1765

Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes

Leonhard Euler

REMARQVES GÉNÉRALES

SUR LE

MOUVEMENT DIURNE DES PLANETES

PAR M. EULER.

Table III. Après la découverte de la véritable précession des équinoxes, & de la nutation de l'axe de la terre, on répresente en sorte le mouvement diurne de la terre, que pendant qu'elle tourne uniformement autour de son axe, cet axe même ait un certain mouvement, par lequel il réponde successivement à differens points du Ciel: & l'on á dressé des tables à l'aide desquelles on calcule pour chaque tems proposé, tant la longitude des poles de la terre que leur distance aux poles de l'écliptique.

Cette maniere d'envisager le mouvement diurne de la terre paroit d'abord la plus naturelle & la plus convenable pour la pratique: & on aura de la peine à s'imaginer qu'elle soit assujettie à de fort grandes difficultés, non pas à l'égard des petites irrégularités de ce mouvement, lesquelles peut-être ne sont pas encore toutes connues, mais à l'egard de la maniere même de concevoir ce mouvement.

Car d'abord je demande, qu'est-ce que l'axe de la terre? On me répondra bien, que c'est une certaine ligne droite qui passe par le centre, ou plutôt le centre de gravité de la terre, autour de laquelle la terre acheve ses révolutions. Quelque claire que paroisse cette définition, j'y trouve de fort grandes difficultés: car comment est-ce que nous connoissons cette ligne qu'on nomme l'axe de la terre? On recourra au Ciel, où, l'on dira, qu'on découvre toujours deux points diamétralement opposés, qui semblent du moins pour quelque tems être en repos, & autour

tour desquels le Ciel avec les étoiles nous paroit achever ses révolutions. On nomme ces points les poles de la terre, & la droite tirée de l'un à l'autre, entant qu'elle passe par le centre de la terre, son axe. Je ne m'arrêterai pas ici à l'objection qu'on pourroit tirer de la distance des étoiles, que l'on peut bien regarder comme infinie, même par rapport au diametre de l'orbite de la terre. Je conviens plutôt, que quel que soit le mouvement de la terre, il y a toujours au Ciel deux points en repos, qui semblent immobiles pour un instant au moins. Or, puisque ces points sont variables, on suppose gratuitement, que la ligne droite tirée de l'un à l'autre passe toujours par les mêmes points de la terre: & si cela n'arrivoit pas, les poles terrestres ne seroient pas des points fixes sur la surface de la terre, comme on le soutient. Mais il y a plus; ces points fixes du Ciel ne repondent pas à l'axe prétendu de la terre. Car, puisque cet axe est supposé mobile, les points au Ciel, vers lesquels il est dirigé, le seront aussi; & partant on ne sauroit dire qu'ils sont ces points fixes du Ciel, autour desquels le Ciel tourne au moins pendant un instant. Il est vrai que le mouvement de l'axe de la terre est si lent, qu'on peut le regarder pendant longtems comme immobile: & c'est aussi la raison, pourquoi l'incongruité dont je parle ici, n'est d'aucune conséquence. Mais, pour mettre cette matiere dans tout son jour, concevons une autre Planete, qui tourne comme la terre autour d'un certain axe; mais que cet axe lui même ait un mouvement beaucoup plus rapide, de sorte que les points du Ciel vers lesquels cet axe est dirigé, changent tous les instans assès sensiblement de place: & il est évident qu'on ne sauroit soutenir, que le Ciel tourne autour de ces points pendant un seul instant.

Voudra-t-on insister sur le mot d'instant, & dire que, quelque rapide que soit le mouvement desdits points dans le Ciel, on les peut pourtant regarder comme fixes pendant un instant, & y rapporter le mouvement angulaire du Ciel, attendu que pendant un instant ces points ne changent pas de place. Mais on pourroit dire la même chose de tous les autres points du Ciel avec autant de fondement; & on réduiroit par ce moyen le Ciel tout entier au repos, quelque rapide que fût son mouvement. D'ailleurs la raison alléguée, qu'on puisse regarder un point en repos pendant un instant, quoiqu' il soit en mouvement, est tout à fait fausse: car il ne s'agit pas ici du changement de place, qui évanouit toujours dans un instant, quelque rapide que soit le mouvement, mais du véritable repos, du moins pendant un instant; puisqu'on sait que la vitesse ne dépend pas du tems. Donc, quand on dit que les points autour desquels le Ciel tourne, sont fixes pendant un instant; on ne veut pas dire qu'ils ne changent pas de place, mais que leur vitesse est effectivement nulle. Or un tel repos ne convient pas absolument aux points du Ciel, vers lesquels est dirigé l'axe mobile de quelque planete: & partant, si nous jugeons du mouvement diurne d'une planete par le mouvement apparent du Ciel, qui se fait toujours autour d'un axe fixe pendant un instant, il est certain que cet axe du Ciel ne convient pas avec l'axe mobile de la planete, autour duquel on conçoit qu'elle tourne, & que cette maniere de représenter le mouvement diurne des Planetes n'est pas d'accord avec les Observations du Ciel, d'où l'on détermine la position & le mouvement de leurs axes.

Or l'idée même d'un corps qui tourne autour d'un axe, pendant que cet axe se meut d'un mouvement quelconque, est assujettie à de grandes difficultés, qu'on rencontre même en ne considérant les

Fig. 1. choses qu'*in abstracto*. Car, soit QRST un corps sphérique qui tourne autour d'un axe, qui passe par son centre & le point P, pendant que ce point P, qu'on nommera son pole, est emporté par un mouvement quelconque, le centre demeurant toujours en repos. Que ce pole soit maintenant en P, autour duquel concevons un cercle ABCD, ou plutôt quatre points A, B, C, D; & en quelque endroit O que le pole P soit transporté, il s'agit de déterminer les lieux où ces quatre points se trouveront alors, tant à cause du mouvement de rotation autour de ce pole, qu'à cause du mouvement propre du pole. Car il est clair, que la connoissance de ce mouvement composé exige la position de ces quatre points pour tous les endroits O, où le pole P parvient successivement.

Or, quelque aiſée que paroiſſe cette queſtion, en ſuppoſant connu, tant le mouvement du pole P, que la viteſſe angulaire du corps autour de ce pole pour chaque tems propoſé; pour peu qu'on y réfléchiſſe, on y rencontrera des obſtacles inſurmontables. Nous n'avons qu'à en conſidérer le cas le plus ſimple, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé nul: & il n'y a point de doute que, quand le pole P ſeroit transporté en Q, après avoir parcouru le quart de cercle PQ, les quatre points A, B, C, D ne ſe trouvent aux points a, b, c, d, marqués dans la figure. Mais, par la même raiſon, ſi le pole P étoit transporté en R par l'arc de cercle PR, les points A, B, C, D, devroient ſe trouver en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: & ſi le pole paſſoit de R en Q, les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, parviendroient en b, c, d, a, dont la poſition eſt tout à fait différente de celle que ces points auroient, ſi le pole P étoit transporté en Q par l'arc PQ; quoique dans l'un & l'autre cas le mouvement de rotation ſoit ſuppoſé nul. D'ailleurs la queſtion ne fournit aucune raiſon, pourquoi la poſition des points A, B, C. D, devroit être différente, ſelon que le pole ſeroit parvenu par différens chemins de P en Q. Il ne ſera donc pas poſſible d'aſſigner la poſition de ces quatre points, quand le pole P ſera parvenu à un lieu quelconque O: & à plus forte raiſon, la queſtion enveloppera des incongruités, quand on ſuppoſe au corps un mouvement de rotation.

On peut même regarder cette queſtion comme indéterminée; & il y faudroit ajouter encore une condition, qui détermineroit le mouvement du corps au cas même, où le mouvement de rotation eſt ſuppoſé évanouïſſant. La moins choquante ſeroit à mon avis de dire que, dans ce cas, les points A, B, C, D, conſervaſſent conſtamment la même ſituation à l'égard de la direction, ſuivant laquelle le pole ſe meut à chaque inſtant. Cette condition conviendroit encore le mieux avec les idées que nous nous formons ſur l'abſence d'un mouvement de rotation, & expliqueroit la diverſe poſition desdits points, le pole étant parvenu en Q, ou par l'arc PQ, ou par le chemin PRQ. Mais il faut avouer que cette condition eſt tout à fait étrangere aux principes de la Mécanique. Cependant, en l'admettant, on eſt en état de déterminer le vrai mouvement du corps, dès que celui du pole & celui de rotation seroient donnés pour chaque instant.

Mais, quoiqu'on voulût se servir de cette maniere pour représenter le mouvement d'une Planete sur son centre, il n'y auroit rien qui nous obligeroit de regarder un point de la Planete comme son pole, plutôt que tout autre. Ainsi, lorsqu'il s'agit de la terre, on pourroit prendre un point quelconque de sa surface pour son pole, & le vrai mouvement de ce point seroit le mouvement du pole. Ensuite, on pourroit concevoir pour chaque lieu de ce pole un certain mouvement de rotation, lequel joint au mouvement du pole produiroit le vrai mouvement de la terre. Il est vrai que cette représentation deviendroit pour la plûpart fort compliquée, quelque simple qu'on supposât le mouvement en lui-même; mais il faut avouer que cette idée ne contient rien, qui nous indique les points préférables à tous les autres, où l'on devroit placer les poles. On dira bien qu'il est raisonnable de choisir ceux qui sont assujettis au plus petit mouvement; mais cette regle n'est pas essentielle au sujet, & quoiqu'il y ait de tels points sur la terre, on a lieu de douter encore, si les autres planetes sont douées de tels points. Peut-être que, quand même il y auroit de tels points pour un certain tems, ces mêmes points acquerroient dans la suite un mouvement plus rapide que d'autres.

Or ces inconvéniens n'ont pas lieu dans l'autre maniere de représenter le mouvement diurne des planetes, en déterminant pour chaque tems les points du Ciel autour desquels la Planete tourne, du moins pendant un instant, comme autour de points fixes; & en assignant pour chaque instant la vitesse de cette rotation. Pour mieux comprendre cette maniere, & pour en voir la diversité d'avec la précédente, concevons encore un corps sphérique, (car la figure ne change rien dans notre recherche,) qui soit entouré d'une surface sphérique immobile pour pouvoir y rapporter le mouvement du corps. Qu'il tourne au commencement autour du point A; & après un
Fig. 2. tems $= t$ autour du point P de la surface immobile, de sorte qu'on puisse pour chaque moment assigner le point de la surface immobile,

autour

autour duquel le corps tourne alors avec la vitesse de rotation. Ce n'est donc pas le point du corps A, qui parvient après le tems t en P, mais P est plutôt un point imaginaire dans la surface immobile, qui représente le pole de rotation pour un instant. Or, quoiqu'un moment après la rotation se fasse autour du point p, il ne faut pas s'imaginer que le point P ait été transporté en p, l'un & l'autre demeurant fixe: ce qui distingue essentiellement cette maniere de la précédente.

Pour déterminer plus aisément ce mouvement, concevons dans la surface immobile un point fixe Z, auquel on tire les arcs de grands cercles AZ, PZ & pZ. Et puisqu'au commencement A est le pole de rotation, soit $AZ = a$. Ensuite, après le tems $= t$, le pole de rotation étant en P, soit l'angle $AZP = q$, & l'arc $ZP = p$, posant le rayon de la sphere $= 1$, de sorte que p & q soient des fonctions du tems t; d'où pour le tems $t + dt$ on aura l'angle $PZp = dq$, & l'arc $Zp = p + dp$. Pour la vitesse angulaire, supposons qu'au commencement le pole étant en A, le corps tourne dans le tems infiniment petit dt par l'angle $= n\,dt$; & après le tems t, le pole étant en P, par l'angle $= v\,dt$. Cela posé, voyons quel sera le mouvement d'un point quelconque du corps, qui au commencement aura été en M.

Posons donc l'arc $AM = f$, & l'angle $ZAM = g$; or, après le tems t, ce point soit parvenu en V, & nommons l'arc $PV = x$, & l'angle $ZPV = y$, qui sont les deux quantités qu'il faut déterminer pour connoitre le vrai mouvement du point M. Donc, puisque le corps tourne autour du pole fixe P, pendant le tems dt, le point V sera transporté en v, de sorte que l'arc $Pv = PV = x$, & l'angle $VPv = v\,dt$, par conséquent l'angle $ZPv = y - v\,dt$. Or v sera le lieu de notre point après le tems $t + dt$ depuis le commencement, le pole étant maintenant en p; & partant nous aurons $pv = x + dx$, & l'angle $Zpv = y + dy$.

Tirons de P sur Zp, & de p sur Pv, les perpendiculaires Pq & pr; & à cause de l'angle $PZp = dq$ & $ZP = p$, nous aurons

pq

$pq = dp$ & $Pq = dq \sin p$. Donc, $Pp = \sqrt{(dp^2 + dq^2 \sin p^2)} = ds$ pour abréger: & de là $\sin pPq = \frac{dp}{ds}$, & $\cos pPq = \frac{dq \sin p}{ds}$. Or l'angle ZPq étant droit, nous aurons $\sin ZPp = \frac{dq \sin p}{ds}$ & $\cos ZPp = \frac{-dp}{ds}$. Maintenant, l'angle ZPv étant $= y - v\,dt$, ou en négligeant la particule infiniment petite $v\,dt$, seulement $= y$, on en tire $\sin pPr = \sin(y - ZPp) = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{ds}$, & $\cos pPr = \cos(y - ZPp) = \frac{-dp \cos y + dq \sin p \sin y}{ds}$,

Donc $pr = -dp \sin y - dq \sin p \cos y$ & $Pr = -dp \cos y + dq \sin p \sin y$, d'où nous concluons $pv = Pv - Pr$ ou $x + dx = x + dp \cos y - dq \sin p \sin y$, de sorte que nous ayons

$$dx = dp \cos y - dq \sin p \sin y.$$

De là nous connoitrons aussi l'angle Pvp, puisque $pr = Pvp \sin pv$, ce qui donne $Pvp = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x}$.

Mais ces déterminations ne sont pas suffisantes pour définir l'angle $Zpv = y + dy$, & en tirer la valeur différentielle dy; car, puisqu'il s'agit d'une différence infiniment petite, il ne sera plus permis de négliger dans les angles Ppq & Ppr ces particules infiniment petites: mais, si nous en voulions tenir compte, nous tomberions dans des formules très embarrassantes. Or le plus sur moyen nous est fourni par ce beau théoreme sur l'aire des triangles sphériques, qui est toujours égale à l'excès des trois angles sur deux droits, posant le rayon de la sphere $= 1$. Donc l'aire du quadrilatere $ZPvp$ est égale à l'excès de ses quatre angles sur 4 droits, dont la mesure est $= 2\pi$, prenant $\frac{1}{2}\pi$ pour

pour la mesure d'un angle droit. Or les quatre angles de cette figure sont 1°. $PZp = dq$; 2°. $ZPv = y - v\,dt$; 3°. $Pvpz$ $= \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x}$ & 4°. $Zpv = 2\pi - y - dy$; & partant l'excès de leur somme sur 4 droits ou, 2π, est

$$dq - v\,dt - \frac{dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x} - dy,$$

qui exprime l'aire de la figure. Mais on sait que l'aire du triangle PZp est $= dq(1 - \cos p)$, & du triangle $Pvp = \frac{-(dp \sin y + dq \sin p \cos y)}{\sin x}$ $(1 - \cos x)$; dont la somme étant égalée à l'expression trouvée produit cette équation:

$$-v\,dt - dy = -dq \cos p + \frac{dp \sin y + dq \sin p \cos y}{\tan x}$$

d'où nous tirons

$$dy = -v\,dt + dq \cos p - \frac{dp \sin y + dq \sin p \cos y}{\tan x}.$$

Cette équation jointe à la premiere, qui est

$$dx = dp \cos y - dq \sin p \sin y;$$

contient la solution du probleme; où p, q & v, sont regardés comme des fonctions du tems t.

Voilà donc deux équations différentielles, d'où il faut déterminer les deux inconnues x & y. La chose reviendroit au même, si au lieu de ces deux inconnues on vouloit chercher l'angle AZV avec l'arc ZV; & alors on arrivera au but par la synthese suivante, qui est fort simple. Fig. 3.

Puisque $ZP = p$, $AZP = q$, & $VPv = v\,dt$, posons l'angle $AZV = u$, & l'arc $ZV = z$, pour avoir l'angle $PZV = u - q$.

 Tirons

Tirons ſur ZV les perpendiculaires PR & vs, de même que l'arc Vv, qui ſera perpendiculaire ſur les arcs égaux PV & Pv, & nous aurons $Vv = v\,dt \sin PV$, & $\sin PR = \sin ZP . \sin PZV = \sin PV . \sin PVZ$, de ſorte que $\sin PV . \sin PVZ = \sin p \sin (u - q)$. Or la Trigonométrie ſphérique donne

$$\operatorname{tang} PVZ = \frac{\sin p \sin (u - q)}{\cos p \sin z - \sin p \cos (u - q)}$$

Mais, puisque $Vs = - dz$, & $Vs = Vv \cos sVv = Vv \sin PVZ$, nous aurons d'abord

$$- dz = v\,dt \sin PV \sin PVZ = v\,dt \sin p \sin (u - q)$$

Enſuite, à cauſe de $VZv = du$, on aura $vs = du \sin z$. Or $vs = Vs \cot PVZ$, ou $- dz = du \sin z \operatorname{tang} PVZ$ d'où nous tirons cette ſeconde équation:

$$- dz = \frac{du \sin p \sin z \sin (u - q)}{\cos p \sin z - \sin p \cos z \cos (u - q)} = v\,dt \sin p \sin (u - q)$$

de ſorte que nous ayons ces deux équations

I. $o = dz + v\,dt \sin p \sin (u - q)$

II. $du \sin z = v\,dt (\cos p \sin z - \sin p \cos z \cos (u - q))$

Or ayant trouvé z & u, on en tire

$\cos PV = \cos x = \cos p \cos z + \sin p \sin z \cos (u - q)$ &

$$\operatorname{tang} ZPV = \operatorname{tang} y = \frac{\sin z \sin (u - q)}{\sin p \cos z - \cos p \sin z \cos (u - q)}$$

Puisque le rapport de ces dernieres coordonnées u & z aux précedentes x & y eſt connu, ces dernieres formules ſe réduiſent aux premieres. Cependant il ne paroit pas, comment on puiſſe réſoudre en général ces équations, & pour des cas particuliers on ſe ſervira plus commodément, tantôt des unes, & tantôt des autres. Comme s'il n'y avoit aucun mouvement de rotation, ou qu'il fut $v = o$, les dernie-

dernieres formules montrent d'abord $dz = 0$, & $du = 0$; d'où l'on voit que dans ce cas tous les points du corps ne changent pas de place.

Considérons le cas où le pole P demeure en repos, quel que soit le mouvement de rotation $v\,dt$; ce qui arrive lorsque p & q sont des quantités constantes: alors les premieres donnent d'abord $dx = 0$, & partant $x =$ const. Soit donc $x = f$, & l'autre $dy = -v\,dt$, & partant $y = g - \int v\,dt$. Or les dernieres formules méneroient pour ce cas à un calcul fort ennuyeux.

Supposons, comme il arrive à peu prés sur la terre, que le pole P se meut uniformement dans un petit cercle AP autour du point fixe Z, qui représente le pole de l'écliptique, & que le mouvement de rotation demeure toujours le même. On aura donc $p = a$; $dq = m\,dt$ & $v = n$; d'où les premieres formules donnent:

$$dx = -m\,dt \sin a \sin y \;\&\; dy = -n\,dt + m\,dt \cos a - \frac{m\,dt \sin a \cos y}{\operatorname{tang} x}$$

& partant l'une divisée par l'autre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - m \cos a}{m \sin a \sin y} + \frac{1}{\operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}.$$

Multiplions par $dx \sin x \sin y$ pour avoir

$$dy \sin x \sin y - dx \cos x \cos y = \frac{n - m \cos a}{m \sin a}\, dx \sin x$$

dont l'intégrale est,

$$-\sin x \cos y = C + \frac{m \cos a - n}{m \sin a} \cos x.$$

Donc $$\cos y = \frac{(n - m \cos a) \cos x}{m \sin a \sin x} - \frac{h}{\sin x}.$$

Posons pour abréger $\frac{n - m \cos a}{m \sin a} = k$, de sorte que $\cos y = \frac{k \cos x - h}{\sin x}$

 &

& $dy = -kmdt \sin a - \frac{mdt \sin a (k \cos x - h)}{\sin x \tan x}$, ou bien
$dy = \frac{-mdt \sin a (k - h \cos x)}{\sin x^2}$. Or la valeur de $\cos y$ donne
$dy \sin y = \frac{dx (k - h \cos x)}{\sin x^2}$; & cette valeur ſubſtituée mene à cette équation: $-mdt \sin a \sin y = dx$. Mais, à cauſe de
$\sin y = \frac{+\sqrt{(\sin x^2 - kk \cos x^2 + 2hk \cos x - hh)}}{\sin x}$,
nous aurons: $mdt \sin a = \frac{-dx \sin x}{\sqrt{(1 - hh + 2hk \cos x - (1+kk) \cos x^2)}}$.
dont l'intégrale ſe trouve

$$mt \sin a + C = \frac{1}{\sqrt{(1+kk)}} \text{A}\sin \frac{(1+kk)\cos x - hk}{\sqrt{(1 - hh + kk)}}.$$

& partant

$$\cos x = \frac{hk}{1+kk} + \frac{\sqrt{(1 - hh + kk}}{1+kk} \sin (C + mt \sin a \sqrt{(1+kk)})$$

Enſuite, ayant trouvé x pour le tems écoulé t, on aura

$$\cos y = \frac{k \cos x - h}{\sin x}, \text{ ayant poſé } k = \frac{n - m \cos a}{m \sin a}.$$

Pour déterminer les conſtantes h & C, ſupoſons qu'il y eût au commencement $x = \text{AM} = f$, & l'angle $y = \text{ZAM} = g$: donc
$\cos g = \frac{k \cos f - h}{\sin f}$; & partant $h = k \cos f - \sin f \cos g$;
d'où l'on obtient

$$\sqrt{(1 - hh + kk)} = \sqrt{(\sin g^2 + (k \sin f + \cos f \cos g)^2)}$$

Enſui-

Ensuite pour la constante C on aura:

$$\frac{(1+kk)\cos f - kk\cos f + k\sin f\cos g}{\sqrt{(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)}} = \sin C = \frac{\cos f + k\sin f\cos g}{\sqrt{(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)}}$$

Donc $\cos C = \frac{\sin f\sin g\sqrt{(1+kk)}}{\sqrt{(\sin g^2 + (k\sin f + \cos f\cos g)^2)}}$, &

$$\tang C = \frac{\cos f + k\sin f\cos g}{\sin f\sin g\sqrt{(1+kk)}}$$

Par conséquent nous aurons:

$$\cos x = \frac{kk\cos f - \sin f\cos g + (\cos f + k\sin f\cos g)\cos\odot + \sin f\sin g\sin\odot.\sqrt{(1+kk)}}{1+kk}$$

posant $mt \sin a. \sqrt{(1+kk)} = \odot$, & ensuite

$$\cos y = \frac{k\cos x - k\cos f + \sin f\cos g}{\sin x}$$

A' l'aide de ces deux formules on pourra déterminer le mouvement de chaque point du corps, qui sera d'autant plus variable, plus les cöefficiens de $\sin\odot$ & $\cos\odot$ seront grands, qui dépendent du lieu du point M, dont on cherche le mouvement. Or on pourroit prendre un tel point, que ces cöefficiens évanouïssent tous les deux; & alors, tant x que y, seront des quantités constantes; & ce point conservera toujours la même situation par rapport au pole, autour duquel la planete tourne à chaque instant. Le mouvement de ce point sera donc aussi lent que le changement du pole, & paroitra délivré de toute rotation. Ce sera donc le point, qu'on pourra regarder dans la premiere maniere comme le pole de la planete, ou la droite qui en est tirée par le centre, comme l'axe de la planete, quoique ce point soit toujours différent du point du Ciel autour duquel se fait la rotation à chaque instant.

Pour trouver donc ce point, ou l'axe de la Planete, on n'a qu'à prendre f & g en sorte que tang $\sin f \sin g$ que $\cos f + k \sin f \cos g$

éva-

évanouisse. Posons donc g, ou l'angle ZAM $= 180°$, pour avoir $\sin g, = 0$, & $\cos g = -1$; & nous trouverons $\tang f = \frac{1}{k} = \frac{m \sin a}{n - m \cos a}$: d'où nous connoissons l'arc AM $= f$; & alors ce point M conservera toujours la même distance au pole P, & se trouvera dans l'arc ZP prolongé, lorsque f a une valeur positive.

Pour la terre cette distance f évanouït presque tout à fait. Car, puisque dans l'intervalle d'un jour la terre fait une révolution entiere, & le pole n'avance dans un sens contraire que par un angle $= \frac{51}{365}$ secondes, nous aurons $n : m = 360° : \frac{-51''}{365}$, ou $\frac{n}{m} = \frac{-60.\ 60.\ 360.\ 365}{51}$ ou $\frac{n}{m} = -9281647$. Donc, puisque $a = 23°,\ 29'$, nous aurons $\tang f = \frac{-0,3984}{9281647}$, & $f = -\frac{1}{112}$ seconde. Puisque cette différence est imperceptible, on peut sans aucune erreur regarder ce point comme le vrai pole de la terre.

Comme l'existence d'un tel axe qui accompagne toujours également le vrai pole, a lieu dans l'hypothese, que le pole avance uniformement dans un petit cercle, & que la planete conserve toujours la même vitesse de rotation, il sera important d'examiner, en quelles autres hypotheses un tel axe puisse aussi exister. Pour cet effet nous n'avons qu'à supposer constamment $x = f$, & $y = g$, afin que le point M nous montre cet axe. Alors nos premieres équations nous fournissent

$$dp \cos g - dq \sin p \sin g = 0 \ \&\ v\,dt = dq \cos p - \frac{dp \sin g - dq \sin p \cos g}{\tang f}$$

d'où

d'où nous tirons $dq = \frac{dp \operatorname{cos} g}{\operatorname{sin} g \operatorname{sin} p}$, & de là

$$v\,dt = \frac{dp \operatorname{cos} g \operatorname{cos} p}{\operatorname{sin} g \operatorname{sin} p} - \frac{dp}{\operatorname{tang} f \operatorname{sin} g}.$$

Ou bien il faut 1°. que $\frac{dq \operatorname{sin} p}{dp}$ ſoit une quantité conſtante, & 2°, que $\frac{dq \operatorname{cos} p}{dp} - \frac{v\,dt}{dp}$ ſoit auſſi une quantité conſtante, ſavoir la premiere égale à $\frac{\operatorname{cos} g}{\operatorname{sin} g}$, & la ſeconde à $\frac{1}{\operatorname{tang} f \operatorname{sin} g}$. Quand un tel rapport entre le mouvement du pole & celui de rotation n'a pas lieu, il eſt douteux ſi le mouvement de la planete peut être réduit à un certain axe, comme dans ce cas. Car, s'il arrivoit, par exemple, que pendant que le pole marche uniformement dans un petit cercle, le mouvement de rotation devint ſubitement plus rapide, il eſt clair qu'après cette accélération l'axe de rotation ſeroit différent de celui qui auroit eu lieu auparavant, & que la planete n'auroit pas un axe fixe, dans le ſens auquel on eſt accoutumé de ſe l'imaginer.

Par ce que je viens d'expoſer, on comprend que c'eſt un probleme extrémement difficile, que de déterminer le mouvement de rotation d'une planete, quoiqu'on connoiſſe pour chaque tems le point du Ciel, autour duquel elle tourne avec la viteſſe de rotation. La ſolution dépend de l'intégration de deux équations différentielles, qui paroit extrémement difficile. Conſidérons plus ſoigneuſement les deux premieres, & poſant pour abréger,

$$-v + \frac{dq \operatorname{cos} p}{dt} = \mathrm{L};\ \frac{dp}{dt} = \mathrm{M}\ \&\ \frac{dq \operatorname{sin} p}{dt} = \mathrm{N}$$

de ſorte que L, M, & N, ſoient des fonctions du tems t, & nos deux équations pour déterminer les inconnues $\mathrm{PV} = x$ & $\mathrm{ZPV} = y$ ſeront.

dx

$$dx = M dt \cos y - N dt \sin y;\; dy = L dt - \frac{M dt \sin y - N dt \cos y}{\tang x}$$

ou $dy \sin x = L dt \sin x - M dt \cos x \sin y - N dt \cos x \cos y$ d'où nous tirons les deux combinaisons suivantes,

$$dx \cos x \sin y + dy \sin x \cos y = L dt \sin x \cos y - N dt \cos x = d.\sin x \sin y$$

$$dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y = M dt \cos x - L dt \sin x \sin y = d.\sin x \cos y.$$

Pour dégager ces formules des sinus & cosinus, posons $\sin x \sin y = r$ & $\sin x \cos y = s$, d'où nous tirons $\sin x^2 = rr + ss$ & $\cos x = \surd(1 - rr - ss)$, & nous obtiendrons les deux équations suivantes

$$dr = L s dt - N dt \surd(1 - rr - ss)$$

$$ds = -L r dt + M dt \surd(1 - rr - ss)$$

Voilà donc deux équations différentielles ordinaires, dont il faut chercher la résolution; ce qui est un objet de la pure analyse. Puisque la résolution générale est assujettie à de fort grandes difficultés, il sera important de remarquer un cas assés général, où l'on peut achever l'intégration. Car, en combinant ces dernieres équations, on aura

$$M dr + N ds + LN r dt - LM s dt = 0.$$

Soit pour abréger $L dt = d\theta$; & le cas que j'ai en vüe aura lieu, lorsque $M = N \tang \theta$, ou $\int L dt = A \tang. \frac{M}{N}$. Posons donc $M = T \sin \theta$, & $N = T \cos \theta$, de sorte que $T = \surd(MM + NN)$, & la derniere équation prendra cette forme:

$$dr \sin \theta + ds \cos \theta + r d\theta \cos \theta - s d\theta \sin \theta = 0$$

dont l'intégrale est évidemment

$$r \sin \theta + s \cos \theta = \text{Const.} = \sin \gamma.$$

Donc $s = \frac{\sin \gamma - r \sin \theta}{\cos \theta}$; laquelle valeur étant substituée dans la premiere donne

dr cos

$$dr\cos\theta + rd\theta\sin\theta - d\theta\sin\gamma + Tdt\cos\theta\sqrt{(\cos\theta^2 - \sin\gamma^2 + 2r\sin\gamma\sin\theta - rr)} = 0.$$

Posons $r = u\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta$ pour avoir

$$du\cos\theta^2 + Tdt\cos\theta\sqrt{(\cos\theta^2 - \sin\gamma^2 + \sin\gamma^2\sin\theta^2 - uu\cos\theta^2)} = 0$$

& en divisant par $\cos\theta^2$

$$du + Tdt\sqrt{(\cos\gamma^2 - uu)} = 0 \text{ ou } \frac{du}{\sqrt{(\cos\gamma^2 - uu)}} + Tdt = 0.$$

Donc $A\sin\frac{u}{\cos\gamma} + \int Tdt = 0$.

Soit $\int Tdt = \odot$, & ayant $u = -\cos\gamma\sin\odot$, on aura $r = \sin\gamma\sin\theta - \cos\gamma\cos\theta\sin\odot$, & $s = \sin\gamma\cos\theta + \cos\gamma\sin\theta\sin\odot$. Donc $\sin x = \sqrt{(\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2\sin\odot^2)}$ & $\cos x = \cos\gamma\cos\odot$. Enfin $\tang y = \frac{\tang\gamma\tang\theta - \sin\odot}{\tang\gamma + \tang\theta\sin\odot}$: d'où l'on tire evidemment

$$y = \theta - A\tang\frac{\tang\gamma}{\sin\odot}.$$

Donc, prenant $\odot = C + \int dt\sqrt{(MM + NN)}$, toutes les fois que $\int Ldt = A\tang\frac{M}{N}$, les deux inconnues x & y se déterminent en sorte:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\odot \;\&\; y = A\tang\frac{M}{N} - A\tang\frac{\sin\odot}{\tang\gamma}.$$

Ce cas intégrable nous mene encore à quelques autres. Car posons $\sqrt{(1 - rr - ss)} = u$, pour avoir ces deux équations

I. $dr - Lsdt + Nudt = 0$
II. $ds - Mudt + Lrdt = 0$

& puisque $-rdr - sds = udu$, nous en tirons cette troisieme semblable aux précédentes:

III. $du - Nrdt + Msdt = 0$.

Donc,

Premier cas intégrable. Donc, puisque les deux premieres ont été intégrées dans le cas $\int L\,dt = A \tang \frac{M}{N}$, en sorte que posant

$$\int L\,dt = \theta \;\&\; \int dt \sqrt{(MM + NN)} = \Theta$$

nous en avons obtenu

$$\left.\begin{array}{l} r = \sin\gamma \sin\theta - \cos\gamma \cos\theta \sin\Theta \\ s = \sin\gamma \cos\theta + \cos\gamma \sin\theta \sin\Theta \end{array}\right. \quad \& \; u = \cos\gamma \cos\Theta$$

Second cas intégrable. La seconde avec la troisieme admettra aussi l'intégration dans le cas $\int M\,dt = A \tang \frac{N}{L}$, car posant

$$\int M\,dt = \eta \quad \& \int dt \sqrt{(NN + LL)} = H$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} s = \sin\epsilon \sin\eta - \cos\epsilon \cos\eta \sin H \\ u = \sin\epsilon \cos\eta + \cos\epsilon \sin\eta \sin H \end{array}\right. \quad \& \; r = \cos\epsilon \cos H$$

Troisieme cas intégrable. De la même maniere la troisieme avec la premiere fournira une solution lorsque $\int N\,dt = A \tang \frac{L}{M}$. Alors posant

$$\int N\,dt = \zeta \quad \& \int dt \sqrt{(LL + MM)} = \Sigma$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} u = \sin\alpha \sin\zeta - \cos\alpha \cos\zeta \sin\Sigma \\ r = \sin\alpha \cos\zeta + \cos\alpha \sin\zeta \sin\Sigma \end{array}\right. \quad \& \; s = \cos\alpha \cos\Sigma$$

où il faut remarquer que $\cos x = u$ & $\tang y = \frac{r}{s}$; & outre cela:

$$L = -v + \frac{dq \cos p}{dt}; \quad M = \frac{dp}{dt} \quad \& \; N = \frac{dq \sin p}{dt}.$$

Le cas du milieu renferme celui où le pole se mouvoit dans un petit cercle uniformément, pendant que la rotation étoit aussi uniforme; mais

mais il eſt infiniment plus général, d'où il mérite une attention particuliere. Or d'abord nous avons $\int M dt = c + p$, d'où la condition de ce cas $\frac{N}{L} = \operatorname{tang} \int M dt$ donne

$$\frac{dq \sin p}{dq \cos p - v dt} = \operatorname{tang}(c + p), \quad \text{\& partant}$$

$$v dt = \frac{dq \cos p \operatorname{tang}(c + p) - dq \sin p}{\operatorname{tang}(c + p)} = \frac{dq \sin c}{\sin(c + p)}$$

d'où nous concluons $H = \int \frac{dq \sin p}{\sin(c+p)}$ à cauſe de $L = N \cot(c+p)$, & $\sqrt{(NN + LL)} = \frac{N}{\sin(p + c)}$. Par conſéquent notre ſolution ſera; poſant $\eta = p + c$,

$$\cos x = \sin \varepsilon \cos \eta + \cos \varepsilon \sin \eta \sin H.$$

$$\operatorname{tang} y = \frac{\cos \varepsilon \cos H}{\sin \varepsilon \sin \eta - \cos \varepsilon \cos \eta \sin H}$$

Nous avons rapporté jusqu'ici le mouvement du pole à un point fixe Z, qui dépend de notre volonté, ne changeant rien dans le mouvement même. Donc, ayant réuſſi à intégrer nos équations pour un certain point fixe Z, ſi l'on veut rapporter le mouvement à un autre point fixe quelconque, l'intégration doit également réuſſir, puiſqu'elle découle de la précédente.

Délivrons nos recherches de la conſidération du point arbitraire Z; & puiſque l'arc $PV = x$ n'en dépend point, poſons l'angle $VPp = z$, & nous aurons l'angle $ZPV = y = 90° + z + pPv$.

Or, poſant comme ci-deſſus $-v + \frac{dq \cos p}{dt} = L$; $\frac{dp}{dt} = M$;

& $\frac{dq \sin p}{dt} = \mathrm{N}$, on aura $\sin p\mathrm{P}v = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})}}$, &

$\cos p\mathrm{P}v = \frac{}{\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})}}$, & $\mathrm{tang}\, p\mathrm{P}v = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, & de là

$dy = dz + \frac{\mathrm{N}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{N}}{\mathrm{MM} + \mathrm{NN}}$; & $\sin y = \frac{-\mathrm{M}\sin z + \mathrm{N}\cos z}{\sqrt{(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)}}$,

& $\cos y = \frac{-\mathrm{N}\sin z - \mathrm{M}\cos z}{\sqrt{(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)}}$.

Cela posé, puisque nos équations sont

$dx = dt(\mathrm{M}\cos y - \mathrm{N}\sin y)$ & $dy = \mathrm{L}dt - \frac{dt}{\mathrm{tang}\, x}(\mathrm{M}\sin y + \mathrm{N}\cos y)$

par ces substitutions elles seront changées en

$$dx = -dt \cos z \sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})} \quad \&$$

$$dz \sin x = dt \cos x \sin z \sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})} + \mathrm{L}dt \sin x + \frac{(\mathrm{M}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{M})dt \sin x}{\mathrm{MM} + \mathrm{NN}}$$

Posons pour abréger:

$$\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})} = \mathrm{I} \quad \& \quad \mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{M}}{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})dt} = \mathrm{K},$$

pour avoir

$dx + \mathrm{I}dt\cos z = 0$ & $dz \sin x - \mathrm{I}dt \cos x \sin z - \mathrm{K}dt \sin x = 0$

Posons comme auparavant

$$\sin x \sin z = r; \ \sin x \cos z = s \quad \& \quad \cos x = u,$$

& la combinaison fournira ces équations:

$$dr - \mathrm{K}s\,dt = 0 \quad \& \quad ds + \mathrm{K}r\,dt + \mathrm{I}u\,dt = 0$$

où, puisque $rr + ss + uu = 1$, cette troisieme y peut être ajoutée: $du - \mathrm{I}s\,dt = 0$; donc $\mathrm{I}dr - \mathrm{K}du = 0$.

Ici

Ici on peut remarquer auſſi trois cas intégrables:

1°. Si $I = o$, ce qui ne ſauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût $M = o$ & $N = o$. Alors on aura $u = c$; & $s = \sqrt{(1 - cc - rr)}$, donc $K dt = L dt = \frac{dr}{\sqrt{(1 - cc - rr)}}$, & partant $A \text{ſn} \frac{r}{\sqrt{(1 - cc)}} = \int L dt = \theta$, poſant $\int L dt = \theta$. Enſuite $r = \sqrt{(1 - cc)}. \text{ſn}\,\theta$; $s = \sqrt{(1 - cc)}. \text{coſ}\,\theta$; & $u = c$: ce qui eſt le cas du pole repoſant.

2°. Le ſecond cas ſeroit $K = o$, mais puiſque le troiſieme le renferme, j'y paſſe dabord.

3°. Soit $K = mI$, & l'équation $dr - m du = o$ donne: $r = mu + n$; & $s = \sqrt{(1 - uu - (mu + n)^2)}$; d'où la troiſieme donne: $\int I dt \sqrt{(1 + mm)} = A \text{ſn} \frac{u(1 + mm) + mn}{\sqrt{(1 + mm - nn)}}$: & de là $u = \frac{-mn}{1 + mm} + \frac{\sqrt{(1 + mm - nn)}}{1 + mm} \text{ſn} \int I dt \sqrt{(1 + mm)}$

$$r = \frac{n}{1 + mm} + \frac{m\sqrt{(1 + mm - nn)}}{1 + mm} \text{ſn} \int I dt \sqrt{(1 + mm)}$$

$$\& \; s = \frac{\sqrt{(1 + mm - nn)}}{\sqrt{(1 + mm)}} \; \text{coſ.} \int I dt \sqrt{(1 + mm)}.$$

Ce troiſième cas a donc lieu ſous cette condition:

$$L dt = \frac{N dM - M dN}{MM + NN} + m dt \sqrt{(MM + NN)},$$

ou $\int L dt = A \text{ tang} \frac{M}{N} + m \int dt \sqrt{(MM + NN)}$;

 d'où

d'où, si $m = 0$, résulte le premier des cas précédens ; mais si m est une quantité constante quelconque, ces cas intégrables seront différens des précédens.

On pourra trouver encore d'autres cas intégrables en posant $y = z + T$, prenant pour T une fonction quelconque du tems t ; alors, faisant cette substitution, on aura

$$dx = dt \cos z (M \cos T - N \sin T) - dt \sin z (M \sin T + N \cos T)$$

$$dz \sin x = (L dt - dT) \sin x - dt\, \mathrm{cs}x \sin z (M\, \mathrm{cs}T - N \sin T) - dt\, \mathrm{cs}p\, \mathrm{cs}z (M \sin T + N\, \mathrm{cs}T)$$

& de là posant $\sin x \sin z = r$; $\sin x \cos z = s$ & $\cos x = u$, de sorte que $rr + ss + uu = 1$, on tirera ces trois équations :

I. $dr - s(L dt - dT) + u dt (M \sin T + N \cos T) = 0$

II. $ds - u dt (M \cos T - N \sin T) + r (L dt - dT) = 0$

III. $du - r dt (M \sin T + N \cos T) + s dt (M \cos T - N \sin T) = 0$

qui étant semblables aux trois supérieures, en posant $L - \frac{dT}{dt}$; $M \sin T + N \cos T$ & $M \cos T - N \sin T$, au lieu de L, N & M, les trois cas intégrables seront :

1°. Si $\int L dt = A \tang \frac{M}{N}$ comme ci-dessus.

2°. Si $\int dt (M \cos T - N \sin T) = A \tang \frac{dt (M \sin T + N \cos T)}{L dt - dT}$

3°. Si $\int dt (M \sin T + N \cos T) = A \tang \frac{L dt - dT}{dt (M \cos T - N \sin T)}$

Or outre cela, si $\tang T = \frac{\beta M - \alpha N}{\alpha M + \beta N}$, on pourra trouver l'intégrale comme ci-dessus, si

$$\int L dt = A \tang \frac{M}{N} + \gamma \int dt \sqrt{(MM + NN)}$$

Tant

Tant de cas intégrables devroient bien enfin mener à l'intégration générale.

Or on peut encore trouver pluſieurs autres cas, comme on verra par le probleme ſuivant:

PROBLEME

Les lettres L, M & N marquant des fonctions quelconques de la variable t, & x, y, z étant des quantités inconnües, en ſorte que $xx + yy + zz = 1$, trouver les conditions des fonctions L, M & N, qui rendent intégrables ces trois équations:

$$\text{I.}\quad dx - Lydt + Nzdt = 0$$
$$\text{II.}\quad dy - Mzdt + Lxdt = 0$$
$$\text{III.}\quad dz - Nxdt + Mydt = 0$$

dont deux renferment déjà la troiſieme.

SOLUTION

Nous avons déjà vu trois cas où l'intégration a lieu, qui ſont

$1°$. ſi $\int Ldt = A \operatorname{tang} \frac{M}{N}$; $2°$. ſi $\int Mdt = A \operatorname{tang} \frac{N}{L}$; $3°$. ſi $\int Ndt = A \operatorname{tang} \frac{L}{M}$.

Donc, quand nous pourrons trouver des ſubſtitutions, qui changent les trois équations propoſées en d'autres d'une forme ſemblable, celles-ci nous fourniront de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Poſons $x = x' \cos P - y' \sin P$ & $y = x' \sin P + y' \cos P$, afin que $xx + yy = x'x' + y'y'$, & les deux premieres équations ſeront changées en celles-ci.

$$dx' \cos P - dy' \sin P - x'dP \sin P - y'dP \cos P + Nzdt = 0$$
$$- Lx'dt \sin P - Ly'dt \cos P$$

$$dx' \sin P + dy' \cos P + x'dP \cos P - y'dP \sin P - Mzdt = 0$$
$$+ Lx'dt \cos P - Ly'dt \sin P$$

dont

dont la combinaiſon fournit celles-ci:

$$dx' - y'(dP + L\,dt) + z\,dt\,(N\cos P - M\sin P) = 0$$
$$dy' - z\,dt\,(N\sin P + M\cos P) + x'(dP + L\,dt) = 0$$
$$dz - x'\,dt\,(N\cos P - M\sin P) + y'\,dt\,(N\sin P + M\cos P) = 0$$

dont les trois cas intégrables ſeront:

$$\int L\,dt + P = \text{A tang}\,\frac{N\sin P + M\cos P}{N\cos P - M\sin P} = \text{A tang}\,\frac{M}{N} + P$$

$$\int dt\,(N\sin P + M\cos P) = \text{A tang}\,\frac{N\cos P - M\sin P}{L\,dt + dP}\,dt$$

$$\int dt\,(N\cos P - M\sin P) = \text{A tang}\,\frac{L\,dt + dP}{(N\sin P + M\cos P)\,dt}$$

dont le premier eſt deja compris dans les précédens.

Si nous changeons ſemblablement les variables y & z, nous trouverons ces cas:

$$\int dt\,(L\sin Q + N\sin Q) = \text{A tang}\,\frac{L\cos Q - N\sin Q}{M\,dt + dQ}\,dt$$

$$\int dt\,(L\cos Q - N\sin Q) = \text{A tang}\,\frac{M\,dt + dQ}{(L\sin Q + N\cos Q)\,dt}$$

Outre cela un pareil changement dans les deux variables z & x fournira ces conditions:

$$\int dt\,(M\sin R + L\cos R) = \text{A tang}\,\frac{M\cos R - L\sin R}{N\,dt + dR}\,dt$$

$$\int dt\,(M\cos R - L\sin R) = \text{A tang}\,\frac{N\,dt + dR}{(M\sin R + L\cos R)\,dt}$$

Si nous regardons les trois équations dérivées comme les principales, de sorte qu'au lieu des lettres L, M & N, nous ayons à présent

$$L + \frac{dP}{dt};\quad M\cos P + N\sin P \quad \& \; N\cos P - M\sin P,$$

nous en tirerons encore les quatre conditions suivantes

$$\int dt\left(L\sin Q + \frac{dP}{dt}\sin Q + N\cos P\cos Q - M\sin P\cos Q\right) = A\,\text{tang}\,\frac{L\cos Q + \frac{dP}{dt}\cos Q - N\cos P\sin Q + M\sin P\sin Q}{M\cos P + N\sin P + \frac{dQ}{dt}}$$

$$\int dt\left(L\cos Q + \frac{dP}{dt}\cos Q - N\cos P\sin Q + M\sin P\sin Q\right) = A\,\text{tang}\,\frac{M\cos P + N\sin P + \frac{dQ}{dt}}{L\sin Q + \frac{dP}{dt}\sin Q + N\cos P\cos Q - M\sin P\cos Q}$$

$$\int dt\left(M\cos P\sin R + N\sin P\sin R + L\cos R + \frac{dP}{dt}\cos R\right) = A\,\text{tang}\,\frac{M\cos P\cos R + N\sin P\cos R - L\sin R - \frac{dP}{dt}\sin R}{N\cos P - M\sin P + \frac{dR}{dt}}$$

$$\int dt\left(M\cos P\cos R + N\sin P\cos R - L\sin R - \frac{dP}{dt}\sin R\right) = A\,\text{tang}\,\frac{N\cos P - M\sin P + \frac{dR}{dt}}{M\cos P\sin R + N\sin P\sin R + L\cos R + \frac{dP}{dt}\cos R}$$

De ces quatre conditions on peut encore former deux fois quatre nouvelles, en mettant pour les trois lettres L, M, N, les mêmes dans cet ordre M, N, L, ou dans celui-ci N, L, M. Ensuite, pour ces mêmes lettres dans ces dernieres formules, on peut écrire

$$L + \frac{dS}{dt};\quad M\cos S + N\sin S;\quad N\cos S - M\sin S,$$

ou

ou bien $M + \frac{dS}{dt}$; $N \operatorname{cof} S + L \operatorname{fin} S$; $L \operatorname{cof} S - N \operatorname{fin} S$;

ou encore $N + \frac{dS}{dt}$; $L \operatorname{cof} S + M \operatorname{fin} S$; $M \operatorname{cof} S - L \operatorname{fin} S$;

& cela encore en changeant l'ordre de ces quantités, de forte que le nombre de telles formules peut être multiplié à l'infini, en mettant toujours dans les formules dernierement trouvées pour les lettres L, M, N, ces nouvelles valeurs. Par ce moyen on parviendra à des ordres plus compliqués, qui contiendront un angle arbitraire de plus, comme font P, Q, R, S; lesquels pouvant être pris à volonté, la multitude des cas qui admettent l'intégration, eft tout à fait inconcevable; ce qui eft d'autant plus remarquable, que généralement, fans fuppofer une certaine rélation entre les quantités L, M & N, il ne paroit point de méthode qui puiffe conduire à l'intégration. C'eft un fujet qui femble tout à fait nouveau dans l'Analyfe, & qui pourra donner occafion à quantité de belles découvertes.