q, p, q, r , afin que les deux équations proposées obtiennent une racine commune. Soit ω la valeur de cette racine commune, & $z - \omega$, fera un facteur de l'une & de l'autre: de sorte qu'on pourra mettre

$$\begin{aligned} zz + Pz + Q &= (z - \omega)(z + \mathcal{A}) \\ z^3 + pzz + qz + r &= (z - \omega)(zz + az + b) \end{aligned}$$

& de là il est clair qu'il doit y avoir

$$(zz + Pz + Q)(zz + az + b) = (z^3 + pzz + qz + r)(z + \mathcal{A})$$

Or, en égalant ces deux produits, on aura quatre égalités;

$$\begin{aligned} \text{I. } P + a &= p + \mathcal{A}; & \text{II. } Q + Pa + b &= q + p\mathcal{A}; \\ \text{III. } P\mathcal{A} + Qa &= q\mathcal{A} + r; & \text{IV. } Qb &= r\mathcal{A}. \end{aligned}$$

d'où l'on déterminera aisément les trois nouvelles lettres \mathcal{A}, a & b , & ensuite on obtiendra l'équation cherchée, qui contient la relation requise entre les coefficients P, Q, p, q, r , ou qui sera celle qu'on trouveroit par l'élimination de z .

14. Cette détermination se fera sans aucun obstacle, puisqu'on n'aura à résoudre que des équations simples. Car la première égalité donne $\mathcal{A} = P - p + a$, & la seconde $b = q + p\mathcal{A} - Q - Pa$; ou bien $b = q + Pp - pp + pa - Q - Pa$; & ces valeurs étant substituées dans la troisième égalité, donnent

$$Pq + PPp - Ppp - PQ + P(p - P)a + Qa = Pq - pq + qa + r,$$



ou bien

$$Pp(P-p) + pq - PQ - r = P(P-p)a - (Q-q)a,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{Pp(P-p) + pq - PQ - r}{P(P-p) - (Q-q)} = p - \frac{Q(P-p) - r}{P(P-p) - (Q-q)}$$

Or les mêmes valeurs donnent pour la quatrième égalité

$$Qq + PQp - Qpp - QQ + Q(p-P)a = r(P-p) + ra,$$

$$\text{ou } a = \frac{Qr(P-p) - Q(Q-q) - r(P-p)}{Q(P-p) + r} = p - \frac{Q(Q-q) - Pr}{Q(P-p) + r}.$$

Donc, égalant ces deux valeurs, on aura:

$$\frac{Q(P-p) + r}{P(P-p) - (Q-q)} = \frac{Q(Q-q) + Pr}{Q(P-p) + r}, \text{ ou bien}$$

$$Q(P-p)(Pq - Qp) + 2Qr(P-p) + Pr(Q-q) - PPr(P-p) + Q(Q-q)^2 + rr = 0.$$

15. Maintenant il est évident, comment il s'y faut prendre pour éliminer l'inconnue z , de deux équations proposées d'un degré quelconque. Car, soient en général les équations proposées:

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + Sz^{m-4} + \&c. = 0,$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + sz^{n-4} + \&c. = 0,$$

d'où il faut fournir une équation qui ne contienne plus la quantité z . Cette question revient donc à celle-ci, qu'on détermine le rapport entre les coefficients $P, Q, R, \&c.$ $p, q, r, \&c.$ afin que les deux équations proposées obtiennent une racine commune, ou bien un facteur commun. Soit $z = \omega$, ce facteur commun, & on posera

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c. = (z-\omega)(z^{m-1} + \mathcal{A}z^{m-2} + \mathcal{B}z^{m-3} + \&c.)$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c. = (z-\omega)(z^{n-1} + a z^{n-2} + b z^{n-3} + \&c.).$$



16. On aura donc à rendre égaux entr'eux les deux produits suivans :

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c.) (z^{n-1} + az^{n-2} + bz^{n-3} + \&c.), \&$$

$$(z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c.) (z^{m-1} + Az^{m-2} + Bz^{m-3} + \&c.)$$

& puisque les premiers termes deviennent déjà égaux, le nombre des égalités qu'on en tirera, sera $= m + n - 1$. Or le nombre des lettres $A, B, C, \&c.$ étant $= m - 1$, & des lettres $a, b, c, \&c.$ $= n - 1$, le nombre de toutes ces lettres ensemble, dont il faudra chercher les valeurs, sera $= m + n - 2$; & pour cet effet autant d'équations seront suffisantes. Ayant donc une équation de plus, on parviendra enfin à une équation, qui ne contiendra plus aucune de ces lettres $A, B, \&c.$ & $a, b, \&c.$ & comme z , ne s'y trouvera pas non plus, ce sera l'équation cherchée, à laquelle l'élimination conduit; ou qui contient la relation requise entre les coefficients $P, Q, R, \&c.$ $p, q, r, \&c.$ afin que les deux équations proposées obtiennent une racine commune.

17. Ayant donc mis dans tout son jour la nature de l'élimination, & des opérations qu'on doit exécuter pour cet effet, il sera aisé de s'en servir en chaque cas proposé. Pour en donner un exemple, je rapporterai un problème proposé dans les Actes de Leipzig, au mois d'Octobre 1749, qui porte qu'une équation carré-carrée $x^4 = px^2 + qx + r$, étant proposée, où le second terme manque, on en trouve une autre $x^4 = fx^2 + gx + hx + r$, pourvue du second terme, & où le dernier terme soit le même que dans la proposée, & qui ait avec l'autre une racine commune. Ou bien, il faut trouver l'équation qui résulte en éliminant de ces deux équations la quantité x : car cette équation contiendra le rapport que doivent avoir les coefficients f, g, h , à l'égard des quantités données p, q, r , afin que ces deux équations obtiennent une racine commune.



18. Pour résoudre donc ce problème, on n'a qu'à résoudre cette équation :

$$(x^4 - px^3 - qx^2 - rx - r)(x^3 + Axx + Bx + C) = (x^4 - fx^3 - gx^2 - hx - r)(x^3 + Dxx + Ex + F)$$

d'où l'on tire les égalités suivantes :

$$A = D - f;$$

$$B - p = E - Df - g;$$

$$C - Ap - q = F - Ef - Dg - h;$$

$$- Bp - Aq - r = - Ff - Eg - Dh - r;$$

$$- Cp - Bq - Ar = - Fg - Eh - Dr;$$

$$- Cq - Br = - Fh - Er;$$

$$- Cr = - Fr.$$

Les deux premières avec la dernière donnent d'abord

$$A = D - f; \quad B = E - Df - g + p; \quad \& \quad C = F,$$

lesquelles valeurs étant substituées dans les autres produiront :

$$Dp - fp + q - Ef - Dg - h = 0;$$

$$Ep - Dfp - gp + pp + Dq - fq - Ff - Fg - Dh = 0;$$

$$Fp + Eq - Dfq - gq + rq - fr - Fg - Eh = 0;$$

$$Fq - Dfr - gr + pr - Fh = 0.$$

19. La première & la dernière de ces égalités fournissent

$$E = \frac{D(p-g)}{f} - p + \frac{(q-h)}{f}, \quad \& \quad F = \frac{Dfr - r(p-g)}{q-h},$$

& de là les deux autres égalités prendront les formes suivantes;

$$Df^3r + Dffp(q-h) - Df(q-h)^2 - D(p-g)^2(q-h) = (p-g)(q-h)^2 - ff(q-h) + ffr(p-g),$$

$$D(p-g)(q-h)^2 - Dffq(q-h) + Dffr(p-g) = ffr(q-h) + fr(p-g)^2 - fhp(q-h) + fgq(q-h) - (q-h)^3$$

d'où



d'où nous tirons enfin cette équation :

$$\begin{aligned}
 f^4 r r - f^3 r (g q + 2 h p - 3 p q) - 2 f f r (q - h)^2 - 4 f r (p - g)^2 (q - h) \\
 - f^3 q q (q - h) + f f p r (p - g)^2 + f (p q - 2 h p - 3 g q) (q - h)^2 \\
 - f f p (h p - g q) (q - h) \\
 = r (p - g)^4 - (h p - g q) (p - g)^2 (q - h) - (q - h)^4.
 \end{aligned}$$

20. On aura donc une équation du quatrième degré à résoudre, soit qu'on veuille déterminer f , ou g , ou h , pour que l'équation $x^4 = f x^3 + g x x + h x + r$, ait une racine commune avec l'équation proposée $x^4 = p x x + q x + r$. Mais, si l'on vouloit déterminer le terme absolu r commun à ces deux équations, en regardant les autres coefficients f , g , h , p , q , comme connus, cela se pourroit faire par la résolution d'une équation quarrée. On pourra même supposer d'abord $f = 0$, & déterminer l'un ou l'autre des coefficients, g & h , en sorte que ces deux équations :

$x^4 = g x x + h x + r$, & $x^4 = p x x + q x + r$,
obtiennent une racine commune; ce qui arrivera en satisfaisant à cette équation.

$r (p - g)^4 = (h p - g q) (p - g)^2 (q - h) + (q - h)^4$,
d'où l'on voit que cela se peut faire, sans que soit $g = p$ & $h = q$.

21. Mais la méthode que je viens d'expliquer, s'étend beaucoup plus loin qu'au seul ouvrage de l'élimination: & on peut à son aide résoudre quantité de problèmes, qui pourront être fort importants, tant dans l'Analyse que dans la Théorie des lignes courbes. C'est aussi de ce côté que je crois que cette méthode mérite quelque attention: car, si elle étoit bornée uniquement aux opérations d'éliminer, je conviens que la préférence qu'elle mériteroit sur les autres méthodes trouvées pour ce dessein, ne seroit pas fort considérable: si ce n'étoit qu'elle nous découvre mieux la nature de l'élimination. Voici donc un autre problème, pour la résolution duquel cette méthode pourra être employée.



Deux équations algébriques indéterminées étant proposées, trouver les déterminations nécessaires pour que ces équations obtiennent deux racines communes.

22. Soit l'une de ces deux équations du troisieme, & l'autre du quatrieme degré.

$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0$, & $z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0$,
où l'on demande quel rapport doit subsister entre les coefficients, afin que ces deux équations ayant deux racines, ou deux facteurs simples communs. Soient $z + a$, & $z + \mathcal{E}$, ces deux facteurs communs, & les deux équations, doivent avoir les formes suivantes:

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = (z + a)(z + \mathcal{E})(z + A)$$

$$z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = (z + a)(z + \mathcal{E})(zz + az + b),$$

d'où l'on tirera d'abord celle-ci:

$$(z^3 + Pz^2 + Qz + R)(zz + az + b) =$$

$$(z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s)(z + A).$$

où il faut que chaque puissance de z soient égalées entr'elles.

23. De là on tirera les cinq égalités suivantes

$$P + a = p + A$$

$$Q + aP + b = q + Ap \quad aR + bQ = s + Ar$$

$$R + aQ + bP = r + Aq \quad bR = As.$$

La premiere & la derniere donnent

$$a = p + A - P, \quad \& \quad b = \frac{As}{R},$$

& ces valeurs étant substituées dans les trois autres :

$$A(PR - pR + s) = PR(P - p) - R(Q - q)$$

$$A(QR - qR + Ps) = QR(P - p) - R(R - r)$$

$$A(RR - Rr + Qs) = RR(P - p) + Rs.$$

D'où



D'où l'on tire, en éliminant A , ces deux équations :

$$\begin{aligned} 0 &= s^5 + 2Rs(P-p) - PQs(P-p) + Q(Q-q) + R(P-p)(Pr-Rp) \\ &\quad + R(Q-q)(R-r) \\ 0 &= Pss + R(Q-q) + PR(P-p) + R(P-p)(Qr-Rq) \\ &\quad + Qs(R-r) - QQs(P-p) + R(R-r)^2 \end{aligned}$$

qui renferment les déterminations requises.

24. Si les deux équations proposées sont d'un ordre quelconque, comme

$$\begin{aligned} z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \&c. = 0, \\ z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + \&c. = 0, \end{aligned}$$

& qu'on veuille déterminer le rapport entre leurs coefficients, afin que ces deux équations aient deux racines communes, on trouvera par un semblable raisonnement, qu'il faut tellement satisfaire à cette équation

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c.)(az^{n-2} + bz^{n-3} + cz^{n-4} + \&c.) = (z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c.)(z^{m-2} + Az^{m-3} + Bz^{m-4} + \&c.)$$

que les coefficients de chaque puissance de z , deviennent égaux de part & d'autre.

25. Or, en rendant ces termes égaux, on obtiendra $m + n - 2$ égalités. Mais le nombre des coefficients inconnus $A, B, C, \&c.$ étant $= m - 2$, & des autres $a, b, c, \&c.$ $= n - 2$, pour déterminer tous ces coefficients, on n'aura besoin que de $m + n - 4$ égalités. Donc, après avoir déterminé tous ces coefficients inconnus, on trouvera encore deux équations entre les coefficients $P, Q, R, \&c.$ & $p, q, r, \&c.$ qui renfermeront les conditions requises, afin que les deux équations proposées aient deux racines communes. Cette détermination servira dans la Théorie des lignes courbes à trouver les cas où deux courbes se coupent tellement en deux points, que ces deux intersections répondent à la même abscisse, indiquée par z .

26. Après



26. Après ce que je viens de dire, il ne sera pas difficile de trouver les conditions sous lesquelles deux équations d'un ordre quelconque acquierent trois racines communes. Car, si les deux équations proposées sont

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + \&c. = 0,$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + \&c. = 0,$$

on n'aura qu'à former cette équation :

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \&c.)(z^{n-3} + az^{n-4} + bz^{n-5} + \&c.) =$$

$$(z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \&c.)(z^{m-3} + Az^{m-4} + Bz^{m-5} + \&c.)$$

& rendre égaux les coefficients de chaque puissance de z . Cette opération, après avoir déterminé les coefficients $A, B, C, \&c. a, b, c, \&c.$ conduira à trois équations entre les coefficients proposés, qui renfermeront les conditions requises, pour que ces deux équations obtiennent trois racines communes.

27. De là il est allés clair, comment on pourra trouver les déterminations nécessaires, pour que deux équations proposées obtiennent quatre ou plusieurs racines communes; & ces conditions seront toujours comprises en autant d'équations, qu'il y a de racines qui doivent être communes aux équations proposées. Comme la méthode que je viens d'indiquer pour cet effet, est tout à fait semblable à celle qui sert à l'élimination, qui est le cas, où deux équations doivent avoir une racine commune, j'ai cru qu'elle méritoit quelque attention; & cela d'autant plus que les méthodes ordinaires, dont on fait usage dans l'ouvrage de l'élimination, ne sont pas suffisantes à résoudre les autres problèmes que je viens de rapporter.

