1766

Continuation des recherches sur la propatation du son

Leonhard Euler

CONTINUATION DES RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. EULER.

I.

Dans les deux Mémoires précédens ſur cette matiere j'ai ſuffiſamment fait ſentir, combien il ſeroit important ſi l'on pouvoit déterminer par la Théorie la propagation du ſon en conſidérant l'air étendu en tout ſens; & qu'on pût réuſſir dans cette hypotheſe auſſi bien, que dans celle où l'on ne ſuppoſoit à l'air qu'une ſeule dimenſion ſelon une ligne droite. Après avoir expliqué la propagation du ſon dans cette hypotheſe d'une ſeule dimenſion, dans mon premier Mémoire ſur cette matiere, j'ai tâché de traiter ce même ſujet dans le ſupplément, en ſuppoſant d'abord à l'air deux dimenſions ſuivant un plan, & enſuite en introduiſant dans le calcul toutes les trois dimenſions. J'ai auſſi réuſſi à trouver des formules analytiques, qui contiennent tous les mouvemens poſſibles, dont l'air eſt ſuſceptible; mais l'application à la queſtion propoſée me parut trop difficile, pour que j'en euſſe oſé eſperer un heureux ſuccès.

2. Quand je conſidérai ſeulement deux dimenſions, j'avois bien appliqué les formules trouvées au cas où la premiere agitation ſe fait quaſi dans un point, d'où les ébranlemens ſe répandent enſuite par des cercles concentriques partout également, puiſque c'eſt en particulier le cas de la propagation du ſon. Mais la formule que j'y ai

 trou-

trouvée, est assujettie à des difficultés si grandes, que je n'ai vu aucun moyen pour les surmonter; & ayant fait la même application dans l'hypothese de trois dimensions, je pouvois d'autant moins espérer qu'il me seroit possible de développer la formule qui détermine les ébranlemens répandus en tout sens d'un point fixe, par des surfaces sphériques concentriques.

3. Cependant c'est précisément ici, comme je l'ai remarqué depuis, que les difficultés ne sont pas invincibles; & c'est là qu'a lieu un cas semblable à ceux que le Comte Riccati a proposés autrefois, où une certaine équation devient intégrable, pendant qu'en général elle ne l'est pas. Cette découverte est d'autant plus importante, qu'elle me mît bientôt en état de déterminer parfaitement la propagation du son, dans l'hypothese que l'air est répandu en tout sens; ce qui m'a paru jusques là presque impossible. Il n'y a aussi aucun doute, qu'ayant surmonté ce grand obstacle, on ne parvienne enfin à une méthode de résoudre directement les formules, que j'avois trouvées pour la communication des ébranlemens dans l'air, & peut être même des formules plus compliquées du même genre, d'où la partie la plus sublime des Mathématiques retireroit les plus grands avantages.

Fig. 1. 4. Soit A le centre de l'agitation primitive, qui se répande successivement par des couches concentriques en tout sens: soit $AP = AV = V$, le rayon d'une surface sphérique quelconque PV, dans l'état d'équilibre, laquelle, après le tems $= t$, prenne la situation pv, dont le rayon soit $Ap = Av = V + u$, ou l'intervalle $Pp = Vv = u$, que je suppose extrèmement petit: & il s'agit de déterminer cet intervalle u, par le rayon naturel $AV = V$, & le tems écoulé t depuis l'agitation. Cela posé, j'ai trouvé dans le §. 45. du Mémoire précédent, posant $s = \frac{u}{V}$, ou $u = Vs$, cette équation:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

ou

ou bien en remettant pour s ſa valeur $\frac{u}{V}$, le paragraphe ſuivant a fourni cette équation:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=-\frac{2u}{VV}+\frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)+\left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

où h eſt la hauteur d'une colonne d'air, dont le poids eſt en équilibre avec l'élaſticité de l'air: g marque la hauteur, d'où les corps tombent dans une ſeconde, exprimant le tems t en ſecondes.

5. Si l'on ne ſuppoſoit à l'air que deux dimenſions ſelon un plan, & que les ébranlemens ſe répandiſſent par des cercles concentriques, en conſervant les mêmes dénominations, on auroit à réſoudre cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{3}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

qui me paroit irréſoluble, du moins par la même méthode qui réuſſit dans l'équation précédente. Pour faire mieux ſentir cette différence, conſidérons ces équations ſous une forme plus générale:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{n}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)+\left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

& voyons comment il faudroit s'y prendre pour trouver la fonction des deux variables V & t, à laquelle eſt égale la variable s. Je me ſervirai d'une méthode, qui ſemble pouvoir être employée avec ſuccès dans toutes ſortes de ſemblables équations, où le tems entre en conſidération: & qui conſiſte à éliminer tout à fait le tems.

6. Pour

6. Pour cet effet, je poſe $s = P \sin(\alpha t + \mathfrak{A})$, où P ſoit une fonction de la ſeule variable V, & puisqu'on aura

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \alpha P \operatorname{cof}(\alpha t + \mathfrak{A}); \quad \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = -\alpha\alpha P \sin(\alpha t + \mathfrak{A})$$

$$\left(\frac{ds}{dV}\right) = \frac{dP}{dV} \sin(\alpha t + \mathfrak{A}); \quad \left(\frac{dds}{dV^2}\right) = \frac{ddP}{dV^2} \sin(\alpha t + \mathfrak{A}),$$

notre équation deviendra diviſible par $\sin(\alpha t + \mathfrak{A})$, & ſera:

$$-\frac{\alpha\alpha P}{2gh} = \frac{ndP}{VdV} + \frac{ddP}{dV^2},$$

qui ne contient que deux variables V & P, où le différentiel dV eſt pris conſtant. Il s'agit donc de réſoudre cette équation différentio-différentielle, qui, poſant $\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm$, prendra cette forme

$$mmPdV^2 + \frac{ndVdP}{V} + ddP = 0,$$

qui a cette propriété, que la variable P n'a partout qu'une ſeule dimenſion.

7. Donc, poſant $P = e^{\int pdV}$, ou $\frac{dP}{P} = pdV$, cette équation ſera reduite à une différentielle du premier degré:

$$mmdV + \frac{npdV}{V} + dp + ppdV = 0,$$

laquelle, poſant $V^n p = q$, ou $p = \frac{q}{V^n}$, ſe transforme en çelle-ci.

$$\frac{dq}{V^n} + \frac{qqdV}{V^{2n}} + mmdV = 0, \quad \text{ou}$$

$$dq + \frac{qqdV}{V^n} + mmV^n dV = 0,$$

Poſons

Posons de plus $V^{n-1} = \frac{1}{r}$, pour avoir $\frac{1}{V^{n-1}} = r$, & $-\frac{(n-1)\,dV}{V^n} = dr$, & puisque $V = r^{\frac{-1}{n-1}}$, donc $V^{2n} = r^{\frac{-2n}{n-1}}$, nous aurons $-(n-1)V^n dV = r^{\frac{-2n}{n-1}}dr$, & partant notre équation prendra cette forme:

$$dq - \frac{qq\,dr}{n-1} + \frac{mm}{n-1}\,r^{\frac{-2n}{n-1}}\,dr = 0,$$

qui est la même, qu'autrefois avoit proposée le Comte Riccati.

8. De là il est clair, si l'on prend $n = 3$, pour le cas de deux dimensions de l'air, qu'on aura:

$$dq - \tfrac{1}{2}qq\,dr - \frac{mm}{2}\,r^{-3}dr = 0,$$

ce qui est un des cas irréductibles de l'équation de Riccati; & cette raison m'a fait desespérer, qu'on pourroit jamais déterminer la propagation du son, à moins qu'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension selon une ligne droite. Mais, posant $n = 4$, cette équation devenant $dq - \frac{1}{3}qq\,dr - \frac{1}{3}mm\,r^{-\frac{8}{3}}dr = 0$, est un des cas réductibles de l'équation de Riccati, ce qui change tout à fait la nature de l'équation que nous avons à résoudre, & nous laisse esperer, que le cas de trois dimensions, que nous donnons à l'étendue de l'air, pourroit admettre la solution, quoique celui de deux dimensions n'en fût pas susceptible.

9. Pour trouver dans ce cas réductible l'équation intégrale, il est bon de se tenir à l'équation differentio-différentielle

$$mm\,P\,dV^2 + \frac{n\,dV\,dP}{V} + ddP = 0,$$

 qu'il

qu'il faut transformer en supposant $\frac{dP}{P} = Q\,dV + \frac{dp}{p}$, où Q est une certaine fonction de V, qu'il faut déterminer en sorte que l'intégrale ou la valeur de p puisse commodément être dévelopée par une serie. Ayant donc, à cause de dV constant: en différentiant

$$\frac{ddP}{P} - \frac{dP^2}{P^2} = dQ\,dV + \frac{ddp}{p} + \frac{dp^2}{p^2}.$$

Or $\frac{dP^2}{P^2} = QQ\,dV^2 + \frac{2Q\,dV\,dp}{p} + \frac{dp^2}{pp}$, donc

$$\frac{ddP}{P} = QQ\,dV^2 + \frac{2Q\,dV\,dp}{p} + dQ\,dV + \frac{ddp}{p},$$

d'où nous tirons cette équation:

$$mm\,dV^2 + \frac{nQ\,dV^2}{V} + \frac{n\,dV\,dp}{Vp} + \frac{ddp}{p.} = 0,$$
$$+ QQ\,dV^2 + dQ\,dV + \frac{2Q\,dV\,dp}{p}.$$

Où il faut faire en sorte, que la variable V ait ou nulle ou une seule dimension partout.

10. Posons donc $Q = m\sqrt{-1} + \frac{\lambda}{V}$, de sorte que $dQ = -\frac{\lambda\,dV}{VV}$, pour avoir:

$$2\lambda m\sqrt{-1}.\frac{dV^2}{V} + \frac{\lambda\lambda\,dV^2}{V^2} + \frac{nd\,V\,dp}{Vp} + 2m\sqrt{-1}.\frac{dV\,dp}{p} + \frac{ddp}{p} = 0,$$
$$+ mn\sqrt{-1}.\frac{dV^2}{V} + \frac{\lambda n\,dV^2}{V^2} + \frac{2\lambda\,dV\,dp}{Vp}$$
$$- \frac{\lambda\,dV^2}{V^2}.$$

Soit

Soit de plus $\lambda = -n+1$, pour obtenir cette plus simple forme:

$$-\frac{(n-2)\,m\,dV^2}{V}\sqrt{-1}-\frac{(n-2)\,dV\,dp}{Vp}+\frac{2m\,dV\,dp\sqrt{-1}}{p}+\frac{ddp}{p}=0,$$

ou bien, en la multipliant par Vp celle-ci:

$$V\,ddp+2mVdVdp\sqrt{-1}-(n-2)dVdp-(n-2)mp\,dV^2\sqrt{-1}=0,$$

dont on cherche la valeur de p par une série.

11. Supposons $p = A + BV + CV^2 + DV^3 + EV^4 +$ &c. & la substitution donnera:

$$\frac{V\,ddp}{dV^2} = \qquad +1.2CV + 2.3DV^2 + 3.4EV^3 + 4.5FV^4\ \&c.$$

$$+\frac{2mV\,dp\sqrt{-1}}{dV} = \qquad +2mBV\sqrt{-1}+4mCV^2\sqrt{-1}+6mDV^3\sqrt{-1}+8mEV^4\sqrt{-1}$$

$$-\frac{(n-2)\,dp}{dV} = -(n-2)B-2(n-2)CV-3(n-2)DV^2-4(n-2)EV^3-5(n-2)FV^4$$

$$-(n-2)mp\sqrt{-1} = -(n-2)mA\sqrt{-1}-(n-2)mBV\sqrt{-1}-(n-2)mCV^2\sqrt{-1}-(n-2)mDV^3\sqrt{-1}-(n-2)mFV^4\sqrt{-1}$$

Ces séries prises ensemble devant être $=0$, donnent les déterminations suivantes:

$B+mB\sqrt{-1}=0$	$B=-\dfrac{mA\sqrt{-1}}{1}$
$2(n-3)C+(n-4)mB\sqrt{-1}=0$	$C=-\dfrac{(n-4)mB\sqrt{-1}}{2(n-3)}$
$3(n-4)D+(n-6)mC\sqrt{-1}=0$	$D=-\dfrac{(n-6)mC\sqrt{-1}}{3(n-4)}$
$4(n-5)E+(n-8)mD\sqrt{-1}=0$	$E=-\dfrac{(n-8)mD\sqrt{-1}}{4(n-5)}$
$5(n-6)F+(n-10)mE\sqrt{-1}=0$	&c.

d'où

d'où l'on voit que cette série devient finie aux cas:

$$n = 4;\quad n = 6;\quad n = 8;\quad n = 10;\quad \&c.$$

12. Donc, pour notre cas, où $n = 4$, nous aurons $B = -mA\sqrt{-1}$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & partant $p = A - mAV\sqrt{-1}$; donc $Q = m\sqrt{-1} - \frac{3}{V}$, & $\int Q dV = mV\sqrt{-1} - 3\,lV$. Or, ayant posé $\frac{dP}{P} = QdV + \frac{dp}{p}$, nous aurons en intégrant $lP = mV\sqrt{-1} - 3\,lV + lp$, ou $P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3}$. Or, puisqu'on peut prendre $\sqrt{-1}$, aussi bien négatif, nous aurons aussi

$$P = \frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1 + mV\sqrt{-1})}{V^3};$$

& parce que dans notre équation

$$mmPdV^2 + \frac{4dVdP}{V} + ddP = 0,$$

P n'a partout qu'une seule dimention: ces deux valeurs combinées:

$$P = \frac{Ae^{mV\sqrt{-1}}(1 - mV\sqrt{-1})}{V^3} + \frac{Be^{-mV\sqrt{-1}}(1 + mV\sqrt{-1})}{V^3},$$

en donnent l'intégrale complette.

13. Il ne s'agit maintenant que de prendre les constantes A & B en sorte que les imaginaires se détruisent. Pour cet effet il faut remarquer que

$$e^{mV\sqrt{-1}} = \cos mV + \sqrt{-1}.\sin mV, \quad \&$$
$$e^{-mV\sqrt{-1}} = \cos mV - \sqrt{-1}.\sin mV,$$

&

& partant nous aurons:

$$PV^3 = A(1 - mV\sqrt{-1})(\cos mV + \sqrt{-1}.\sin mV) + B(1 + mV\sqrt{-1})(\cos mV - \sqrt{-1}.\sin mV)$$

ou

$$PV^3 = (A+B)\cos mV + (A-B)\sqrt{-1}.\sin mV - mV(A-B)\sqrt{-1}.\cos mV + mV(A+B)\sin mV.$$

Soit donc $A + B = C$, & $(A - B)\sqrt{-1} = D$, pour avoir cette expression réelle:

$$PV^3 = C\cos mV + D\sin mV - mDV\cos mV + mCV\sin mV:$$

soit de plus $C = E\sin\zeta$, & $D = E\cos\zeta$, pour rendre cette équation plus simple

$$PV^3 = E\sin(mV + \zeta) - mEV\cos(mV + \zeta), \text{ ou bien}$$

$$P = \frac{E\sin(mV + \zeta)}{V^3} - \frac{mE\cos(mV + \zeta)}{V^2}.$$

14. Nous avons posé $\frac{\alpha\alpha}{2gh} = mm$, d'où il s'ensuit $\alpha = m\sqrt{2gh}$; & de là à cause de $s = P\sin(\alpha t + \mathfrak{A})$, nous aurons

$$s = \frac{E\sin(mV + \zeta)\sin(mt\sqrt{2gh} + \mathfrak{A})}{V^3} - \frac{mE\cos(mV + \zeta)\sin(mt\sqrt{2gh} + \mathfrak{A})}{V^2},$$

où les quantités E, m, ζ, $\mathfrak{A}$, sont absolument arbitraires, de sorte qu'on peut donner une infinité de formules semblables, dont non seulement chacune séparément, mais aussi toutes ensemble satisfont également à notre équation:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right).$$

& pour la premiere équation:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

nous aurons

$$u = \frac{E\sin(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{VV} - \frac{mE\cos(mV+\zeta)\sin(mt\sqrt{2gh}+\mathfrak{A})}{V},$$

ou à un assemblage d'autant de semblables formules qu'on voudra.

15. Or tout cela n'est encore d'aucun secours pour notre dessein, qui demande des fonctions absolument arbitraires, qui puissent même être discontinues. Mais la considération de ces formes m'a fourni l'idée, que notre équation pourroit être résolue par une telle expression.

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh})$$

où Φ marque une fonction quelconque, & la fonction Φ' en dépend, en sorte que $d.\ \Phi z = dz\,\Phi' z$; de la même maniere je poserai $d.\ \Phi' z = dz\,\Phi'' z$; $d.\ \Phi'' z = dz\,\Phi''' z$ &c. Or de cette position nous tirons:

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = +\frac{2ghA}{V^2}\Phi''(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{2ghB}{V}\Phi'''(V+t\sqrt{2gh});$$

$$\left(\frac{du}{dV}\right) = -\frac{2A}{V^3}\,\Phi.. + \frac{A}{V^2}\,\Phi'.. + \frac{B}{V}\,\Phi''..$$
$$- \frac{B}{V^2}\,\Phi'..$$

$$\left(\frac{ddu}{dV^2}\right) = \frac{6A}{V^4}\,\Phi.. - \frac{4A}{V^3}\,\Phi'.. + \frac{A}{V^2}\,\Phi''.. + \frac{B}{V}\,\Phi'''$$
$$+ \frac{2B}{V^3}\,\Phi'.. - \frac{2B}{V^2}\,\Phi''..$$

16. Substituons ces valeurs dans notre équation:

$$0 = -\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) - \frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

&

& nous aurons:

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{6A}{V^4}\Phi.. + \frac{2B-4A}{V^3}\Phi'.. + \frac{A-2B}{V^2}\Phi''.. + \frac{B}{V}\Phi'''.. \\ & - \frac{4A}{V^4}\Phi.. + \frac{2A-2B}{V^3}\Phi'.. + \frac{2B}{V^2}\Phi''.. \\ & - \frac{2A}{V^4}\Phi.. - \frac{2B}{V^3}\Phi'.. - \frac{A}{V^2}\Phi''.. - \frac{B}{V}\Phi'''.. \end{aligned}$$

qui se réduit à $-\frac{2A - 2B}{V^3}\Phi'.. = o$, & partant $B = -A$, de sorte que notre intégrale soit

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi'(V + t\sqrt{2gh}),$$

qui est infiniment plus générale que celle que nous avions trouvée ci-dessus exprimée par des sinus & cosinus.

17. On pourra aussi prendre le signe radical $\sqrt{2gh}$ négatif, & on aura:

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi'(V - t\sqrt{2gh})$$

& cette formule jointe à la précédente donnera l'intégrale complette de notre formule. Mais, puisque par l'hypothese les agitations se répandent en tout sens également, cette derniere formule suffira seule, puisqu'on ne sauroit prendre V négatif. De là quelque fonction qu'on prenne pour Φ, on en connoitra pour chaque tems proposé t la quantité u dont une couche sphérique quelconque, dont le rayon $AV = V$, sera répandue. On en connoitra aussi la vitesse que cette couche aura pour s'éloigner davantage du centre A: cette vitesse sera:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi'(V - t\sqrt{2gh} + \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi''(V - t\sqrt{2gh}),$$

 Or,

Or, pour l'état initial, où $t = o$, on aura $u = \frac{A}{VV}\,\Phi V - \frac{A}{V}\,\Phi' V$, & pour la viteſſe

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\,\Phi' V + \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi'' V.$$

18. Puiſqu'il faut ſuppoſer qu'au commencement toute l'agitation ſoit renfermée dans un petit eſpace autour du centre A, la nature de la fonction Φ doit être telle, que ces trois expreſſions Φ, $\Phi' z$, $\Phi'' z$ ſoient toujours évanouiſſantes, dès que z ſurpaſſe

Fig. 2. une petite quantité donnée. Pour cet effet, qu'on décrive ſur l'axe AE une courbe quelconque $A' p a$, qu'on deſſine encore trois fois alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, pour avoir la courbe $A p a c b B$, dont l'appliquée $v p$, qui répond à une abſciſſe quelconque $A v = z$ ſoit $= \Phi'' z$. Enſuite, qu'on décrive une autre courbe $A q c B$ quadratrice de celle là, de ſorte que $v q = \frac{ar.\ Avp}{c}$, & l'on aura $vq = \frac{1}{c}\,\Phi' z$, puiſque $\Phi' z = \int dz\,\Phi'' z$. Enſuite, qu'on décrive la troiſieme courbe $A r B$ quadratrice de celle-ci: dont l'appliquée ſoit $v r = \frac{ar.\ Avq}{c}$, ou $v r = \frac{1}{cc}\,\Phi . z$, de ſorte que par ces trois courbes on aura:

$$\Phi z = cc . vr;\quad \Phi' z = c . vq,\quad \&\ \Phi'' z = vp.$$

19 Donc, pour l'état initial, prenant l'abſciſſe $A v$ égale au rayon de la couche ſphérique, dont on cherche le déplacement, ou $A v = V$, on aura le déplacement: $u = \frac{Acc}{VV} . vr - \frac{Ac}{V} . vq$, & la viteſſe

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} . vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} . vp,$$

d'où

d'où l'on connoit l'agitation initiale, & l'on comprend que, celle-ci étant donnée, on en tirera reciproquement la conſtruction de la courbe arbitraire Apa. Cependant il importe fort peu de ſavoir la nature de cette agitation, puisque notre but tend principalement à déterminer la propagation. Au reſte on pourroit auſſi décrire de ſemblables courbes tirées des fonctions de $V + t\sqrt{2gh}$, qu'on peut combiner avec celles-ci. Mais on verra bientôt que la viteſſe de la propagation n'en eſt pas alterée, & qu'elle demeure la même, quelque courbe qu'on prenne pour Apa. Par cette raiſon je m'arrêterai au cas que je viens d'indiquer.

20. Je dois auſſi remarquer que, quoique les membres de nos formules ſoient diviſés par V & VV, ils ne deviennent pas pourtant infinis au cas $V = 0$; pourvu que la premiere courbe Apa faſſe un angle aigu avec l'axe. Car, poſant $Av = V$, $vp = p$, $vq = q$, & $vr = r$, ſoit pour le commencement $p = nV$; où n eſt un nombre fini quelconque, & on aura $q = \frac{nVV}{2c}$, & $r = \frac{nV^3}{6cc}$: de là ſi l'abſciſſe V eſt extremement petite, on aura:

$$u = \tfrac{1}{6}nAV - \tfrac{1}{2}nAV = -\tfrac{1}{3}nAV,$$

$$\& \left(\frac{du}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}nA\sqrt{2gh} + nA\sqrt{2gh} = +\tfrac{1}{2}nA\sqrt{2gh},$$

de ſorte que le déplacement du centre A ſoit même infiniment petit, & ſi l'on veut que ſa viteſſe évanouiſſe auſſi, on n'a qu'à prendre $n = 0$, ou faire en ſorte que la courbe Apa touche l'axe en A.

21. Prenant maintenant un point quelconque V hors de l'agitation initiale, & l'on voit qu'au commencement où $t = 0$, tant le déplacement u que la viteſſe $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ſera zéro. Car, ſi $V > AB$, toutes ces fonctions $\Phi.V$; $\Phi'.V$, & $\Phi''.V$ évanouiſſent, puisque toutes les trois courbes ſont cenſées ſe réunir avec l'axe au dela de

de B. Mais, après le premier inſtant, dès que la quantité $V - t\sqrt{2gh}$, commence à devenir plus petite que AB, la couche qui paſſe par V ſera ébranlée. Qu'on prenne alors $Vv = t\sqrt{2gh}$, & on aura pour le déplacement de cette couche

$$u = \frac{Acc}{VV} \cdot vr - \frac{Ac}{V} \cdot vq, \quad \text{\& pour la viteſſe}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{Ac\sqrt{2gh}}{VV} \cdot vq + \frac{A\sqrt{2gh}}{V} \cdot vp,$$

d'où l'on voit que, plus le point V eſt éloigné du centre A, plus feront auſſi petits tant ſon déplacement que ſa viteſſe, & cela en raiſon des diſtances à peu près, ſi la diſtance V eſt fort grande.

22. On ſe ſera imaginé que les agitations répandues dans l'air devroient diminuer en raiſon des quarrés des diſtances, & on ſera ſurpris de voir que les petits eſpaces par leſquels les couches s'avancent, diminuent ſeulement en raiſon des diſtances, lorsque les diſtances ſont fort grandes. Mais il faut obſerver, que l'agitation de chaque couche ne dépend pas uniquement de ſon déplacement u, mais auſſi de ſa viteſſe, pendant qu'elle eſt ébranlée; & celle-ci étant auſſi réciproquement proportionelle à la diſtance au centre, d'où l'agitation entiere doit être cenſée bien plus petite. Au reſte, ſi la force du ſon, entant qu'il eſt apperçu, dépend ou du ſeul déplacement des particules d'air, ou ſeulement de leur viteſſe, on pourra dire que la force d'un ſon diminue en raiſon des diſtances; mais, ſi elle dépend de tous les deux conjointement, elle ſuivra la raiſon réciproque quarrée des diſtances.

23. Poſons la diſtance $AB = a$, qui eſt le rayon de la ſphere qui aura été primitivement agitée, & cette agitation ſera tranſmiſe juſqu'en V, la diſtance AV étant $= V$, après le tems t, en ſorte que $V - t\sqrt{2gh} = AB = a$, d'où l'on tire $t = \frac{V - a}{\sqrt{2gh}}$: ou bien dans une ſeconde l'agitation ſera tranſmiſe

par

par un eſpace $V = a + \sqrt{2gh}$, qui eſt de la quantité a plus grand, que celui que nous avions trouvé dans l'hypotheſe d'une ſeule dimenſion, quoique cette même augmentation y ait également lieu. Mais cela ne ſuffit en aucune maniere pour obtenir la viteſſe qu'on connoit par les expériences, & partant il n'y a plus de doute, que la force de l'agitation produiſe cette accélération, pendant que les ſons extremement foibles ſeroient d'accord avec notre formule, qui, comme j'ai d'abord remarqué, n'a lieu que lorsque les agitations ſont quaſi infiniment petites

24. Or l'intégrale complette de notre équation étant

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{B}{V^2}\Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\Psi'(V - t\sqrt{2gh})$$

on en peut faire varier à l'infini l'agitation primitive, non ſeulement par rapport au déplacement de chaque couche ſpherique, mais auſſi par rapport à la viteſſe qui leur ſera imprimée, puisqu'on a en général pour la viteſſe:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi''(V + t\sqrt{2gh})$$
$$- \frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi'(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi''(V - t\sqrt{2gh})$$

d'où l'on a pour l'état initial, en poſant $t = 0$:

$$u = \frac{A}{V^2}\Phi.V - \frac{A}{V}\Phi'.V + \frac{B}{V^2}\Psi.V - \frac{B}{V}\Psi'.V, \quad \&$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}\Phi'.V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\Phi''.V - \frac{B\sqrt{2gh}}{VV}\Psi'.V + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\Psi''.V$$

où les caracteres Φ & Ψ marquent des fonctions quelconques, tant continues que diſcontinues, ce qui nous met en état de donner une ſolution générale de notre probleme, en ſuppoſant l'agitation primitive quelconque.

25. On peut bien ſuppoſer $B = A$, puisque la variété des fonctions Φ & Ψ renferme deja cette différence: & pour qu'on puiſſe faire l'application à une agitation primitive quelconque, poſons:

$$\Phi.V + \Psi.V = \Sigma.V, \quad \& \quad \Phi.V - \Psi.V = \Theta.V,$$

de ſorte que

$$\Phi.V = \tfrac{1}{2}\Sigma.V + \tfrac{1}{2}\Theta.V, \quad \& \quad \Psi.V = \tfrac{1}{2}\Sigma.V - \tfrac{1}{2}\Theta.V,$$

& nous aurons pour l'état initial,

$$u = \frac{A}{V^2}.\Sigma.V - \frac{A}{V}.\Sigma'.V, \quad \&$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{VV}.\Theta'.V - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}.\Theta''.V.$$

Maintenant, poſons pour ce même état:

$$u = AP, \qquad \& \quad \left(\frac{du}{dt}\right) = AQ\sqrt{2gh},$$

de ſorte que P & Q ſoient des fonctions données de V conformément à l'agitation primitive; & il s'agit de trouver les fonctions Σ & Θ de ces égalités.

$$\Sigma.V - V.\Sigma'.V = V^2P, \quad \& \quad \Theta'.V - V.\Theta''.V = V^2Q.$$

26. Poſons pour cet effet $\Sigma.V = p$, & $\Theta'.V = q$, pour avoir

$$p - \frac{V\,dp}{dV} = V^2P, \quad \& \quad q - \frac{V\,dq}{dV} = V^2Q, \text{ ou bien}$$

$$\frac{p\,dV - V\,dp}{VV} = P\,dV, \quad \& \quad \frac{q\,dV - V\,dq}{VV} = Q\,dV.$$

d'où l'on tire: $-\dfrac{p}{V} = \int P\,dV$, & $-\dfrac{q}{V} = \int Q\,dV$.

Donc

Donc connoiſſant les fonctions P & Q par l'agitation primitive, nous en formerons nos fonctions en ſorte.

$$\Sigma . V = - V \int P\, dV; \quad \Theta' . V = - V \int Q\, dV, \quad \text{donc}$$
$$\Theta . V = - \int V\, dV \int Q\, dV, \quad \text{\& enſuite:}$$
$$\Sigma' . V = - \int P\, dV - VP, \ \& \ \Theta'' . V = - \int Q\, dV - VQ,$$

d'où l'on tracera aiſément des courbes, dont les appliquées repréſentent toutes les fonctions dont nous avons beſoin dans cette recherche.

27. Après avoir déterminé la nature de ces fonctions par l'agitation imprimée au commencement, on en déterminera pour un tems quelconque t l'élargiſſement u de toutes les couches ſphériques, dont le rayon eſt ſuppoſé $= V$. On aura pour u l'expreſſion ſuivante.

$$u = \begin{cases} + \frac{A}{2VV} \Sigma (V + t\sqrt{2gh} + \frac{A}{2VV} \Theta (V + t\sqrt{2gh}) \\ + \frac{A}{2VV} \Sigma (V - t\sqrt{2gh} - \frac{A}{2VV} \Theta (V - t\sqrt{2gh}) \\ - \frac{A}{2V} \Sigma' (V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{2V} \Theta' (V + t\sqrt{2gh}) \\ - \frac{A}{2V} \Sigma' (V - t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{2V} \Theta' (V - t\sqrt{2gh}) \end{cases}$$

d'où l'on voit comme auparavant que, pendant une ſeconde, le ſon ne ſauroit être tranſmis, que par un eſpace $= \sqrt{2gh}$: mais pourtant avec cette reſtriction, que le ſon ſoit extremement foible: pour les ſons plus forts on n'en ſauroit rien conclure.

28. Cette propagation par des couches concentriques nous fournit une infinité de ſolutions particulieres des formules générales,

 que

que j'avois trouvées pour des agitations quelconques, dans l'air, voyez le §. 43. du Mémoire précédent.

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddz}{dXdZ}\right)$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddy}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dYdZ}\right)$$
$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddx}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddy}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

Car, pour avoir une ſolution particuliere quelconque, ſuppoſons le centre précédent des agitations dans un point déterminé par les coordonnées a, b, c, & nous aurons

$$V = ((X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2),$$

& enſuite

$$x = \frac{X - a}{V}.\,u;\quad y = \frac{Y - b}{V}.\,u;\quad z = \frac{Z - c}{V}.\,u.$$

29. Prenant donc pour a, b, c, trois conſtantes quelconques, ſoit pour abréger

$$\sqrt{((X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2)} = V,$$

& que les caracteres Φ & Ψ marquent des fonctions quelconques régulieres ou irrégulieres, d'où par la différentiation on aura les fonctions dérivées Φ & Ψ', & qu'on prenne

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh})$$
$$+ \frac{B}{V^2}\,\Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh}).$$

Alors

Alors on aura pour la résolution de nos trois formules les valeurs suivantes des trois variables x, y, z, cherchées

$$x = \frac{X - a}{V} . u; \quad y = \frac{Y - b}{V} . u; \quad z = \frac{Z - c}{V} . u,$$

& en changeant les constantes a, b, c, à volonté, on obtiendra une infinité de semblables valeurs pour x, y, z, qui étant jointes ensemble, donneront une solution assez générale de notre probleme.

30. Cette solution sert à nous faire comprendre, que s'il y a plusieurs centres d'agitations, la propagation de chacune se fait de la même maniere que si elle se trouvoit toute seule dans l'air. Donc, si plusieurs sons sont excités en différens endroits de l'air, chacun se repand par des couches spheriques & concentriques, de la même maniere que s'il existoit tout seul dans l'air, & tous les autres n'en troubleront pas la propagation: & s'il arrive que les mêmes particules de l'air sont ébranlées à la fois par plusieurs sons, leur mouvement sera composé de tous les mouvemens que chaque son y produiroit séparement: ce qui est la cause que la propagation de chacun n'est pas troublée par les autres. L'explication de ce phenomene, que nous devons uniquement à la Théorie, est sans doute bien importante.

31. Avant que de finir cette matiere, je proposerai encore une autre méthode de traiter les trois équations principales rapportées dans le §. 28. laquelle consiste dans l'élimination du tems t. Pour cet effet, qu'on pose

$$x = p \sin(\alpha t + \beta); \quad y = q \sin(\alpha t + \beta); \quad z = r \sin(\alpha t + \beta),$$

où p, q, r, soient des fonctions des trois variables X, Y, & Z, sans renfermer le tems t. Alors, après avoir fait la substitution, on aura les trois équations suivantes, d'où il faut déterminer les trois inconnues p, q, r.

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p + \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q + \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r + \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right) = 0.$$

32. Si nous poſons $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = v$, nous aurons:

$$p = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dX}\right); \quad q = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dY}\right); \quad r = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où il eſt évident, que:

$$\left(\frac{dp}{dY}\right) = \left(\frac{dq}{dX}\right); \quad \left(\frac{dp}{dZ}\right) = \left(\frac{dr}{dX}\right); \quad \left(\frac{dq}{dZ}\right) = \left(\frac{dr}{dY}\right),$$

ou que la formule $p\,dX + q\,dY + r\,dZ$, eſt intégrable, l'intégrale étant $= -\frac{2gh}{\alpha\alpha}v = -\frac{2gh}{\alpha\alpha}\left(\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right)\right)$. Or de là nous concluons de plus

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}p + \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddp}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddp}{dZ^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}q + \left(\frac{ddq}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dZ^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\alpha\alpha}{2gh}r + \left(\frac{ddr}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right) = 0,$$

de ſorte que toutes les trois quantités p, q, r, ſont déterminées par la même équation, dont il s'agit de trouver la réſolution générale.

Autre

Autre maniere de parvenir à la solution.

33. L'explication de la propagation du son, que je viens de trouver, peut être déduite immédiatement de nos formules principales qui posant $\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = v$ sont:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right);\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right);\ \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right)$$

d'où l'on tire cette équation pour trouver v.

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

comme je l'ai fait voir dans mon Mémoire précédent. Or, si l'on pose $(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = VV$, où l'on peut prendre pour a, b, c, des quantités constantes quelconques, cette équation est remplie par cette formule:

$$v = \frac{A}{V}\,\Phi\left(V \pm t\sqrt{2gh}\right),$$

comme on peut le voir en faisant la substitution.

34. Car, puisque V ne dépend point du tems t, on aura $\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{2Agh}{V}\,\Phi''(V \pm t\sqrt{2gh}$: ensuite, à cause de

$$\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X-a}{V};\ \left(\frac{dV}{dY}\right) = \frac{Y-b}{V};\ \&\ \left(\frac{dV}{dZ}\right) = \frac{Z-c}{V}:$$

on a

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

& différentiant encore

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = -\frac{A}{V^3}\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{3A(X-a)^2}{V^4}\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)^2}{V^3}\Phi''(V \pm t\sqrt{2gh})$$
$$+ \frac{3A(X-a)^2}{V^5}\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) + \frac{A}{V^2}\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

d'où l'on formera aiſément les valeurs des formules $\left(\frac{ddv}{dY^2}\right)$, & $\left(\frac{ddv}{dZ^2}\right)$, & partant la ſomme de ces trois formules, à cauſe de $(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = V^2$, ſe réduit à $\frac{A}{V}\Phi''(V \pm t\sqrt{2gh})$; & cette même valeur eſt auſſi celle de $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)$, d'où l'on voit que la formule

$$v = \frac{A}{V}\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}),$$

ſatisfait parfaitement à l'équation rapportée ci-deſſus.

35. Pour trouver de là les quantités x, y, z, donnons à la valeur trouvée pour v cette forme $v = \frac{A}{V}\Phi''(V + t\sqrt{2gh})$, d'où nous aurons:

$$\left(\frac{dv}{dX}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi''(V + t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\Phi'''(V + t\sqrt{2gh}),$$

ce qui eſt auſſi la valeur de $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Prenons donc les intégrales, en ſuppoſant le ſeul tems t variable, & puiſque

$$\int dt\,\Phi'''(V + t\sqrt{2gh}) = \frac{1}{\sqrt{2gh}}\Phi''(V + t\sqrt{2gh}),$$

nous

nous obtiendrons:

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\Phi''(V+t\sqrt{2gh}) + P$$

où P eſt une fonction quelconque de X, Y, & Z, qu'on regarde ici comme conſtante; & en intégrant encore:

$$x = -\frac{A(X-a)}{V^3}\Phi(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(X-a)}{V^2}\Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + Pt + \mathfrak{P}.$$

où $\mathfrak{P}$ eſt auſſi une fonction quelconque de X, Y, & Z.

36. De la même maniere on trouvera:

$$y = -\frac{A(Y-b)}{V^3}\Phi(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(Y-b)}{V^2}\Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + Qt + \mathfrak{Q},$$

$$z = -\frac{A(Z-c)}{V^3}\Phi(V+t\sqrt{2gh}) + \frac{A(Z-c)}{V^2}\Phi'(V+t\sqrt{2gh}) + Rt + \mathfrak{R},$$

où Q, R, & $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ſont auſſi des fonctions des trois variables X, Y, Z, qui dépendent en ſorte des précédentes P & $\mathfrak{P}$, que

$$\left(\frac{ddP}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddQ}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddR}{dZ^2}\right) = 0,$$

$$\& \left(\frac{dd\mathfrak{P}}{dX^2}\right) + \left(\frac{dd\mathfrak{Q}}{dY^2}\right) + \left(\frac{dd\mathfrak{R}}{dZ^2}\right) = 0,$$

Mais pour notre deſſein on peut négliger toutes ces fonctions P, Q, R, & $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ou les ſuppoſer égales à 0.

37. Donc ſi l'on ſuppoſe dans l'air autant de points fixes c, c', c'', &c. qu'on voudra déterminées par les coordonnées Fig. 3.

$$Aa = a,\ ab = b,\ bc = c,\quad Aa' = a',\ a'b' = b',\ b'c' = c',\ \&c.$$

& après y avoir tiré d'un point quelconque Z déterminé par les coordonnées $AX = X$, $XY = Y$, & $YZ = Z$, les droites Zc, Zc', Zc'', qu'on nomme ces diſtances

$$Zc = V,\quad Zc' = V',\quad Zc'' = V'',\quad \&c.$$

&

& qu'on poſe pour abréger,

$$-\frac{1}{V}\Phi(V+t\sqrt{2gh})+\Phi'(V+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{V}\Sigma(V-t\sqrt{2gh})+\Sigma'(V-t\sqrt{2gh})=P$$

$$-\frac{1}{V'}\Psi(V'+t\sqrt{2gh})+\Psi'(V'+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{V'}\Theta(V'-t\sqrt{2gh})+\Theta'(V'-t\sqrt{2gh})=Q$$

$$-\frac{1}{V''}\Omega(V''+t\sqrt{2gh})+\Omega'(V''+t\sqrt{2gh})-\frac{1}{V''}\Xi(V''-t\sqrt{2gh})+\Xi'(V''-t\sqrt{2gh})=R$$

les dérangemens du point Z ſeront exprimés par les équations ſuivantes:

$$x=\frac{(X-a)P}{VV}+\frac{(X-a')Q}{V'V'}+\frac{(X-a'')R}{V''V''},$$

$$y=\frac{(Y-b)P}{VV}+\frac{(Y-b')Q}{V'V'}+\frac{(Y-b'')R}{V''V''},$$

$$z=\frac{(Z-c)P}{VV}+\frac{(Z-c')Q}{V'V'}+\frac{(Z-c'')R}{V''V''}.$$

38. Ces même formules expriment l'état initial, quand on poſe $t=0$, & celui-ci étant donné, on en connoitra la nature des fonctions Φ, Σ, Ψ, Θ, Ω, Ξ. Suppoſons ces fonctions telles, que poſant $t=0$, les quantités P, Q, R, ſoient toujours égales à zéro, excepté les ſeuls cas, où les diſtances V, V', V'', ſont à peu près égales à ces quantités D, D', D'', & alors le point Z ſera en repos à moins qu'il n'y ait

$$\text{ou } V-t\sqrt{2gh}=D, \text{ ou } V'-t\sqrt{2gh}=D', \text{ ou } V''-t\sqrt{2gh}=D'',$$

d'où l'on voit que les agitations primitives excitées autour des points c, c', c'', ſont ſéparément tranſmiſes au point Z, & chacune de la même maniere que ſi les autres n'exiſtoient point. Et partant il eſt clair que toutes ces agitations ne ſe troublent pas entr'elles.

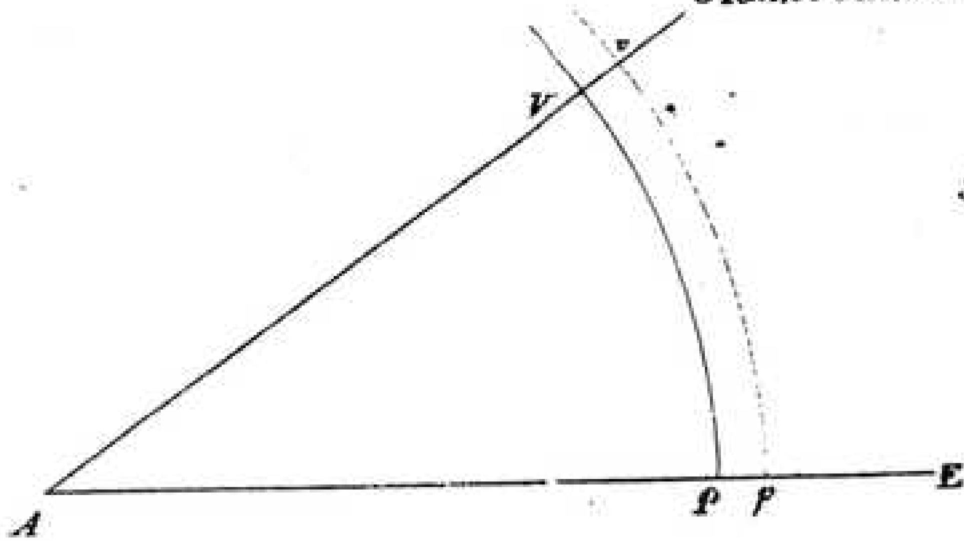
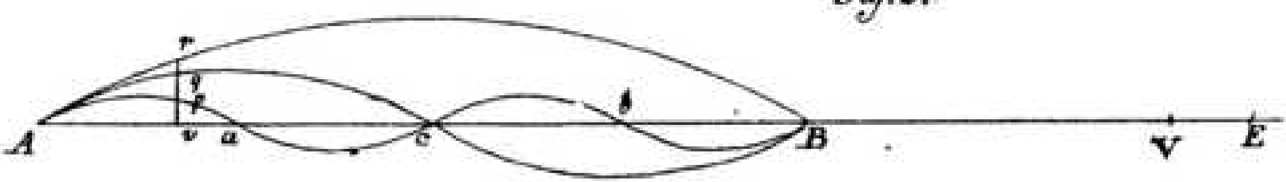


Fig. 1.

Fig. 2.



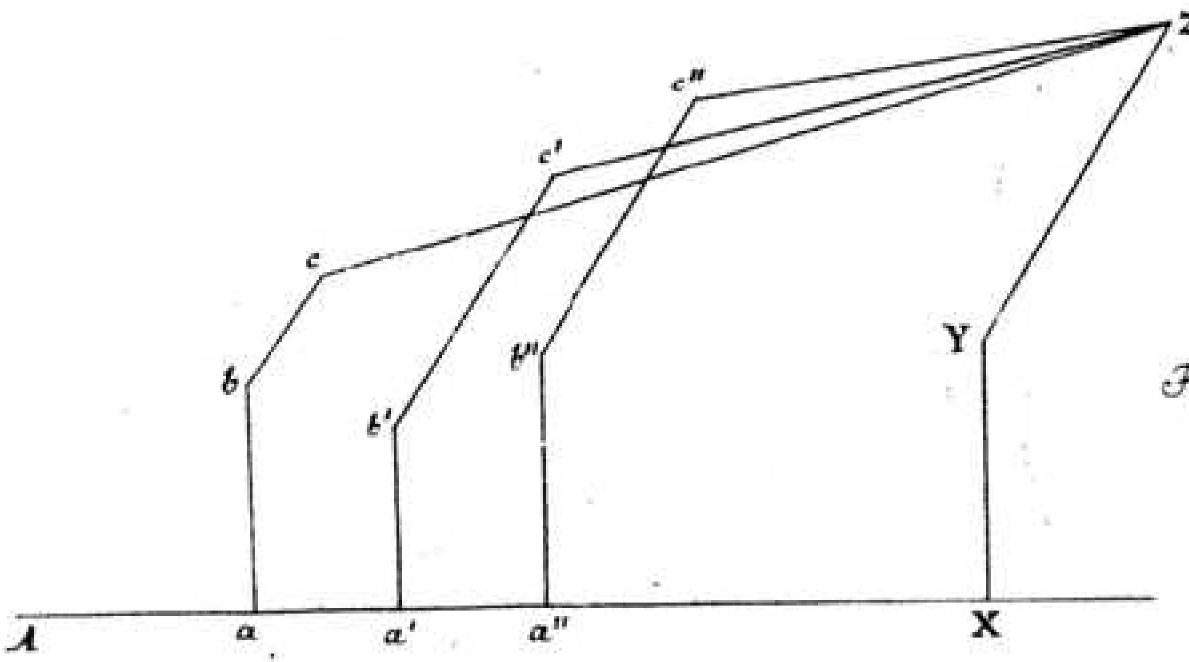


Fig. 3