



1766

Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

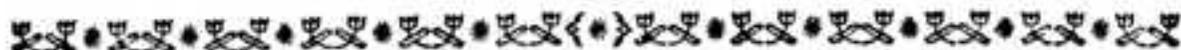
2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes" (1766). *Euler Archive - All Works*. 308.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/308>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



R E C H E R C H E S

S U R

LE MOUVEMENT DE ROTATION
DES CORPS CELESTES.

P A R M. E U L E R.

I.

Si les corps celestes étoient parfaitement sphériques, ou que leurs momens d'inertie par rapport à leurs axes principaux fussent égaux entr'eux, quelque mouvement de rotation qu'ils eussent reçu une fois, ils le conserveroient toujours, sans changer ni de vitesse ni d'axe de rotation, qui demeureroit toujours dirigé vers les mêmes points du ciel; & les forces dont ce corps est sollicité vers les autres corps celestes, ne troubleroient rien dans son mouvement de rotation, puisque la force moyenne qui en résulte, passeroit par le centre d'inertie du corps, comme je l'ai fait voir dans un Mémoire précédent. Mais si un corps celeste n'est pas sphérique, ou que ses momens d'inertie par rapport à ses trois axes principaux ne sont pas égaux, & qu'il ait commencé à tourner autour d'un axe différent de ses axes principaux, alors quand même il n'y auroit point de forces sollicitantes, son mouvement de rotation seroit troublé, & l'axe de rotation changeroit de direction: comme j'ai démontré dans un autre Mémoire, qui précède celui-ci.

2. De là il s'enfuit, que si le mouvement de rotation d'un corps celeste n'est pas uniforme, ou que l'axe de rotation ne se trouve pas toujours dirigé vers les mêmes points du ciel, ce corps n'a pas certainement cette propriété, que ses momens d'inertie par rapport à ses axes principaux soient égaux entr'eux, mais qu'il y aura une inéga-



lité entre les momens d'inertie principaux. Donc, puisque l'axe de la terre n'est pas toujours dirigé vers les mêmes points du ciel, quoique le mouvement diurne paroisse uniforme, nous en devons conclure que les momens d'inertie de la terre ne sont pas égaux entr'eux. Une semblable inégalité doit avoir lieu dans la lune, puisque son mouvement de rotation n'est pas uniforme, & qu'on y observe outre cela un changement dans la position de son axe de rotation.

Fig. 1.

3. Quand il s'agit du mouvement de la terre, il faut observer que l'axe de la terre est différent de l'axe de rotation; car, puisque l'axe de la terre se trouve dans un mouvement continuel à cause de sa nutation & de la précession des équinoxes, il ne convient jamais avec l'axe de rotation, qui à chaque instant est absolument immobile, faisant abstraction du mouvement annuel. Pour mettre cette distinction dans tout son jour, considérons une sphère décrite autour du centre de la terre, à la surface de laquelle soit maintenant le pôle de la terre en A , qui avance pendant un petit tems dt en a , décrivant autour d'un point fixe P l'angle infiniment petit $APa = d\omega$, mais que la terre elle-même se tourne cependant autour du pôle A par le petit angle $ZAs = d\phi$. Cela posé, il y aura dans l'arc PA un point O , qui par ce double mouvement demeurera en repos; car, en vertu du pôle, il décrit l'arc $O\omega = d\omega \sin PO$, & à cause du mouvement diurne, l'arc $Oo = a\phi \sin AO$. Posons donc ces deux arcs égaux

$$\text{entr'eux, \& nous trouverons: } \operatorname{tang} AO = \frac{d\omega \sin AP}{d\phi + d\omega \operatorname{cof} AP},$$

& O sera le point de la terre qui pour cet instant demeure en repos.

4. Ce n'est donc pas le pôle de la terre A , mais un autre point O qui est immobile pendant un instant, & partant la ligne droite tirée du centre de la terre de ce point O sera l'axe de rotation, & non pas l'axe de la terre, qui passe par le point A . Il est bien vrai que la différence, ou l'arc AO , est si petit, qu'il ne sauroit entrer en aucune considération, puisque le rapport de $d\omega$ à $d\phi$ est comme

50''



50'' à $365\frac{1}{4} \cdot 360^\circ$, ou $\frac{d\omega}{d\phi} = \frac{1}{25920 \cdot 365\frac{1}{4}}$, & à cause de

sin AP = $\frac{2}{3}$ environ, tang AO = $\frac{1}{64800 \cdot 365\frac{1}{4}}$, de sorte que

l'intervalle AO n'est que la $\frac{1}{175}$ partie d'une seconde, ou une demitierce à peu près. Mais, si le mouvement du pole étoit plus rapide par rapport au mouvement diurne, ce qui pourroit bien arriver dans les autres planetes, il faudroit soigneusement distinguer l'axe de rotation de la terre ou planete. Car l'axe de la terre est une ligne fixe dans le corps de la terre, mais mobile à l'égard du ciel: or l'axe de rotation n'est pas une ligne fixe dans la terre, mais quand la ligne tirée du centre de la terre par le point O est à présent l'axe de rotation, après le tems dt , la ligne tirée au point ω sera l'axe de rotation, de sorte que l'axe de rotation change continuellement tant à l'égard de la terre qu'à l'égard du ciel.

5. Voilà donc une double maniere de représenter le mouvement diurne de la terre. L'une est celle, dont on se sert dans l'Astronomie, où l'on conçoit une ligne fixe dans la terre, qu'on nomme son axe, autour duquel on dit que la terre tourne, pendant que cette ligne elle-même a un mouvement autour des poles de l'écliptique, qu'on regarde comme des points fixes dans le ciel. L'autre maniere est la plus propre pour la Mécanique, où l'on marque pour chaque tems les points au ciel, autour desquels la terre tourne alors: cette maniere est l'unique dans son espece, & parfaitement déterminée par le mouvement de la terre, au lieu que selon la premiere le même mouvement pourroit être représenté d'une infinité de manieres différentes. Car, au lieu de l'axe, on pourroit considérer une autre ligne fixe quelque dans la terre, & assigner son mouvement dans le ciel, ensuite il faudroit définir le mouvement dont la terre tourneroit cependant autour de cette ligne. Mais il faut avouer que la maniere dont on se sert actuellement, est la plus simple dans son espece, & nous représente le plus intelligiblement le mouvement de la terre: elle semble



même plus claire, que l'autre qui est fondée sur l'axe de rotation : quoique je fois obligé de suivre celle-ci dans les recherches présentes.

6. Avant que d'examiner, combien le mouvement de rotation d'un corps celeste est troublé par les forces dont il est sollicité vers les autres corps celestes, il sera bon d'expliquer, quel devroit être leur mouvement de rotation, s'ils n'étoient pas assujettis à de telles forces. Je passe donc le cas, où tous les momens d'inertie d'un corps celeste sont égaux entr'eux, puisqu'alors non seulement le mouvement de rotation seroit uniforme & l'axe de rotation immobile, mais que les forces sollicitantes elles-mêmes n'y sauroient rien déranger. J'envisage le corps celeste, dont il s'agit de déterminer le mouvement de rotation, comme ayant ses momens d'inertie par rapport à ses trois axes principaux, inégaux entr'eux ; & d'abord je remarque, que si ce corps avoit reçu une fois un mouvement de rotation autour de quelqu'un de ses axes principaux, cet axe demeureroit dirigé constamment vers les mêmes points du ciel, & la vitesse angulaire demeureroit toujours la même. Il y a grande apparence, que si la terre n'étoit point assujettie aux forces du soleil & de la lune, son axe de rotation demeureroit immobile, d'où il faut conclure, que la ligne droite que nous nommons son axe, est un de ses trois axes principaux.

7. Cette observation me conduit à une réflexion, qui ne paroit pas peu importante. Puisque le centre d'inertie de la terre est situé dans son axe, il n'est pas encore décidé, s'il se trouve au milieu de l'axe, où s'il est plus proche de l'un, ou de l'autre pôle : ou plutôt s'il tombe dans le plan de l'équateur, ou de quelqu'autre cercle parallele. On comprend aisément que les phénomènes communs ne sauroient rien décider la dessus, mais peut-être quelques effets de l'action de la lune nous pourront donner quelques éclaircissements. M. Meyer, cet habile Astronome de Gœttingue, à qui l'Astronomie est redevable de tant d'importantes découvertes, croit avoir de fortes raisons de soutenir, que le centre d'inertie de la terre ne se trouve pas au milieu de l'axe, ou dans le plan de l'équateur, mais dans un certain cercle parallele,



lele, dont la détermination mérite sans doute tous les soins possibles des Astronomes. C'est dans ce cercle parallèle que doivent exister les deux autres axes principaux de la terre.

8. Mais, si la terre n'avoit pas reçu un mouvement de rotation autour de quelqu'un de ses trois axes principaux, le phénomène de son mouvement diurne ne seroit plus si simple, & demanderoit bien de l'adresse, pour le représenter justement; quand même il n'y auroit point de forces qui le troublassent. Quoique ce cas n'ait pas lieu dans la terre, il pourroit bien exister dans quelque'autre planète, & mérite par cette raison d'être développé plus soigneusement: peut-être que c'est de là que les irrégularités qu'on remarque dans le mouvement de rotation de Venus, tirent leur origine: & partant il sera bon d'en traiter plus particulièrement, tout comme s'il avoit lieu dans la terre. Dans ce cas, il ne seroit point question de l'axe de la terre; on verroit bien dans le ciel des points immobiles pour quelque tems, autour desquels le ciel sembleroit tourner, mais ces points changeroient continuellement de place, & il pourroit arriver que le mouvement de rotation ne fût pas même uniforme. Ces irrégularités embarrasseroient sans doute beaucoup les Astronomes.

9. Remontons au commencement, ou à une époque fixe, & que les trois axes principaux de la terre aient été alors dirigés vers les points du ciel A , B , C . Supposons de plus que la terre ait eu alors un mouvement de rotation autour du point D dans le sens ABC avec une vitesse angulaire $= e$. Du point D qu'on conçoive tiré aux points A , B , C , des arcs de grands cercles, & nommons ces arcs $DA = a$, $DB = b$, & $DC = c$: Or, pour la constitution de la terre elle-même, soient ses momens d'inertie par rapport à l'axe $A = Maa$, à l'axe $B = Mbb$, & à l'axe $C = Mcc$, que je suppose connus. Maintenant, pour représenter le plus simplement qu'il soit possible le mouvement de rotation, dont la terre sera portée dans la suite, il faut le rapporter toujours à un cer-

Fig. 2.

tain point fixe du ciel, duquel tirant aux points \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , des arcs de grands cercles il soit :

$$\text{col } \mathfrak{A}P = \frac{eaa \text{ col } a}{\sqrt{G}}; \text{ col } \mathfrak{B}P = \frac{ebb \text{ col } b}{\sqrt{G}}; \text{ col } \mathfrak{C}P = \frac{ecc \text{ col } c}{\sqrt{G}},$$

posant $\sqrt{G} = e\sqrt{(a^4 \text{ col } a^2 + b^4 \text{ col } b^2 + c^4 \text{ col } c^2)}$.

10. Pour connoître mieux ce point important du ciel P , sachant la position des axes principaux \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , à cet instant, qu'on regarde principalement à l'axe \mathfrak{A} , & on aura

$$\text{col } \mathfrak{B}\mathfrak{A}P = \frac{bb \text{ col } b}{\sqrt{(b^4 \text{ col } b^2 + c^4 \text{ col } c^2)}}, \quad \&$$

$$\text{sin } \mathfrak{B}\mathfrak{A}P = \frac{cc \text{ col } c}{\sqrt{(b^4 \text{ col } b^2 + c^4 \text{ col } c^2)}},$$

de sorte que $\text{tang } \mathfrak{B}\mathfrak{A}P = \frac{cc \text{ col } c}{bb \text{ col } b}$ ayant

$$\text{col } \mathfrak{A}P = \frac{aa \text{ col } a}{\sqrt{(a^4 \text{ col } a^2 + b^4 \text{ col } b^2 + c^4 \text{ col } c^2)}},$$

d'où la position du point P est déterminée le plus commodement. Ici il faut remarquer que, si les momens principaux de la terre étoient égaux entr'eux, ou $aa = bb = cc$, à cause de $\sqrt{G} = eaa$, puisque $\text{col } a^2 + \text{col } b^2 + \text{col } c^2 = 1$, on auroit

$$\text{col } \mathfrak{A}P = \text{col } a, \quad \text{col } \mathfrak{B}P = \text{col } b, \quad \& \quad \text{col } \mathfrak{C}P = \text{col } c,$$

& partant le point P tomberoit dans le point \mathfrak{D} . Donc, si les momens d'inertie de la terre sont à peu près égaux, on conçoit que le point P ne sera pas fort éloigné du point \mathfrak{D} ; c'est pourquoi il faut concevoir le point P placé au dedans du triangle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, dans lequel se trouve le point \mathfrak{D} . Car, puisque les axes principaux passent en deux points opposés par la sphere, on peut toujours former un triangle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, dans lequel soit le point \mathfrak{D} .

11. Introduifons ce point P dans le calcul, & posons pour le commencement, ou notre époque, les arcs

$$P\mathcal{A} = l, \quad P\mathcal{B} = m, \quad \& \quad B\mathcal{C} = n,$$

& foit $\mathcal{G} = a^4 \operatorname{cof} a^2 + b^4 \operatorname{cof} b^2 + c^4 \operatorname{cof} c^2$, de forte que $\sqrt{G} = e\sqrt{\mathcal{G}}$, &

$$\operatorname{cof} l = \frac{aa \operatorname{cof} a}{\sqrt{\mathcal{G}}}; \quad \operatorname{cof} m = \frac{bb \operatorname{cof} b}{\sqrt{\mathcal{G}}}; \quad \operatorname{cof} n = \frac{cc \operatorname{cof} c}{\sqrt{\mathcal{G}}},$$

& $\mathcal{G} \left(\frac{\operatorname{cof} l^2}{a^4} + \frac{\operatorname{cof} m^2}{b^4} + \frac{\operatorname{cof} n^2}{c^4} \right) = 1$; par conféquent

pour le pole de rotation \mathcal{O} au même tems:

$$\operatorname{cof} a = \frac{\sqrt{\mathcal{G}}}{aa} \operatorname{cof} l; \quad \operatorname{cof} b = \frac{\sqrt{\mathcal{G}}}{bb} \operatorname{cof} m; \quad \operatorname{cof} c = \frac{\sqrt{\mathcal{G}}}{cc} \operatorname{cof} n,$$

& pour l'angle $P\mathcal{A}\mathcal{B}$, si l'on en veut faire usage:

$$\operatorname{cof} P\mathcal{A}\mathcal{B} = \frac{\operatorname{cof} m}{\sin l}, \quad \& \quad \sin P\mathcal{A}\mathcal{B} = - \frac{\operatorname{cof} n}{\sin l}.$$

de forte que posant cet angle $P\mathcal{A}\mathcal{B} = r$ on ait $\operatorname{tang} r = - \frac{\operatorname{cof} n}{\operatorname{cof} m}$.

Ces quantités regardent l'état initial, ou l'époque fixe, & dépendent de la position de l'axe de rotation \mathcal{O} par rapport aux axes principaux du corps. Ensuite je suppose que le corps ait tourné alors dans le sens $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ avec la vitesse angulaire $= e$, où e marque l'angle décrit dans une seconde.

12. Ayant établi ces élémens, on demande quel sera l'état & le mouvement du corps après un tems quelconque, que je pose $= t$ secondes. Que les axes principaux soient parvenus alors en A, B, C , & que le corps tourne présentement autour de l'axe de rotation \mathcal{O} dans le sens ABC avec la vitesse angulaire $= x$. Pour cet effet posons



posons pour abrégé $\frac{bb-cc}{aa} = A$; $\frac{cc-aa}{bb} = B$; $\frac{aa-bb}{cc} = C$,

comme dans le Mémoire précédent, où j'ai donné la solution de cette question. Et au lieu de la lettre u j'écris ici Gv , & d'abord il faut construire cette équation différentielle:

$$e dt \sqrt{\mathfrak{G}} = \frac{a a b b c c d v}{\sqrt{(\cos l^2 + 2Aa^4v)(\cos m^2 + 2Bb^4v)(\cos n^2 + 2Cc^4v)}}$$

de sorte que pour chaque tems proposé on puisse assigner la quantité v qui évanouisse au commencement, où $t = 0$. Il est à remarquer, que des lettres A, B, C , il y en a nécessairement une au moins négative; & partant cette construction peut être tirée du mouvement d'un pendule, qui se meut dans un cercle. Ou du moins, pour chaque cas il ne sera pas difficile de dresser des tables, qui marquent pour chaque tems la valeur de v .

13. Alors, posant l'angle $\mathfrak{A}PA = \lambda$, qui marque combien l'axe principal A est avancé, depuis le commencement, en sens contraire au mouvement de rotation, on aura

$$d\lambda = e dt \sqrt{\mathfrak{G}} \cdot \frac{bb \cos n^2 + cc \cos m^2 - 2A a a b b c c v}{bb c c (\sin l^2 - 2A a^4 v)},$$

de sorte que la vitesse angulaire, dont le point A avance présentement autour du point fixe P , soit:

$$e \sqrt{\mathfrak{G}} \cdot \frac{bb \cos n^2 + cc \cos m^2 - 2A a a b b c c v}{bb c c (\sin l^2 - 2A a^4 v)},$$

cette vitesse angulaire ayant été au commencement

$$= e \sqrt{\mathfrak{G}} \cdot \frac{bb \cos n^2 + cc \cos m^2}{bb c c \sin l^2}.$$

De la même manière, on pourra assigner de combien les deux autres axes principaux B & C seront avancés autour du point fixe P depuis

puis leur position initiale \mathfrak{B} & \mathfrak{C} . Or alors on aura pour les arcs PA, PB, PC

$$\begin{aligned} \text{cof PA} &= \sqrt{(\text{cof } l^2 + 2 A a^4 v)}; & \text{cof PB} &= \sqrt{(\text{cof } m^2 + 2 B b^4 v)}; \\ & & \text{cof PC} &= \sqrt{(\text{cof } n^2 + 2 C c^4 v)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{fin PA} &= \sqrt{(\text{fin } l^2 - 2 A a^4 v)}; & \text{fin PB} &= \sqrt{(\text{fin } m^2 - 2 B b^4 v)}; \\ & & \text{fin PC} &= \sqrt{(\text{fin } n^2 - 2 C c^4 v)}, \end{aligned}$$

d'où la véritable position des trois axes principaux A, B, C, sera connue.

14. Mais, ayant trouvé celle d'un seul axe A, les deux autres seront plus aisément déterminés par l'angle PAB, pour lequel nous avons:

$$\text{cof PAB} = \sqrt{\frac{\text{cof } m^2 + 2 B b^4 v}{\text{fin } l^2 - 2 A a^4 v}}, \quad \&$$

$$\text{fin PAB} = - \sqrt{\frac{\text{cof } m^2 + 2 C c^4 v}{\text{fin } l^2 - 2 A a^4 v}}.$$

Cet angle étant donc variable, son incrément pour l'élément du tems dt se trouve

$$\frac{d.PAB}{dt} = \frac{-e\sqrt{\mathfrak{G}}}{aabbcc} \cdot \frac{(Cc^4 \text{cof } m^2 - Bb^4 \text{cof } n^2) \sqrt{(\text{cof } l^2 + 2 A a^4 v)}}{\text{fin } l^2 - 2 A a^4 v},$$

ce qui est la vitesse angulaire dont l'angle PAB diminue, de sorte qu'au commencement, la vitesse angulaire, dont l'angle PAB a diminué,

$$\text{fût} = \frac{e\sqrt{\mathfrak{G}}}{aabbcc} \cdot \frac{(Cc^4 \text{cof } m^2 - Bb^4 \text{cof } n^2) \text{cof } l}{\text{fin } l^2}.$$

Il faut ici remarquer, qu'à cause des valeurs supposées des lettres A, B, C, il y a tant $A a^2 + B b^2 + C c^2 = 0$, que $A a^4 + B b^4 + C c^4 = 0$.

15. Cela pourroit suffire pour la connoissance du mouvement, ayant déterminé l'angle $\mathfrak{A}PA$, l'arc PA, & l'angle PAB,

d'où l'on connoit pour chaque tems proposé la position du corps à l'égard du ciel, & partant réciproquement, la position apparente du ciel. Mais on peut outre cela remarquer, que le corps tournera alors avec la vitesse angulaire $\varepsilon = \frac{eV}{(1 + 2(A + B + C)\mathcal{G}v)}$ dans le sens ABC autour de l'axe de rotation, dont la position est telle que

$$\begin{aligned} \text{cof AO} &= \frac{V\mathcal{G}(\text{cof } l^2 + 2Aa^4v)}{aaV(1 + 2(A + B + C)\mathcal{G}v)} = \frac{V(\text{cof } a^2 + 2A\mathcal{G}v)}{V(1 - 2ABC\mathcal{G}v)} \\ \text{cof BO} &= \frac{V\mathcal{G}(\text{cof } m^2 + 2Bb^4v)}{bbV(1 + 2(A + B + C)\mathcal{G}v)} = \frac{V(\text{cof } b^2 + 2B\mathcal{G}v)}{V(1 - 2ABC\mathcal{G}v)} \\ \text{cof CO} &= \frac{V\mathcal{G}(\text{cof } n^2 + 2Cc^4v)}{ccV(1 + 2(A + B + C)\mathcal{G}v)} = \frac{V(\text{cof } c^2 + 2C\mathcal{G}v)}{V(1 - 2ABC\mathcal{G}v)} \end{aligned}$$

& O fera le point du ciel qui paroitra pour cet instant demeurer en repos.

16. Cette représentation du mouvement devient beaucoup plus simple, si les momens d'inertie du corps par rapport aux deux axes B & C sont égaux entr'eux ou $cc = bb$; car, puisque alors

$$A = 0, \quad B = -C = 1 - \frac{aa}{bb}, \quad \&$$

$$\mathcal{G} = a^4 \text{cof } a^2 + b^4 (\text{cof } b^2 + \text{cof } c^2) = a^4 \text{cof } a^2 + b^4 \sin a^2,$$

ou $\mathcal{G} \left(\frac{\text{cof } l^2}{a^4} + \frac{\sin l^2}{b^4} \right) = 1$, l'arc P $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ demeure toujours de la même quantité, ou PA = P \mathcal{A} tourne autour du point P uniformement avec la vitesse angulaire $= \frac{eV\mathcal{G}}{bb}$: dans le sens $\mathcal{A}A$.

Outre cela, la vitesse dont l'arc AB tourne cependant autour du point A, par laquelle l'angle PAB va en diminuant, est aussi constante

$$= \frac{eV\mathcal{G}}{aa b^4} - B b^4 \text{cof } l = \left(\frac{aa}{bb} - 1 \right) \cdot \frac{e \text{cof } l}{aa} V\mathcal{G}.$$

Par conséquent la vitesse angulaire de l'arc PA = l autour du point fixe



fixe P dans le sens $\mathcal{A}A$, est à la vitesse angulaire dont le corps tourne cependant autour du point A en sens contraire BP, comme 1 à

$\left(1 - \frac{bb}{aa}\right) \cos l$. Voilà donc ce mouvement représenté de la même

manière que l'on est accoutumé d'envisager le mouvement de la terre, entant que l'axe de la terre est mobile autour des poles de l'écliptique.

17. Un tel mouvement pourra être représenté par le moyen d'une Machine de la manière suivante. Soit PQRS un cercle librement mobile autour des tourillons P & R diamétralement opposés: & que dans ce cercle, en A & D, soit enchassé l'axe AD d'un corps $asdg$, autour duquel le corps puisse tourner librement, pendant que le cercle lui même tourne autour des tourillons P & R. Maintenant pour représenter le mouvement du §. précédent l'un & l'autre mouvement de rotation doit être uniforme, mais en sorte que l'un soit dirigé en sens contraire à l'égard de l'autre: supposant $aa > bb$, & que la vitesse angulaire du cercle autour des tourillons P & R, soit à celle

du corps autour de l'axe AD comme 1 à $\left(1 - \frac{bb}{aa}\right) \cosin PA$.

D'où l'on voit que le mouvement du corps est beaucoup plus lent que celui de l'axe AD, & évanouiroit tout à fait au cas $aa = bb$. Or dans le cas au $aa < bb$ l'un & l'autre mouvement seroit dirigé en même sens. Un tel mouvement se soutiendrait par soi-même, & n'auroit pas besoin de forces étrangères.

18. Par une semblable machine on pourroit aussi représenter en général le mouvement déterminé ci-dessus d'un corps dont tous les momens principaux d'inertie sont inégaux entr'eux. Mais alors l'axe AD doit être enchassé en sorte dans le cercle, que les points A & D puissent être plus ou moins éloignés des tourillons P & R: & outre cela ni l'un ni l'autre mouvement de rotation ne sera pas uniforme, mais doit être réglé sur les formules trouvées ci-dessus. Pour



cet effet il faut avoir égard à la plus grande & à la plus petite valeur possible de la quantité v . Or, supposant $aa > bb$, & $bb > cc$, puisque ces trois formules doivent être réelles & ne pas surpasser l'unité,

$$\sqrt{(\cos l^2 + 2aa(bb - cc)v)}; \quad \sqrt{(\cos m^2 - 2bb(aa - cc)v)}; \\ \sqrt{(\cos n^2 + 2cc(aa - bb)v)},$$

on voit que la plus grande valeur positive de $+v$ est égale à la moindre de ces trois formules

$$\frac{\sin l^2}{2aa(bb - cc)}; \quad \frac{\cos m^2}{2bb(aa - cc)}; \quad \frac{\sin n^2}{2cc(aa - bb)},$$

& la plus grande négative valeur de $-v$ égale à la moindre de ces trois formules

$$\frac{\cos l^2}{2aa(bb - cc)}; \quad \frac{\sin m^2}{2bb(aa - cc)}; \quad \frac{\cos n^2}{2cc(aa - bb)}.$$

19. Il seroit donc possible que la terre eût un tel mouvement compliqué de rotation, sans qu'il en falût chercher la cause dans des forces étrangères. Mais, quoique l'axe de la terre ait actuellement un mouvement autour des poles de l'écliptique, ce mouvement est bien différent de celui que je viens d'exposer. Car dans la terre le mouvement de l'axe est extrêmement lent à l'égard du mouvement autour de l'axe; au lieu que, dans le mouvement décrit, le mouvement de l'axe même est beaucoup plus rapide que celui du corps autour de l'axe. Cette remarque suffit pour nous assurer, que le mouvement de l'axe de la terre, ou sa nutation, avec la précession des équinoxes, est l'effet d'une cause étrangère, sans laquelle l'axe de la terre demeureroit absolument immobile, en faisant abstraction du mouvement annuel; d'où il est encore évident que la ligne que nous nommons l'axe de la terre, est certainement un de ses trois axes principaux. Mais peut-être, dans la planète de Vénus, la chose est tout à fait différente.



20. Voyons maintenant comment ce mouvement de rotation d'un corps celeste sera troublé par quelque force étrangere, qui vient de l'attraction d'un autre corps celeste, que je nommerai un centre de force. Puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, & que je suppose le centre d'inertie du corps proposé en repos, le centre de force décrira autour de lui une certaine orbite, qui étant rapportée à une sphère fixe décrite autour du centre d'inertie du corps, soit la ligne QFS dirigée suivant l'ordre des signes celestes. Que le centre de force attire en raison réciproque du quarré des distances, & qu'à la distance $= e$, la force dont un corps y est poussé, soit précisément égale au poids que ce même corps auroit étant placé sur la terre. Or, puisque la gravité n'est pas partout la même, il faut pour cet effet choisir un certain endroit, où l'on connoisse exactement la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde. La lettre g marquera constamment cette hauteur.

Fig. 4.

21. Le point P & le cercle PQR étant pris pour des termes fixes, qu'après un tems écoulé quelconque $= t$ secondes, le centre de force réponde au point F, & soit l'arc PF $= p$, & l'angle QPF $= q$: & que s exprime la distance du centre de forces au centre d'inertie du corps proposé. Ces quantités p , q , s , pourront être considérées comme des fonctions du tems t . Qu'au même instant les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, par rapport auxquels les momens d'inertie du corps soient Ma , Mb , Mc , la masse étant $= M$, & ayant tiré de ces trois points des arcs de grands cercles, tant au point F qu'au point fixe P, soient ces arcs FA $= \zeta$, FB $= \eta$, FC $= \theta$, & PA $= l$, PB $= m$, PC $= n$. Soient de plus les angles QPA $= \lambda$, QPB $= \mu$, QPC $= \nu$, qu'il faut considérer comme négatifs à l'égard de ceux que j'ai introduits dans la solution générale, où je les avois pris du cercle opposé PSR. Enfin, que le corps tourne présentement autour du point O, dans le sens ABC, avec la vitesse angulaire $= \vartheta$, & soient les arcs OA $= \alpha$, OB $= \beta$, OC $= \gamma$, & qu'on pose $\vartheta \cos \alpha = x$, $\vartheta \cos \beta = y$, & $\vartheta \cos \gamma = z$.



22. Maintenant la force attractive du point F nous fournit les momens de forces suivans.

I. Le moment de force par rapport à l'axe IA dans le sens

$$BC = \frac{3Mee}{s^3} (cc - bb) \operatorname{cof} \eta \operatorname{cof} \theta = P.$$

II. Le moment de force par rapport à l'axe IB dans le sens

$$CA = \frac{3Mee}{s^3} (aa - cc) \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \theta = Q.$$

III. Le moment de force par rapport à l'axe IC dans le sens

$$AB = \frac{3Mee}{s^3} (bb - aa) \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \eta = R$$

Donc, si nous posons $\frac{bb - cc}{aa} = A$; $\frac{cc - aa}{bb} = B$; $\frac{aa - bb}{cc} = C$, nous aurons les équations différentielles suivantes:

$$I. \quad dx - Ayz dt + \frac{6Ag ee}{s^3} dt \operatorname{cof} \eta \operatorname{cof} \theta = 0.$$

$$II. \quad dy - Bxz dt + \frac{6Bg ee}{s^3} dt \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \theta = 0.$$

$$III. \quad dz - Cxy dt + \frac{6Cg ee}{s^3} dt \operatorname{cof} \zeta \operatorname{cof} \eta = 0.$$

$$IV. \quad dl \sin l = dt (y \operatorname{cof} n - z \operatorname{cof} m).$$

$$V. \quad dm \sin m = dt (z \operatorname{cof} l - x \operatorname{cof} n).$$

$$VI. \quad dn \sin n = dt (x \operatorname{cof} m - y \operatorname{cof} l).$$

$$VII. \quad d\lambda \sin l^2 = dt (y \operatorname{cof} m + z \operatorname{cof} n).$$

$$VIII. \quad d\mu \sin m^2 = dt (z \operatorname{cof} n + x \operatorname{cof} l).$$

$$IX. \quad d\nu \sin n^2 = dt (x \operatorname{cof} l + y \operatorname{cof} m).$$



23. Pour les arcs ζ , η , θ , ils peuvent être exprimés par les autres quantités, dont les différentiels sont déterminés par ces équations: car les principes de la Trigonometrie sphérique fournissent:

$$\cos \zeta = \cos (\lambda - q) \sin l \sin p + \cos l \cos p$$

$$\cos \eta = \cos (\mu - q) \sin m \sin p + \cos m \cos p$$

$$\cos \theta = \cos (\nu - q) \sin n \sin p + \cos n \cos p$$

Mais on comprend aisément, que cette substitution ne méneroit pas à grande chose, & que la résolution générale des formules que nous venons de trouver, est trop difficile, pour que nous osions nous flatter d'y réussir. Le grand nombre des quantités variables qui y entrent, ne nous laisse entrevoir aucune route qu'il faudroit suivre. Par cette raison je me vois obligé de borner mes recherches à quelques cas particuliers, où je puisse espérer quelque succès. Au moins le cas de la terre n'est-il pas assujetti à des si grandes difficultés qu'on ne puisse les surmonter.

24. Pour faire l'application des formules trouvées au mouvement de la terre, je fais les suppositions suivantes:

I. Je suppose que l'axe de rotation O soit très proche de l'axe principal A , de sorte qu'on puisse regarder l'arc $OA = \alpha$ comme extrêmement petit.

II. Je suppose que les momens d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux B & C sont égaux entr'eux, de sorte que $cc = bb$, & partant $A = 0$; & $B = 1 - \frac{aa}{bb}$,

$$C = \frac{aa}{bb} - 1, \text{ donc } C = -B.$$

Il semble certain, que ces deux suppositions ont lieu dans la terre: ayant remarqué, que si la terre n'étoit pas assujettie à l'action des forces de la lune & du soleil, elle tourneroit uniformément autour de son
axe,

axe, qui demeureroit fixe. Donc, actuellement l'axe de rotation O ne diffère jamais sensiblement de l'axe principal A , qui est celui qu'on nomme par excellence l'axe de la terre. Or, que les momens d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux sont égaux entr'eux, cela paroît également certain, à cause de la rondeur de la terre autour de son axe Λ .

25. Puisqu'il convient de rapporter tout au pôle A , posons l'angle $PAB = r$, & nous aurons $\cos m = \sin l \cos r$, & $\cos n = -\sin l \sin r$. Ensuite, puisque l'arc $AO = a$, est quasi infiniment petit, ayant tiré de O sur les arcs AB & AC les perpendiculaires Ob , Oc , posons l'angle $OAb = \varrho$, & nous aurons $Ab = a \cos \varrho$, $Ac = a \sin \varrho$, donc $BO = \xi = 90^\circ - a \cos \varrho$, & $CO = \gamma = 90^\circ - a \sin \varrho$. De là nous tirons $x = \vartheta$, $y = a \vartheta \cos \varrho$, & $z = a \vartheta \sin \varrho$, négligeant les termes où a auroit plus d'une dimension. Maintenant les équations N°. IV. V. VI. donneront

$$\text{IV. } dl \sin l = -a \vartheta dt \sin l \sin (r + \varrho), \text{ ou } dl = -a \vartheta dt \sin (r + \varrho),$$

$$\text{V. } -dl \cos l \cos r + dr \sin l \sin r = \vartheta dt (a \cos l \sin \varrho + \sin l \sin r),$$

$$\text{VI. } dl \cos l \sin r + dr \sin l \cos r = \vartheta dt (\sin l \cos r - a \cos l \cos \varrho),$$

d'où la combinaison V. $\sin r +$ VI. $\cos r$ fournit

$$dr \sin l = \vartheta dt (\sin l - a \cos l \cos (r + \varrho))$$

$$\text{ou bien } dr = \vartheta dt - \frac{a \vartheta dt \cos (r + \varrho)}{\tan l},$$

Et partant nous aurons assez exactement $dr = \vartheta dt$.

26. Des trois dernières équations il suffit de prendre la

$$\text{VII. } d\lambda \sin l^2 = a \vartheta dt \sin l \cos (r + \varrho), \text{ ou}$$

$$d\lambda = \frac{a \vartheta dt \cos (r + \varrho)}{\sin l},$$

car

car les angles μ & ν dépendent en sorte de λ ;

$$\operatorname{cof}(\lambda - \mu) = - \frac{\operatorname{cof} l \operatorname{cof} m}{\sin l \sin m}; \quad \operatorname{cof}(\lambda - \nu) = - \frac{\operatorname{cof} l \operatorname{cof} n}{\sin l \sin n},$$

$$\sin(\lambda - \mu) = - \frac{\operatorname{cof} n}{\sin l \sin m}; \quad \sin(\lambda - \nu) = - \frac{\operatorname{cof} m}{\sin l \sin n}.$$

De là, puisque $\mu - q = (\lambda - q) - (\lambda - \mu)$, & $\nu - q = (\lambda - q) - (\lambda - \nu)$, nous tirons:

$$\begin{aligned} \operatorname{cof}(\mu - q) &= - \frac{\operatorname{cof} l \operatorname{cof} m \operatorname{cof}(\lambda - q) - \operatorname{cof} n \sin(\lambda - q)}{\sin l \sin m} = \\ &= - \frac{\operatorname{cof} l \operatorname{cof} r \operatorname{cof}(\lambda - q) + \sin r \sin(\lambda - q)}{\sin m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cof}(\nu - q) &= - \frac{\operatorname{cof} l \operatorname{cof} n \operatorname{cof}(\lambda - q) + \operatorname{cof} m \sin(\lambda - q)}{\sin l \sin n} = \\ &+ \frac{\operatorname{cof} l \sin r \operatorname{cof}(\lambda - q) + \operatorname{cof} r \sin(\lambda - q)}{\sin n} \end{aligned}$$

& par conséquent nous obtiendrons:

$$\operatorname{cof} \zeta = \sin l \sin p \operatorname{cof}(\lambda - q) + \operatorname{cof} l \operatorname{cof} p$$

$$\operatorname{cof} \eta = - \operatorname{cof} l \sin p \operatorname{cof} r \operatorname{cof}(\lambda - q) + \sin p \sin r \sin(\lambda - q) + \sin l \operatorname{cof} p \operatorname{cof} r$$

$$\operatorname{cof} \theta = + \operatorname{cof} l \sin p \sin r \operatorname{cof}(\lambda - q) + \sin p \operatorname{cof} r \sin(\lambda - q) - \sin l \operatorname{cof} p \sin r.$$

27. La première équation, à cause de $A = 0$, donne d'abord $dx = d\alpha = 0$, & partant la vitesse angulaire sera toujours la même, qui soit nommée $= \epsilon$, de sorte que $x = \alpha = \epsilon t$, & partant $\dot{d}l = - \epsilon \alpha dt \sin(r + \varrho)$; $d\lambda = \frac{\epsilon \alpha dt \operatorname{cof}(r + \varrho)}{\sin l}$;

$$\& dr = \epsilon dt - \frac{\epsilon \alpha dt \operatorname{cof}(r + \varrho)}{\operatorname{tang} l}.$$

Enfin, puisque $y = \varepsilon a \cos \varrho$, & $z = \varepsilon a \sin \varrho$, les équations N^o. II. & III. deviendront:

$$\text{II. } \varepsilon l a \cos \varrho - \varepsilon a d\varrho \sin \varrho - B \varepsilon \varepsilon a dt \sin \varrho + \frac{6B g e e}{s^3} dt \cos \zeta \cos \theta = 0,$$

$$\text{III. } \varepsilon d a \sin \varrho + \varepsilon a d\varrho \cos \varrho + B \varepsilon \varepsilon a dt \cos \varrho - \frac{6B g e e}{s^3} dt \cos \zeta \cos \eta = 0,$$

pour la résolution desquelles il est bon de remarquer, que

$$\sin r \cos \eta + \cos r \cos \theta = \sin p \sin (\lambda - q)$$

$$\sin r \cos \theta - \cos r \cos \eta = \cos l \sin p \cos (\lambda - q) - \sin l \cos p.$$

d'où nous tirons ces deux autres équations

$$\begin{aligned} \varepsilon l a \cos (r + \varrho) - \varepsilon a d\varrho \sin (r + \varrho) - B \varepsilon \varepsilon a dt \sin (r + \varrho) \\ + \frac{6B g e e}{s^3} dt \cos \zeta \sin p \sin (\lambda - q) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon d a \sin (r + \varrho) + \varepsilon a d\varrho \cos (r + \varrho) + B \varepsilon \varepsilon a dt \cos (r + \varrho) \\ + \frac{6B g e e}{s^3} dt \cos \zeta (\cos l \sin p \cos (\lambda - q) - \sin l \cos p) = 0, \end{aligned}$$

28. Posons l'angle $PAO = r + \varrho = \omega$, & $\lambda - q = \Phi$, pour avoir

$$dl = - \varepsilon a dt \sin \omega; \quad d\lambda = \frac{\varepsilon a dt \cos \omega}{\sin l}; \quad d\Phi = \frac{\varepsilon a dt \cos \omega}{\sin l} - dq,$$

$$dr = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon a dt \cos \omega}{\text{tang } l}, \quad \& \quad d\varrho = d\omega - \varepsilon dt + \frac{\varepsilon a dt \cos \omega}{\text{tang } l},$$

&

& nos équations à résoudre seront :

$$\varepsilon d\alpha \cos \omega - \varepsilon \alpha d\omega \sin \omega + (1 - B) \varepsilon \varepsilon \alpha dt \sin \omega + \frac{6Bgee}{s^3} dt \sin p \sin \Phi (\sin l \sin p \cos \Phi + \cos l \cos p) = 0,$$

$$\varepsilon d\alpha \sin \omega + \varepsilon \alpha d\omega \cos \omega - (1 - B) \varepsilon \varepsilon \alpha dt \cos \omega + \frac{6Bgee}{s^3} dt (\sin l \sin p \cos \Phi + \cos l \cos p) (\cos l \sin p \cos \Phi - \sin l \cos p) = 0.$$

Soit enfin $\alpha \cos \omega = u$, & $\alpha \sin \omega = v$, de sorte que $dl = -\varepsilon v dt$;

& $d\Phi = \frac{\varepsilon u dt}{\sin l} = dq$, & qu'on ait à résoudre ces équations,

$$\varepsilon du + (1 - B) \varepsilon \varepsilon u dt + \frac{6Bgee}{s^3} dt \sin p \sin \Phi (\sin l \sin p \cos \Phi + \cos l \cos p) = 0,$$

$$\varepsilon dv - (1 - B) \varepsilon \varepsilon v dt + \frac{6Bgee}{s^3} dt (\sin l \sin p \cos \Phi + \cos l \cos p) (\cos l \sin p \cos \Phi - \sin l \cos p) = 0,$$

où il faut remarquer que $1 - B = \frac{aa}{bb}$.

29. Puisque les quantités u & v sont quasi infiniment petites, on pourra regarder l'arc l comme constant dans ces équations, & supposer $d\Phi = dq$. Ensuite, il sera permis de regarder l'arc $PF = p$, comme constant ou peu variable, ce qui dépend du choix du point P ; & la distance du centre de forces s ne change pas ordinairement tant, qu'on ne la pourroit regarder comme constante, du moins pour trouver des intégrales approchantes. Soit donc pour abrégé :

$$\frac{6Bgee}{s^3} = N; \quad \frac{aa}{bb} = \kappa; \quad \text{\& } dq = \delta dt, \quad \text{ou } d\Phi = \delta dt,$$

& il est évident qu'on pourra satisfaire à nos équations en posant :

$u = P + Q \cos \Phi + R \cos \Phi^2$, & $v = S \sin \Phi + T \sin \Phi \cos \Phi$,
de sorte que ces lettres P, Q, R, S, soient constantes. Or, ayant
substitué ces valeurs on trouvera :

$$Q = \frac{N \sin p \cos l (\epsilon \kappa \cos 2l + \delta \cos l)}{\epsilon (\epsilon \epsilon \kappa \kappa - \delta \delta)}; \quad S = - \frac{N \sin p \cos p (\epsilon \kappa \cos l + \delta \cos 2l)}{\epsilon (\epsilon \epsilon \kappa \kappa - \delta \delta)}$$

$$R = \frac{N \sin l \sin p^2 (\epsilon \kappa \cos l + 2\delta)}{\epsilon (\epsilon \epsilon \kappa \kappa - 4\delta \delta)}; \quad T = - \frac{N \sin l \sin p^2 (\epsilon \kappa + 2\delta \cos l)}{\epsilon (\epsilon \epsilon \kappa \kappa - 4\delta \delta)}$$

$$P = - \frac{\delta N \sin l \sin p^2 (\epsilon \kappa + 2\delta \cos l)}{\epsilon \epsilon \kappa (\epsilon \epsilon \kappa \kappa - 4\delta \delta)} - \frac{N \sin l \cos l \cos p^2}{\epsilon \epsilon \kappa}$$

$$\& P + \frac{1}{2}R = \frac{N \sin l \cos l (\sin p^2 - 2 \cos p^2)}{2 \epsilon \epsilon \kappa}$$

30. On donnera ici aux quantités l , p , N , & δ , leurs valeurs moyennes, pour avoir des valeurs constantes des lettres P, Q, R, S, T, & alors à cause de $dt = - \frac{d\Phi}{\delta}$, on aura

$$dl = \frac{\epsilon v d\Phi}{\delta}, \quad \& \quad d\Phi = - \frac{\epsilon u d\Phi}{\delta \sin l} - dq,$$

d'où l'on tire par intégration, prenant l pour la valeur moyenne de l :

$$l = l - \frac{\epsilon S}{\delta} \cos \Phi - \frac{\epsilon}{4\delta} T \cos 2\Phi, \quad \&$$

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{\epsilon P \Phi}{\delta \sin l} - \frac{\epsilon Q \sin \Phi}{\delta \sin l} - \frac{\epsilon R \Phi}{2\delta \sin l} - \frac{\epsilon R \sin 2\Phi}{4\delta \sin l}$$

Or, outre cela, on aura $\Phi = \lambda - q$, & ensuite

$$a = \sqrt{(uu + vv)}, \quad \& \quad \text{tang } \omega = \frac{v}{u}$$

Mais

Mais, puisque $dr = \epsilon dt - \frac{\epsilon u dt}{\text{tang} l} = \epsilon dt - d\lambda \cos l$, il s'en-

suit $r = \epsilon t - \lambda \cos l$, & partant $\varrho = \omega - r$. On voit par là que si α a une fois été très petit, il demeurera toujours très petit, de sorte que notre calcul subsiste, à l'exception d'un seul cas marqué dans la suite.

31. Pour rendre le cas plus simple, puisqu'on ne sauroit presque point tenir compte de l'irrégularité du mouvement du centre de force F, supposons que ce point F se meut uniformément dans le cercle QFS, autour de la terre, à la distance constante = s , & soit P le pôle de son orbite, de sorte que l'arc PF = $p = 90^\circ$, & posant $d\varphi = \delta dt$ que δ soit une quantité constante, marquant l'angle décrit dans une seconde par le point F. Puisque l'arc PA = l , ne change presque point, soit l sa valeur moyenne, & nos équations

à résoudre seront, posant $\frac{aa}{bb} = \kappa$

$$du + \epsilon \kappa v dt + \frac{3Bgee}{\epsilon s^3} dt \sin l \sin 2\varphi = 0,$$

$$dv - \epsilon \kappa u dt + \frac{3Bgee}{\epsilon s^3} dt \sin l \cos l (1 + \cos 2\varphi) = 0,$$

où $d\varphi = -\delta dt + \frac{\epsilon u dt}{\sin l}$. Mais, puisque u est extrêmement

petit, & que nous négligeons les termes, où u & v monteroient à plus d'une dimension, on peut prendre $d\varphi = -\delta dt$, de sorte

que $dt = -\frac{d\varphi}{\delta}$.



32. Posons donc comme auparavant $\frac{6Bgee}{s^3} = N$,
pour avoir

$$du - \frac{\epsilon\kappa}{\delta} v d\Phi - \frac{N}{2\delta\epsilon} d\Phi \sin l \sin 2\Phi = 0,$$

$$du + \frac{\epsilon\kappa}{\delta} v d\Phi - \frac{N}{2\delta\epsilon} d\Phi \sin l \cos l (1 + \cos 2\Phi) = 0,$$

auxquelles satisfont comme nous venons de voir ces valeurs particulières :

$$u = P + \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R \cos 2\Phi; \quad v = \frac{1}{2}T \sin 2\Phi.$$

Mais, pour en trouver les intégrales en général, formons-en ces deux équations, qui soient intégrables.

$$\left. \begin{aligned} + du \sin \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi + \frac{\epsilon\kappa}{\delta} u d\Phi \cos \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi - \frac{N}{2\delta\epsilon} d\Phi \sin l \sin \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi \sin 2\Phi \\ + dv \cos \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi - \frac{\epsilon\kappa}{\delta} v d\Phi \sin \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi - \frac{N}{2\delta\epsilon} d\Phi \sin l \cos l \cos \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi (1 + \cos 2\Phi) \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} + du \cos \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi - \frac{\epsilon\kappa}{\delta} u d\Phi \sin \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi - \frac{N}{2\delta\epsilon} d\Phi \sin l \cos \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi \sin 2\Phi \\ - dv \sin \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi - \frac{\epsilon\kappa}{\delta} v d\Phi \cos \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi + \frac{N}{2\delta\epsilon} d\Phi \sin l \cos l \sin \frac{\epsilon\kappa}{\delta} \Phi (1 + \cos 2\Phi) \end{aligned} \right\} = 0.$$

33. Posons, pour'abrégér davantage, $\frac{\epsilon\kappa}{\delta} = \frac{\epsilon a a}{\delta b b} = m$, &

$$\frac{N}{2\epsilon\delta} = \frac{3Bgee}{\delta\epsilon s^3} = n, \quad \& \text{ les intégrales seront:}$$

$$u \sin m\Phi + v \cos m\Phi - n \sin l \int \sin m\Phi \sin 2\Phi - n \sin l \cos l \int d\Phi \cos m\Phi (1 + \cos 2\Phi) = E$$

$$u \cos m\Phi - v \sin m\Phi - n \sin l \int \cos m\Phi \sin 2\Phi + n \sin l \cos l \int d\Phi \sin m\Phi (1 + \cos 2\Phi) = F.$$

Or

$$\begin{aligned} \text{Or } \sin m\phi. \sin 2\phi &= \frac{1}{2} \cos(m-2)\phi - \frac{1}{2} \cos(m+2)\phi \\ \cos m\phi. \cos 2\phi &= \frac{1}{2} \cos(m-2)\phi + \frac{1}{2} \cos(m+2)\phi \\ \cos m\phi. \sin 2\phi &= -\frac{1}{2} \sin(m-2)\phi + \frac{1}{2} \sin(m+2)\phi \\ \sin m\phi. \cos 2\phi &= +\frac{1}{2} \sin(m-2)\phi + \frac{1}{2} \sin(m+2)\phi. \end{aligned}$$

d'où l'on forme les intégrales.

$$\begin{aligned} u \sin m\phi + v \cos m\phi &= \frac{n \sin I}{2} \left(\frac{\sin(m-2)\phi}{m-2} - \frac{\sin(m+2)\phi}{m+2} \right) \\ &- \frac{1}{2} n \sin I \cos I \left(\frac{2 \sin m\phi}{m} + \frac{\sin(m-2)\phi}{m-2} + \frac{\sin(m+2)\phi}{m+2} \right) = E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \cos m\phi - u \sin m\phi &= \frac{1}{2} n \sin I \left(\frac{\cos(m-2)\phi}{m-2} - \frac{\cos(m+2)\phi}{m+2} \right) \\ &- \frac{1}{2} n \sin I \cos I \left(\frac{2 \cos m\phi}{m} + \frac{\cos(m-2)\phi}{m-2} + \frac{\cos(m+2)\phi}{m+2} \right) = F. \end{aligned}$$

Où il faut remarquer, qu'au cas $m=2$, il y a $\frac{\sin(m-2)\phi}{m-2} = \phi$,

& $\frac{\cos(m-2)\phi}{m-2} = \infty$, ou constant, & partant renfermé en F, de sorte que ce terme puisse être omis.

34. Maintenant, en multipliant la première par $\sin m\phi$, & l'autre par $\cos m\phi$, leur somme donne:

$$\begin{aligned} u - \frac{1}{2} n \sin I \left(\frac{\cos 2\phi}{m-2} - \frac{\cos 2\phi}{m+2} \right) - \frac{1}{2} n \sin I \cos I \left(\frac{2}{m} + \frac{\cos 2\phi}{m-2} + \frac{\cos 2\phi}{m+2} \right) = \\ E \sin m\phi + F \cos m\phi, \end{aligned}$$

Ensuite, multipliant la première par $\cos m\phi$, & l'autre par $-\sin m\phi$, on obtiendra

$$\begin{aligned} v + \frac{1}{2} n \sin I \left(\frac{\sin 2\phi}{m-2} + \frac{\sin 2\phi}{m+2} \right) + \frac{1}{2} n \sin I \cos I \left(\frac{\sin 2\phi}{m-2} - \frac{\sin 2\phi}{m+2} \right) = \\ E \cos m\phi - F \sin m\phi, \end{aligned}$$

Chan-

Changeons les constantes en posant $E = D \cos \xi$, & $F = D \sin \xi$, de sorte que ξ soit un angle constant: & nos équations se réduiront à celles-ci.

$$u - \frac{2n \sin \phi \cos 2\phi}{mm-4} - \frac{n}{m} \sin \phi \cos \phi - \frac{mn \sin \phi \cos \phi \cos 2\phi}{mm-4} = D \sin(m\phi + \xi)$$

$$v + \frac{mn \sin \phi \sin 2\phi}{mm-4} + \frac{2n \sin \phi \cos \phi \sin 2\phi}{mm-4} = D \cos(m\phi + \xi),$$

& partant on aura:

$$u = \frac{n}{m} \sin \phi \cos \phi + \frac{n \sin \phi \cos 2\phi \cdot (2 + m \cos \phi)}{mm-4} + D \sin(m\phi + \xi)$$

$$v = - \frac{n \sin \phi \sin 2\phi \cdot (m + 2 \cos \phi)}{mm-4} + D \cos(m\phi + \xi).$$

35. Ces équations conviennent parfaitement avec celles que nous avons trouvées ci-dessus, si l'on met la constante $D = 0$, mais elles sont plus générales par cette même raison, qu'elles contiennent encore les deux constantes D & ξ . Cependant, le cas où $m = 2$, demande un développement particulier, qu'il faut tirer des premières intégrales, qui seront:

$$u \sin 2\phi + v \cos 2\phi - \frac{1}{2} n \sin \phi (\phi - \frac{1}{4} \sin 4\phi) - \frac{1}{2} n \sin \phi \cos \phi (\sin 2\phi + \phi + \frac{1}{4} \sin 4\phi) = E$$

$$u \cos 2\phi - v \sin 2\phi + \frac{1}{8} n \sin \phi \cos 4\phi - \frac{1}{2} n \sin \phi \cos \phi (\cos 2\phi + \frac{1}{4} \cos 4\phi) = G.$$

d'où l'on tire celles-ci:

$$u - \frac{1}{2} n \sin \phi \cdot \phi \sin 2\phi + \frac{1}{8} n \sin \phi \cos 2\phi - \frac{1}{2} n \sin \phi \cos \phi \cdot \phi \sin 2\phi - \frac{1}{2} n \sin \phi \cos \phi - \frac{1}{8} n \sin \phi \cos \phi \cos 2\phi = E \sin 2\phi + G \cos 2\phi$$

$$v - \frac{1}{2} n \sin \phi \cdot \phi \cos 2\phi + \frac{1}{8} n \sin \phi \sin 2\phi - \frac{1}{2} n \sin \phi \cos \phi \cdot \phi \cos 2\phi - \frac{1}{8} n \sin \phi \cos \phi \sin 2\phi = E \cos 2\phi - G \sin 2\phi,$$

& partant on aura:

$$u = \frac{1}{2} n \sin \phi \cos \phi + \frac{1}{2} n \sin \phi \cdot (1 + \cos \phi) \phi \sin 2\phi + E \sin 2\phi + (G - \frac{1}{8} n \sin \phi (1 - \cos \phi)) \cos 2\phi$$

$$v = \frac{1}{2} n \sin \phi (1 + \cos \phi) \phi \cos 2\phi + E \cos 2\phi - (G + \frac{1}{8} n \sin \phi (1 - \cos \phi)) \sin 2\phi.$$



36. Par rapport à ce cas $m = 2$ ou $\frac{e}{\delta} = \frac{2bb}{aa}$ je remarque, que les deux quantités u & v pourroient croître à l'infini puisqu'elles renferment des termes multipliées par l'arc Φ qui croit continuellement avec le tems. Donc, l'arc $OA = a = \sqrt{uu + vv}$ surpasseroit bientôt les bornes de la petitesse que je lui ai supposée; & partant notre solution exclut absolument ce cas. Il est donc très remarquable, que si le mouvement du centre de force F étoit au mouvement diurne de la planète comme $aa : 2bb$; le mouvement diurne seroit bientôt considérablement troublé, quoiqu'il ait commencé autour d'un axe principal, Ainsi pour la terre, où $aa = bb$ fort à peu près, si la lune achevoit ses révolutions en deux jours, au lieu de 27, l'axe de rotation de la terre souffriroit des dérangemens terribles, qu'il n'y auroit presque pas moyen d'assigner.

37. Mais il y a apparence qu'un tel cas n'existe nulle part dans l'Univers, ou du moins dans notre système planétaire, auquel s'étendent nos recherches. J'ai déjà marqué que, si la lune étoit deux ou trois fois plus éloignée de la terre, qu'elle ne l'est effectivement, son mouvement seroit si irrégulier, qu'il nous seroit presque impossible d'en acquérir seulement une connoissance grossière: car pour une connoissance parfaite, il s'en faut beaucoup que nous la puissions acquérir jamais. Si la lune étoit beaucoup plus proche de la terre, nous pourrions plus exactement déterminer son mouvement, mais à présent nous appercevons un autre inconvénient qui rendroit indéterminable la nutation de l'axe de la terre. De là il semble résulter que la Providence a bien voulu offrir à nos recherches de tels objets, qui ne surpassent pas absolument la portée de notre esprit, quoiqu'il nous fût impossible de les approfondir tout à fait. Peut-être que tels mouvemens qui nous seroient inaccessibles, se trouvent en d'autres systèmes planétaires, où les créatures intelligentes sont douées d'un plus haut degré de pénétration.



38. Supposons donc que le carré du nombre $m = \frac{\epsilon a a}{\delta v b}$ diffère assez considérablement de 4, pour que les quantités u & v demeurent toujours très petites, & que l'hypothèse de la petitesse de l'arc $OA = \alpha = \sqrt{uu + vv}$ demeure inaltérée. Alors la solution que nous venons de trouver, nous découvrira assez exactement les phénomènes du mouvement de rotation du corps proposé. Car ayant trouvé

$$u = \frac{n}{2m} \sin 2l + \frac{n(2 + m \cos l) \sin l}{mm - 4} \cos 2\phi + D \sin (m\phi + \xi)$$

$$v = - \frac{n(m + 2 \cos l) \sin l}{mm - 4} \sin 2\phi + D \cos (m\phi + \xi)$$

nous aurons $\alpha = \sqrt{uu + vv}$; & $\text{rang } \omega = \frac{v}{u}$. Ensuite, à

cause de $dl = \frac{\epsilon v d\phi}{\delta}$, & $d\lambda = - \frac{\epsilon u d\phi}{\delta \sin l}$:

$$l = l + \frac{\epsilon n (m + 2 \cos l) \sin l}{2\delta (mm - 4)} \cos 2\phi + \frac{\epsilon D}{\delta m} \sin (m\phi + \xi)$$

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{\epsilon n \cos l}{\delta m} \phi - \frac{\epsilon n (2 + m \cos l)}{2\delta (mm - 4)} \sin 2\phi + \frac{\epsilon D}{\delta m \sin l} \cos (m\phi + \xi)$$

& enfin $r = \text{Const.} - \lambda \cos l + \epsilon t$, & $\varrho = \omega - r$.

Application au mouvement de rotation de la Terre.

Fig. 5. 39. Pour appliquer ces formules à la terre, il convient de prendre le point P dans le pôle de l'écliptique, de sorte que quand F marque la lune, l'arc PF = p n'est pas un quart de cercle, & partant il faut recourir aux formules générales du §. 28. Soit donc le cercle $\gamma\delta L$ l'écliptique, Ω le noeud ascendant de l'orbite de la lune ΩFM , & que la lune se trouve présentement en F à la distance de la terre = r , que je regarde comme constante. Que la force

at-



attractrice de la lune à la distance $= e$ soit égale à la gravité. Le point fixe Υ ne soit pas l'équinoxe, mais plutôt la première étoile du bélier, duquel la longitude du noeud ascendant soit $\Upsilon \Omega = \zeta$, & l'inclinaison de l'orbite de la lune à l'écliptique ou l'angle $F \Omega L = \gamma$, que je regarde comme constante, pendant que l'arc ζ diminue uniformément, pour lequel mouvement je pose $d\zeta = -\epsilon dt$. Ensuite, soit la longitude de la lune comptée depuis Υ , ou l'arc $\Upsilon \Omega L = q$, que je suppose aussi proportionel au tems, de sorte que $dq = \delta dt$; puisque l'inégalité du mouvement n'influe presque point sur le mouvement de l'axe de la terre.

40. Ayant donc l'arc $\Omega L = q - \zeta$, & l'angle $L \Omega F = \gamma$, puisque γ n'excede pas 5° , nous aurons assez près $\sin FL = \gamma \sin(q - \zeta)$, & $\cos FL = 1$, négligeant les termes où γ auroit plus d'une dimension, de sorte que $\sin p = 1$, & $\cos p = \gamma \sin(q - \zeta)$. Soit à présent l'axe de la terre en A, par rapport auquel le moment d'inertie de la terre soit $= Maa$, & par rapport aux autres axes principaux $= Mbb$. Posons l'arc $PA = l$, & l'angle $\Upsilon PA = \lambda$: soit de plus AB le premier méridien tiré sur la terre, & l'angle $PAB = r$: & que la terre tourne présentement autour du pole O dans le sens ΥL suivant l'ordre des signes, avec la vitesse angulaire $= \epsilon$: & soit l'arc $AO = \alpha$, que je suppose extrêmement petit, & l'angle $BAO = \rho$. Or j'ai posé $r + \rho = \omega$, & outre cela $\alpha \cos \omega = u$, & $\alpha \sin \omega = v$.

41. Soustrayons la longitude du pole terrestre A de la longitude de la lune, & soit l'angle $APF = q - \lambda = \phi$, qui ci-dessus étoit $= \phi$, & nous aurons:

$$dl = -\epsilon v dt; d\lambda = \frac{\epsilon u dt}{\sin l}; d\phi = \delta dt - \frac{\epsilon u dt}{\sin l}, \text{ \& } dr = \epsilon dt - \frac{\epsilon u dt \cos l}{\sin l}.$$



Maintenant tout revient à la résolution de ces deux équations :

$$\varepsilon du + \frac{\varepsilon \varepsilon a a}{b b} v dt - \frac{6 g e e}{s^3} \left(1 - \frac{a a}{b b} \right) dt \sin \Phi (\sin l \cos \Phi + \gamma \cos l \sin (q - \zeta)) = 0,$$

$$\varepsilon dv - \frac{\varepsilon \varepsilon a a}{b b} u dt + \frac{6 g e e}{s^3} \left(1 - \frac{a a}{b b} \right) dt (\sin l \cos \Phi + \gamma \cos l \sin (q - \zeta)) (\cos l \cos \Phi - \gamma \sin l \sin (q - \zeta)) = 0.$$

Posons pour abrégé $\frac{\varepsilon a a}{b b} = \mu$, & $\frac{3 g e e}{\varepsilon s^3} \left(\frac{a a}{b b} - 1 \right) = \nu$,

& nous aurons :

$$du + \mu v dt + \nu dt \sin \Phi (\sin l \cos \Phi + \gamma \cos l \sin (q - \zeta)) = 0$$

$$dv - \mu u dt - 2 \nu dt (\sin l \cos \Phi + \gamma \cos l \sin (q - \zeta)) (\cos l \cos \Phi - \gamma \sin l \sin (q - \zeta)) = 0$$

ou en réduisant :

$$du + \mu v dt + \nu dt (\sin l \sin 2 \Phi + \gamma \cos l \cos (\zeta - \lambda) - \gamma \cos l \cos (2 q - \zeta - \lambda)) = 0$$

$$dv - \mu u dt - \nu dt (\sin l \cos l + \sin l \cos l \cos 2 \Phi - \gamma \cos 2 l \cos (\zeta - \lambda) + \gamma \cos 2 l \cos (2 q - \zeta - \lambda) - \gamma \gamma l \cos l) = 0$$

42. Maintenant, sans répéter l'intégration générale, puisque nous en connoissons la forme, posons

$$u = A + B \cos 2 \Phi + C \sin (\zeta - \lambda) + D \sin (2 q - \zeta - \lambda) + E \sin (\mu t + \xi)$$

$$v = E \sin 2 \Phi + F \cos (\zeta - \lambda) + G \cos (2 q - \zeta - \lambda) - E \cos (\mu t + \xi)$$

& puisque $d \Phi = \delta dt$, $d \zeta = \varepsilon dt$, $d q = \delta dt$, & $d \lambda = o dt$, parce que nous négligeons les termes où les petites quantités entre-voient de nouveau; nous aurons

$$\frac{du}{dt} = -2 B \delta \sin 2 \Phi - C \varepsilon \cos (\zeta - \lambda) + D (2 \delta + \varepsilon) \cos (2 q - \zeta - \lambda) + E \mu \cos (\mu t + \xi)$$

$$\frac{dv}{dt} = 2 E \delta \cos 2 \Phi + F \varepsilon \sin (\zeta - \lambda) - G (2 \delta + \varepsilon) \sin (2 q - \zeta - \lambda) + E \mu \sin (\mu t + \xi)$$

Or dans les équations différentielles il est permis de regarder l'arc $PA = l$ comme constant, & de mettre à la place de l sa valeur moyenne qui soit $= l$ comme ci-dessus. Il ne reste donc qu'à substituer ces valeurs supposées.

43. Or la première équation par dt divisée donne

$$\left. \begin{aligned} & -2B\delta \sin 2\phi - C\epsilon \cos(\zeta - \lambda) + D(2\delta + \epsilon) \cos 2\eta - \zeta - \lambda + \xi \mu \cos(\mu t + \xi) \\ & + E\mu \quad + F\mu \quad + G\mu \quad - \xi \mu \\ & + v \sin l \quad + v\gamma \cos l \quad - v\gamma \cos l \end{aligned} \right\} = 0$$

& l'autre donne :

$$\left. \begin{aligned} & + 2E\delta \cos 2\phi + F\epsilon \sin(\zeta - \lambda) - G(2\delta + \epsilon) \sin(2\eta - \zeta - \lambda) + \xi \mu \sin(\mu t + \xi) \\ -\mu A \quad -B\mu \quad -C\mu \quad -D\mu \quad -\xi \mu \\ -v \sin l \cos l - v \sin l \cos l + v\gamma \cos 2l \quad -v\gamma \cos 2l \\ + v\gamma \gamma \sin l \cos l \end{aligned} \right\} = 0$$

Egalant à zéro tous ces membres séparément, nous en tirons d'abord :

$$A = -\frac{v}{\mu} (1 - \gamma\gamma) \sin l \cos l = -\frac{v}{2\mu} (1 - \gamma\gamma) \sin 2l.$$

& ensuite :

$$\begin{aligned} -2B\delta + E\mu + v \sin l &= 0; & -B\mu + 2E\delta - v \sin l \cos l &= 0, \\ -C\epsilon + F\mu + v\gamma \cos l &= 0; & -C\mu + F\epsilon + v\gamma \cos 2l &= 0, \\ D(2\delta + \epsilon) + G\mu - v\gamma \cos l &= 0; & -D\mu - G(2\delta + \epsilon) - v\gamma \cos 2l &= 0, \end{aligned}$$

44. Les coefficients B, C, D, E, F, G, auront donc les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} B &= -\frac{v \sin l (2\delta + \mu \cos l)}{\mu\mu - 4\delta\delta}; & E &= -\frac{v \sin l (2\delta \cos l + \mu)}{\mu\mu - 4\delta\delta} \\ C &= -\frac{v\gamma(\epsilon \cos l - \mu \cos 2l)}{\mu\mu - \epsilon\epsilon}; & F &= +\frac{v\gamma(\epsilon \cos 2l - \mu \cos l)}{\mu\mu - \epsilon\epsilon} \\ D &= -\frac{v\gamma((2\delta + \epsilon) \cos l + \mu \cos 2l)}{\mu\mu - (2\delta + \epsilon)^2}; & G &= +\frac{v\gamma((2\delta + \epsilon) \cos 2l + \mu \cos l)}{\mu\mu - (2\delta + \epsilon)^2}. \end{aligned}$$

& comme nous avons trouvé $A = -\frac{v}{\mu} (1 - \gamma\gamma) \sin l \cos l$,

où au lieu de γ on peut mettre $\sin \gamma$, & $\cos \gamma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\gamma$, au lieu de $1 - \gamma\gamma$: or γ marque l'inclinaison moyenne de l'écliptique de la lune à l'écliptique. Pour les deux autres constantes \mathfrak{E} & ξ , elles demeurent arbitraires comme la nature des intégrales complètes l'exige. Ces parties auroient lieu, quand même la force de la lune renfermée dans la lettre ν évanouiroit.

45. Ayant trouvé ces coefficients, il ne fera plus difficile d'assigner les autres quantités qui déterminent le mouvement. Or d'abord le différentiel $dl = -\varepsilon v dt$ donne

$$l = l + \frac{E\varepsilon}{2\delta} \cos 2\phi + \frac{F\varepsilon}{\mathfrak{E}} \sin(\zeta - \lambda) - \frac{G\varepsilon}{2\delta + \mathfrak{E}} \sin(2q - \zeta - \lambda) + \frac{\mathfrak{E}\varepsilon}{\mu} \sin(\mu t + \xi),$$

d'où l'on connoit pour chaque tems la distance du pôle de la terre A au pôle de l'écliptique P. Ensuite, pour la longitude du pôle terrestre A, ou l'angle $\sphericalangle PA = \lambda$, on aura

$$\lambda = \text{Const.} + \frac{A\varepsilon t}{\sin l} + \frac{B\varepsilon}{2\delta \sin l} \sin 2\phi + \frac{D\varepsilon}{\mathfrak{E} \sin l} \cos(\zeta - \lambda) - \frac{D\varepsilon}{(2\delta + \mathfrak{E}) \sin l} \cos(2q - \zeta - \lambda) - \frac{\mathfrak{E}\varepsilon}{\mu \sin l} \cos(\mu t + \xi).$$

Ensuite, pour l'angle $PAB = r$, ou le mouvement du premier méridien, on aura $r = \varepsilon t - \lambda \cos l$. Enfin, pour le pôle de rotation O, on aura la distance $AO = a = \sqrt{uu + vv}$, & posant la somme des angles $OAB + BAO = r + \rho = \omega$, puisque $\tan \omega = \frac{v}{u}$, on aura l'angle $BAO = \rho = \omega - r$.

Par ce moyen on acquiert une parfaite connoissance du mouvement diurne de la terre.



46. Quoique ces formules regardent proprement l'effet de la lune, il est aisé de les appliquer à celui du soleil, en posant $\gamma = 0$, & alors δ marquera le mouvement moyen du soleil, ou l'arc décrit dans une seconde. Pour ne pas confondre ces deux effets ensemble, soit la longitude du soleil depuis la première étoile du bélier $= Q$, & son mouvement moyen, ou l'angle parcouru dans son orbite pendant une seconde $= \Delta$. Puisque λ marque l'angle γPA , cette même lettre λ exprime la longitude du solstice d'été depuis le même terme γ : donc $\lambda = 90^\circ$ signifie la longitude de l'équinoxe du printemps, & $Q = \lambda$ la longitude du soleil depuis le solstice d'été qui soit $= \Phi$. Par conséquent, si nous posons la longitude du soleil depuis l'équinoxe du printemps $= \Psi$, nous aurons $\Psi = \Phi + 90^\circ$, & partant $\Phi = \Psi - 90^\circ$, & $2\Phi = 2\Psi - 180^\circ$.

47. Maintenant, si la force du soleil à la distance $= e$, est égale à gravité, à la distance de la terre qui est supposée $= s$, elle sera $= \frac{ee}{ss}$ posant la gravité $= 1$. Or la vitesse de la terre dans son orbite étant $= \Delta s$, la hauteur d'où un corps tombant acquiert la même vitesse, sera $= \frac{\Delta \Delta ss}{4g}$, laquelle étant divisée par la moitié de la distance $\frac{s}{2}$, donne la force centrifuge $= \frac{\Delta \Delta s}{2g}$ qui doit être égale à la force centrale $\frac{ee}{ss}$, d'où nous tirons $\frac{2g ee}{s^3} = \Delta \Delta$. Soit N la valeur de la lettre ν pour le soleil, & nous aurons

$$N = \frac{3 \Delta \Delta}{2 \epsilon} \left(\frac{aa}{bb} - 1 \right),$$

où ϵ marque la vitesse angulaire du mouvement diurne de la terre; & $\mu = \frac{\epsilon aa}{bb}$. De là nous aurons:

A =



$$A = -\frac{3\Delta\Delta}{2\epsilon\epsilon aa}(aa-bb)\sin l \cos l; \quad \text{ou } A = \frac{-N}{\mu} \sin l \cos l,$$

$$B = \frac{-N(2\Delta + \mu \cos l) \sin l}{\mu\mu - 4\Delta\Delta}; \quad E = \frac{-N(2\Delta \cos l + \mu) \sin l}{\mu\mu - 4\Delta\Delta}$$

& ensuite $C = 0$, $F = 0$, $D = 0$, $G = 0$.

48. Donc, pour la distance du pôle de la terre A au pôle de l'écliptique P, nous aurons:

$$PA = l = l + \frac{N\epsilon(2\Delta \cos l + \mu) \sin l}{2\Delta(\mu\mu - 4\Delta\Delta)} \cos 2\Psi + \frac{\mathcal{C}\epsilon}{\mu} \sin(\mu t + \xi)$$

& pour sa longitude, ou l'angle $\gamma A A = \lambda$:

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{N\epsilon t \cos l}{\mu} + \frac{N\epsilon(2\Delta + \mu \cos l)}{2\Delta(\mu\mu - 4\Delta\Delta)} \sin 2\Psi - \frac{\mathcal{C}\epsilon}{\mu \sin l} \cos(\mu t + \xi)$$

Le mouvement de rotation du premier méridien AB autour du pôle A peut être regardé comme constant, sa vitesse angulaire étant $= c$. Or pour le vrai pôle de rotation O, on ne le sauroit assigner, sans avoir déterminé l'effet de toutes les forces qui agissent sur la terre. Car il faut chercher les valeurs complètes des deux lettres u & v , qui résultent de toutes les forces, & alors on aura $AO = \sqrt{uu + vv}$,

$\text{tang } \omega = \frac{v}{u}$, & de là l'angle $BAO = \omega - r = \omega - PAB$.

Mais dans la terre les points A & O sont indiscernables.

49. Pour la lune, la distance e , où sa force attractive seroit égale à la gravité, nous est inconnue, & partant aussi la valeur de la lettre v . Mais on peut conclure le rapport des lettres v & N des effets que la lune & soleil produisent dans les marées, qui leur sont proportionels. Cependant cette conclusion ne sauroit être portée au plus haut degré de précision. Newton croyoit, que la valeur de v rapportée à la lune étoit environ quatre fois plus grande que celle de N qui se rapporte au soleil. Or M. Daniel Bernoulli a prouvé que

ce rapport n'excede pas beaucoup la raison double. Posons donc $v = mN$, de sorte que m soit un nombre plus grand que 2. Soit ensuite la longitude de la lune depuis l'équinoxe du printems $= \psi$ de sorte que $\phi = \psi - 90^\circ$, & $2\phi = 2\psi - 180^\circ$; & que δ soit l'angle décrit par la lune dans une seconde, & ϵ l'angle dont les noeuds de la lune reculent en même tems. Posons la longitude du noeud ascendant depuis l'équinoxe du printems $= \theta$, & on aura $\theta = \zeta - \lambda + 90$, & $\zeta - \lambda = \theta - 90^\circ$. Donc, puisque $q = \phi + \lambda = \psi + \lambda - 90^\circ$, & $\zeta = \theta + \lambda - 90^\circ$, nous aurons $2q - \zeta - \lambda = 2\psi - \theta - 90^\circ$.

50. Introduisons ces angles que l'Astronomie découvre pour chaque tems, & nous aurons la distance du pole de la terre A au pole de l'écliptique P :

$$PA = l = 1 + \frac{mN\epsilon(\mu - \delta \cos l) \sin l}{2\delta(\mu\mu - \delta\delta)} \cos 2\psi + \frac{mN\epsilon(\mu \cos l - \epsilon \cos 2l) \sin \gamma}{\epsilon(\mu\mu - \epsilon\epsilon)} \cos \theta$$

$$+ \frac{mN\epsilon(\mu \cos l + (2\delta + \epsilon) \cos 2l) \sin \gamma}{(2\delta + \epsilon)(\mu\mu - (2\delta + \epsilon)^2)} \cos(2\psi - \theta) + \frac{\epsilon\epsilon}{\mu} \sin(\mu t + \xi),$$

& sa longitude comptée depuis la premiere étoile du bélier

$$\gamma PA = \lambda = \text{Const.} - \frac{mN\epsilon t \cos \gamma^2 \cos l}{\mu} + \frac{mN\epsilon(2\delta + \mu \cos l)}{2\delta(\mu\mu - 4\delta\delta)} \sin 2\psi - \frac{\epsilon\epsilon}{\mu \sin l} \cos(\mu t + \xi)$$

$$- \frac{mN\epsilon(\epsilon \cos l - \mu \cos 2l) \sin \gamma}{\epsilon(\mu\mu - \epsilon\epsilon) \sin l} \sin \theta + \frac{mN\epsilon(\mu \cos 2l + (2\delta + \epsilon) \cos l) \sin \gamma}{(2\delta + \epsilon)(\mu\mu - (2\delta + \epsilon)^2) \sin l} \sin(2\psi - \theta).$$

Maintenant on n'a qu'à combiner ensemble ces anomalies avec celles que produit la force du soleil, pour avoir les dérangemens entiers que souffre le pole de la terre A, tant par rapport à sa distance du pole de l'écliptique, qu'à sa longitude comptée depuis la premiere étoile du bélier.

51. Avant que de développer les effets des forces du Soleil & de la Lune, je remarque que, quand même ces forces évanouiroient, il seroit possible, que l'axe de la terre A ne fût pas immobile. Car, posant $N = 0$, on aura encore $PA = l = 1 + \frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu} \sin(\mu t + \xi)$,

& $\gamma PA = \lambda = \text{Const.} - \frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu \sin l} \cos(\mu t + \xi)$, où la

constante \mathfrak{C} ne dépend pas des forces du Soleil & de la Lune, de sorte que si elle n'étoit pas $= 0$, l'axe de la terre souffriroit quelque nutation, pendant que la terre tourneroit uniformément autour de lui. Car, prenant l'arc $P\alpha = l$, le pole de la terre A décriroit uniformément un cercle 1, 2, 3, 4, autour du point fixe α , en même sens que le mouvement diurne, & le rayon de ce cercle αA seroit $\frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu}$, ou d'une grandeur arbitraire, la vitesse angulaire étant $=$

Fig. 6.

$\mu = \frac{aa}{bb} \epsilon$. Ce cas auroit lieu, si la terre avoit commencé à tourner autour d'un axe différent de ses axes principaux. Puisqu'on ne sauroit assurer, que la constante \mathfrak{C} soit absolument $= 0$, il est important d'expliquer les phénomènes de cette nutation de l'axe.

52. La terre tourneroit donc uniformément autour de son axe principal A, avec la vitesse angulaire $= \epsilon$, pendant que l'axe lui-même A décriroit autour d'un point fixe α un cercle avec la vitesse angulaire $= \frac{aa}{bb} \epsilon$. Soit T le tems d'une révolution de la terre autour de l'axe, & le tems d'une révolution de l'axe autour du point fixe α sera $= \frac{bb}{aa} T$. S'il étoit $bb = aa$, ces deux tems seroient

égaux, & le point de la terre qui auroit répondu une fois au point fixe α , lui répondroit toujours; & partant on prendroit ce point α plutôt que A pour le pole de la terre; & en effet dans ce cas tous les

mo-



momens d'inertie de la terre seroient égaux entr'eux. Mais, si les momens d'inertie $Ma a$ & $Mb b$ ne sont pas égaux, il n'y a aucun point sur la terre qui demeure en repos, & le mouvement du pole A sera le moins compliqué, de sorte que dans ce cas on n'ait aucune raison de regarder plutôt quelqu'autre point de la terre comme son pole.

53. Posons le rayon du petit cercle $1, 2, 3, 4$, que décrit l'axe de la terre A autour du point fixe a , ou l'arc $aA = \sigma$, & puisque la distance du pole A au pole de l'écliptique P est égale à l'obliquité de l'écliptique, & que la longitude du pole A répond au solstice d'été, il s'ensuit que, dans l'intervalle de tems $\frac{bb}{aa} T$, l'obliquité de l'écliptique varie de la quantité 2σ , & les points équinoctiaux souffrent un changement dans leur longitude, qui sera $= \frac{2\sigma}{\sin l} = 5\sigma$.

Or, pendant chaque intervalle de tems $= \frac{bb}{aa} T$, les mêmes inégalités reviennent. Puisque la terre est un sphéroïde elliptique, dont le diamètre de l'équateur est à l'axe comme 201 à 200 à peu près, si la terre étoit homogène, il y auroit $\frac{bb}{aa} = 1 - \frac{1}{200}$, & le période de ces inégalités seroit $= \frac{2}{199} \cdot 24$ heures, ou de 23^h, 53'. Dans cet intervalle de tems, les variations dans l'obliquité de l'écliptique & la longitude des points équinoctiaux, seront d'autant plus grandes, plus sera grand le rayon du cercle σ . A moins que ce rayon n'évanouisse entierement, il est certain qu'il est extrêmement petit; & ce seroit un grand probleme pour les Astronomes, que de decouvrir ces inégalités.

54. On m'objectera peut-être, que dans ce cas on ne prendroit pas l'extrémité de l'axe A pour le pole de la terre, mais plutôt le point a , qui seroit effectivement le pole de rotation, si aa étoit



égal à bb . Mais la moindre inégalité entre aa & bb renverse tout à fait cette idée; car, quoique le point α ne change pas sensiblement de place pendant quelques révolutions, il décrira une espece de spirale, dont les tours deviennent de plus en plus larges, & si $\frac{bb}{aa} = 1 - \frac{1}{107}$, après 50 révolutions ou jours, le point α se trouvera dans le cercle même 1, 2, 3, 4, & après 100 jours il décrira un cercle dont le diametre est deux fois plus grand. Ensuite, ses tours se rétréciront, de sorte qu'après 200 jours il retourne au centre du cercle 1, 2, 3, 4; d'où l'on voit que ce point ne seroit nullement propre pour y rapporter le mouvement diurne, mais qu'il faudroit se tenir absolument au vrai axe de la terre A, qui décrit le cercle 1, 2, 3, 4.

55. Pour les inégalités causées par les forces du soleil & de la lune, elles sont indépendantes de celle-ci, qui résulteroit de la nature de la terre même, pourvu qu'elle ne fut pas considérable, comme le calcul exposé le suppose. Nous pourrions donc regarder le cercle 1, 2, 3, 4, comme tout à fait évanouissant, & cela d'autant plus qu'il n'y a aucune observation, d'où nous pourrions conclure le contraire. Examinons donc plus soigneusement les inégalités qui sont produites par les forces du soleil & de la lune, & qui sont contenues dans les variations de l'arc $PA = l$, & de l'angle $\gamma PA = \lambda$. Or l'arc l exprime l'obliquité, & λ la longitude du point solstitial d'été, comptée depuis la premiere étoile du bélier. Donc $\lambda - 90^\circ$ fera la longitude du point équinoctial du printems, & partant réciproquement $90^\circ - \lambda$ la longitude de la premiere étoile d'aries depuis le point équinoctial du printems. Il s'agit donc de déterminer pour chaque tems proposé tant la longitude de la premiere étoile d'aries depuis le point équinoctial que l'obliquité de l'écliptique.

56. Or les formules que nous venons de trouver, renferment deux élémens, dont nous ne connoissons point la juste valeur. L'un est le nombre m , qui marque combien la force de la lune est plus grande



grande que celle du soleil dans la production des marées, & nous faisons par les judicieuses réflexions de Mr. Bernoulli que ce nombre m est environ $2\frac{1}{2}$. L'autre élément est la fraction $\frac{a^a}{bb}$, dont nous ne connoissons pas absolument la valeur, car la connoissance de la figure extérieure de la terre n'y détermine rien, à moins que la terre ne soit composée d'une matiere homogene, auquel cas nous aurions à peu près $\frac{a^a}{bb} = 2\frac{2}{3}$. Mais, puisqu'il est très probable que la matiere de la terre n'est rien moins qu'homogene, & que sa distribution nous est tout à fait inconnue, je poserai $\frac{a^a}{bb} = n$, de sorte que $\mu = \varepsilon n$, & je regarderai le nombre n comme inconnu, quoiqu'on puisse assurer qu'il ne differe pas sensiblement de l'unité. De là nous aurons $N = \frac{3(n - 1) \Delta \Delta}{2 \varepsilon}$, & il faudra conclure par les phénomènes les justes valeurs des deux nombres m & n .

57. Pour les vitesses angulaires ε , Δ , δ , & ζ , il suffit d'en connoître les rapports, qui entrent seulement dans nos formules. Prenons donc leurs valeurs pour un jour, où la terre fait une révolution entiere autour de son axe, de sorte que $\varepsilon = 360^\circ = 1296000''$. Ensuite les tables Astronomiques nous donnent selon les moyens mouvemens:

le mouvement journalier du soleil $\Delta =$	$59'$, $8'' = 3548''$
- - - - - de la Lune $\delta =$	13° , $10'$, $35'' = 47435''$
- - - - - du noeud en arriere $\zeta =$	$3'$, $11'' = 191''$



& partant nous aurons:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1296000; & \mu &= 1296000n \\ \Delta &= 3548; & \delta &= 47+35 \\ \mathcal{E} &= 191; & 2\delta + \mathcal{E} &= 95061 \end{aligned}$$

ou bien ces fractions proportionnelles

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1,0000000; & \epsilon\epsilon &= 1,0000000 \\ \Delta &= 0,0027376; & \Delta\Delta &= 0,0000075 \\ \delta &= 0,0366011; & \delta\delta &= 0,0013396 \\ \mathcal{E} &= 0,0001474; & \mathcal{E}\mathcal{E} &= 0,0000000 \\ 2\delta + \mathcal{E} &= 0,0733495; & (2\delta + \mathcal{E}) &= 0,0053801 \end{aligned}$$

L'arc PA = I marquant l'obliquité moyenne de l'écliptique sera I = 23°, 28', 30'', & l'inclinaison moyenne de l'orbite de la lune peut être posée $\gamma = 5^\circ, 9'$.

De la Variation dans l'obliquité de l'écliptique.

58. Posant l'obliquité moyenne de l'écliptique = I, qui est pour le commencement de ce siècle = 23°, 28', 43'', & pour la fin = 23°, 27', 55'', la première correction dépend de la longitude du soleil, qui étant posée = Ψ , la correction sera

$$+ \frac{3(n-1)\Delta(\epsilon n + 2\Delta \cos I) \sin I}{4(\epsilon\epsilon nn - 4\Delta\Delta)} \cos 2\Psi,$$

laquelle en substituant les valeurs marquées se réduit à

$$+ \frac{0,0020532(n-1)(n + 0,0054752 \cos I) \sin I}{nn - 0,0000300} \cos 2\Psi.$$

Si le coefficient étoit = 1, il vaudroit 57°, 17', 45'' = 206265''; donc, réduisant ce coefficient en minutes secondes, cette connexion sera exprimée ainsi en secondes.

$$+ 423, 503. \frac{(n-1)(n + 0,0054752 \cos I) \sin I}{nn - 0,0000300} \cos 2\Psi,$$

ou posant pour I sa valeur:

$$+ 168, 70. \frac{(n-1)(n + 0,00502)}{nn - 0,00003} \cos 2\Psi \text{ secondes.}$$

59. La seconde correction dépend de la longitude de la Lune, laquelle étant posée $= \psi$, cette correction sera

$$+ \frac{3m(n-1)\Delta\Delta(\epsilon n + 2\delta \cos I) \sin I}{4\delta(\epsilon\epsilon nn - 4\delta\delta)} \cos 2\psi$$

qui se réduit à

$$+ \frac{0,0001538(n-1)m(n + 0,0732022 \cos I) \sin I}{nn - 0,0253584} \cos 2\psi.$$

Cette formule étant réduite à des minutes secondes, & la valeur de l'arc I substituée donne

$$+ 12,618 \cdot \frac{m(n-1)(n + 0,06710)}{nn - 0,00536} \cos 2\psi \text{ secondes,}$$

d'où l'on voit que cette correction est beaucoup plus petite que la précédente, puisque nous savons que le nombre m est certainement moindre que 4. D'ailleurs, il est aussi certain que le nombre n diffère très peu de l'unité, de sorte que $n - 1$ est une fraction extrêmement petite.

60. La troisième correction dépend de la longitude du noeud ascendant, laquelle étant posée $= \theta$, cette correction sera

$$+ \frac{3m(n-1)\Delta\Delta(\epsilon n \cos I - \xi \cos 2I) \sin \gamma}{2\xi(\epsilon\epsilon nn - \xi\xi)} \cos \theta$$

qui étant réduite en nombres, & ensuite en minutes secondes, devient

$$+ 1295,45 \cdot \frac{m(n-1)(n - 0,00011)}{nn} \cos \theta \text{ minutes secondes.}$$

Enfin, la quatrième correction est proportionnelle au cosinus de l'angle $2\psi - \theta$, & exprimée en forte :

$$+ \frac{3m(n-1)\Delta\Delta(\epsilon \cos I + 2\delta + \xi) \cos 2I \sin \gamma}{2(2\delta + \xi)(\epsilon\epsilon nn - (2\delta + \xi)^2)} \cos(2\psi - \theta,$$

qui

qui étant réduite en nombres, & ensuite en minutes secondes, devient

$$+ \frac{2,603.m(n-1)(n+0,05459)}{nn-0,00538} \cos(2\psi - \theta) \text{ min. secondes,}$$

de sorte que cette correction évanouit presque par rapport à la précédente.

61. Toutes ces corrections deviennent les plus grandes positivement, si $2\Psi = 0$, & $2\psi = \theta = 1800$, & alors elles vaudront ensemble en négligeant les petites fractions jointes aux nombres n & m ,

$$\frac{n-1}{n} (161, 70 + 1310, 671 m) \text{ secondes.}$$

Or, si les mêmes angles 2Ψ ; 2ψ , & θ dont de 180° , il en résultera la plus grande correction négative, qui sera

$$\frac{n-1}{n} (168, 70 + 1305, 465 m) \text{ secondes}$$

Donc, le plus grand changement dans l'obliquité de l'écliptique pourra monter à

$$\frac{n-1}{n} (337, 40 + 2616, 136 m) \text{ secondes.}$$

Or, par les observations de Mr. Bradley, on fait que ce changement est d'environ $18''$, ou peut-être un peu plus grand, puisque toutes les circonstances de ses observations n'ont pas concouru à montrer le plus grand changement.

De la précession des Equinoxes.

62. Ici il faut considérer d'abord le mouvement moyen des points équinoctiaux, contenu dans le termes proportionnels au tems t , qui sont :

$$- \frac{3(n-1)\Delta\Delta}{2\epsilon n} (1 + m \cos\gamma^2) t \cos l,$$

d'où

d'où nous voyons que la longitude des points équinoxiaux comptée depuis la première étoile du bélier va en diminuant, supposé que $n > 1$: ou bien la longitude de cette étoile comptée depuis l'équinoxe croit avec le tems. Cherchons donc cet accroissement pour le tems d'une année, & alors Δt vaudra 360° , & partant la précession annuelle des équinoxes fera

$$= \frac{3(n-1)\Delta}{2\varepsilon n} (1 + m \cos \gamma^2) \cos l. 360^\circ,$$

qui se réduit à $0,0037666 (1 + 0,991943 m) \frac{(n-1)}{n} \cdot 360^\circ$,

ou bien à $\frac{n-1}{n} (1 + 0,991943 m) \cdot 4881\frac{1}{2}$ secondes.

Or on fait par les observations, & les remarques que j'ai faites sur l'action des planetes, que cette précession est de $50\frac{1}{2}$ secondes.

63. Maintenant, si nous supposons la plus grande variation dans l'obliquité de l'écliptique de $18''$, & que cette différence ait été observée à la même saison de l'année, de sorte que l'angle Ψ , ou la longitude du soleil, n'y ait pas influé, nous aurons ces deux équations pour en déterminer les deux nombres inconnus m & n ,

$$22616 m \cdot \frac{n-1}{n} = 18, \quad \&$$

$$4881\frac{1}{2} (1 + 0,991943 m) \frac{n-1}{n} = 50\frac{1}{2},$$

donc $\frac{4881\frac{1}{2} (1 + 0,991943 m)}{2616 m} = \frac{151}{4}$, d'où nous tirons

$4881\frac{1}{2} = 2472,9 m$, & $m = 1,974$. Si au lieu de $18''$ nous avons pris tant soit peu plus, nous aurions trouvé $m = 2$, &

dans ce cas il en résulteroit: $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{28}$, & $n = \frac{28}{27}$.

Or il semble qu'on ne sauroit mettre $m < 2$, puisque Newton a



trouvé $m = 4$, & M. Bernoulli, après avoir mieux examiné les mêmes observations, a conclu $m = 2\frac{1}{2}$.

64. Mais, puisque nous ne sommes pas si bien assurés du nombre de $18''$, qui marque la plus grande variation dans l'obliquité, que nous le sommes de la précession moyenne, considérons le nombre m comme donné, & nous aurons d'abord

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{96,98 + 96,20m},$$

d'où le plus grand changement dans l'obliquité de l'écliptique au lieu de $18''$ fera $= \frac{2616m}{96,98 + 96,20m}$ qui soit $= \alpha$ pour la même saison de l'année; donc les hypothèses suivantes donneront

si	on aura		
$m = 2$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{289,38}$;	$n = \frac{288,38}{1}$;	$\alpha = 18\frac{1}{10}$ secondes,
$m = 2\frac{1}{4}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{313,43}$;	$n = \frac{312,43}{1}$;	$\alpha = 18\frac{8}{10}$ secondes,
$m = 2\frac{1}{2}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{337,48}$;	$n = \frac{336,48}{1}$;	$\alpha = 19\frac{4}{10}$ secondes,
$m = 2\frac{3}{4}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{361,53}$;	$n = \frac{360,53}{1}$;	$\alpha = 19\frac{2}{10}$ secondes,
$m = 3$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{385,58}$;	$n = \frac{384,58}{1}$;	$\alpha = 20\frac{3}{10}$ secondes,
$m = 3\frac{1}{4}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{409,63}$;	$n = \frac{408,63}{1}$;	$\alpha = 20\frac{7}{10}$ secondes,
$m = 3\frac{1}{2}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{433,68}$;	$n = \frac{432,68}{1}$;	$\alpha = 21\frac{1}{10}$ secondes,

Quand



Quand même il y auroit $m = \infty$, auquel cas il seroit $n = 1$, le plus grand changement d'obliquité de l'écliptique ne surpasseroit point $27\frac{2}{5}$ secondes.

Des inégalités dans la Précession des Equinoxes.

65. Puisqu'on λ marque la longitude du solstice d'été depuis la première étoile du bélier, $\lambda - 90^\circ$ marquera celle de l'équinoxe du printemps, & partant $90^\circ - \lambda$ la longitude de la première étoile du bélier comptée depuis l'équinoxe du printemps. Donc, ayant trouvé par le mouvement moyen la longitude moyenne de la première étoile du bélier, que les tables astronomiques montrent sous le titre de la précession des équinoxes, en comptant $50\frac{1}{3}''$ par an, les autres termes qui entrent dans l'expression de λ étant pris négativement, donneront les inégalités périodiques qu'il faut ou ajouter ou soustraire de la longitude moyenne. De cette manière on trouvera la longitude vraie de la première étoile du bélier depuis le point équinoctial pour chaque tems proposé. Mais, si l'on veut remonter à plusieurs siècles, il faut tenir compte de l'action des planètes de Jupiter & de Vénus, d'où tant l'obliquité moyenne que la précession moyenne des équinoxes est changée, comme j'ai fait voir dans le X Volume de nos Mémoires, auquel je me rapporte ici.

66. La première correction dépend donc de la longitude du soleil Ψ , & est proportionnelle au sinus de cette longitude doublée. Cette correction est renfermée dans cette formule

$$= \frac{3(n - 1)\Delta(\epsilon n \cos I + 2\Delta)}{4(\epsilon\epsilon nn - 4\Delta\Delta)} \sin 2\Psi,$$

laquelle en substituant pour ϵ , Δ , & I , leurs valeurs se changent en celle-ci,

$$= 0,0018833. (n - 1) \frac{(n + 0,0059693)}{nn - 0,0000300} \sin 2\Psi,$$

laquelle étant réduite en minutes secondes donne

$$— 396,60 (n - 1) \cdot \frac{n + 0,00597}{nn - 0,00003} \sin 2\Psi \text{ secondes.}$$

Puisque $n = \frac{28}{8}$, cette correction ne sauroit jamais surpasser $1\frac{1}{2}$ seconde, de sorte quelle est à peine sensible. Cependant, si l'on veut calculer exactement, il ne faut pas négliger cette petite correction.

67. La seconde correction dépend de la longitude de la lune ψ , & est proportionnelle au $\sin 2\psi$.

$$— \frac{3 (n - 1) m \Delta \Delta (n \epsilon \cos l + 2\delta)}{4\delta (nn \epsilon \epsilon - 4\delta\delta)} \sin 2\psi,$$

laquelle par la substitution sera exprimée ainsi en minutes secondes.

$$— 29,06. m (n - 1) \cdot \frac{n + 0,079807}{nn - 0,0053584} \sin 2\psi \text{ secondes.}$$

La troisième équation dépend de la longitude du noeud ascendant θ , & est proportionnelle à son sinus,

$$— \frac{3 (n - 1) m \Delta \Delta (n \epsilon \cos 2l - \epsilon \cos l) \sin \gamma}{2\epsilon (nn \epsilon \epsilon - \epsilon^2) \sin l} \sin \theta,$$

laquelle étant réduite en minutes secondes sera

$$— 2420,4. m (n - 1) \cdot \frac{n - 0,000198}{nn - 0,000000} \sin \theta \text{ secondes.}$$

Enfin la quatrième dépend de l'angle $2\psi - \theta$

$$— \frac{3 (n - 1) m \Delta \Delta (n \epsilon \cos 2l + (2\delta + \epsilon) \cos l) \sin \gamma}{2 (2\delta + \epsilon) (nn \epsilon \epsilon - (2\delta + \epsilon)^2) \sin l} \sin (2\psi - \theta),$$

& donne en minutes secondes

$$— 4,86. m (n - 1) \cdot \frac{n + 0,098557}{nn - 0,005380} \sin (2\psi - \theta) \text{ secondes.}$$

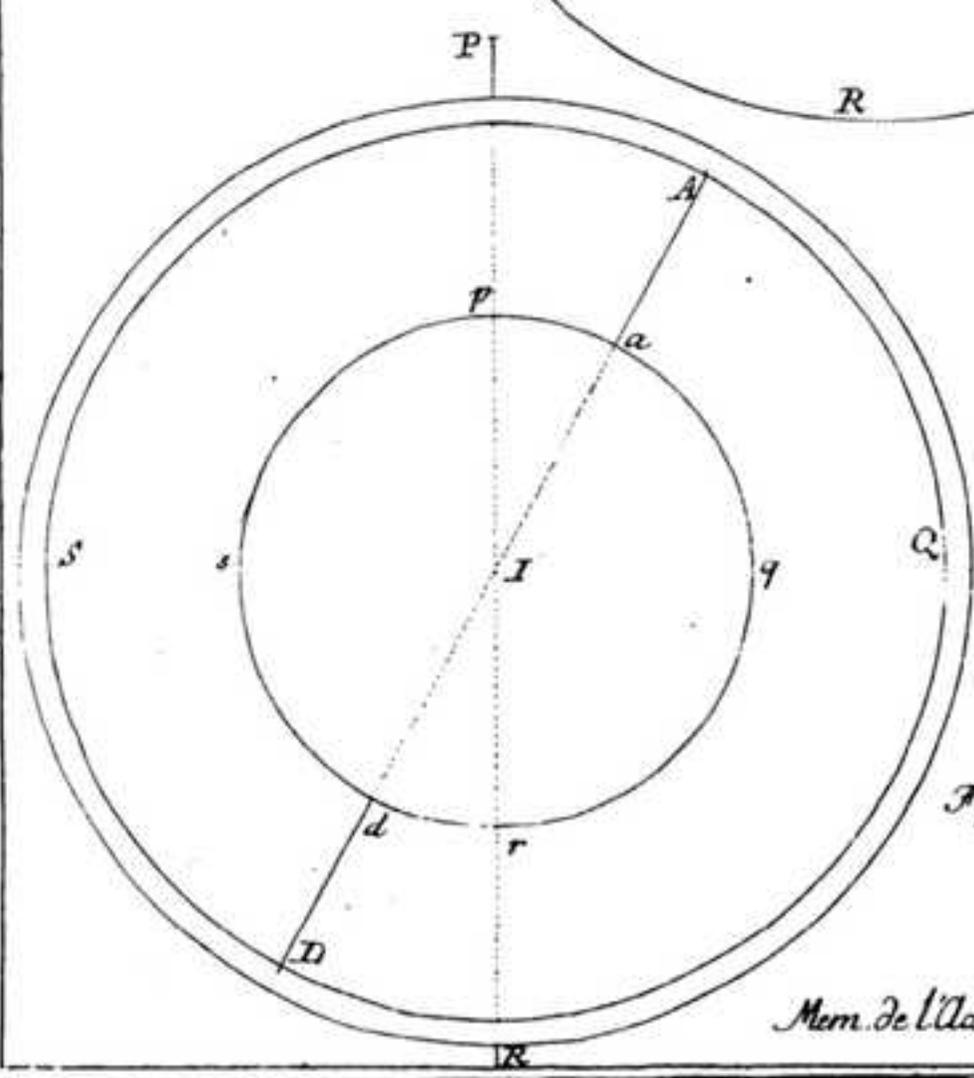
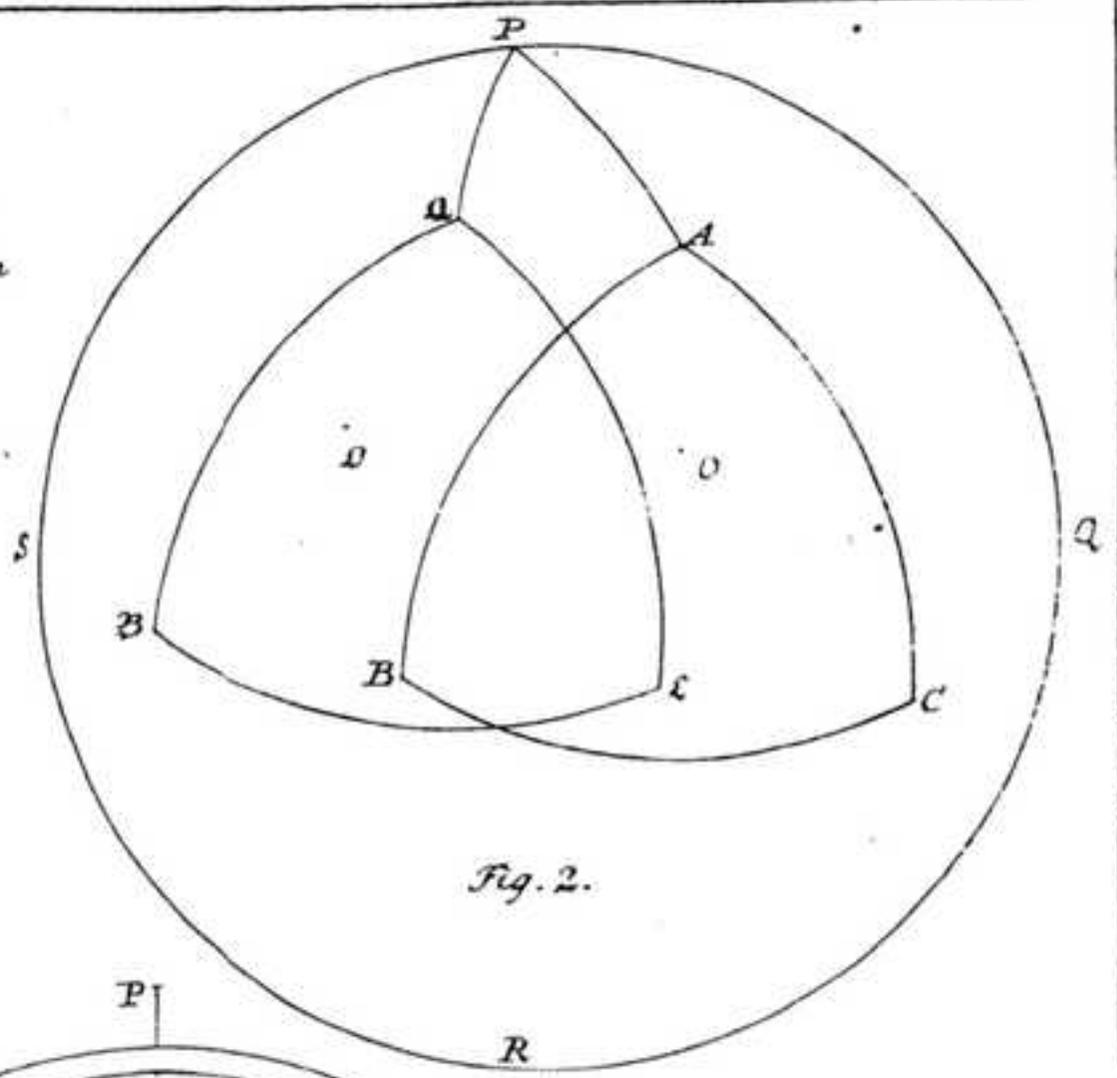
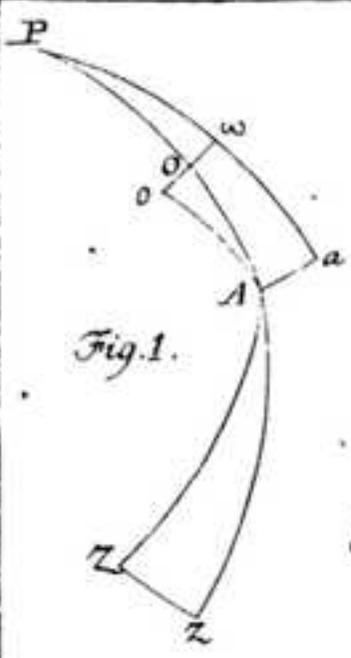


Fig. 4.

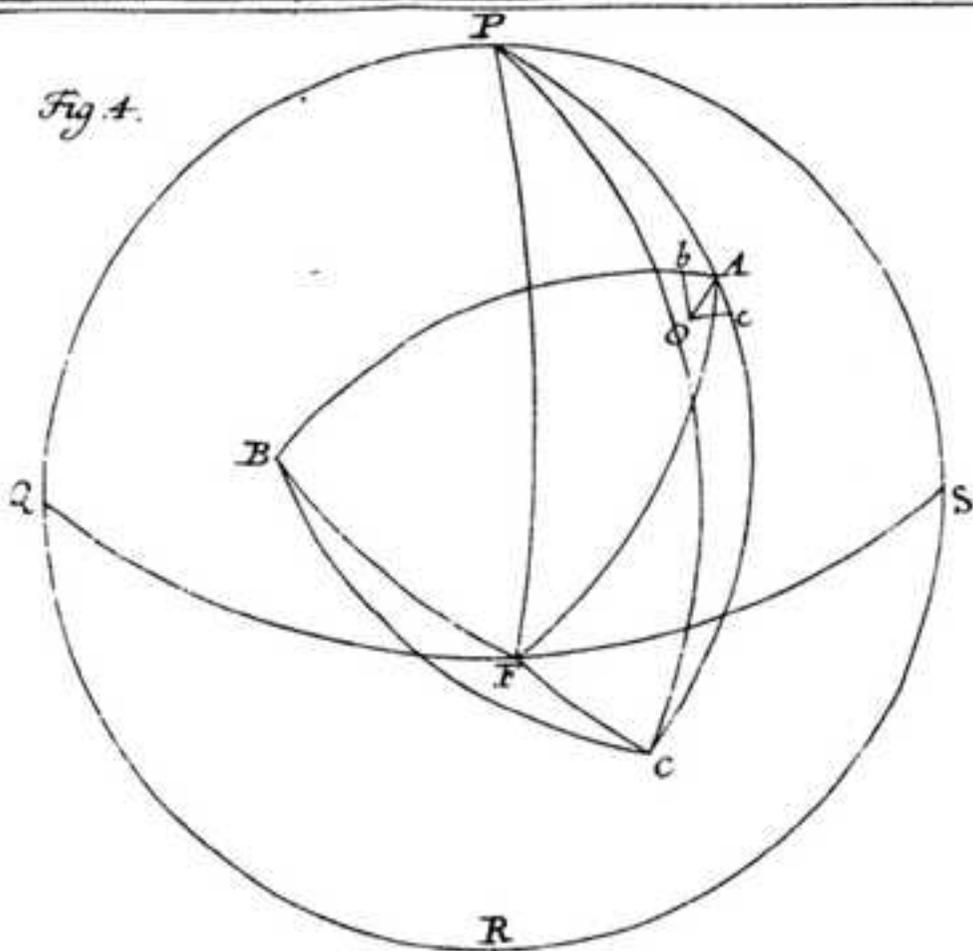


Fig. 6.

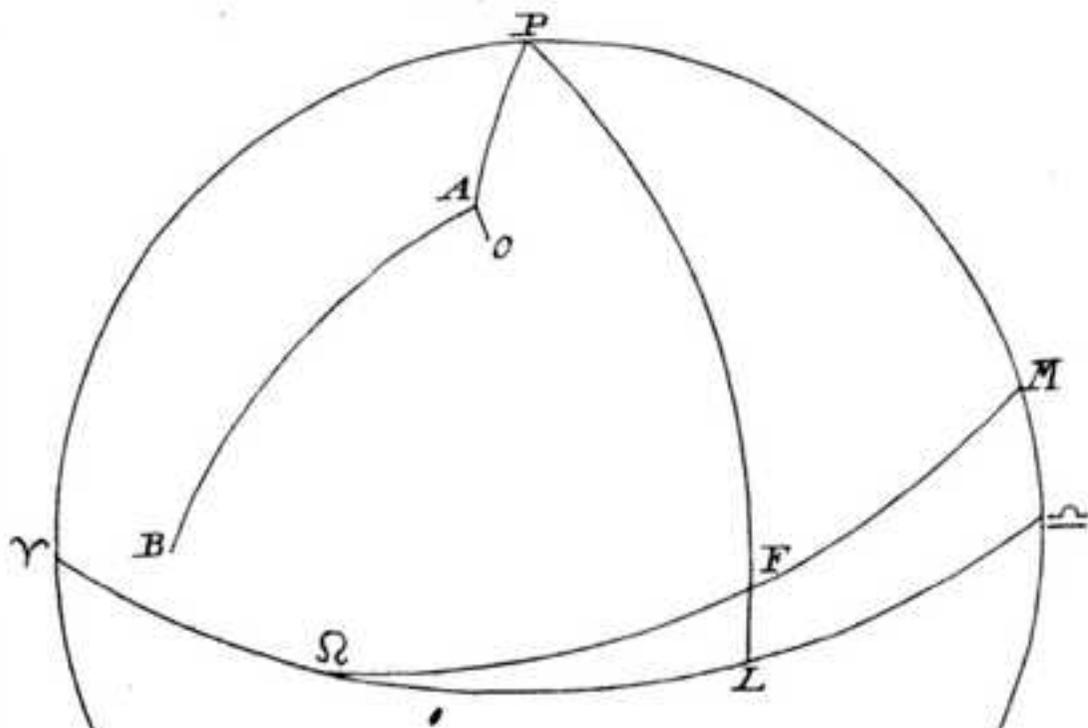
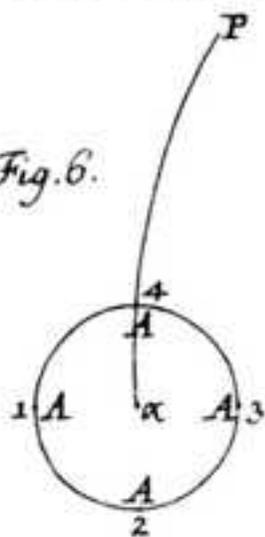


Fig. 5.



68. Considérons maintenant trois hypothèses $m = 2$, $m = 2\frac{1}{2}$, & $m = 3$, & les corrections pour l'obliquité de l'écliptique seront :

	si $m = 2$	si $m = 2\frac{1}{2}$	si $m = 3$
+ A $\cos 2\Psi$	A = 0'', 58	A = 0'', 50	A = 0'', 44
+ B $\cos 2\psi$	B = 0, 08	B = 0, 09	B = 0, 10
+ C $\cos \theta$	C = 8, 96	C = 9, 61	C = 10, 07
+ D $\cos(2\psi - \theta)$	D = 0, 02	D = 0, 02	D = 0, 02

Or les corrections pour la longitude de γ seront

	si $m = 2$	si $m = 2\frac{1}{2}$	si $m = 3$
— A $\sin 2\Psi$	A = 1'', 37	A = 1'', 18	A = 1'', 03
— B $\sin 2\psi$	B = 0, 20	B = 0, 21	B = 0, 22
— C $\sin \theta$	C = 16, 75	C = 17, 95	C = 18, 81
— D $\sin(2\psi - \theta)$	D = 0, 03	D = 0, 03	D = 0, 04

69. Ces formules sont parfaitement d'accord avec celles que j'avois trouvées dans le V Volume de nos Mémoires, & partant je ne m'arrêterai plus ici à leur application. Je remarquerai seulement, que la terre n'est pas une masse homogène, puisqu'alors la valeur du nombre n devrait être $= \frac{2}{3} \frac{0}{0} \frac{1}{0}$, qui est pourtant selon toute apparence moindre que $\frac{3}{5} \frac{0}{0} \frac{1}{0}$. D'où il s'ensuit que l'inégalité entre ses momens principaux d'inertie n'est pas aussi grande que si elle étoit homogène, ou bien elle approche plus de la nature d'un globe par la distribution de sa matière, que par sa figure. Il faut donc que la terre renferme au dedans une matière plus pesante, & plus également distribuée autour du centre d'inertie. Or c'est aussi tout ce qu'on en peut conclure. Au reste, si la terre ne tournoit pas à peu près autour d'un axe principal, & que ses momens d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux ne fussent pas égaux entr'eux, il auroit été presque impossible de déterminer son mouvement de rotation.

