1766

Supplément aux recherches sur la propagation du son

Leonhard Euler

SUPPLEMENT
AUX
RECHERCHES
SUR
LA PROPAGATION DU SON.
PAR M. EULER.

1.

Dans le Mémoire précédent je n'ai ſuppoſé à l'air par lequel le ſon eſt tranſmis, qu'une ſeule dimenſion ſelon une ligne droite; en quoi j'ai ſuivi les autres Géometres qui ont traité cette même matiere. Puisqu'on a principalement en vue la viteſſe de la propagation, il ſemble qu'elle doit être la même, ſoit que l'air ait une étendue ſelon toutes les trois dimenſions, ou ſelon une ſeule: quoiqu'il ſoit certain, que les ébranlemens excités dans l'air diminuent beaucoup plus conſidérablement, lorque l'air eſt repandu de toutes parts. Mais la principale raiſon de cette reſtriction eſt ſans doute, qu'on rencontre des difficultés inſurmontables, lorsqu'on veut ſuppoſer à l'air une étendue vers toutes les trois dimenſions, ou ſeulement vers deux, en ne conſidérant qu'une couche d'air renfermée entre deux plans paralles & extrémement proches.

2. Cependant il eſt encore douteux, ſi la viteſſe du ſon, qu'on trouve dans l'hypotheſe d'une ſeule dimenſion, n'eſt pas altérée par l'étendue ſelon les autres dimenſions: & puisque la viteſſe actuelle du ſon conclue par les expériences eſt conſidérablement plus grande que celle que donne la théorie fondée ſur l'hypotheſe d'une ſeule dimenſion, on a lieu de ſoupçonner que l'étendue vers toutes les dimen-

menſions pourroit bien cauſer cette accélération. Du moins ſera-t-il toujours fort important de faire des efforts pour déveloper les autres hypotheſes, où l'on ſuppoſe à l'air ou deux ou toutes les trois dimenſions: pour l'une & l'autre hypotheſe je tâcherai de ramener les ébranlemens de l'air à des formules analytiques, dont la réſolution ſera un très digne ſujet pour occuper l'adreſſe des Géometres.

3. Je commence par l'hypotheſe de deux dimenſions, où l'air ſoit étendu ſelon un plan, qui ſoit celui de la planche, on lui peut donner une petite épaiſſeur, qui ſoit partout la même $= e$: & d'abord je conſidere l'état d'équilibre, où l'air a partout la même denſité & le même reſſort. Que l'unité exprime cette denſité naturelle de l'air, & que ſon élaſticité ſoit en équilibre avec le poids d'une colonne d'air dont la hauteur ſoit $= h$, en ſuppoſant auſſi cet air de l'état naturel, dont la denſité $= 1$: on voit bien que cette hauteur h ſe détermine par celle du barometre, en multipliant celle-ci par le rapport, dont la denſité ou gravité ſpécifique du vif argent ſurpaſſe celle de l'air. Ainſi la hauteur du barometre étant $= k$, ſi nous ſuppoſons la gravité ſpecifique du vif argent 14 fois plus grande que celle de l'eau, & celle-ci 800 fois plus grande que celle de l'air naturel, nous aurons $h = 14, 800k = 11200k$.

4. Dans l'état d'équilibre conſidérons un point quelconque Y, Fig.
duquel on baiſſe à une ligne fixe AE la perpendiculaire YX, pour avoir les deux coordonnées $AX = X$, & $XY = Y$, qui déterminent le lieu du point Y. Maintenant, après une agitation quelconque excitée dans notre air, & à un inſtant donné, que le point Y ſe trouve en y, dont le lieu ſoit déterminé par les coordonnées $Ax = x$, & $xy = y$, & il eſt clair que x & y ſeront certaines fonctions de X & Y, où le tems entre bien auſſi, mais tant que nous conſidérons l'état de l'air pour le même inſtant, le tems n'y entre pas encore en conſidération, ou ſera regardé comme conſtant. Donc puiſque tant x que y eſt une fonction de deux variables X & Y, ſuppoſons:

$$dx = L\,dX + M\,dY, \quad \& \quad dy = P\,dX + Q\,dY.$$

5. Pour

5. Pour trouver tant la densité que l'élasticité en y dans l'état troublé, considérons un volume d'air infiniment petit, qui dans l'état naturel soit YPQ, & après l'agitation dans l'état troublé soit ypq; dont le rapport à celui-là fera connoitre tant la densité que l'élasticité du volume ypq. Comme le point Y déterminé par les coordonnées X & Y est transporté en y déterminé par les coordonnées x & y; tout autre point infiniment proche de Y & déterminé par les coordonnées $X + dX$, & $Y + dY$ sera transporté dans un point déterminé par les coordonnées:

$$x + L\,dX + M\,dY, \quad \& \; y + P\,dX + Q\,dY.$$

Que le triangle YPQ soit pris en sorte, comme il est représenté dans la figure, & posons $YP = XL = \alpha$, & $YQ = \beta$, &

le point	dont les coordonnées	se trouvera	au point	dont les coordonnées
Y	$X \;\&\; Y$		y	$x \;\&\; y$
P	$X+\alpha \;\&\; Y$		p	$x+L\alpha \;\&\; y+P\alpha$
Q	$X \;\&\; Y+\beta$		q	$x+M\beta \;\&\; y+Q\beta$

6. Donc, ayant tiré de p & q les ordonnées pl & qm, nous aurons:

$$Ax = x; \quad Al = x + L\alpha; \quad Am = x + M\beta$$
$$xy = y; \quad lp = y + P\alpha; \quad mq = y + Q\beta,$$

d'où il faut chercher l'aire du triangle ypq, qui se détermine par celle des trapezes $xypl$, $xyqm$, $lpqm$, en sorte

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}\,xm(xy + mq) + \tfrac{1}{2}\,ml(mq + lp) - \tfrac{1}{2}\,xl(xy + lp),$$

or $xm = M\beta$; $ml = L\alpha - M\beta$; & $xl = L\alpha$, donc

$$\Delta ypq = \tfrac{1}{2}\beta M(2y+\beta Q) + \tfrac{1}{2}(\alpha L-\beta M)(2y+\alpha P+\beta Q) - \tfrac{1}{2}\alpha L(2y+\alpha P),$$

ou $\Delta ypq = \tfrac{1}{2}\beta M(-\alpha P) + \tfrac{1}{2}\alpha L(\beta Q) = \tfrac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP)$. Donc, puisque dans l'état naturel l'aire du triangle YPQ étoit $\tfrac{1}{2}\alpha\beta$, la densité du même air remplissant maintenant le triangle ypq

sera

sera $= \frac{1}{LQ - MP}$, & l'élasticité $= \frac{h}{LQ - MP}$; d'où nous tirons cette conclusion

$$\text{densité en } y = \frac{1}{LQ - MP}; \text{ élasticité en } y = \frac{h}{LQ - MP}.$$

7. Comme le lieu du point y dépend de celui de Y, le ressort ou élasticité en y, que l'on la pose $= \Pi$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{LQ - MP}$, sera aussi une fonction de X & Y, considérant encore toujours le tems comme constant; & partant nous aurons $d\Pi = E\,dX + F\,dY$, où E & F sont déterminées en sorte des lettres L, M, P, Q:

$$E = \frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dX}\right) + L\left(\frac{dQ}{dX}\right) - P\left(\frac{dM}{dX}\right) - M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}.$$

$$F = \frac{-h\left(Q\left(\frac{dL}{dY}\right) + L\left(\frac{dQ}{dY}\right) - P\left(\frac{dM}{dY}\right) - M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}.$$

C'est à dire un point Y' dans l'état d'équilibre infiniment proche de Y, déterminé par les coordonnées $X + dX$, & $Y + dY$, étant transporté par l'agitation en y', l'élasticité y sera exprimée par la hauteur $\Pi + E\,dX + F\,dY$, pendant que l'élasticité en y répond à la hauteur $\Pi = \frac{h}{LQ - MP}$.

8. Or le lieu du point y' étant déterminé par les coordonnées $x + L\,dX + M\,dY$, & $y + P\,dX + Q\,dY$, nous pourrons assigner la variation du ressort depuis le point y dans l'état troublé jusqu'à un autre point y' infiniment proche: soient pour le point y' les coordonnées $x + \alpha$, & $y + \beta$, prenant α & β,

pour

pour marquer des élémens infiniment petits, & neus n'avons qu'à chercher le lieu Y′ du méme point dans l'état naturel. Pour cet effet posons:

$$L dX + M dY = \alpha, \quad \& \; P dX + Q dY = \beta,$$

d'où nous tirons

$$dX = \frac{\alpha Q - \beta M}{LQ - MP}, \quad \& \; dY = \frac{\beta L - \alpha P}{LQ - MP}.$$

Donc, pour le point y' dans l'état troublé, déterminé par les coordonnées $x + \alpha$, & $y + \beta$, nous aurons l'élasticité exprimée par la hauteur $\Pi + \frac{\alpha(EQ - FP) + \beta(FL - EM)}{LQ - MP}$.

9. Pour mieux déveloper cette valeur & celles de lettres E & F, il faut remarquer, qu'ayant posé

$$dx = L dX + M dY, \quad \& \; dy = P dX + Q dY,$$

nous aurons $\left(\frac{dL}{dY}\right) = \left(\frac{dM}{dX}\right)$, & $\left(\frac{dP}{dY}\right) = \left(\frac{dQ}{dX}\right)$, & partant:

$$E = \frac{h\left(P\left(\frac{dL}{dY}\right) - Q\left(\frac{dL}{dX}\right) - L\left(\frac{dP}{dY}\right) + M\left(\frac{dP}{dX}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

$$F = \frac{h\left(P\left(\frac{dM}{dY}\right) - Q\left(\frac{dL}{dY}\right) - L\left(\frac{dQ}{dY}\right) + M\left(\frac{dP}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2},$$

d'où nous tirons:

$$EQ - FP = \frac{h\left(2PQ\left(\frac{dL}{dY}\right) - QQ\left(\frac{dL}{dX}\right) - PP\left(\frac{dM}{dY}\right) - (LQ + MP)\left(\frac{dP}{dY}\right) + MQ\left(\frac{dP}{dX}\right) + LP\left(\frac{dQ}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}$$

$$FL - EM = \frac{h\left(2LM\left(\frac{dP}{dY}\right) - MM\left(\frac{dP}{dX}\right) - LL\left(\frac{dQ}{dY}\right) - (LQ + MP)\left(\frac{dL}{dY}\right) + MQ\left(\frac{dL}{dX}\right) + LP\left(\frac{dM}{dY}\right)\right)}{(LQ - MP)^2}$$

En-

Enſuite il faut auſſi obſerver, qu'il y a:

$$L = \left(\frac{dx}{dX}\right);\ M = \left(\frac{dx}{dY}\right);\ P = \left(\frac{dy}{dX}\right);\ \&\ Q = \left(\frac{dy}{dY}\right).$$

10. Delà ſi nous conſidérons dans l'état troublé un élément d'air $yprq$, dont la figure ſoit rectangle, les côtés étant $yp = \delta$, & $yp = \epsilon$, & pris paralleles à nos coordonnées, nous pourrons pour les quatre points y, p, q, r, déterminer l'élaſticité. Car ayant pour le point y l'élaſticité $= \Pi$, pour le point p dont les coordonnées ſont $x + \delta$ & y, donc $\alpha = \delta$ & $\beta = 0$, l'élaſticité ſera $= \Pi + \frac{\delta(EQ - FP)}{LQ - MP}$. Enſuite pour le point q, dont les coordonnées ſont x & $y + \epsilon$, dont $\alpha = 0$, & $\beta = \epsilon$, l'élaſticité ſera $= \Pi + \frac{\epsilon(FL - EM)}{LQ - MP}$. Et pour le point r, dont les coordonnées ſont $x + \delta$, & $y + \epsilon$, dont $\alpha = \delta$, & $\beta = \epsilon$, l'élaſticité ſera $= \Pi + \frac{\delta(EQ - FP) + \epsilon(FL - EM)}{LQ - MP}$, d'où nous pourrons déterminer la preſſion de l'air ſur les quatre côtés du rectangle $ypqr$.

11. Le côté $yp = \delta$ ayant une épaiſſeur $= \epsilon$, & partant l'aire $= \delta\epsilon$, puisque les preſſions en y & p ſont inégales, ſi nous prenons un milieu, la preſſion ſur le côté yp ſera égale au poids d'un volume d'air Fig. 2.

$$\text{preſſion ſur } yp = \delta\epsilon\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ - FP)}{2(LQ - MP)}\right).$$

De même ſur le côté opoſé qr nous aurons

$$\text{preſſions ſur } qr = \delta\epsilon\left(2\Pi + \frac{\delta(EQ - FP) + 2\epsilon(FL - EM)}{2(LQ - MP)}\right)$$

En-

Ensuite sur le côté $yq = \epsilon e$, nous aurons la

$$\text{pression sur } yq = \epsilon e \left(2\Pi + \frac{\epsilon(\mathrm{FL} - \mathrm{EM})}{2(\mathrm{LQ} - \mathrm{MP})}\right).$$

& de la même maniere

$$\text{pression sur } pr = \epsilon e \left(2\Pi + \frac{2\delta(\mathrm{EQ} - \mathrm{FP}) + \epsilon(\mathrm{FL} - \mathrm{EM})}{2\mathrm{LQ} - \mathrm{MP})}\right).$$

Puisque la différence entre les forces en y & q est égale à celle des forces en p & r, on voit bien que l'inégalité des forces ne trouble point l'effet.

12. Puisque ces forces agissent perpendiculement sur les côtés, l'élément $ypqr$ sera poussé par les deux premieres forces suivant la direction yx par une force, qui est $= \frac{\delta\epsilon e(\mathrm{FL} - \mathrm{EM})}{\mathrm{LQ} - \mathrm{MP}}$; & les deux dernieres produisent ensemble une force

$$= \frac{\delta\epsilon e(\mathrm{EQ} - \mathrm{FP})}{\mathrm{LQ} - \mathrm{MP}}, \text{ selon } x\mathrm{A}.$$

Ou bien l'élément $ypqr$ sera poussé par les deux forces suivantes:

$$\text{force suivant la direction } \mathrm{A}x = \frac{\delta\epsilon e(\mathrm{FP} - \mathrm{EQ})}{\mathrm{LQ} - \mathrm{MP}},$$

$$\text{force suivant la direction } xy = \frac{\delta\epsilon e(\mathrm{EM} - \mathrm{FL})}{\mathrm{LQ} - \mathrm{MP}}.$$

Or le volume contenu dans ce rectangle $ypqr$ étant $= \delta\epsilon e$, si nous le multiplions par la densité $\frac{1}{\mathrm{LQ} - \mathrm{MP}}$, la masse sera $= \frac{\delta\epsilon e}{\mathrm{LQ} - \mathrm{MP}}$.

13. Ayant trouvé ces forces sollicitantes, introduisons le tems t, & dans l'élément du tems dt nous pourrons assigner les accélé-

célérations suivant les mêmes directions. Si nous exprimons le tems t en secondes, & que g marque la hauteur d'où un corps pesant tombe dans une seconde, les principes de Mécanique nous fournissent les équations suivantes:

$$\frac{\delta ee}{LQ - MP} \cdot \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g. \frac{\delta ee(FP - EQ)}{LQ - MP}, \quad \&$$

$$\frac{\delta ee}{LQ - MP} \cdot \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2g. \frac{\delta ee(EM - FL)}{LQ - MP},$$

ou bien celles-ci:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2g(FP - EQ), \ \& \ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2g(EM - FL),$$

& maintenant il faut regarder x & y comme des fonctions non seulement des deux variables primitives X & Y, mais aussi du tems t.

14. Voilà la solution générale de notre probleme; mais, pour en faire l'application au cas que nous avons en vue, il faut regarder tous les changemens causés par l'agitation comme extrêmement petits, de même qu'on le suppose dans l'hypothese d'une seule dimension. Les différences entre x & X, de même qu'entre y & Y, seront donc extrêmement petites; pour tenir compte de cette circonstance, posons $x = X + p$, & $y = Y + q$; & les quantités p & q doivent être considérées comme évanouissantes. Delà nous aurons

$$dX + dp = LdX + MdY, \ \& \ dY + dq = PdX + QdY,$$

$$\text{ou } dp = (L - 1)dX + MdY, \ \& \ dq = PdX + (Q - 1)dY,$$

& partant les quantités M & P, seront extrêmement petites, & L & Q ne différeront de l'unité qu'extrêmement peu.

15. Donc

15. Donc, pour les agitations infiniment petites, nous aurons à peu près $L = 1$; $M = 0$; $P = 0$, & $Q = 1$, & ensuite :

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right);\ M = \left(\frac{dp}{dY}\right);\ P = \left(\frac{dq}{dX}\right);\ Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right),$$

d'où nous tirons

$$\left(\frac{dL}{dX}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right);\ \left(\frac{dL}{dY}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) = \left(\frac{dM}{dX}\right);\ \left(\frac{dM}{dY}\right) = \left(\frac{ddp}{dY^2}\right),$$

$$\left(\frac{dP}{dX}\right) = \left(\frac{ddq}{dX^2}\right);\ \left(\frac{dP}{dY}\right) = \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) = \left(\frac{dQ}{dX}\right);\ \left(\frac{dQ}{dY}\right) = \left(\frac{ddq}{dY^2}\right).$$

De là ayant $LQ - MP = 1$, nous aurons:

$$E = h\left(-\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) - \left(\frac{ddq}{dXdY}\right)\right) = -h\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) - h\left(\frac{ddq}{dXdY}\right),$$

$$F = h\left(-\left(\frac{ddp}{dXdY}\right) - \left(\frac{ddq}{dY^2}\right)\right) = -h\left(\frac{ddq}{dY^2}\right) - h\left(\frac{ddp}{dXdY}\right),$$

& substituant ces valeurs, nous obtiendrons les deux équations suivantes pour la détermination du mouvement

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + 2gh\left(\frac{ddq}{dXdY}\right), \quad \&$$

$$\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + 2gh\left(\frac{ddp}{dXdY}\right).$$

16. Au lieu des lettres p & q, écrivons les lettres x & y, pour marquer mieux leur rapport avec les coordonnées principales X & Y, & nous aurons la solution suivante. Une particule d'air, qui dans l'état d'équilibre étoit en Y, les coordonnées étant $AX = X$, & $XY = Y$, se trouvera après une agitation infiniment petite quelconque, le tems écoulé étant $= t$, au point y, dont les coordonnées étant posées $Ax = X + x$, & $xy = Y + y$, les quantités

tés x & y feront quafi infiniment petites, & certaines fonctions des trois variables X, Y & t, dont la nature doit être déterminée par les deux équations fuivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dX\,dY}\right), \quad \&$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dX\,dY}\right).$$

Tout revient donc à la réfolution de ces deux équations, qui eft fans doute incomparablement plus difficile, que celle que nous avions trouvée pour le cas d'une feule dimenfion, & qui fe déduit aifément de ces formules, en pofant $Y = 0$, & $y = 0$, d'où l'on obtient

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right).$$

17. D'abord j'obferve qu'on peut fatisfaire à ces deux équations en fuppofant:

$$x = B\Phi:(\alpha X + \beta Y + \gamma t, \quad \& \quad y = C\Phi(\alpha X + \beta Y + \gamma'),$$

le figne Φ marquant une fonction quelconque de la quantité adjointe; & il ne s'agit que de déterminer les quantités conftantes α, β, γ, B & C. Or de là nous tirons:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = B\gamma\gamma\Phi''(\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = C\gamma\gamma\Phi''(\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddx}{dX^2}\right) = B\alpha\alpha\Phi'(\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddx}{dX\,dY}\right) = B\alpha\beta\Phi''(\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dY^2}\right) = C\beta\beta\Phi''(\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

$$\left(\frac{ddy}{dX\,dY}\right) = C\alpha\beta\Phi''(\alpha X + \beta Y + \gamma t),$$

 où

où il faut ſe ſouvenir que, poſant $v = \Phi : u$, je me ſers des ſignes ſuivans pour marquer la différentiation:

$$\frac{dv}{du} = \Phi' : u, \quad \& \quad \frac{ddv}{du^2} = \Phi'' : u.$$

18. Subſtituant ces valeurs, & diviſant par $\Phi''(\alpha X + \beta Y + \gamma t)$, nous obtiendrons les deux équations ſuivantes:

$$\frac{B\gamma\gamma}{2gh} = B\alpha\alpha + C\alpha\beta, \quad \& \quad \frac{C\gamma\gamma}{2gh} = C\beta\beta + B\alpha\beta,$$

dont l'une diviſée par l'autre donne

$$\frac{B}{C} = \frac{B\alpha\alpha + C\alpha\beta}{C\beta\beta + B\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \text{donc } B = \alpha, \quad \& \ C = \beta,$$

$$\& \text{ enſuite } \frac{\gamma\gamma}{2gh} = \alpha\alpha + \beta\beta, \quad \text{ou } \gamma = \sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}.$$

Maintenant on pourra joindre autant de telles fonctions qu'on voudra, & on aura:

$$x = \alpha\Phi(\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}) + \alpha'\Psi(\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')})\&c.$$
$$y = \beta\Phi(\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}) + \beta'\Psi(\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')})\&c.$$

où Φ, Ψ &c. marquent des fonctions quelconques; mais le même charactere ſignifie dans l'une & l'autre expreſſion la même fonction: or α, β, α', β', &c. ſont des quantités conſtantes arbitraires.

10. Pour mettre cette ſolution plus clairement devant les yeux, ſoit

P une fonction quelconque de $\alpha X + \beta Y + t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta)}$

P' une fonction quelconque de $\alpha' X + \beta' Y + t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')}$

P'' une fonction quelconque de $\alpha'' X + \beta'' Y + t\sqrt{2gh(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'')}$

&c.

où

où l'on peut prendre pour $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, &c. des nombres quelconques: & l'on aura pour la ſolution du probleme les formules ſuivantes:

$$x = \alpha P + \alpha' P' + \alpha'' P'' + \alpha''' P''' \ \&c.$$
$$y = \beta P + \beta' P' + \beta'' P'' + \beta''' P''' \ \&c.$$

Si l'on ſuppoſe ici $t = 0$, on aura l'état au premier inſtant après l'agitation, lequel étant donné, il en faut convenablement déterminer les nombres α, α', β, β', &c. cependant il s'en faut beaucoup que cette ſolution ſoit générale, à moins qu'on n'augmente à l'infini le nombre des formules P, P', P'', &c.

20. Faiſons un autre effort pour réſoudre nos deux équations trouvées (§. 16), qui renferment la ſolution de notre probleme. Poſons $\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) = v$, & nos deux équations deviendront:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dX}\right), \quad \& \ \frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dY}\right),$$

d'où nous tirons:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3x}{dt^2\,dX}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right), \quad \& \ \frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2\,dY}\right) = \left(\frac{ddv}{dY^2}\right).$$

Or la premiere ſuppoſition donne:

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3x}{dt^2\,dX}\right) + \left(\frac{d^3y}{dt^2\,dY}\right),$$

d'où il s'enſuit

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right),$$

Voilà donc reduit notre probleme à l'invention d'une ſeule fonction v, des trois variables t, X, Y, ce qui paroit être la route la plus aiſée pour parvenir à la ſolution.

21. Puisque nous venons de trouver

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{dv}{dX}\right), \quad \& \quad \frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{dv}{dY}\right),$$

la différentiation ultérieure donne

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3x}{dt^2dY}\right)=\left(\frac{ddv}{dXdY}\right)=\frac{1}{2gh}\left(\frac{d^3y}{dt^2dX}\right).$$

Donc, posant $\left(\frac{dx}{dY}\right)=p$, & $\left(\frac{dy}{dX}\right)=q$, nous aurons

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddq}{dt^2}\right),$$

d'où traitant X & Y, de constantes, nous en tirons par intégration

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dt}+\mathrm{M}, \quad \& \quad p=q+\mathrm{M}t+\mathrm{N},$$

où M & N, sont des fonctions quelconques de X & Y, de sorte que nous ayons

$$\left(\frac{dx}{dY}\right)-\left(\frac{dy}{dX}\right)=\mathrm{M}t+\mathrm{N},$$

laquelle étant jointe à l'une de nos deux équations principales contiendra aussi la solution du probleme.

22. De cette derniere équation nous concluons

$$\left(\frac{ddx}{dXdY}\right)=\left(\frac{ddy}{dX^2}\right)+t\left(\frac{d\mathrm{M}}{dX}\right)+\left(\frac{d\mathrm{N}}{dX}\right),$$

$$\left(\frac{ddy}{dXdY}\right)=\left(\frac{ddx}{dY^2}\right)-t\left(\frac{d\mathrm{M}}{dY}\right)-\left(\frac{d\mathrm{N}}{dY}\right),$$

&

& ces formules étant substituées dans nos équations principales donneront :

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dY^2}\right) - t\left(\frac{dM}{dY}\right) - \left(\frac{dN}{dY}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dX^2}\right) + t\left(\frac{dM}{dX}\right) + \left(\frac{dN}{dX}\right)$$

où il faut remarquer, que M & N sont des fonctions des deux variables X & Y seulement, & qu'elles ne renferment point le tems t. De là on peut encore tirer une solution particuliere, prenant pour M & N, des fonctions quelconque des deux variables X & Y :

$$x = \alpha t X + t\left(\frac{dM}{dY}\right) + \gamma X + \left(\frac{dN}{dY}\right),$$

$$y = \beta t Y - t\left(\frac{dM}{dX}\right) + \delta Y - \left(\frac{dN}{dX}\right).$$

Car de là il s'ensuit

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0;\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0;\ \left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) = v = (\alpha+\beta)t + \gamma + \delta,$$

$$\text{donc } \left(\frac{dv}{dX}\right) = 0, \ \& \left(\frac{dv}{dY}\right) = 0.$$

23. Cette solution particuliere peut être jointe aux autres solutions particulieres données ci-dessus : car si les valeurs $x = P$, & $y = Q$, fournissent une solution, & aussi celles-ci $x = P'$, & $y = Q'$, on en pourra toujours former une solution nouvelle plus générale $x = \alpha P + \beta P'$, & $y = \alpha Q + \beta Q'$. Or ci-dessus j'ai indiqué une infinité de fonctions, dont chacune fournit une solution du probleme : les prenant donc toutes ensemble, & y joignant encore les valeurs de x & y, que je viens de trouver ici en dernier lieu, & qui ne semblent pas être comprises dans les précédentes, on aura une solution infiniment plus générale. Cependant il ne paroit

pas

pas encore, comment on doit déterminer toutes ces fonctions, pour que posant $t = 0$, on obtienne une agitation initiale donnée. Cependant chaque solution particuliere se rapporte à un certain état initial, lequel étant supposé avoir lieu, on en pourra assigner pour tout tems l'agitation qui aura lieu dans l'air.

24. Pour en donner un exemple, considérons cette solution particuliere:

$$x = \Phi(X + t\sqrt{2gh}) + \Psi(X - t\sqrt{2gh}),$$
$$y = \Sigma(Y + t\sqrt{2gh}) + \Theta(Y - t\sqrt{2gh}),$$

où les caracteres Φ, Ψ, Σ, Θ, marquent des fonctions quelconques des quantités qui leur sont attachées; sans en excepter les fonctions irrégulieres & discontinues. Cela posé, ces formules donnent non seulement pour chaque tems proposé t les déplacemens x & y, de chaque particule d'air, dont le lieu dans l'état d'équilibre est déterminé par les coordonnées X & Y, mais aussi le mouvement de cette même particule, qu'on connoit par les vitesses suivant la direction des coordonnées; & ces vitesses seront;

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\Phi'(X + t\sqrt{2gh}) - \Psi'(X - t\sqrt{2gh}))\sqrt{2gh},$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (\Sigma'(Y + t\sqrt{2gh}) - \Theta'(Y - t\sqrt{2gh}))\sqrt{2gh}.$$

25. Maintenant, pour l'état initial posant $t = 0$, on aura:

$$x = \Phi : X + \Psi : X; \quad y = \Sigma : Y + \Theta : Y, \quad \&$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (\Phi' : X - \Psi' : X)\sqrt{2gh}; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = (\Sigma' : Y - \Theta' : Y)\sqrt{2gh}:$$

Donc

Donc, si au commencement on a eu

$$x = \Gamma:X;\ y = \Delta:Y;\ \left(\frac{dx}{dt}\right) = \Lambda'.X.\sqrt{2gh};\ \left(\frac{dy}{dt}\right) = \Xi'.Y.\sqrt{2gh},$$

nos fonctions seront déterminées par celles-ci en sorte:

$$\Phi: X + \Psi: X = \Gamma: X; \quad \Sigma: Y + \Theta: Y = \Delta: Y,$$
$$\Phi: X - \Psi: X = \Lambda: X; \quad \Sigma: Y - \Theta: Y = \Xi: Y,$$

& partant:

$$\Phi:X = \tfrac{1}{2}\Gamma:X + \tfrac{1}{2}\Lambda:X; \quad \Psi:X = \tfrac{1}{2}\Gamma:X - \tfrac{1}{2}\Lambda:X$$
$$\Sigma:Y = \tfrac{1}{2}\Delta:Y + \tfrac{1}{2}\Xi:Y; \quad \Theta:Y = \tfrac{1}{2}\Delta:Y - \tfrac{1}{2}\Xi:Y$$

d'où nos équations seront:

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma(X+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Lambda(X+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Gamma(X-t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Lambda(X-t\sqrt{2gh}),$$
$$y = \tfrac{1}{2}\Delta(Y+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Xi(Y+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Delta(Y-t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Xi(Y-t\sqrt{2gh})$$

26. Supposons ces fonctions telles, que $\Gamma: u$; $\Lambda: u$; $\Delta: u$, & $\Xi: u$, soient toujours égales à zéro, excepté les seuls cas où $u = 0$, auquel leurs valeurs soient α, β, γ, δ, infiniment petites, & l'on voit que l'agitation initiale aura été telle que pour $X = 0$, & $Y = 0$, on a $x = \alpha$, & $y = \gamma$: c'est à dire la ligne d'air BC a été poussée en bc, & la ligne DE en de, tout le reste de l'air demeurant en repos au premier instant: les autres fonctions expriment les vitesses imprimées à ces lignes d'air au commencement. Cela posé, après un tems quelconque t, qu'on prenne $AP = AP' = t\sqrt{2gh}$, & $AL = AL' = t\sqrt{2gh}$, & toute la ligne QPR sera déplacée en qr par l'intervalle $= \tfrac{1}{2}\Gamma:0 - \tfrac{1}{2}\Lambda:0 = \frac{\alpha - \beta}{2}$; or de l'autre côté la ligne Q'P'R' se trouvera en $q'r'$ par l'intervalle $= \tfrac{1}{2}\Gamma 0 + \tfrac{1}{2}\Lambda 0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ensuite, la ligne MLM' sera transportée en mm' par l'intervalle $= \frac{\gamma - \delta}{2}$, & la ligne NL'N' Fig

 en

en nn' par l'intervalle $= \frac{\gamma + \delta}{2}$. Or tout le reste sera en repos. Donc les ébranlemens originaires selon les lignes BC & ED sont continués par des lignes paralleles, sans se troubler mutuellement, avec une vitesse de $\sqrt{2gh}$ par seconde.

27. Pour le cas où l'agitation originaire n'aura subsisté que dans un très petit espace autour du point A, il est evident que les agitations produites se continueront par des cercles concentriques. Dans ce cas donc, les déplacemens x & y seront proportionnels aux coordonnées X & Y: pour cet effet posons $x = v\mathrm{X}$, & $y = v\mathrm{Y}$, & nous aurons:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \mathrm{X}\left(\frac{dv}{dt}\right); \quad \left(\frac{dx}{d\mathrm{X}}\right) = v + \mathrm{X}\left(\frac{dv}{d\mathrm{X}}\right); \quad \left(\frac{dx}{d\mathrm{Y}}\right) = \mathrm{X}\left(\frac{dv}{d\mathrm{Y}}\right)$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \mathrm{X}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right); \quad \left(\frac{ddx}{d\mathrm{X}^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{d\mathrm{X}}\right) + \mathrm{X}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{X}^2}\right);$$

$$\left(\frac{ddx}{d\mathrm{X}d\mathrm{Y}}\right) = \left(\frac{dv}{d\mathrm{Y}}\right) + \mathrm{X}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{X}d\mathrm{Y}}\right),$$

& de la même maniere

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \mathrm{Y}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right); \quad \left(\frac{ddy}{d\mathrm{Y}^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{d\mathrm{Y}}\right) + \mathrm{Y}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{Y}^2}\right);$$

$$\left(\frac{ddy}{d\mathrm{X}d\mathrm{Y}}\right) = \left(\frac{dv}{d\mathrm{X}}\right) + \mathrm{Y}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{X}d\mathrm{Y}}\right),$$

d'où nos équations principales deviendront:

$$\frac{\mathrm{X}}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{d\mathrm{X}}\right) + \mathrm{X}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{X}^2}\right) + \mathrm{Y}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{X}d\mathrm{Y}}\right),$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 3\left(\frac{dv}{d\mathrm{Y}}\right) + \mathrm{Y}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{Y}^2}\right) + \mathrm{X}\left(\frac{ddv}{d\mathrm{X}d\mathrm{Y}}\right).$$

28. Mais il eſt évident que v eſt une fonction ſeulement des deux variables t & $\sqrt{(XX+YY)}$, poſons donc $\sqrt{(XX+YY)}=Z$, & $dv = Mdt + NdZ$; d'où, puisque $dZ = \frac{XdX + YdY}{Z}$, nous tirons $\left(\frac{dv}{dt}\right) = M$; $\left(\frac{dv}{dX}\right) = \frac{NX}{Z}$, & $\left(\frac{dv}{dY}\right) = \frac{NY}{Z}$; & enſuite $\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{dM}{dt}\right)$, &

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NXX}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{NYY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) - \frac{NXY}{Z^3},$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NYY}{Z^3} = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{NXX}{Z^3}.$$

Poſons $dN = Pdt + QdZ = Pdt + \frac{QXdX + QYdY}{Z}$, & puisque $\left(\frac{dN}{dX}\right) = \frac{QX}{Z}$, $\left(\frac{dN}{dY}\right) = \frac{QY}{Z}$, nous aurons

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{QXX}{ZZ} + \frac{NYY}{Z^3}; \quad \left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{QXY}{ZZ} - \frac{NXY}{Z^3},$$

$$\& \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) = \frac{QYY}{ZZ} + \frac{NXX}{Z^3}.$$

29. Ces valeurs étant ſubſtituées, nos équations deviendront.

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3NX}{Z} + QX, \quad \&$$

$$\frac{Y}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3NY}{Z} + QY,$$

& se reduisent par conséquent à une seule

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3N}{Z} + Q.$$

Or, puisque $N = \left(\frac{dv}{dZ}\right)$, & $Q = \left(\frac{dN}{dZ}\right) = \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right)$, il s'agit de trouver pour v une telle fonction des deux variables t & Z, qui satisfasse à cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \frac{3}{Z}\left(\frac{dv}{dZ}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

Fig. 4. Alors un point quelconque Z, dont la distance au point fixe A est dans l'équilibre $AZ = Z$, sera transporté après le tems $= t$ par un espace $Zz = \sqrt{(xx + yy)} = vZ$, dont il s'éloignera du point fixe A. Si nous nommons cet éloignement $Zz = vZ = z$, de sorte que $v = \frac{z}{Z}$, nous aurons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -\frac{z}{ZZ} + \frac{1}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right) + \left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

30. Si cette équation admettoit une telle solution, qu'il fût $z = P\Phi : (Z \pm t\sqrt{2gh})$, on en concluroit, que la propagation des ébranlemens se fit avec la même vitesse, que dans la premiere hypothese, qui seroit par conséquent moindre que selon l'expérience. Mais une telle forme substituée pour z ne satisfait point à notre équation, d'où l'on peut conclure, que la propagation du son pourroit bien se faire avec une autre vitesse dans cette hypothese. Cependant on n'en sauroit rien conclure de positif, avant qu'on soit en état de résoudre généralement cette équation: mais, quoiqu'on en puisse aisément assigner plusieurs valeurs particulieres, il ne paroit pas comment on en pourroit déduire la valeur générale. Par cette raison on ne sauroit apporter trop de soins à perfectionner la partie de l'Analyse qui s'occupe à résoudre ces sortes d'équations.

CETTE

CETTE MEME RECHERCHE
pour l'hypothese de trois dimensions.

31. Dans l'état d'équilibre considérons un point quelconque Z, dont la position soit déterminée par les trois coordonnées $AX = X$, $XY = Y$, & $YZ = Z$. Or, après une agitation excitée dans l'air pour un tems donné, ce même point ait été transporté en z, dont le lieu soit déterminé par de semblables trois coordonnées $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$ perpendiculaires entr'elles. Et il est clair que chacune de ces coordonnées sera une certaine fonction des trois principales X, Y, Z, qui répondent à l'état d'équilibre; posons donc Fig. 5.

$$dx = LdX + MdY + NdZ;$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ;$$
$$dz = SdX + TdY + VdZ;$$

car, quoiqu'elles renferment aussi le tems t, je n'en tiens pas encore compte, puisque je rapporte toutes ces recherches au même instant.

32. Considérons maintenant dans l'état d'équilibre une pyramide d'air infiniment petite $Z\zeta\eta\theta$, terminée par les quatres points Z, ζ, η, θ, auxquels répondent les coordonnées, comme il suit:

du point	les trois coordonnées		
Z	$X,$	$Y,$	Z
ζ	$X + \alpha,$	$Y,$	Z
η	$X,$	$Y + \beta,$	Z
θ	$X,$	$Y,$	$Z + \gamma,$

cette pyramide sera la sixieme partie du parallelepipede formé par les trois côtés α, β, γ, que je suppose infiniment petits. Donc la solidité de cette pyramide sera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, dont la densité est supposée $= 1$, & l'élasticité exprimée par la hauteur h: en sorte qu'une colonne d'air naturel de cette hauteur, tienne l'élasticité en équilibre.

33.

33. Qu'après l'agitation cette même pyramide ait été transportée en $z\lambda\mu\nu$, dont les quatre angles seront déterminés chacun par les trois coordonnées suivantes :

du point	les trois coordonnées		
z	$Ax = x;$	$xy = y;$	$yz = z$
λ	$AL = x + L\alpha;$	$Ll = y + P\alpha;$	$l\lambda = z + S\alpha,$
μ	$AM = x + M\beta;$	$Mm = y + Q\beta;$	$m\mu = z + T\beta,$
ν	$AN = x + N\gamma;$	$Nn = y + R\gamma;$	$n\nu = z + V\gamma,$

Or la solidité de cette pyramide est égale à

$$ymn\,z\mu\nu + yln\,z\lambda\nu + lmn\,\lambda\mu\nu - ylm\,z\lambda\mu,$$

& partant, en prenant la solidité de chaque part

$$\left.\begin{aligned} &+ \tfrac{1}{3}yln\,(yz + l\lambda + n\nu) \\ &+ \tfrac{1}{3}ymn\,(yz + m\mu + n\nu) \\ &+ \tfrac{1}{3}lmn\,(l\lambda + m\mu + n\nu) \\ &+ \tfrac{1}{3}ylm\,(yz + l\lambda + m\mu) \end{aligned}\right\} = \begin{aligned} &+ \tfrac{2}{3}yln\,(3z + S\alpha + V\gamma) \\ &+ \tfrac{1}{3}ymn\,(3z + T\beta + V\gamma) \\ &+ \tfrac{1}{3}lmn\,(3z + S\alpha + T\beta + V\gamma) \\ &+ \tfrac{1}{3}ylm\,(3z + S\alpha + T\beta) \end{aligned}$$

laquelle expression se réduit à celle-ci.

$$- \tfrac{1}{3}S\alpha.\ \Delta ymn - \tfrac{1}{3}T\beta.\ \Delta yln + \tfrac{1}{3}V\gamma.\ \Delta ylm.$$

34. Or les aires de ces triangles se trouvent en sorte :

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2}xM\,(Xy + Mm) + \tfrac{1}{2}MN\,(Mm + Nn) - \tfrac{1}{2}xN\,(xy + Nn)$$

$$\Delta yln = \tfrac{1}{2}xN\,(xy + Nn) + \tfrac{1}{2}LN\,(Ll + Nn) - \tfrac{1}{2}xL\,(xy + Ll)$$

$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2}xM\,(xy + Mm) + \tfrac{1}{2}LM\,(Ll + Mm) - \tfrac{1}{2}xL\,(xy + Ll)$$

& partant les aires de ces triangles seront

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2}xM\,(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2}MN\,(2y + Q\beta + R\gamma) - \tfrac{1}{2}xN\,(2y + R\gamma),$$
$$\text{ou } \Delta ymu = \tfrac{1}{2}Q\beta.\ xN - \tfrac{1}{2}R\gamma.\ xM.$$

$$\Delta yln = \tfrac{1}{2}xN\,(2y + R\gamma) + \tfrac{1}{2}LN\,(2y + P\alpha + R\gamma) - \tfrac{1}{2}xL\,(2y + P\alpha),$$
$$\text{ou } \Delta yln = \tfrac{1}{2}R\gamma.\ xL - \tfrac{1}{2}P\alpha.\ xN.$$

$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2}xM\,(2y + Q\beta) + \tfrac{1}{2}LM\,(2y + P\alpha + Q\beta) - \tfrac{1}{2}xL\,(2y + P\alpha),$$
$$\text{ou } \Delta ylm = \tfrac{1}{2}Q\beta.\ xL - \tfrac{1}{2}P\alpha.\ xM.$$

Or

Or $xL = L\alpha$; $xM = M\beta$, & $xN = N\gamma$. Donc

$$\Delta ymn = \tfrac{1}{2}NQ\beta\gamma - \tfrac{1}{2}MR\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\beta\gamma(NQ - MR),$$
$$\Delta yln = \tfrac{1}{2}LR\alpha\gamma - \tfrac{1}{2}NP\alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\alpha\gamma(LR - NP),$$
$$\Delta ylm = \tfrac{1}{2}LQ\alpha\beta - \tfrac{1}{2}MP\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP),$$

35. De là nous trouvons la ſolidité de notre pyramide

$$-\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ-MR) - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma T(LR-NP) + \tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ-MP),$$

& partant la denſité de l'air y ſera :

$$\frac{1}{LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT},$$

& par conſéquent, ſi nous poſons Π pour la hauteur qui y meſure l'élaſticité, nous aurons :

$$\Pi = \frac{h}{LQV - MPV + MRS - MQS + NPT - LRT}.$$

Cette quantité ſera donc auſſi une fonction des trois variables X, Y, Z, & ſi nous poſons

$$d\Pi = E dX + F dY + G dZ,$$

les quantités E, F, G, ſe détermineront aiſément par la différentiation de la valeur de Π, puisque

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right); \quad F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right); \quad G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

36. Si nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z′ infiniment proche de Z, & déterminé par ces trois coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, il ſe trouvera maintenant en z', en ſorte que les coordonnées ſeront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$z + SdX + TdY + VdZ.$$

Donc

Donc, si la position du point z' infiniment proche de z est donnée par les coordonnées $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, nous en pourrons trouver le lieu dans l'état d'équilibre. Car, si nous posons pour abréger

$$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K,$$

de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$, nous aurons

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}$$

37. De là l'élasticité en z étant $= \frac{h}{K} = \Pi$, elle sera en $z' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$: donc, si nous posons pour abréger,

$$\begin{aligned} E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) &= A \\ E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) &= B \\ E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) &= C \end{aligned}$$

l'élasticité en z' sera

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}.$$

Or la densité en z est $= \frac{1}{K}$. Donc, si nous considérons un parallelepipede rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$, dont les côtés soyent paralleles à nos trois coordonnées, & que nous nommions $zb = \alpha$, $zc = \beta$, $z\alpha = \gamma$, la solidité de ce parallelepipede sera $= \alpha\beta\gamma$, & la masse d'air qui y est contenue $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$.

Fig. 5.

38.

38. Voyons maintenant les forces dont ce parallelepipede ſera ſollicité; pour cet effet, cherchons l'élaſticité à chacun de ſes angles, ce qui ſe fera aiſément par les trois coordonnées qui répondent à chacun.

du point	les coordonnées			l'élaſticité
a	$x,$	$y,$	z	Π
b	$x+\alpha,$	$y,$	z	$\Pi+\frac{A\alpha}{K}$
c	$x,$	$y+\beta,$	z	$\Pi+\frac{B\beta}{K}$
d	$x+\alpha,$	$y+\beta,$	z	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta}{K}$
α	$x,$	$y,$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{C\gamma}{K}$
β	$x+\alpha,$	$y,$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+C\gamma}{K}$
γ	$x,$	$y+\beta,$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{B\beta+C\gamma}{K}$
δ	$x+\alpha,$	$y+\beta,$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{K}.$

39. Pour trouver la force, dont le parallelepipede eſt pouſſé vers la direction AX, conſidérons les faces $ac\alpha\gamma$ & $bd\beta\delta$, & nous voyons que toutes les preſſions ſur la face $bd\beta\delta$ ſurpaſſent celles qui agiſſent ſur l'autre $ac\alpha\gamma$ de la quantité $\frac{A\alpha}{C}$. Donc l'aire de chacune de ces deux faces étant $=\beta\gamma$, il en réſulte une force ſelon la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$. De la même maniere les forces

qui agiſſent ſur la face $cd\gamma\delta$ ſurpaſſent celles qui agiſſent ſur la face $zb\alpha\beta$ de la quantité $\frac{B\beta}{K}$; donc, l'aire de ces face étant $= \alpha\gamma$, il en réſulte une force ſelon la direction $xy = -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$. Enfin, les forces qui agiſſent ſur la face $\alpha\beta\gamma\delta$ ſurpaſſent celles qui agiſſent ſur la face $zbcd$ de la quantité $\frac{C\gamma}{K}$; donc, l'aire de ces faces étant $= \alpha\beta$, il en réſulte une force dans la direction $yz = -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$.

40. Après avoir trouvé ces forces ſelon les directions de nos trois coordonnées, le parallelepipede dont la maſſe eſt $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$, recevra les accélérations ſuivantes:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA, \quad \text{ſuivant } Ax,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB, \quad \text{ſuivant } xy,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC, \quad \text{ſuivant } yz,$$

où l'on n'a qu'à mettre pour A, B, C, les valeurs ſuppoſées ci-deſſus. Mais, ici conſidérant les agitations comme extrèmement petites, pour en tenir compte poſons

$$x = X + p; \quad y = Y + q, \quad \& \; z = Z + r,$$

de ſorte que p, q, r, ſoient des quantités quaſi infiniment petites: & partant on aura

$$dp = (L - 1)\,dX + M\,dY + N\,dZ,$$
$$dq = P\,dX + (Q - 1)\,dY + R\,dZ,$$
$$dr = S\,dX + T\,dY + (V - 1)\,dZ$$

41.

41. De là nous aurons à peu près

$$L=1,\ M=0,\ N=0,\ P=0,\ Q=1,\ R=0,\ S=0,\ T=0,\ V=1,$$

donc $K=1$, entant que nous n'en considérions les différentiels: mais pour la différentiel de Π, nous aurons:

$$E=\left(\frac{d\Pi}{dX}\right)=-\left(\left(\frac{dL}{dX}\right)+\left(\frac{dQ}{dX}\right)+\left(\frac{dV}{dX}\right)\right)h,$$

$$F=\left(\frac{d\Pi}{dY}\right)=-\left(\left(\frac{dL}{dY}\right)+\left(\frac{dQ}{dY}\right)+\left(\frac{dV}{dY}\right)\right)h,$$

$$G=\left(\frac{d\Pi}{dZ}\right)=-\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right)+\left(\frac{dQ}{dZ}\right)+\left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)h,$$

Ensuite nous trouvons:

$$A=E;\quad B=F,\quad \&\quad C=G.$$

& enfin, pour éliminer les autres lettres, remarquons que

$$L=1+\left(\frac{dp}{dX}\right);\quad Q=1+\left(\frac{dq}{dY}\right);\quad V=1+\left(\frac{dr}{dZ}\right).$$

& outre les coordonnées principales X, Y, Z, avec le tems t nous n'aurons que les trois petites quantités p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point

42. Substituons donc ces valeurs, & le mouvement de l'air causé par une agitation quelconque, mais extrêmement petite, sera déterminé par les trois équations suivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dX^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dXdY}\right)+\left(\frac{ddq}{dY^2}\right)+\left(\frac{ddr}{dYdZ}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dXdZ}\right)+\left(\frac{ddq}{dYdZ}\right)+\left(\frac{ddr}{dZ^2}\right)$$

 où

ou bien, ſi nous poſons $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = v$, nos équations prendront les formes ſuivantes,

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right);\ \left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right);\ \left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

d'où nous concluons

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right),$$

où il n'y a qu'une ſeule variable inconnue v.

43. Voilà donc la ſolution du probleme ſur la propagation du ſon, ayant égard à toutes les dimenſions de l'air. Un élément d'air, dont le lieu dans l'état d'équilibre eſt déterminé par les trois coordonnées X, Y, Z, ſe trouvera après le tems t dans un lieu déterminé par les coordonnées $X + x$, $Y + y$, $Z + z$, où x, y, z, ſont telles fonctions des quatre variables X, Y, Z, & t, dont la nature eſt exprimée par les équations ſuivantes:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dX\,dY}\right) + \left(\frac{ddz}{dX\,dZ}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX\,dY}\right) + \left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dY\,dZ}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dX\,dZ}\right) + \left(\frac{ddy}{dY\,dZ}\right) + \left(\frac{ddz}{dZ^2}\right).$$

ou bien, poſant $\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = v$, on aura

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dX}\right);\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dY}\right);\ \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{dv}{dZ}\right),$$

$$\&\ \frac{1}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dZ^2}\right).$$

44. Il n'eſt pas difficile de trouver une infinité de ſolutions particulieres, on n'a qu'à poſer

$$x = A\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$y = B\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$z = C\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

& l'on obtiendra les égalités ſuivantes:

$$\frac{A\alpha\alpha}{2gh} = A\beta\beta + B\beta\gamma + C\beta\delta = \beta(A\beta + B\gamma + C\delta)$$
$$\frac{B\alpha\alpha}{2gh} = A\beta\gamma + B\gamma\gamma + C\gamma\delta = \gamma(A\beta + B\gamma + C\delta)$$
$$\frac{C\alpha\alpha}{2gh} = A\beta\delta + B\gamma\delta + C\delta\delta = \delta(A\beta + B\gamma + C\delta),$$

d'où il s'enſuit $A = \beta$, $B = \gamma$, $C = \delta$, &

$$\alpha = \sqrt{2gh(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}.$$

Or on peut prendre à volonté les trois nombres β, γ, δ, & partant on aura une infinité de pareilles fonctions qui étant ajoutées enſemble donneront des valeurs convenables pour les inconnues x, y, z.

45. Tirons de là le cas, où les agitations partant d'un point A ſe répandent en tout ſens également. Alors on aura: $x = Xs$; $y = Ys$; $z = Zs$, & t ſera une fonction des deux quantités t & $\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$. Poſons $V = \sqrt{(XX + YY + ZZ)}$, de ſorte que V marque la diſtance du point Z au centre A dans l'état d'équilibre: & puiſque

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV\left(\frac{ds}{dV}\right),$$ ou bien

$$ds = dt\left(\frac{ds}{dt}\right) + \frac{XdX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{YdY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{ZdZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

nous

nous aurons:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = s + \frac{XX}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right); \quad \left(\frac{dy}{dY}\right) = s + \frac{YY}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right);$$

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right) = s + \frac{ZZ}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right),$$

$$\text{donc } \left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Maintenant, ayant $\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$; $\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V}$, & $\left(\frac{dds}{dVdX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$; car, puisque en général $\left(\frac{du}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)$, posant $u = \left(\frac{ds}{dV}\right)$, nous aurons $\left(\frac{dds}{dXdV}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$, la premiere équation sera

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

ou bien $\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$, & à cette même équation aussi les autres conduiront.

46. Le point Z s'éloignera directement du centre par le petit intervalle $s\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = Vs$: donc, si nous posons cet intervalle $Vs = u$, à cause de $s = \frac{u}{V}$, nous aurons

$$\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{1}{V}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right); \quad \left(\frac{ds}{dV}\right) = -\frac{u}{VV} + \frac{1}{V}\left(\frac{du}{dV}\right),$$

$$\& \left(\frac{dds}{dV^2}\right) = \frac{2u}{V^3} + \frac{2}{VV}\left(\frac{du}{dV}\right) + \frac{1}{V}\left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

d'où

d'où l'intervalle du déplacement u ſera exprimé par cette équation.

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{VV} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

C'eſt donc de la réſolution de cette équation, que dépend la propagation du ſon par l'air étendu en tout ſens. Puiſque cette équation eſt différente de celle que nous avons trouvée pour le cas de deux dimenſions, la propagation du ſon ſera auſſi différente.

47. Or pour trouver une ſolution générale de nos formules du §. 43. qu'on prenne

O fonction quelconque de $\alpha X + \beta Y + \gamma Z \pm t\sqrt{2gh(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}$

O' fonction quelconque de $\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \pm t\sqrt{2gh(\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')}$

O'' fonction quelconque de $\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \pm t\sqrt{2gh(\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'')}$

&c.

en augmentant le nombre de telles fonctions à l'infini, puiſque α, β, γ, α', β', γ', &c. ſont des nombres arbitraires. Enſuite ſoient L, M, N, P, Q, R, des fonctions quelconques des trois variables X, Y, Z, ſans qu'elles renferment le tems t: & on aura les valeurs ſuivantes pour les variables cherchées x, y, z.

$$x = \alpha O + \alpha' O' + \alpha'' O'' \text{ \&c.} + t\left(\frac{dd(L-M)}{dY\,dZ}\right) + \left(\frac{dd(P-Q)}{dY\,dZ}\right)$$

$$y = \beta O + \beta' O' + \beta'' O'' \text{ \&c.} + t\left(\frac{dd(M-N)}{dX\,dZ}\right) + \left(\frac{dd(Q-R)}{dX\,dZ}\right)$$

$$z = \gamma O + \gamma' O' + \gamma'' O'' \text{ \&c.} + t\left(\frac{dd(N-L)}{dX\,dY}\right) + \left(\frac{dd(R-P)}{dX\,dY}\right)$$

d'où

d'où l'on connoitra auſſi les viteſſes $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, de chaque particule d'aír, pour chaque moment.

48. Poſant enſuite $t = 0$, on aura l'état où l'air ſe trouve immédiatement après la premiere agitation, qui lui aura été imprimée; les formules que nous venons de trouver, marqueront pour cet inſtant tant les trois déplacemens x, y, z, arrivés à chaque particule d'air, que les trois viteſſes qui leur auront été imprimées: c'eſt en quoi conſiſte l'état initial. Or, cet état étant donné, il s'agit de déterminer convenablement toutes les fonctions O, O', O'', &c. avec leurs nombres reſpectifs α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; &c. de même que les fonctions L, M, N; P, Q, R, pour que l'état initial qui en réſulte, convienne préciſément avec celui qui eſt propoſé. Mais c'eſt ici qu'on rencontre la plus grande difficulté, & il eſt encore fort douteux, ſi nos formules, quoiqu'on augmente leurs membres à l'infini, s'étendent à tous les cas poſſibles: du moins ſeroit-il fort à ſouhaiter, qu'on trouvât moyen de les repréſenter ſous une forme finie & plus commode.

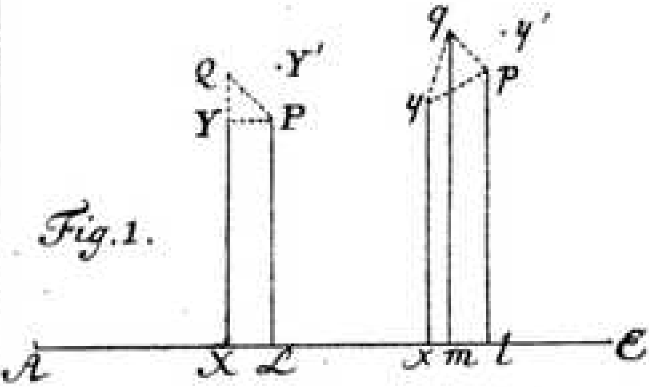

Fig. 1.

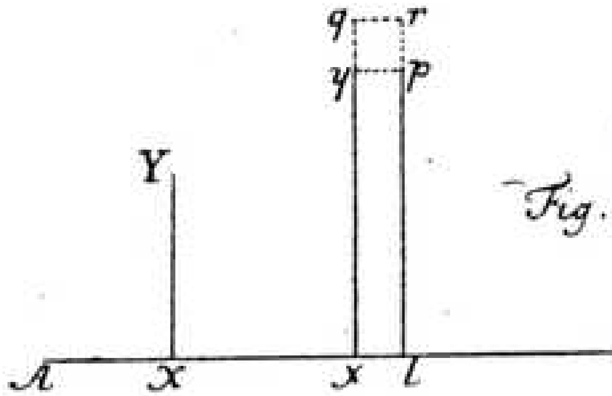

Fig. 2.

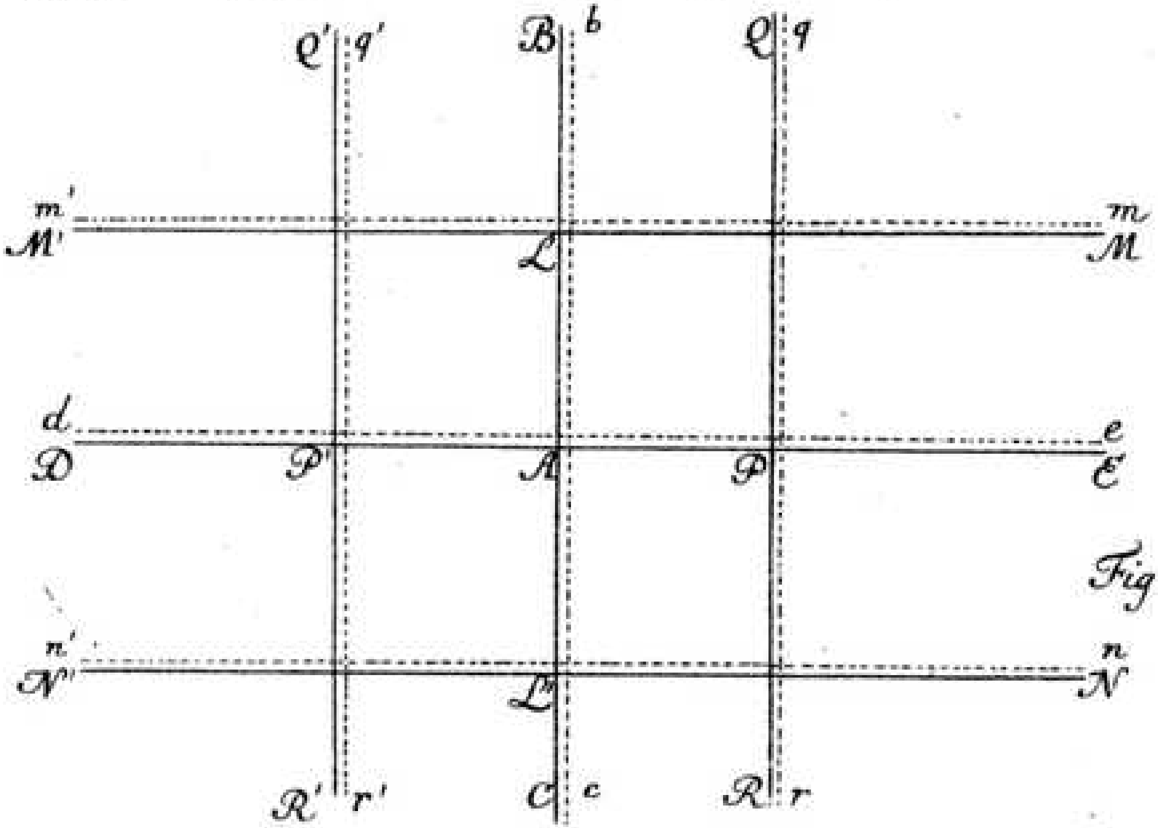

Fig. 3.

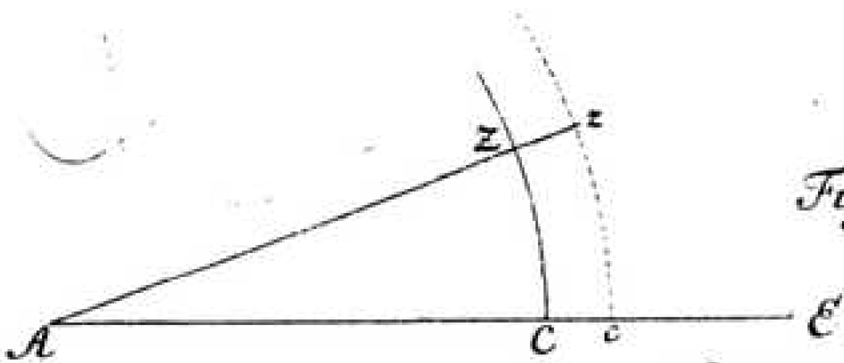

Fig. 4.

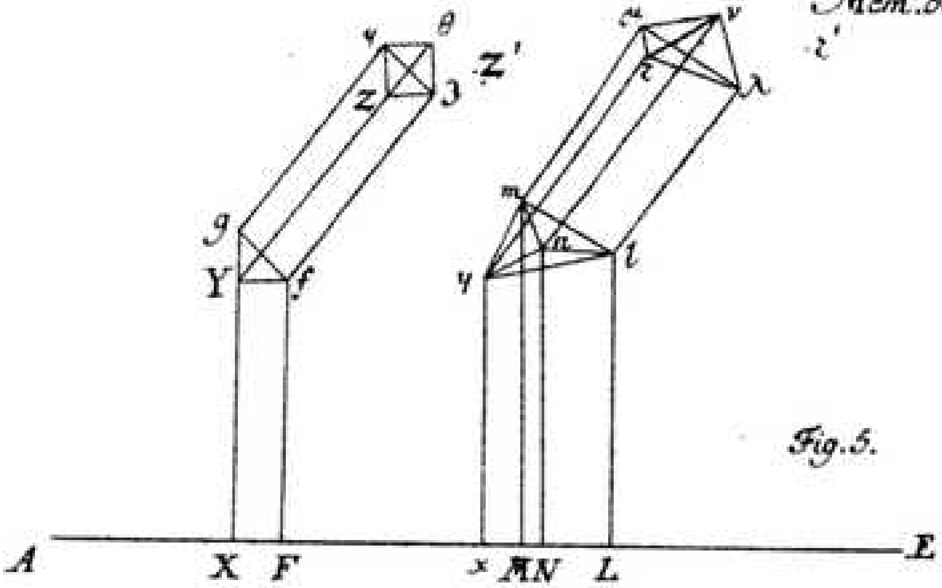

Fig. 5.

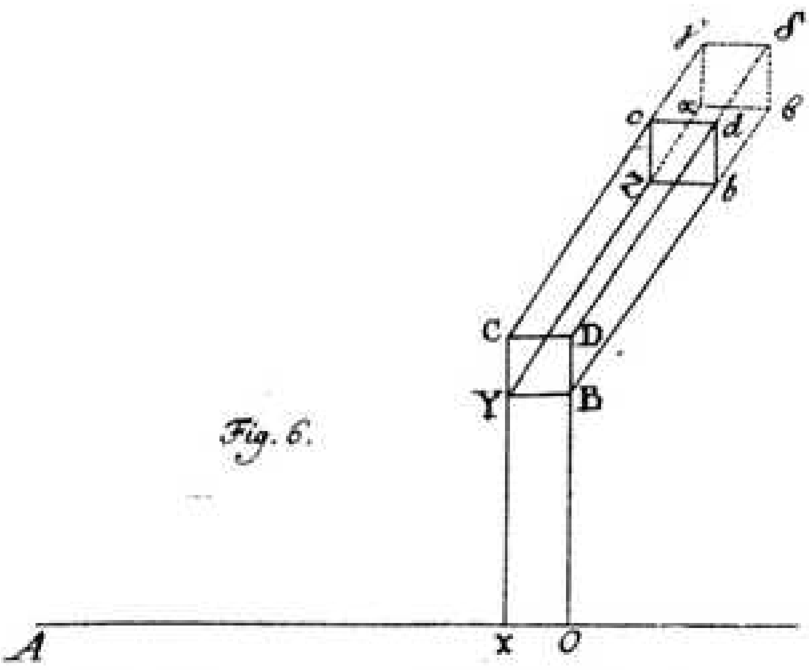

Fig. 6.