1766

Tentamen de sono campanarum

Leonhard Euler

TENTAMEN DE SONO CAMPANARVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Inter ea corpora, quae percussa contremiscunt, sonumque edunt, cordae tensae et laminae elasticae omni cura sunt exploratae, quae inuestigatio a Geometris eo diligentius est suscepta, quod non solum Physicae insignem illustrationem afferat, sed etiam principiis Acusticae et Musicae stabiliendis inseruiat. Quin etiam Celebris harmonicorum concentuum artifex *de Rameau* in hoc sibi verum harmoniae fundamentum detexisse videtur, quod pleraque corpora percussa plures simul sonos edere deprehendantur, quo phaenomeno naturam nobis ipsam sonos harmonicos declarare putat. Tanquam principium enim assumit, quos sonos idem corpus sonorum percussum coniunctim producat, eos pro consonis esse habendos. De cordis quidem tensis Celeberrimus *Bernoulli* luculenter ostendit, quomodo ab iis simul duo plures ve soni edi queant, qui secundum interualla consona octauae, quintae ac tertiae discrepent. Instrumentis porro musicis, quae inflatu tractantur, haec opinio mirifice confirmari videtur, dum soni, quos diuersimode inflata edere solent, secundum seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. progrediuntur. Tum vero etiam in campanis Celeb. *de Rameau* varios sonos simul se audire profitetur, inter quos potissimum interuallum tertiae seu decimae maioris emineat, hincque principium suum verae harmoniae antehac penitus ignoratum cumulatissime confirmari arbitratur.

2. Causa ergo, cur interualla *octauae*, *quintae* ac *tertiae* pro consonis sint habenda, hinc Auctori non tam in simplicitate rationum, quas auditu facile percipiamus, quaerenda videtur, sed potius in eo, quod eadem interualla saepenumero a corporibus sonoris percussis exhibeantur, quae ratio iis, qui regulis philosophandi sunt assueti, parum congrua videri debet. Si enim causa harmoniae in simplicitate rationis, quam vibrationes eodem tempore peractae inter se tenent, consistit, parum refert, vtrum huiusmodi soni harmonici ab eodem corpore percusso simul edantur, nec ne? ac duo soni interuallo octauae vel quintae remoti suauius non sonabunt, siue a duabus cordis diuersis edantur, siue ab eadem simul. Ac si duo huiusmodi soni in eodem corpore simul percipiantur, tantum abest, vt in hoc ipso causa consonantiae constitui possit, vt potius noua quaestio inde nascatur, quomodo eueniat, vt ab eodem corpore duo soni consoni simul edantur. Cum autem hoc principium per se sit infirmum, tum funditus iam est euersum per ea, quae Celeb. *Bernoulli* et ego de laminis elasticis sumus commentati, quos sonos maxime dissonos simul edere posse ostendimus. Atque nunc etiam monstrabo, binos illos sonos in campanis percipiendos, quos Celeb. *de Rameau* pro decima maiore habet, tantillum ab hac ratione deficere, eorumque interuallum adeo irrationale, sicque maxime esse dissonum. Ex quo exemplo cum laminis elasticis coniuncto patebit,

na-

naturam aeque sonorum dissonorum productione atque consonorum delectari, neque hinc quicquam ad principiorum harmonicorum per se solidissime stabilitorum maiorem confirmationem, atque adeo ne ad illustrationem quidem, peti posse.

3. Satis perspicuum videtur, dum campana pulsa contremiscit, sonumque edit, eius figuram ita continuo immutari, vt annuli elementares, quibus constare concipitur, a figura circulari rapidissime detorqueantur, atque alternatim figuram quasi ellipticam elongatam et compressam recipiant. Quare si rationem huius tremoris inuestigare velimus, tales annulos tenuissimos, in quos campana sectionibus horizontalibus resolui concipitur, seorsim considerare debemus, ita vt haec quaestio nobis sit imprimis euoluenda, quomodo annulus elasticus percussus vibrationes suas sit peracturus, quae ergo quaestio affinis est ei, quam de vibrationibus laminarum elasticarum instituimus, nisi quod hic figura corporis elastici naturalis est circularis, cum ibi esset linea recta. *Sit igitur* propositus huiusmodi annulus circularis ABMNCD, cuius latitudo ponatur $MN = c$, et radius medius $= a$, ita vt circuli interioris radius sit $OM = a - \frac{1}{2}c$, et exterioris $ON = a + \frac{1}{2}c$, vnde superficies annuli erit $= \pi(a + \frac{1}{2}c)^2 - \pi(a - \frac{1}{2}c)^2 = 2\pi ac$, denotante 2π peripheriam circuli, cuius radius $= 1$. Hinc si sectore infinite paruo, cuius angulus ad $O = \omega$, exscindatur elementum $MNmn$, erit eius areola $= ac\omega$. Tab. IV. Fig. 1.

4. Iam elasticitatem huius annuli contemplari oportet, vnde eius frustum quodcunque ABCD a vi quapiam in M ita incuruari pono, vt portio CMmD Fig. 2.

hiet

hiet ab altera parte AMNB angulo infinite paruo $NMn = \omega$, et effectum elasticitatis in minimis elastris $Nn.Zz$, quae vi sese contrahendi praedita ambas annuli partes in statum naturalem restituere conentur. Quaero igitur momentum omnium harum virium elementarium, quippe cui momentum vis, quae hanc inflexionem producere valet, aequale est statuendum. Vis autem singulorum horum elastrorum Zz ipsorum elongationi proportionalis est censenda, ex quo, si ponatur $MZ = z$, ob $Zz = \omega z$, erit vis huius elastri vt $\omega z dz$, eiusque momentum respectu puncti quasi immobilis $M = \omega zzdz$; vnde summa horum momentorum est $= \frac{1}{3}\omega z^3$, et expansione ad totam latitudinem $MN = c$ facta, erit totum momentum hanc inflexionem producens vt $\frac{1}{3}c^3\omega$. Magnitudinem huius momenti absolutam hic non curo, quippe quam pro quouis casu per experimenta explorare licet. Sufficiat ergo nosse, eam esse angulo inflexionis $NMn = \omega$ et cubo latitudinis annuli $MN = c$ coniunctim proportionalem. Dum ergo annulus ita in M inflectitur, vt angulus inflexionis sit $NMn = \omega$, momentum virium ad hunc effectum producendum requisitum statuo $= Ec^3\omega$; ita si vis quaedam CV hunc effectum producat, eius momentum pro puncto M erit $= Ec^3\omega$. Ac si etiam crassitiem huius annuli, quae sit $= b$ simulque minima, introducere velimus, prodibit istud momentum $= Ebc^3\omega$.

5. Quo haec ad institutum nostrum magis accommodemus, ponamus in annulo figuram circularem
Tab. IV. Fig. 1. iam a causa quacunque periisse, atque in M seu potius puncto medio inter M et N radium curuedinis non

non amplius esse $= a$, sed iam factum esse $= r$. Cum igitur nunc curuatura sit vt $\frac{1}{r}$, dum in statu naturali est $\frac{1}{a}$, differentia $\frac{1}{r} - \frac{1}{a}$ seu $\frac{1}{a} - \frac{1}{r}$ id repraesentat, quod supra angulo elementari ω designabatur. Quare virium momentum ad hanc inflexionem in M requisitum erit $= Ebc^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{a})$ vel $Ebc^2(\frac{1}{a} - \frac{1}{r})$, prout r fuerit vel minor vel maior quam a; priori scilicet casu momentum assignatum tendet ad inflexionem minuendam, posteriori vero ad augendam, quia hoc casu annuli limbus minus est incurvatus, quam in statu naturali. Hinc patet, literam E ita quampiam vim inuoluere, vt E sit vis per quadratum lineae cuiusdam diuisae; scilicet eius forma erit $\frac{P}{ff}$, vbi P vim quandam absolutam, et f lineam quandam rectam denotat, quas quantitates per experimenta definiri conuenit.

6. Comparemus iam statum annuli quemcunque violentum cum naturali et circulari, cuius centrum O, et ne figura nimis fiat confusa, loco annuli latitudine c praediti, tantum circulum AXx radio $OA = a$ descriptum consideremus, qui per annuli medium in statu naturali sit ductus, in violento autem in curuam BYy sit detortus. Cum deinde haec immutatio minima sit statuenda, puncta A, X, x ita e statu naturali in violentum in B, Y, y translata concipere licet, vt rectae AB, YX, yx productae per centrum O transeant, et puncta B, Y, y situm suum naturalem A, X, x affectent. Puncto ergo A tanquam fixo spectato, vocemus arcum $AX = X$, et particulam $XY = Y$, tum vero pro alio puncto y arcum $Ax = x$, et particulam $xy = y$, ita vt qualis functio y sit ipsius x, talis functio Tab. IV. Fig. 3.

ctio Y esse debeat ipsius X. Nunc igitur perpendendum est, elementum annuli circa y eatenus in statu violento versari, quatenus radius osculi in y vel maior est, vel minor, quam a. Ad eum ergo inuestigandum fig. 4. magis ad hunc scopum accommodata vtor, vbi Oxy sit radius ipsi OXY proximus, et Yv arculus centro O descriptus; hic ob $AX = x$, $XY = y$, et $OX = a$, erit $Xx = dx$, $Yv = (1 + \frac{y}{a}) dx$, et $vy = dy$; vnde fit $Yy = \sqrt{((1 + \frac{y}{a})^2 dx^2 + dy^2)} = ds$. Ducatur ad Y tangens, in eamque ex O demittatur perpendiculum $OT = \Pi$, erit $ds : (1 + \frac{y}{a}) dx = a + y : \Pi$; hincque $\Pi = \frac{(a+y)^2 dx}{a\,ds}$. Constat autem, esse radium curuedinis $YR = \frac{(a+y)\,dy}{d\Pi}$. At sumto dx constante est $d\Pi = \frac{2(a+y)dx\,dy}{a\,ds} - \frac{(a+y)^2 dx\,dds}{a\,ds^2}$; quod ob $dds = \frac{(a+y)dx^2 dy + aa\,dy\,ddy}{aa\,ds}$, abit in

Tab. IV. Fig. 4.

$$d\Pi = \frac{(a+y)^3 dx^3 dy + 2aa(a+y)dx\,dy^3 - aa(a+y)^2 dx\,dy\,ddy}{a^3 ds^3}$$

hincque $YR = \frac{a^3 ds^3}{(a+y)^3 dx^3 + 2aa\,dx\,dy^2 - aa(a+y)dx\,ddy}$.

7. Nunc autem cogitemus, esse y prae a quantitatem minimam, indeque etiam rationem $dy : dx$ euanescere; atque proxime erit $ds = dx$, hincque

$$YR = \frac{a^3 dx^3}{aa\,dx^3 + 2aa\,dx\,dy^2 - a^3 dx\,ddy} = \frac{a\,dx^2}{dx^2 - a\,ddy}.$$

Fig. 3. Quare posito radio osculi in $y = r$, erit $r = \frac{a\,dx^2}{dx^2 - a\,ddy}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} - \frac{ddy}{dx^2}$; vnde si $\frac{ddy}{dx^2}$ vt positiuum spectemus, radius osculi in y maior erit quam a, et conatus aderit ad annulum in y magis incuruandum, cuius momentum, vt ante ostendimus, aestimari debet $= Ebc^3.\frac{ddy}{dx^2}$, vel momentum, quod annulus exerit ad curuaturam in y minuendam, erit $= -Ebc^3.\frac{ddy}{dx^2}$, quod momentum ad ipsum

ipſum punctum y applicatum eſt cenſendum. Quatenus ergo annulus in ſingulis elementis vel magis incuruatus eſt, vel minus, quam in ſtatu naturali, eatenus vires naſcuntur, ſingula annuli elementa in ſtatum naturalem pellentes. Sit igitur vis, qua elementum ad y vrgetur verſus $x = p\,dx$, ſimilique modo vis elementaris ſecundum $YX = P\,dX$, quas vires ex ſuperioribus ſollicitationibus determinari oportet; ac quin volumen elementi in y ſit $= bc\,dx$, in Y autem $= bc\,dX$, erunt eorum maſſae per denſitatem δ quaſi multiplicando $\delta\, bc\,dx$ et $\delta\, bc\,dX$, vnde introducendo tempus $= t$ in minutis ſecundis expreſſum, ſi g ſit altitudo lapſus vno minuto ſecundo, erit ex principiis ſollicitationum $\delta\, bc\,dx\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gp\,dx$ ſeu $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gp}{\delta\, bc}$.

8. Ad has autem vires elementares $p\,dx$ et $P\,dX$ inueniendas, quibus ſingula annuli elementa actu ad ſtatum naturalem vrgentur, concipiamus ſingulas has vires contrarie applicatas, quibus ergo efficietur, vt annulus in hoc ſtatu violento conſeruetur. Repraeſentet recta YP hanc vim $P\,dX$, huiusque cum reliquis omnibus effectus ratione puncti y in hoc conſiſtet, vt ab eorum momentis iunctim ſumtis curuatura in y tantum minuatur, quantum ob elaſticitatem augeri conatur; quod momentum ante vidimus eſſe $= Ebc^3 . \frac{ddy}{dx^2}$, cui ergo ſumma omnium momentorum ex viribus elementaribus $P\,dX$ natorum aequalis eſſe debet. Hunc in finem punctum y tanquam fixum ſpectemus, punctum vero Y per totum annuli ambitum variari ponamus, vt x et y tantisper ſint quantitates conſtantes, ſolae autem X et Y cum vi incognita $P\,dX$

variabiles. Ac huius quidem vis $YP = P\,dY$ momentum in punctum y est $= P\,dX.\,\text{sin.}\,XOx.\,Oy$ $= (a+y)\,P\,dX\,\text{sin.}\,(\frac{x}{a} - \frac{X}{a}) = aP\,dX(\text{sin}\,\frac{x}{a}\,\text{cos.}\,\frac{X}{a} - \text{cos.}\,\frac{x}{a}\,\text{sin}\,\frac{X}{a})$, quia y prae a vt euanescentem spectamus, vnde summa horum momentorum est $a\,\text{sin.}\,\frac{x}{a}\int P\,dX\,\text{cos.}\,\frac{X}{a}$ $- a\,\text{cos.}\,\frac{x}{a}\int P\,dX\,\text{sin.}\,\frac{X}{a}$, quod vsque ad ipsum punctum y est extendendum, quo fit $X = x$ et $P = p$.

9. Nunc igitur variabilitas puncti Y in ipsum punctum y transfertur, ac iam x et p vt variabilibus spectatis erit summa omnium momentorum curuaturam in y minuere tendentium $= a\,\text{sin.}\,\frac{x}{a}\int p\,dx\,\text{cos.}\,\frac{x}{a} - a\,\text{cos.}\,\frac{x}{a}\int p\,dx\,\text{sin.}\,\frac{x}{a}$, ipsi $Ebc^2.\frac{ddy}{dx^2}$ aequalis statuenda, vnde vim elementarem $p\,dx$ hactenus incognitam definire licebit. Sumto autem elemento dx constante, differentiatio praebet:

$$\text{cos.}\,\tfrac{x}{a}\int p\,dx\,\text{cos.}\,\tfrac{x}{a} + \text{sin.}\,\tfrac{x}{a}\int p\,dx\,\text{sin.}\,\tfrac{x}{a} = Ebc^2.\frac{d^3y}{dx^3}$$

porro autem differentiando adipiscimur

$$-\tfrac{1}{a}\text{sin.}\,\tfrac{x}{a}\int p\,dx\,\text{cos.}\,\tfrac{x}{a} - \tfrac{1}{a}\text{cos.}\,\tfrac{x}{a}\int p\,dx\,\text{sin.}\,\tfrac{x}{a} + p = Ebc^2.\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Cum vero sit

$$\tfrac{1}{a}\text{sin.}\,\tfrac{x}{a}\int p\,dx\,\text{cos.}\,\tfrac{x}{a} - \tfrac{1}{a}\text{cos.}\,\tfrac{x}{a}\int p\,dx\,\text{sin.}\,\tfrac{x}{a} = Ebc^2.\frac{ddy}{aa\,dx^2}$$

addendo prodibit

$$p = Ebc^2\left(\frac{ddy}{aa\,dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

qui valor per duplicem differentiationem ortus idem esse debet, quaecunque constantes in integrationibus formularum $\int p\,dx\,\text{cos.}\,\frac{x}{a}$ et $\int p\,dx\,\text{sin.}\,\frac{x}{a}$ fuerint adiectae. Neque ergo hinc vllum dubium nasci potest, quod supra has integrationes non satis sollicite determinauerimus;

mus; vtcunque enim determinentur, ſemper idem valor pro littera p obtinetur.

10. Cum igitur nunc, vbi ad variationem temporis fluxu oriundam ſimul ſpectamus, quantitas y non tantum, vt functio ipſius x, ſed etiam temporis t, tractari debeat, loco formularum $\frac{ddy}{dx^2}$ et $\frac{d^4y}{dx^4}$, vbi temporis nulla eſt ratio habita, more recepto ſcribere debemus $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ et $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$, et quoniam ſupra inuenimus $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\frac{2gp}{\delta bc}$, aequatio motum annuli ad quoduis tempus determinans erit

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-\frac{2gEcc}{\delta}\left(\frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\right).$$

Quare ſi breuitatis gratia ponamus $\frac{2gE}{\delta}=ff$, quae eſt quantitas conſtans pro omnibus annulis ex eadem materia confectis, vtcunque ratione radii a et latitudinis e inter ſe diſcrepent, (craſſities enim b penitus ex calculo exceſſit,) aequatio noſtra reſoluenda erit

$$0=\frac{1}{ffcc}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)+\frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

cuius reſolutio per ſe non determinata ex ſtatu initiali, quo tam figura annulo impreſſa, quam celeritates ſingulorum elementorum dantur, determinari debet. Tum vero etiam ad hoc reſpici oportet, quod ſi pro x ſcribatur $2\pi a+x$, vel in genere $2i\pi a+x$, valor ipſius y idem reſultet, quandoquidem hi arcus omnes in eodem puncto x terminantur. Denique etiam recordandum eſt, nullas alias reſolutiones locum habere poſſe, niſi quae pro y valores quam minimos, nunquam vltra certos limites augendos, exhibeant, ad quas conditiones in reſolutione probe attendi oportet.

11. Ex aequatione inuenta temporis ratio statim tollitur ponendo $y = v \sin.(nt+\nu)$, vt v sit functio solius x; tum enim ob $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -nnv \sin.(nt+\nu)$ totam aequationem per $\sin.(nt+\nu)$ diuidendo habebimus:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{ddv}{aadx^2} - \frac{nnv}{ffcc} = 0.$$

cuius integrale completum huiusmodi formae erit:

$$v = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\sin.\beta x + D\cos.\beta x$$

ita vt sit:

$$\alpha^4 + \frac{\alpha\alpha}{aa} = \frac{nn}{ffcc} \quad \text{et} \quad \beta^4 - \frac{\beta\beta}{aa} = \frac{nn}{ffcc}$$

hincque $\alpha^4 - \beta^4 + \frac{\alpha\alpha+\beta\beta}{aa} = 0$, et $\alpha\alpha - \beta\beta + \frac{1}{aa} = 0$. Cum ergo sit $\beta\beta = \frac{1}{2aa} + \sqrt{\left(\frac{1}{4a^4} + \frac{nn}{ffcc}\right)}$, erit $\alpha\alpha = -\frac{1}{2aa} + \sqrt{\left(\frac{1}{4a^4} + \frac{nn}{ffcc}\right)}$. Verum quia valor ipsius v idem esse debet, etiamsi pro x scribatur $2i\pi a + x$, manifestum est, casu nostro fore $A = 0$ et $B = 0$; tum vero vt $\sin.(2i\pi\beta a + \beta x) = \sin.\beta x$, necesse est sit βa numerus integer. Statuatur ergo $\beta a = i$, seu $\beta = \frac{i}{a}$, hincque numerus n ita definitur, vt sit

$$\frac{nn}{ffcc} = \frac{i^4 - ii}{a^4} \quad \text{seu} \quad n = \frac{ifc}{aa}\sqrt{(ii-1)}.$$

Quocirca cum sit $v = C\sin.\frac{ix}{a} + D\cos.\frac{ix}{a}$, habebimus

$$y = \left(C\sin.\frac{ix}{a} + C\cos.\frac{ix}{a}\right)\sin.\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii-1)} + \nu\right)$$

quae aequatio facilius ita exhibetur:

$$y = A\sin.\left(\frac{ix}{a} + \alpha\right)\sin.\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii-1)} + \nu\right).$$

12. Quoniam A, α, ν sunt quantitates prorsus arbitrariae, et pro i numerum integrum quemcunque accipere licet, infinitas huiusmodi formulas exhibere pote-

rimus,

simus, quae singulae pro y positae quaestioni satisfaciant. Quilibet autem, posito breuitatis gratia $\frac{ifc}{aa}\sqrt{(ii-1)}$, generalius ita exprimi potest, vt sit

$$y = \mathrm{A}a\,\text{fin.}\frac{ix}{a}\,\text{fin.}\,nt + \mathrm{B}a\,\text{fin.}\frac{ix}{a}\,\text{cof.}\,nt + \mathrm{C}a\,\text{cof.}\frac{ix}{a}\,\text{fin.}\,nt + \mathrm{D}a\,\text{cof}\frac{ix}{a}\,\text{fin.}\,nt$$

vbi iam coefficientes A, B, C, D sunt numeri arbitrarii iique minimi, quandoquidem problema ita resoluimus, vt tremores sint quam minimi. Pro i autem quoscunque numeros integros accipere licet, vnde innumerabiles huiusmodi formulae exhiberi possunt, quae non solum singulae satisfaciunt, sed etiam binae pluresue iunctim sumtae. Verum hic obseruo, casum $i = 1$, quo fit $n = 0$, nullum motum indicare; aequatio enim $y = \mathrm{B}a\,\text{fin.}\frac{x}{a} + \mathrm{D}a\,\text{cof.}\frac{x}{a}$ eiusmodi annuli mutationem refert, qua figuram circularem retinet, ac tantum de suo loco aliquantillum remouetur, quod ad motum vibratorium nihil confert, vnde huic casui, ne in compositione quidem, locus relinquitur.

13. Casus ergo simplicissimus motum vibratorium annuli exhibens oritur ponendo $i=2$, vnde fit $n = \frac{2fc}{aa}\sqrt{3}$, atque

$$y = a(\mathrm{A}\,\text{fin.}\frac{2x}{a} + \mathrm{C}\,\text{cof.}\frac{2x}{a})\,\text{fin.}\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3} + a(\mathrm{B}\,\text{fin.}\frac{2x}{a} + \mathrm{D}\,\text{cof.}\frac{2x}{a})\,\text{cof}\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3}$$

vnde simul celeritas cuiusque puncti y pro quouis tempore t cognoscitur, quae est

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2fc\sqrt{3}}{a}(\mathrm{A}\,\text{fin.}\frac{2x}{a} + \mathrm{C}\,\text{cof.}\frac{2x}{a})\,\text{cof.}\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3} - \frac{2fc\sqrt{3}}{a}(\mathrm{B}\,\text{fin}\frac{2x}{a} + \mathrm{D}\,\text{cof.}\frac{2x}{a})\,\text{fin.}\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3}$$

qui

qui motus ex eo statu initiali nascitur, quo erat

$$y = a\left(B \sin. \tfrac{2x}{a} + D \cos. \tfrac{2x}{a}\right)$$

et $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2fc\sqrt{3}}{a}\left(A \sin. \tfrac{2x}{a} + C \cos. \tfrac{2x}{a}\right)$

vnde singulorum punctorum tam variatio de statu naturali, quam celeritas impressa nascitur. Tum vero vibrationes erunt regulares; elapso enim quoque tempore t vt sit $\frac{2fc}{aa}t\sqrt{3} = 2\pi$, annulus in statum pristinum reducitur. Quoniam igitur interea binas vibrationes absoluisse censetur, tempus vnius vibrationis erit $= \frac{\pi aa}{2fc\sqrt{3}}$, singulisque minutis tot vibrationes absoluentur, quot indicat numerus $\frac{2fc\sqrt{3}}{\pi aa}$, cui ipse sonus editus censetur proportionalis. Ex quo patet, pro annulis ex eadem materia confectis sonum esse directe vt annuli latitudinem, et reciproce vt quadratum radii.

14. Hic ergo est sonus principalis, quem annulus pulsus edere potest. Secundus casus vibrationum regularium oritur sumendo $i = 3$, quo fit $n = \frac{3fc}{aa}\sqrt{8}$ et

$$y = a\left(A \sin. \tfrac{3x}{a} + C \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \sin. \tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{3} + a\left(B \sin. \tfrac{3x}{a} + D \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \cos. \tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{8}$$

et celeritas puncti y elapso tempore t

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(A \sin. \tfrac{3x}{a} + C \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \cos. \tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{8} - \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(B \sin. \tfrac{3x}{a} + D \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \sin. \tfrac{3fc}{aa}t\sqrt{8}.$$

Hic ergo casus oritur, si annulus ita percutiatur, vt initio posito $t = 0$ fuerit

$$y = a\left(B \sin \tfrac{3x}{a} + D \cos. \tfrac{3x}{a}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{3fc\sqrt{8}}{a}\left(A \sin. \tfrac{3x}{a} + C \cos. \tfrac{3x}{a}\right)$$

quod

quod adhuc ob A, B, C, D arbitrarias infinitis modis fieri poteſt. Tum autem annulo ita percuſſo, is, elapſo tempore $t = \frac{2\pi aa}{3fc\sqrt{8}}$, iterum in ſtatum priſtinum reducitur, ſicque ſingularum vibrationum tempus erit $= \frac{\pi aa}{3fc\sqrt{8}}$, ſeu vno minuto ſecundo tot edentur vibrationes, quot hic numerus $\frac{3fc\sqrt{8}}{\pi aa}$ continet vnitates, cui numero ergo hic ſecundus ſonus ab annulo editus erit proportionalis. Hic igitur ſonus ad principalem rationem tenet vt $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}$ ad 1, ſeu vt $\sqrt{6}:1$. Vnde ſi ſonus principalis conueniat cum ſono muſico C, ſecundus ſonus aliquanto grauior eſt ſono *e*, ita vt interuallum parumper deficiat a *decima maiore*.

15. Tertius caſus vibrationum regularium, ideoque tertius ſonus ſimplex, quem annulus pulſus edere valet, oritur ponendo $i = 4$, et $n = \frac{4fc}{aa}\sqrt{15}$, vnde fit:

$$y = a\left(A\sin.\frac{4x}{a} + C\cos.\frac{4x}{a}\right)\sin.\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15} + a\left(B\sin.\frac{4x}{a} + D\cos.\frac{4x}{a}\right)\cos.\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15}$$

et celeritas:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{4fc\sqrt{15}}{a}\left(A\sin.\frac{4x}{a} + C\cos.\frac{4x}{a}\right)\cos.\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15} - \frac{4fc\sqrt{15}}{a}\left(B\sin.\frac{4x}{a} + D\cos.\frac{4x}{a}\right)\sin.\frac{4fc}{aa}t\sqrt{15}$$

qui motus oritur, ſi annulus ita percutiatur, vt motus initio fuerit:

$$y = a\left(B\sin.\frac{4x}{a} + D\cos.\frac{4x}{a}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{4fc\sqrt{15}}{a}\left(A\sin.\frac{4x}{a} + C\cos.\frac{4x}{a}\right)$$

qui ergo caſus etiam infinitis modis produci poteſt, tum autem annulus ad ſtatum priſtinum redit elapſo tem-

 pore

pore $t = \frac{2\pi aa}{4fc\sqrt{15}}$, ita vt singularum vibrationum tempus futurum sit $= \frac{\pi aa}{4fc\sqrt{15}}$ min. sec. Singulis ergo minutis secundis tot edentur vibrationes, quot vnitates continet iste numerus $\frac{4fc\sqrt{15}}{\pi aa}$, cui simul ipse sonus est proportionalis. Quare si sonus principalis, quem signo musico C respondere ponamus, vnitate exprimatur, hic tertius sonus erit $= \frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{5}$, seu tantillo minor quam $\frac{9}{2}$; paulisper igitur grauior erit sono $\bar{d}$, et interuallum valde parum deficit ab interuallo ex duplici octaua et tono maiore composito.

16. Quartus casus vibrationum regularium, quartusque sonus simplex, quem annulus edere valet, oritur ponendo $i = 5$ et $n = \frac{5fc}{aa}\sqrt{24}$, vnde fit

$$y = a\left(A \sin.\frac{5x}{a} + C \cos.\frac{5x}{a}\right)\sin.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24} + a\left(B \sin.\frac{5x}{a} + D \cos.\frac{5x}{a}\right)\cos.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24}$$

et celeritas:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(A \sin.\frac{5x}{a} + C \cos.\frac{5x}{a}\right)\cos.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24} - \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(B \sin.\frac{5x}{a} + D \cos.\frac{5x}{a}\right)\sin.\frac{5fc}{aa}t\sqrt{24}$$

qui motus oritur, si annulus ita percutiatur, vt posito $t = 0$ fuerit

$$y = a\left(B \sin.\frac{5x}{a} + D \cos.\frac{5x}{a}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{5fc\sqrt{24}}{a}\left(A \sin.\frac{5x}{a} + C \cos.\frac{5x}{a}\right).$$

Ad situm ergo pristinum annulus reducitur elapso tempore $t = \frac{2\pi aa}{5fc\sqrt{24}}$, vnde singularum vibrationum tempus erit $= \frac{\pi aa}{5fc\sqrt{24}}$ min. sec. ita vt singulis minutis secundis tot edantur vibrationes, quot vnitates continet

net hic numerus $\frac{5fc\sqrt{24}}{\pi aa}$, cui ipſe ſonus eſt proportionalis. Quare ſi ſonus principalis conueniat cum ſono C, qui vnitate exponatur, hic ſonus quartus erit $= \frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{3}} = 5\sqrt{2}$, ideoque tantillum ſuperat 7. Cum nunc 6 ſit ſonus *g'*, noſter ſonus paulisper acutior eſt quam *a'*, et interuallum a principali parumper excedit interuallum ex duplici octaua et ſexta maiore compoſitum.

17. Soni ergo ſimplices, quos in eodem annulo excitare licet, ſiquidem principalis vnitate exponatur, ſequenti modo ſe habebunt:

I.	. . $1 =$	$1 =$	$1,00000$	. . C
II.	. . $\frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$6 =$	$2,44949$	. . $e-$
III.	. . $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$20 =$	$4,47214$	. . $\bar{d}-$
IV.	. . $\frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$50 =$	$7,07107$	. . $\bar{b}-$
V.	. . $\frac{6\sqrt{35}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$105 =$	$10,24695$	. . $\bar{\bar{e}}+$
VI.	. . $\frac{7\sqrt{48}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$196 =$	$14,00000$	. . $\bar{\bar{b}}-$
VII.	. . $\frac{8\sqrt{63}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{}$	$336 =$	$18,33024$	. . $\bar{\bar{\bar{d}}}+$

Hi ergo ſoni continuo fiunt acutiores; interuallis autem irrationalibus diſtinguuntur, ſecus ac fit in cordis, ita vt hi ſoni maxime ſint diſſoni, plurimumque ab harmonia abhorreant. Atque ſingulos hos ſonos idem annulus, ſi certo modo percutiatur, ſingulatim edere poteſt, ſin autem percuſſio non ita fuerit comparata, vti plerumque vſu venire debet, annulus non ſimplicem edet ſonum, ſed mixtum ex binis pluribusue ſimplicibus, ideoque inter ſe diſſonis; ex quo principium Cel. *de Rameau* funditus euertitur.

18. Operae pretium erit inueſtigare, quomodo impulſionem initialem comparatam eſſe oporteat, vt quisque ſonorum ſimplicium purus edatur; id quod clariſſime inde perſpicietur, ſi definiamus, in quot punctis figura annuli diſtorta naturalem interſecet, ſeu vbi fiat $y = 0$; in totidem enim punctis quoque, etſi non iisdem, celeritas impreſſa $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ euaneſcere debet. Cum enim pro ſtatu initiali ſit in genere

$$\frac{y}{a} = B\,\text{ſin.}\frac{ix}{a} + D\,\text{coſ.}\frac{ix}{a} \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right) = \alpha\left(A\,\text{ſin.}\frac{ix}{a} + C\,\text{coſ.}\frac{ix}{a}\right)$$

totidem locis tam y, quam $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, euaneſcit, niſi forte vel y vbique vel etiam celeritas fuerit nulla. Puncta ergo, quibus fit ſiue $y = 0$, ſiue $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$ huiusmodi aequatione tang. $\frac{ix}{a} =$ Conſt. determinantur, vnde ſi Conſt. $=$ tang. θ, valores anguli $\frac{ix}{a}$ ſunt θ, $\pi + \theta$, $2\pi + \theta$, $3\pi + \theta$, $4\pi + \theta$ etc vnde anguli $AOx = \frac{x}{a}$ valores ſunt:

$$\frac{\theta}{i};\ \frac{\pi+\theta}{i};\ \frac{2\pi+\theta}{i};\ \frac{3\pi+\theta}{i} \ldots \text{vsque ad } \frac{(2i-1)\pi+\theta}{i}$$

quorum numerus eſt $2i$. Pro quouis ergo numero i tam numerus interſectionum, quam locorum, vbi celeritas eſt nulla, eſt duplo maior $= 2i$.

19. Vt igitur annulus ſonum principalem purum edat, impulſio ita debet eſſe comparata, vt figura impreſſa figuram naturalem in quatuor punctis aequidiſtantibus interſecet, et vt celeritas in ſimilibus quatuor punctis ſit nulla. Sin autem figura impreſſa figuram naturalem vel in ſex, vel octo, vel decem etc. punctis interſecet, in totidemque locis celeritas fuerit nulla, annulus

annulus edet sonum, vel secundum, vel tertium, vel quartum etc. Ex quo intelligitur, rarissime id obtineri posse, vt vllus horum sonorum purus edatur, ac semper fere eueniet, vt quomodocunque annulus percutiatur, plures soni simul exaudiantur, qui tantum abest, vt perfectam harmoniam referant, vt potius interualla maxime dissona constituant. Inter hos autem diuersos sonos modo alii aliique eminebunt, prout impulsio ad rationem cuiuspiam soni simplicis propius accesserit. In genere autem vibrationes frequentiores, quibus soni acutiores respondent, a resistentia citius extinguentur, praecipue si per se fuerint debiliores, at sonus principalis grauissimus diutissime durabit, reliquisque plerumque multum antecellet. Vix autem euenire poterit, vt idem annulus saepius impulsus eandem plane sonorum mixturam exhibeat.

20. Hinc cuiusmodi sonos campanae reddant, quodammodo colligere licet, quandoquidem mente campanas in huiusmodi annulos resolutas concipimus. Ac primo quidem intelligitur, si omnes isti annuli fuerint inter se aequales, vt forma prodeat crustae cylindricae, eandem sonorum rationem esse futuram, quaecunque fuerit campanae altitudo, propterea quod singuli annuli ad pares vibrationes sunt instructi. Verum idem quoque euenire debet, licet annuli ratione amplitudinis differant, dummodo latitudo singulorum quadrato radii ipsorum fuerit proportionalis. Scilicet si posito cuiusque annuli radio $=r$, eius latitudo fuerit $s=\frac{rr}{b}$, singuli annuli ad pares sonos edendos erunt accommodati,

ſicque tota campana eosdem ſonos, ſiue ſimplices, ſiue mixtos, reddere poterit, qui formula $\frac{1fs\sqrt{(ii-1)}}{\pi rr}$ indicantur, ex quo ſonus principalis erit $=\frac{2fs\sqrt{3}}{\pi rr}$. Quodſi plures campanae huiusmodi inter ſe ſimiles habeantur, erunt ſoni principales ab iis editi reciproce, vt latera homologa, ſeu diametri amplitudinum, vel, quod eodem redit, in ratione reciproca ſubtriplicata ponderum. Quare, vt duae campanae ſonos edant rationem $m:n$ tenentes, earum diametri rationem $n:m$, pondera autem rationem $n^3:m^3$, tenere debent, ſiquidem inter ſe fuerint ſimiles, quam regulam etiam experientia comprobat. Verum hinc probe notetur, vnamquamque campanam praeter ſonum principalem plerumque plures alios ſonos ſimul edere, ſecundum interualla ſupra indicata, qui a vera harmonia maxime abhorreant.

21. At Theoria campanarum non mediocriter perfici videtur, ſi campanae non per ſectiones horizontales in annulos planos, ſed potius per ſectiones ad earum ſuperficiem normales in annulos conicos ſecari intelligantur, quoniam priori modo neque ſupremus campanae fundus, neque infimus limbus repraeſentari poteſt. Sit igitur AC axis campanae, circa quem figura $Aa\ Ss$ B rotata corpus campanae gignat. Ponatur pro hac figura $AQ=p$: $QS=q$, normalis ad curuam $SR=r$, et craſſities in S normaliter capta $Ss=s$; erit $QR=\frac{qdq}{dp}$ et $rr=\frac{qq(dp^2+dq^2)}{dp^2}$. Hinc fit elementum curuae $S\Sigma=\frac{rdp}{q}$, quod in $Ss=s$, et inſuper circuli radio $QS=q$ deſcripti peripheriam $2\pi q$ ductum

Tab. IV. Fig. 5

ductum dat soliditatem elementi campanae $= 2\pi r s dp$, vnde tota campanae soliditas erit $= 2\pi \int r s dp$, si scilicet hoc integrale per totam figuram extendatur. Caeterum hic aequatio inter coordinatas p et q, neque ad curuam interiorem ASB, neque exteriorem asB, sed ad lineam quandam mediam pertinere est censenda.

22. Nunc ergo eiusmodi annulum contemplemur, qui ex rotatione elementi $Ss\Sigma\sigma$ circa axem AC generetur, et cuius figura crustam coni truncati referet. Hunc annulum cono vertice R et latere RS circumplicatum concipiamus, cuius autem tantum quasi medium circulum SEXx in figura exprimimus, in qua propterea erit $SQ = Qx = q$, et $RS = Rx = r$; atque s denotat hic latitudinem annuli, quae supra fuerat c, dum radius, qui supra erat a, hic est q. Iam huius annuli vibrationes ita fieri concipiamus, vt is perpetuo in superficie huius coni maneat; peruenerit ergo annulus ex statu naturali EXx in statum eYy, pro quo ponamus arcus $EX = X$ et $Ex = x$, spatiola vero $XY = Y$ et $xy = y$, quae sint minima. Quatenus ergo curuatura annuli in y maior minorue est, quam in statu naturali, eatenus elasticitas in y virium momentum inuoluit, quod, vt supra, aestimari debet $= Ebs^3 \frac{ddy}{dx^2}$, vbi b crassitiem annuli denotat, quae autem deinceps ex calculo euanescit. Manifestum hoc fit, si superficiem conicam in planum explicemus; tum enim quaestio ad superiorem casum sponte reducitur. Momentum ergo, quod elasticitas exerit ad curuaturam minuendam, est $= -Ebs^3 \frac{ddy}{dx^2}$, quod non modo ad punctum

Tab. IV. Fig. 6.

ctum y, sed axem ibi ad superficiem coni normalem yz est referendum.

23. Ratiocinium vt supra instituturi, sit vis elementum annuli in y secundum yx vrgens $= p\,dx$, eritque vt ibi: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{-2gq}{\delta bs}$; spectemus autem punctum y vt fixum. In Y autem vis respondens $P\,dX$ contrarie applicata concipiatur, quae ergo secundum RX trahens, resoluatur secundum directiones RT et RV, quarum illa pro axe yz, vtpote in eodem plano nullum momentum, haec vero momentum RV, $Ry =$ vis RV. r. At ex X ad Sx demittatur perpendicularis XT, cui RV est parallela et aequalis, et ob $Xx = x - X$, est $XT = q\,\text{fin.}\left(\frac{x}{q} - \frac{X}{q}\right)$, hincque vis RX $(P\,dX)$: vim $RV = RX\,(r) : q\,\text{fin.}\left(\frac{x}{q} - \frac{X}{q}\right)$, vnde fit

vis $RV = \frac{Pq\,dX}{r}\left(\text{fin.}\frac{x}{q}\,\text{cof.}\frac{X}{q} - \text{cof.}\frac{x}{q}\,\text{fin.}\frac{X}{q}\right)$ et summa omnium momentorum:

$$q\,\text{fin.}\frac{x}{q}\int P\,dX\,\text{cof.}\frac{X}{q} - q\,\text{cof.}\frac{x}{q}\int P\,dX\,\text{fin.}\frac{X}{q}$$

quod ad y vsque extensum praebet

$$q\,\text{fin.}\frac{x}{q}\int p\,dx\,\text{cof.}\frac{x}{q} - q\,\text{cof.}\frac{x}{q}\int p\,dx\,\text{fin.}\frac{x}{q} = Ebs^2.\frac{ddy}{dx^2}$$

hincque vt supra colligitur

$$p = Ebs^2\left(\frac{ddy}{qq\,dx^2}\right) + \frac{d^4y}{dx^4}\Big)$$

ac posito $\frac{2gE}{\delta} = ff$ erit pro motu annuli

$$0 = \frac{1}{ffss}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right).$$

Tab. IV. Fig 5. 24. Haec est eadem plane aequatio, quae prodiisset, si campanam per sectiones horizontales in annulos secuissemus. Verum s veram crassitiem campanae in in quouis loco S denotat, vbi imprimis notandum est, normalem $SR = r$ ex calculo excessisse. Caeterum videntur campanae pulsae hanc potius legem vibrationum sequi, quam eam, quae sectionibus horizontalibus conuenit. Quare, vt omnes annuli ad pares sonos edendos disponantur, necesse est, in singulis locis S crassitiem $Ss = s$ quadrato radii $QS = q$ esse proportionalem. Hinc campanae inferne, vbi amplitudo est maxima, maximam crassitiem tribui conueniet, minimam superne circa Aa, vbi clauditur. Hac lege neglecta, vibrationes singulorum a reliquis turbabuntur, indeque sonus, vel minus fortis, vel raucus, edetur. Interim tamen nondum satis constat, num haec lex ad constructionem campanarum absolute sit necessaria, quandoquidem longe alia ratione tremorem concipere potest, atque hic supposuimus. Desideratur scilicet adhuc methodus, motum tremulum corporum formae cuiuscunque definiendi; methodi enim adhuc vsitatae tantum ad certa corporum genera sunt restricta, cuiusmodi sunt cordae, vel laminae tenuissimae, quare his, quae in ista dissertatione exposui, plus tribui non oportet, quam per hypotheses expresse stabilitas licet.
