1765

Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable

Leonhard Euler

DU MOUVEMENT DE ROTATION DES CORPS SOLIDES AUTOUR D'UN AXE VARIABLE.

PAR M. EULER.

I.

Table II. Le ſujet que je me propoſe de traiter ici, eſt de la derniere importance dans la Mécanique; & j'ai déjà fait pluſieurs efforts pour le mettre dans tout ſon jour. Mais, quoique le calcul ait aſſès bien réuſſi, & que j'aye découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changemens dont le mouvement d'un corps autour d'un axe variable eſt ſusceptible, leur application étoit pourtant aſſujettie à des difficultés qui m'ont paru preſque tout à fait inſurmontables. Or, depuis que j'ai dévelopé les principes de la connoiſſance mécanique des corps, la belle propriété des trois axes principaux dont chaque corps eſt doué, m'a enfin mis en état de vaincre toutes ces difficultés, & d'établir les regles ſur leſquelles eſt fondé le mouvement de rotation autour d'un axe variable, en ſorte qu'on en peut faire aiſément l'application à tous les cas propoſés.

II. Or, d'abord il faut ſe rappeller, que quel que ſoit le mouvement d'un corps ſolide, on le peut toujours décompoſer en deux, dont l'un eſt le mouvement progreſſif, ou celui de ſon centre d'inertie, & l'autre eſt le mouvement de rotation qui reſteroit au corps, ſi on lui ôtoit le mouvement progreſſif, en ſuppoſant que l'eſpace fut transporté à chaque inſtant d'un mouvement égal & contraire. Il eſt démontré dans la Mécanique, que chacun de ces deux mouvemens ſuit

des

des regles particulieres, & qu'on peut déterminer chacun à part, sans avoir égard à l'autre. Ainsi, pour déterminer le mouvement progressif, on conçoit la masse entiere du corps comme réunie dans son centre d'inertie, & on cherche l'effet des forces qui y agissent, conformément aux premiers principes de la Mécanique, sans se mettre en peine si le corps a outre cela un mouvement de rotation, ou non? Et quand il s'agit du mouvement de rotation, il est permis de faire abstraction du mouvement progressif. C'est la grande propriété du centre d'inertie, qui nous procure cette commodité dans les recherches mécaniques.

III. Je m'arrêterai ici uniquement au mouvement de rotation, & partant je considérerai le centre d'inertie du corps comme fixe. Alors il est aisé de voir, que, quel que soit le mouvement du corps, il s'y trouvera à chaque instant une ligne droite, qui passe par le centre d'inertie, où le mouvement évanouït, & autour de laquelle le corps tourne à cet instant; c'est cette ligne qui est nommée l'axe de rotation. Donc, pour avoir une connoissance parfaite d'un tel mouvement, il faut qu'on puisse assigner pour chaque instant, tant l'axe de rotation autour duquel le corps tourne alors, que la vitesse avec laquelle il tourne. Par conséquent un tel mouvement est susceptible d'un double changement, l'un dans la vitesse de rotation, & l'autre dans la position de l'axe même de rotation. C'est donc aussi à ce double changement que se réduit l'effet de toutes les forces, qui agissent sur le corps. Lorsque l'axe de rotation demeure invariable, de sorte que les forces exercent leur effet seulement sur la vitesse de rotation, les regles sont déjà assez connues pour déterminer ce mouvement. Mais il n'en est pas de même à l'égard de la variabilité de l'axe de rotation.

IV. Tout revient donc à découvrir des regles, moyennant lesquelles on puisse assigner ces deux changemens pour un tems infiniment petit, le corps ayant un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, & étant sollicité par des forces quelconques. La recherche & l'explication de ces régles sera donc le sujet de ce Mémoire. Or le plus sûr

moyen

moyen de trouver ces régles eſt de regarder l'un & l'autre de ces deux changemens comme connu, & de chercher les forces requiſes pour les produire. Car, ayant réſolu cette queſtion en général, il ſera aiſé de renverſer la concluſion, & d'aſſigner les changemens que des forces données doivent produire. Voilà donc le plan de la méthode que je ſuivrai pour arriver au but propoſé; où il eſt clair, que tous les raiſonnemens ſeront tirés des premiers principes de la Mécanique, qui déterminent les accélérations élémentaires que des forces quelconques doivent produire dans les élémens de la matiere, dont le corps eſt composé.

Fig. 1. V. Soit donc propoſé un corps quelconque, dont la maſſe $= M$, & ſon centre d'inertie en I, que je conſidere comme fixe. Que ce corps tourne à l'inſtant préſent autour d'un axe de rotation quelconque IO, paſſant par ſon centre d'inertie I; & que la viteſſe angulaire ſoit $= \varepsilon$, de ſorte que ε marque l'angle décrit par cette viteſſe dans le tems d'une ſeconde, le ſinus total étant exprimé par l'unité. De là on connoitra aiſément la vraye viteſſe de chaque élément du corps. Car, poſant ſa diſtance à l'axe de rotation $= r$, l'expreſſion εr donnera l'eſpace décrit par cette viteſſe dans une ſeconde, puiſque ε marque un nombre abſolu. Mais, pour ramener ce mouvement aux principes de Mécanique, il faut le rapporter à des directions fixes indépendantes du corps; qui ſoient les droites IA, IB, IC, perpendiculaires entr'elles au centre d'inertie I, & que le mouvement de rotation ſe faſſe dans le ſens ABC. Pour rapporter l'axe de rotation IO à ces directions fixes, poſons les angles dont il y eſt incliné,

$$AIO = \alpha, \quad BIO = \beta, \quad CIO = \gamma$$

& puiſque les angles AIB, AIC, BIC ſont droits, on aura:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

VI. Suppoſons de plus que ce mouvement ne ſoit pas uniforme, & que l'axe de rotation IO ne demeure pas le même, mais qu'après le tems infiniment petit dt, la viteſſe angulaire ε acquierre un accroiſſe-

ment

ment $= d\mathfrak{v}$; & que la ſituation de l'axe de rotation IO change en ſorte que les angles α, β, γ, ſoient augmentés de leurs différentiels $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, qui auront pourtant un tel rapport entr'eux qu'il devienne $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \cos\beta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$. Il faut remarquer que dt ſignifie l'élément du tems t écoulé jusqu'à preſent; & j'arrangerai le calcul en ſorte que le tems t ſoit exprimé en ſecondes, & partant par un nombre abſolu. Voilà donc non ſeulement l'état du mouvement, où je ſuppoſe que le corps ſe trouve actuellement, qui eſt renfermé dans les quantités α, β, γ, & $\mathfrak{v}$; mais je tiendrai auſſi compte de la variabilité de ces quantités pendant le tems infiniment petit dt, puisque les fractions $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ & $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ contiennent tant le changement de la viteſſe angulaire, que le changement qui ſe fait dans la poſition de l'axe de rotation.

VII. Ayant établi ces changemens élémentaires, tant à l'égard de la viteſſe angulaire que de l'axe de rotation, cherchons les forces qui ſont requiſes pour produire préciſément ces mêmes changemens. Pour cet effet il faut conſidérer un élément quelconque du corps, & chercher la direction & la viteſſe dont il ſe meut à préſent: enſuite, tenant compte de la variabilité de la viteſſe & de l'axe de rotation, il ſera aiſé d'en conclurre le changement élémentaire que doit ſubir le mouvement de l'élément propoſé, tant par rapport à ſa viteſſe qu'à ſa direction. De là on connoitra les forces requiſes pour produire ce changement, & l'aſſemblage de toutes ces forces élémentaires fournira les forces finies que nous cherchons. Or, pour faciliter cette recherche, il ſera bon de décompoſer le mouvement de chaque élément du corps ſelon les trois directions fixes, IA, IB, & IC, puisqu'il eſt démontré que chacun de ces mouvemens partiaux ſuit, par rapport à l'accélération, les mêmes loix, que s'il exiſtoit tout ſeul, & qu'il ne fût pas accompagné des autres. C'eſt conformément à ce plan que je déterminerai les forces dont il eſt queſtion.

VIII. Soit donc en Z un élément quelconque du corps, dont la masse soit posée $= dM$. Tirons du point Z au plan AIB la perpendiculaire ZY, & de Y à la directrice IA la perpendiculaire YX, pour avoir les trois coordonnées paralleles aux trois directrices fixes IA, IB, IC, que nous nommerons

$$IX = x, \quad XY = y, \quad \& \quad YZ = z.$$

Maintenant, pour connoitre le mouvement de cet élément, il faut tirer de Z à l'axe de rotation IO la perpendiculaire ZP, & alors la vitesse du point Z sera $= \varepsilon.\ ZP$. Or, pour connoitre la direction de ce mouvement, qu'on conçoive un plan perpendiculaire à l'axe de rotation au point P, & la perpendiculaire tirée dans ce plan à la droite ZP au point Z, qui tende dans le sens ABC, donnera la direction du mouvement. Ensuite, ce mouvement doit être décomposé selon les directions Za, Zb, Zc, que je suppose paralleles aux directions fixes IA, IB, IC.

IX. Cette décomposition du mouvement du point Z demanderoit bien des lignes à tirer, qui embrouilleroient beaucoup la figure & fatigueroient l'imagination. Pour prévenir cet inconvénient, je réduirai cette recherche à la Trigonométrie sphérique. Soient donc dans une surface sphérique, décrite autour du centre d'inertie I, les points A, B, C, les poles des directions fixes IA, IB, IC, de sorte que les arcs de grands cercles AB, BC, CA, soient des quarts de cercles perpendiculaires entr'eux. Soit de plus O le point, où l'axe de rotation IO passe par la surface sphérique; & on aura les arcs $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$. Soit outre cela Z le point où la droite IZ de la fig. 1. passe par la surface sphérique, & posant cette distance $IZ = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = s$, on aura pour les arcs de grands cercles,

Fig. 2.

$$\cos AZ = \frac{x}{s}, \quad \cos BZ = \frac{y}{s}; \quad \cos CZ = \frac{z}{s}.$$

Or, puisque dans la fig. 1. la perpendiculaire ZP est $= s \sin ZIO$, & que

& que l'arc OZ fig. 2. eſt la meſure de l'angle ZIO, on aura la viteſſe du point $Z = \varepsilon s$ ſin OZ.

X. Tirons l'arc ZR perpendiculaire à l'arc OZ, & prenons-le égal à un quart de cercle, en ſorte qu'il tende dans le ſens ABC; & ſa tangente en Z donnera la direction du mouvement du point Z, à laquelle le rayon IR ſera parallele, quoique le centre I ne ſoit pas exprimé dans la figure. Maintenant, pour décompoſer le mouvement ſelon les directions Za, Zb, Zc, fig. 1. on n'a qu'à décompoſer un mouvement qui ſe feroit dans la direction IR avec la viteſſe $= \varepsilon s$ ſin OZ, ſelon les trois directions IA, IB, IC, puiſque ces directions ſont paralleles à celles-là. Pour cet effet, tirons les arcs de grands cercles AR, BR, CR, & par les regles de la compoſition du mouvement, nous aurons pour le point Z,

la viteſſe ſuivant la direction IA, ou $Za = \varepsilon s$ ſin OZ. coſ AR,
la viteſſe ſuivant la direction IB, ou $Zb = \varepsilon s$ ſin OZ. coſ BR,
la viteſſe ſuivant la direction IC, ou $Zc = \varepsilon s$ ſin OZ. coſ CR.

XI. Pour exprimer analytiquement ces formules, il faut obſerver que, puiſque R eſt le pole du cercle OZ, l'arc RO ſera un quart de cercle, & l'angle ROZ droit. Donc, le triangle AOR fournit cette détermination:

$$\cos AR = \sin AO.\ \cos AOR = -\sin AO.\ \sin AOZ,$$

parce que $\cos AOR = \cos(360^\circ - AOR) = \cos(ROZ + AOZ) = -\sin AOZ$.
De là on aura ſin OZ. coſ AR $= -$ ſin AO. ſin OZ. ſin AOZ.
Mais, du triangle AOZ on tire ſin OZ. ſin AOZ $=$ ſin AZ. ſin OAZ, de ſorte que ſin OZ. coſ AR $= -$ ſin AO. ſin AZ. ſin OAZ.

Or, ayant OAZ $=$ BAO $-$ BAZ, les triangles BAO, BAZ, & CAO, CAZ, où AB, AC ſont des quarts de cercles, & BAC un angle droit, donnent

coſ B

$$\cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin AO} = \frac{\cos \beta}{\sin AO};\ \sin BAO = \cos CAO = \frac{\cos CO}{\sin AO} = \frac{\cos \gamma}{\sin AO}$$

$$\cos BAZ = \frac{\cos BZ}{\sin AZ} = \frac{y}{s \sin AZ};\ \sin BAZ = \cos CAZ = \frac{\cos CZ}{\sin AZ} = \frac{z}{s \sin AZ}$$

& partant $\sin OAZ = \dfrac{y \cos \gamma - z \cos \beta}{s \sin AO.\ \sin AZ}$: donc

$$\sin OZ \cos AR = \frac{z \cos \beta - y \cos \gamma}{s}.$$

XII. Par une semblable réduction on trouvera

$$\sin OZ. \cos BR = \frac{x \cos \gamma - z \cos \alpha}{s} \ \& \sin OZ. \cos CR = \frac{y \cos \alpha - x \cos \beta}{s},$$

& partant les trois vitesses du point Z selon les directions Za, Zb, Zc, seront exprimées de la sorte.

Fig. 1. La vitesse suivant la direction $Za = \varepsilon\ (z \cos \beta - y \cos \gamma) = u$

La vitesse suivant la direction $Zb = \varepsilon\ (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = v$

La vitesse suivant la direction $Zc = \varepsilon\ (y \cos \alpha - x \cos \beta) = w$

que j'indiquerai pour abréger par les lettres u, v, w. Pour en trouver les accroissemens qu'elles prendront dans l'élément du tems dt, il faut remarquer que, non seulement les quantités ε, α, β, γ, croissent de leurs différentiels, mais qu'il faut aussi avoir égard à la variabilité des coordonnées x, y, z, dont les différentiels seront les espaces parcourus dans le tems dt par les vitesses u, v, w, qui conviennent aux mêmes directions. Et partant on aura

$$dx = u\ dt = \varepsilon\ dt\ (z \cos \beta - y \cos \gamma)$$
$$dy = v\ dt = \varepsilon\ dt\ (x \cos \gamma - z \cos \alpha)$$
$$dz = w\ dt = \varepsilon\ dt\ (y \cos \alpha - x \cos \beta)$$

XIII. Ce-

XIII. Cela remarqué, nous aurons les différentiels ſuivans de nos trois viteſſes u, v, w;

$$du = z\,d.\,\text{ȣ}\cos\beta - y\,d.\,\text{ȣ}\cos\gamma + \text{ȣ}\,dt\,(w\cos\beta - v\cos\gamma)$$

& en ſubſtituant pour w & v leurs valeurs, nous trouverons tant du, que dv & dw exprimés en ſorte

$$du = z\,d.\,\text{ȣ}\cos\beta - y\,d.\,\text{ȣ}\cos\gamma + \text{ȣȣ}\,dt\,(y\cos\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta + z\cos\alpha\,\mathrm{cs}\,\gamma - x\sin\alpha^2)$$

$$dv = x\,d.\,\text{ȣ}\cos\gamma - z\,d.\,\text{ȣ}\cos\alpha + \text{ȣȣ}\,dt\,(z\cos\beta\,\mathrm{cs}\,\gamma + x\cos\beta\,\mathrm{cs}\,\alpha - y\sin\beta^2)$$

$$dw = y\,d.\,\text{ȣ}\cos\alpha - x\,d.\,\text{ȣ}\cos\beta + \text{ȣȣ}\,dt\,(x\cos\gamma\,\mathrm{cs}\,\alpha + y\cos\gamma\,\mathrm{cs}\,\beta - z\sin\gamma^2)$$

puisque $\sin\alpha^2 = \cos\beta^2 + \mathrm{cs}\,\gamma^2$; $\sin\beta^2 = \cos\alpha^2 + \mathrm{cs}\,\gamma^2$; $\sin\gamma^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2$.

Maintenant il faut chercher les forces qui doivent agir ſur l'élément du corps en Z, ſuivant les directions Za, Zb, Zc, pour qu'elles y produiſent préciſément ces accélérations que nous venons de trouver, pour en conclurre enſuite, par la voye d'intégration, les forces totales dont le corps doit être ſollicité, afin que les changemens ſuppoſés y ſoient produits.

XIV. Or, ſi un corps dont la maſſe $= m$ ſe meut ſur une ligne droite avec la viteſſe v, étant ſollicité ſuivant la même direction par une force $= p$, on ſait que l'incrément de la viteſſe dv produit dans l'élément du tems dt eſt proportionnel à la formule $\frac{p\,dt}{m}$. Mais, pour réduire le calcul à des meſures abſolües, ſi l'on exprime la maſſe m par le poids que le corps auroit ſur la terre, la force p par un poids qui lui ſoit égal, le tems t en ſecondes, & la viteſſe v par l'eſpace parcouru dans une ſeconde; il faut introduire la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde à l'endroit où l'on aura eſtimé le poids du corps. Alors la formule $dv = \frac{2g\,p\,dt}{m}$ conduira aux juſtes meſures. Donc, ſachant l'accroiſſement de la viteſſe dv engendré dans le tems dt, avec la maſſe du corps m, la force requiſe

 pour

pour produire cette accélération ſera: $p = \frac{m\,dv}{2g\,dt}$ agiſſant ſelon la direction du mouvement. Cette maniere d'ajuſter le calcul à des meſures abſolues différe de celle dont je me ſuis ſervi autrefois; mais elle eſt beaucoup plus commode.

XV. Donc, pour imprimer à l'élément du corps en Z, dont la maſſe $= dM$, les trois accélérations trouvées ſelon les directions Za, Zb, Zc, il faut qu'il ſoit ſollicité ſelon les mêmes directions par ces forces élémentaires.

$$\text{Suivant } Za \text{ par la force } = \frac{dM}{2g\,dt}.\ du$$

$$\text{Suivant } Zb \text{ par la force } = \frac{dM}{2g\,dt}.\ dv$$

$$\text{Suivant } Zc \text{ par la force } = \frac{dM}{2g\,dt}.\ dw$$

Il s'agit à preſent d'aſſembler toutes ces forces élémentaires par toute l'étendue du corps; où il eſt clair qu'il faut uniquement avoir égard à la variabilité du point Z avec l'élément de matiere dM qui s'y trouve, puisque nous cherchons les forces qui doivent agir dans l'inſtant préſent, ſans avoir égard à leur variabilité dans la ſuite. Nous n'aurons donc d'autres variables que les trois coordonnées x, y, z, & les lettres α, β, γ, ε, avec leurs différentiels ſeront traitées comme conſtantes.

XVI. Puisque nous ne regardons ici qu'à l'inſtant préſent, rien n'empêche d'établir en ſorte les trois directions fixes, IA, IB, IC, de façon qu'elles conviennent avec les axes principaux du corps; & c'eſt cette conſidération qui nous met en état de ſurmonter les difficultés que j'avois rencontrées en ſuivant d'autres méthodes. On pourroit objecter, que les variations des angles α, β, γ, étant rapportées aux directions fixes, ne ſauroient être tirées de leur rélation aux axes principaux, qui s'écartent des directions fixes dès le premier inſtant.

Mais,

Mais, puisque les axes principaux tournent avec le corps autour de l'axe de rotation IO, ils en conservent les mêmes distances que les directions fixes, de sorte que, si l'axe de rotation demeuroit fixe, les angles α, β, γ, seroient constans à l'un & l'autre égard. Et si l'axe de rotation IO varie, il variera précisément autant à l'égard des axes principaux du corps que des directions fixes. Par cette raison il sera permis de supposer que les axes principaux du corps conviennent à l'instant présent avec les trois directions fixes IA, IB, IC.

XVII. Cette supposition nous procure ce grand avantage, que nous pourrons intégrer fort aisément les formules différentielles dont nous avons besoin. Car, d'abord la nature du centre d'inertie I nous fournit ces intégrales

$$\int x\,dM = 0, \quad \int y\,dM = 0, \quad \& \int z\,dM = 0.$$

Ensuite la propriété des axes principaux donne:

$$\int xy\,dM = 0; \quad \int xz\,dM = 0; \quad \& \int yz\,dM = 0.$$

Outre cela, si nous introduisons les momens d'inertie principaux du corps, & que nous posions

le moment d'inertie par rapport à l'axe IA $= Maa$
le moment d'inertie par rapport à l'axe IB $= Mbb$
le moment d'inertie par rapport à l'axe IC $= Mcc$,

nous aurons encore ces intégrales,

$$\int xx\,dM = \tfrac{1}{2}M(bb+cc-aa); \int yy\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa+cc-bb); \int zz\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa+bb-cc)$$

XVIII. Maintenant il est évident, puisque les formules trouvées pour les différentiels du, dv, dw, ne contiennent que les premieres dimensions des coordonnées x, y, z, qui sont les seules variables que nous ayons à considérer, que les intégrales des forces élémentaires évanouiront; de sorte que

$$\int \frac{du\,dM}{2g\,dt} = 0; \quad \int \frac{dv\,dM}{2g\,dt} = 0, \quad \int \frac{dw\,dM}{2g\,dt} = 0.$$

 Cela

Cela s'entend aussi de la condition, que le centre d'inertie I demeure en repos; car, s'il y avoit des forces finies qui agissoient sur le corps, elles lui imprimeroient un mouvement progressif, dont je fais ici abstraction. Mais, puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, il faut avoir égard, non tant aux forces sollicitantes elles-mêmes, qui évanouissent, comme nous venons de le voir, qu'à leurs momens. Par cette raison, nous obtiendrons les forces requises pour produire les changemens supposés dans le mouvement du corps, quand nous intégrerons les momens des forces élémentaires par rapport aux trois axes principaux du corps.

XIX. Or les forces élémentaires trouvées au §. XV. donnent par rapport aux axes principaux les momens suivans;

Le moment de forces par rapport à l'axe IA,

$$\frac{dM}{2g\,dt}\,(y\,dw - z\,dv) \quad \text{dans le sens BC.}$$

Le moment de forces par rapport à l'axe IB,

$$\frac{dM}{2g\,dt}\,(z\,du - x\,dw) \quad \text{dans le sens CA.}$$

Le moment de forces par rapport à l'axe IC,

$$\frac{2g\,dt}{dM}\,(x\,dv - y\,du) \quad \text{dans le sens AB.}$$

Il faut à présent substituer au lieu des différentiels du, dv, dw, leurs valeurs trouvées dans le §. XII. & ensuite chercher les intégrales de ces formules, pour avoir les momens entiers des forces par rapport aux trois axes principaux du corps.

XX. Faisons ces opérations pour le premier moment élémentaire, par rapport à l'axe principal IA, puisqu'il sera aisé d'en conclurre les deux autres par la seule analogie. Or l'expression $ydw - zdv$ se changera par la substitution en celle ici:

(yy

$$(yy+zz)\,d.\,\vartheta\cos\alpha - yz\,d.\,\vartheta\cos\beta - xz\,d.\,\vartheta\cos\gamma$$
$$+\vartheta\vartheta\,dt\,(xy\cos\alpha\cos\gamma - xy\cos\alpha\cos\beta + (yy-zz)\cos\beta\cos\gamma + yz(\sin\beta^2 - \sin\gamma^2))$$

laquelle étant multipliée par $\frac{dM}{2g\,dt}$, & intégrée par la ſeule variabilité des trois coordonnées x, y, z, donnera, à cauſe de $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$, $\int yz\,dM = 0$, l'expreſſion ſuivante,

$$\frac{d.\,\vartheta\cos\alpha}{2g\,dt}\int(yy+zz)\,dM + \frac{\vartheta\vartheta\cos\beta\cos\gamma}{2g}\int(yy-zz)\,dM.$$

Donc, en y introduiſant les momens principaux d'inertie, à cauſe de $\int(yy+zz)\,dM = Maa$ & $\int(yy-zz)\,dM = M(cc-bb)$, ce moment de forces ſera

$$\frac{Maa\,d.\,\vartheta\cos\alpha}{2g\,dt} + \frac{M(cc-bb)\,\vartheta\vartheta\cos\beta\cos\gamma}{2g}$$

XXI. Donc, pour produire dans le mouvement du corps les changemens élémentaires ſuppoſés, tant à l'égard de la viteſſe angulaire, que de la poſition de l'axe de rotation, ſi nous poſons les momens de forces

par rapport à l'axe principal IA $=$ P dans le ſens BC,
par rapport à l'axe principal IB $=$ Q dans le ſens CA,
par rapport à l'axe principal IC $=$ R dans le ſens AB,

nous aurons:

$$P = Maa.\ \frac{d.\,\vartheta\cos\alpha}{2g\,dt} + M(cc-bb).\ \frac{\vartheta\vartheta\cos\beta\cos\gamma}{2g}$$

$$Q = Mbb.\ \frac{d.\,\vartheta\cos\beta}{2g\,dt} + M(aa-cc).\ \frac{\vartheta\vartheta\cos\gamma\cos\alpha}{2g}$$

$$R = Mcc.\ \frac{d.\,\vartheta\cos\gamma}{2g\,dt} + M(bb-aa).\ \frac{\vartheta\vartheta\cos\alpha\cos\beta}{2g}$$

 Et

Et partant réciproquement ces trois momens de forces produiront précifément les changemens fuppofés.

XXII. Il faut donc des forces pour produire ces changemens, à moins que les trois valeurs trouvées pour P, Q, & R, n'évanouiffent; ce qui pourra bien arriver, quoique, ni la viteffe angulaire ε, ni les angles α, β, γ, ne demeurent les mêmes. Mais fuppofons, que, tant la viteffe angulaire ε que la pofition de l'axe de rotation doive demeurer la même; & pour cet effet il faut que le corps foit follicité par ces trois momens de forces:

$$P = M\,(cc-bb).\ \frac{\varepsilon\varepsilon \operatorname{cof}\beta \operatorname{cof}\gamma}{2g};\quad Q = M\,(aa-cc)\ \frac{\varepsilon\varepsilon \operatorname{cof}\gamma \operatorname{cof}\alpha}{2g}$$

$$\&\quad R = M\,(bb-aa).\ \frac{\varepsilon\varepsilon \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\beta}{2g}$$

lesquels n'évanouiffent pas tous à la fois, à moins que des trois cofinus $\operatorname{cof}\alpha$, $\operatorname{cof}\beta$, $\operatorname{cof}\gamma$, deux n'évanouïffent. Cela arrive fi l'un des angles α, β, γ, évanouït, ou bien, fi l'axe de rotation convient avec un des trois axes principaux. Or j'ai déjà fait voir, qu'un corps ne fauroit tourner librement autour d'un axe, à moins que ce ne foit un axe principal du corps: & cette même propriété m'a conduit à la connoiffance des axes principaux.

XXIII. Maintenant nous fommes en état de réfoudre le probleme direct, auquel cette recherche aboutit principalement, & qui eft conçu en ces termes:

Un corps étant follicité par des forces quelconques, pendant qu'il tourne autour d'un axe de rotation donné avec une viteffe angulaire donnée, déterminer les changemens élémentaires, qui feront produits tant dans la viteffe angulaire que dans la pofition de l'axe de rotation.

Il ne s'agit ici que d'un inftant de tems, auquel je regarde la pofition des axes principaux comme connue, qui foient IA, IB, IC, par rap-

port

port auxquels les momens d'inertie du corps ſoient Maa, Mbb, Mcc; où M marque la maſſe du corps. Que le corps tourne donc à préſent autour de l'axe IO, dans le ſens ABC, avec la viteſſe angulaire $= \varepsilon$, & que la poſition de cet axe ſoit déterminée par ces angles que l'axe de rotation fait avec les axes principaux, $AIO = \alpha$, $BIO = \beta$, $CIO = \gamma$.

XXIV. Pour les forces ſollicitantes, qu'on cherche leurs momens par rapport aux axes principaux du corps, qui ſoient

pour l'axe $IA = P$ dans le ſens BC,
pour l'axe $IB = Q$ dans le ſens CA,
pour l'axe $IC = R$ dans le ſens AB.

Alors, pendant l'élément du tems dt, la viteſſe angulaire ε prendra un accroiſſement $= d\varepsilon$, & l'axe de rotation changera de ſituation par rapport aux axes principaux du corps, en ſorte que les angles α, β, γ, ſeront augmentés de leurs différentiels $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. Et ces changemens élémentaires ſeront déterminés par les trois équations ſuivantes :

$$d.\ \varepsilon \operatorname{cof} \alpha + \frac{cc-bb}{aa}.\ \varepsilon\varepsilon\, dt \operatorname{cof} \beta \operatorname{cof} \gamma = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$d.\ \varepsilon \operatorname{cof} \beta + \frac{aa-cc}{bb}.\ \varepsilon\varepsilon\, dt \operatorname{cof} \alpha \operatorname{cof} \gamma = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$d.\ \varepsilon \operatorname{cof} \gamma + \frac{bb-aa}{cc}.\ \varepsilon\varepsilon\, dt \operatorname{cof} \alpha \operatorname{cof} \beta = \frac{2gR\,dt}{Mcc}.$$

C'eſt donc la ſolution du probleme propoſé.

XXV. De ces formules on peut d'abord réſoudre cette queſtion, qui ſeroit d'ailleurs fort difficile :

Si le corps étant en repos eſt ſollicité par des forces quelconques, trouver l'axe IO, autour duquel le corps commencera à tourner, & la viteſſe angulaire infiniment petite, qu'il recevra dans l'élément du tems dt

Ici

Ici les momens de forces P, Q, R, ſont donnés; & l'on a $u = 0$. d'où il faut chercher les angles α, β, γ, avec le différentiel du. On aura donc à réſoudre ces équations:

$$du \cos\alpha = \frac{2gP\,dt}{Maa};\quad du \cos\beta = \frac{2gQ\,dt}{Mbb};\quad du \cos\gamma = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

d'où nous tirons d'abord $\cos\beta = \frac{Qaa}{Pbb}\cos\alpha$ & $\cos\gamma = \frac{Raa}{Pcc}\cos\alpha$

& de là à l'aide de l'équation $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$,

$$1 = \cos\alpha^2\left(1 + \frac{QQa^4}{PPb^4} + \frac{RRa^4}{PPc^4}\right) \text{ \& } \cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

& les deux autres angles β, γ, ſeront déterminés ainſi:

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}, \text{ \& } \cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

& la viteſſe élementaire $du = \frac{2g\,dt}{M}\sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$.

XXVI. Les trois équations générales que nous venons de trouver, peuvent être transformées en pluſieurs formes. Ainſi, ſi nous multiplions la premiere par $\cos\alpha$, la ſeconde par $\cos\beta$, la troiſieme par $\cos\gamma$, leur ſomme donnera:

$$du + \left(\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right) uu\,dt \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

où $\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc} = -\frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aa\ bb\ cc}$

d'où l'on voit que, ſi deux des momens principaux ſont égaux entr'eux, le ſecond terme s'en va toujours; & alors, s'il n'y a point de forces

ſolli-

ſollicitantes, la viteſſe angulaire ne change point. On voit auſſi, que, ſi le corps tourne autour d'un axe principal IA, de ſorte que $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, & que les forces ſollicitantes ne donnent qu'un moment P par rapport au même axe, de ſorte que Q $= 0$, & R $= 0$, on aura $d\varkappa = \frac{2gPdt}{Maa}$; & outre cela $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$: ou bien, l'axe de rotation ne ſera point changé; & l'effet de la force P ſera employé à accélérer le mouvement de rotation. Or c'eſt préciſément la formule connue depuis longtems.

XXVII. Mais, ſi l'on veut déterminer le mouvement de rotation tout entier d'un corps ſollicité par des forces quelconques, il faut avoir égard aux changemens continuels des axes principaux du corps, & y rapporter à chaque inſtant l'axe de rotation, & les momens des forces ſollicitantes. Donc, la poſition des axes principaux étant variable, il les faut rapporter à des directions fixes du Monde. Pour cet effet je conſidere une ſphere fixe, décrite autour du centre d'inertie du corps, qui ſoit repréſentée dans la fig. 3. où PQSR eſt un cercle fixe, & P un point fixe. Fig. 3. Qu'après le tems $= t$ ſec. les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, d'où ayant tiré au point P les arcs de grands cercles AP, BP, & CP, ſoient ces arcs AP $= l$, BP $= m$, CP $= n$, & les angles QPA $= \lambda$. QPB $= \mu$, QPC $= \nu$. De là on a d'abord

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1. \text{ enſuite } \cos(\mu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos m}{\sin l \sin m},$$

$$\cos(\nu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos n}{\sin l \sin n}, \quad \& \cos(\mu - \nu) = -\frac{\cos m \cos n}{\sin m \sin n}.$$

XXVIII. Que le corps tourne à préſent autour de l'axe IO, avec la viteſſe angulaire $= \varkappa$, dans le ſens ABC; & pour la poſition du point O ſoient les arcs de grands cercles AO $= \alpha$, BO $= \beta$, CO $= \gamma$, & comme les trois coordonnées de ci-deſſus n'entrent plus en conſidé-

 ration,

ration, posons pour abréger nos formules: $\upsilon \cos\alpha = x$, $\upsilon \cos\beta = y$, & $\upsilon \cos\gamma = z$; & nous aurons $\upsilon\upsilon = xx + yy + zz$. Ensuite, cherchons les momens des forces sollicitantes par rapport aux axes principaux, IA, IB, IC, du corps, qui soient P, Q, R, dans les sens BC, CA, & AB. Cela posé, nos équations pour déterminer les variables x, y, z, seront:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} . yz\,dt = \frac{2g\mathrm{P}\,dt}{\mathrm{M}aa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb} . xz\,dt = \frac{2g\mathrm{Q}\,dt}{\mathrm{M}bb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc} . xy\,dt = \frac{2g\mathrm{R}\,dt}{\mathrm{M}cc}$$

& ayant trouvé ces quantités x, y, z, on aura les angles α, β, γ, par les formules $\cos\alpha = \frac{x}{\upsilon}$; $\cos\beta = \frac{y}{\upsilon}$; $\cos\gamma = \frac{z}{\upsilon}$.

XXIX. Mais il faut aussi considérer qu'à cause du mouvement de rotation les points A, B, C, & partant les arcs l, m, n, & les angles λ, μ, ν, sont variables. Le point A tournera autour du point O avec la vitesse $= \upsilon \sin \mathrm{OA} = \upsilon \sin\alpha$, dans le sens BC; & partant, dans le tems dt, le point A décrira le petit arc $\mathrm{A}a = \upsilon\,dt \sin\alpha$, perpendiculaire à l'arc OA. Donc, tirant $a\alpha$ perpendiculaire à l'arc PA, nous aurons $dl = -\mathrm{A}\alpha$, & $d\lambda = -\frac{a\alpha}{\sin l}$; mais, à cause de l'angle $\mathrm{OA}a$ droit, on trouve $\mathrm{A}\alpha = \upsilon\,dt \sin\alpha . \sin\mathrm{OAP}$, & $a\alpha = \upsilon\,dt \sin\alpha . \cos\mathrm{OAP}$. Or le triangle BAP fournit:

$\cos\mathrm{BAP} = \frac{\cos m}{\sin l}$, & le triangle CAP donne $\cos\mathrm{CAP} =$

— sin

$-\sin BAP = \frac{\cos n}{\sin l}$; ou, $\sin BAP = \frac{-\cos n}{\sin l}$. De la même maniere les triangles BAO & CAO donnent:

$$\cos BAO = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}; \quad \cos CAO = \sin BAO = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}.$$

D'où, puisque l'angle OAP = BAP + BAO, il s'ensuit

$$\sin OAP = \frac{\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n}{\sin\alpha \ \sin l} \ \& \ \cos OAP = \frac{\cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n}{\sin\alpha \ \sin l}$$

XXX. Substituons ces valeurs, & nous aurons

$$dl = \frac{-\text{ȣ}\, dt\, (\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n)}{\sin\ l} \ \& \ d\lambda = \frac{-\text{ȣ}\, dt\, (\cos\beta\, \cos m + \cos\gamma\, \cos n)}{\sin\ l^2}$$

où, si nous mettons au lieu de ȣ $\cos\beta$, ȣ $\cos\gamma$, les valeurs y & z, nous obtiendrons les six équations qu'il faut encore joindre aux trois que nous avons déjà trouvées ci dessus §. 28.

$$dl \sin l = dt\, (y \cos n - z \cos m); \quad d\lambda\, \sin l^2 = - dt\, (y \cos m + z \cos n)$$

$$dm \sin m = dt\, (z \cos l - x \cos n); \quad d\mu \sin m^2 = - dt\, (z \cos n + x \cos l)$$

$$dn \sin n = dt\, (x \cos m - y \cos l); \quad d\nu \sin n^2 = - dt\, (x \cos l + y \cos m)$$

Voilà donc neuf équations, dans lesquelles est renfermée la solution de tous les problemes, où il s'agit du mouvement de rotation de quelque corps solide. Or il faut remarquer, qu'à cause de la rélation entre les quantités l, m, n, & λ, μ, ν, il suffit de prendre trois des six dernieres, savoir deux du premier rang, & une de l'autre.

XXXI. Il est bon de remarquer encore quelques belles rélations entre les arcs & angles l, m, n, & λ, μ, ν. J'ai déjà exprimé les cosinus de la différence entre deux de ces angles; mais on en peut aussi aisément donner leurs sinus. Car, du triangle APB on tire

 sin

$\sin(\mu - \lambda) : 1 = \sin \mathrm{BAP} : \sin m$ or $\sin \mathrm{BAP} = \frac{-\cos n}{\sin l}$; & partant $\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$. Voilà donc les rélations suivantes

$$\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m};\ \sin(\nu - \mu) = \frac{-\cos l}{\sin m \sin n};\ \sin(\lambda - \nu) = \frac{-\cos m}{\sin l \sin n}$$

$$\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m};\ \cos(\nu - \mu) = \frac{-\cos m \cos n}{\sin m \sin n};\ \cos(\lambda - \nu) = \frac{-\cos l \cos n}{\sin l \sin n}$$

De là nous pouvons déduire celles-ci:

$$\sin\mu = \frac{-\sin\lambda \cos l \cos m - \cos\lambda \cos n}{\sin l \sin m};\ \cos\mu = \frac{-\cos\lambda \cos l \cos m + \sin\lambda \cos n}{\sin l \sin m}$$

$$\sin\nu = \frac{-\sin\lambda \cos l \cos n + \cos\lambda \cos m}{\sin l \sin n};\ \cos\nu = \frac{-\cos\lambda \cos l \cos n - \sin\lambda \cos m}{\sin l \sin n}$$

XXXII. En comparant cette méthode de déterminer le mouvement de rotation avec les eſſais que j'ai propoſés autrefois, on y remarquera d'abord des avantages très réels, ſurtout à l'égard de l'application à tous les cas qu'on veut examiner. Et quand on rencontrera encore des difficultés, à cauſe de la multitude des variables, ce n'eſt plus dans la Mécanique qu'il faut chercher les moyens de les ſurmonter, puisqu'il ſemble que la nature d'un tel mouvement n'eſt pas ſusceptible d'un calcul plus ſimple. Tout dépendra à préſent de l'adreſſe du calculateur, qui doit puiſer dans l'Analyſe les ſecours néceſſaires pour réſoudre les équations qui renferment la détermination du mouvement: mais il n'eſt pas douteux, qu'il n'y ait une infinité de cas qui ſoient abſolument irréſolubles à cauſe des bornes de l'Analyſe. Pour donner un exemple de l'application de cette méthode, ſoit propoſé le probleme ſuivant.

Un

Un corps solide n'étant sollicité par aucune force, s'il a reçu un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe différent de ses axes principaux, déterminer la continuation de son mouvement.

XXXIII. Ayant donc $P = 0$, $Q = 0$, & $R = 0$, nous aurons à résoudre les équations suivantes:

$$\text{I.}\quad dx + \frac{cc - bb}{aa}\, yz\,dt = 0$$

$$\text{II.}\quad dy + \frac{aa - cc}{bb}\, xz\,dt = 0$$

$$\text{III.}\quad dz + \frac{bb - aa}{cc}\, xy\,dt = 0$$

IV. $dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m)$; VII. $d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n)$
V. $dm \sin m = dt\,(z \cos l - x \cos n)$; VIII. $d\mu \sin m^2 = -dt\,(z \cos n + x \cos l)$
VI. $dn \sin n = dt\,(x \cos m - y \cos l)$; IX. $d\nu \sin n^2 = -dt\,(x \cos l + y \cos m)$

Des trois premieres nous tirons d'abord:

$$\frac{aa\,x\,dx}{bb - cc} = \frac{bb\,y\,dy}{cc - aa} = \frac{cc\,z\,dz}{aa - bb} = xyz\,dt$$

Donc, posant $xyz\,dt = du$, & pour abréger,

$$\frac{bb - cc}{aa} = A;\quad \frac{cc - aa}{bb} = B;\quad \frac{aa - bb}{cc} = C,$$

nous trouverons en intégrant,

$$xx = 2Au + \mathfrak{A};\quad yy = 2Bu + \mathfrak{B};\quad zz = 2Cu + \mathfrak{C},$$

& de là $dt = \dfrac{du}{\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}}$

XXXIV. Par rapport aux lettres A, B, C, il faut remarquer que $Aaa + Bbb + Ccc = 0$, & $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$. De là il eſt évident que $aaxx + bbyy + cczz$ ſera égal à une quantité conſtante $\mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc$. Or cette expreſſion ſe réduit à celle-ci $\varkappa\varkappa\,(aa \cos\alpha^2 + bb \cos\beta^2 + cc \cos\gamma^2)$, où la formule $aa \cos\alpha^2 + bb \cos\beta^2 + cc \cos\gamma^2$ étant multipliée par la maſſe du corps M, exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation IO, autour duquel le corps tourne à préſent. Donc, poſant ce moment d'inertie $= Mrr$, la quantité $Mrr\,\varkappa\varkappa$, qui exprime ce qu'on nomme la force vive du corps, demeure invariable, ou bien le corps conſervera toujours la même force vive. Puiſque dans le mouvement progreſſif, s'il n'y a point de forces ſollicitantes, le corps conſerve toujours la même viteſſe, il s'enſuit, quelque mouvement qu'on imprime à un corps, qu'il conſervera toujours la même force vive.

XXXV. La derniere équation différentielle trouvée §. XXXIII. ſert à déterminer pour tout tems t la variable u, et de là on définira les quantités

$$x = \sqrt{(2Au + \mathfrak{A})};\ y = \sqrt{(2Bu + \mathfrak{B})};\ z = \sqrt{(2Cu + \mathfrak{C})}$$

D'où la viteſſe angulaire dont le corps tourne à préſent, ſera

$$\varkappa = \sqrt{(2(A + B + C)\,u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$$

Or pour la poſition de l'axe de rotation IO à l'égard des axes principaux du corps, laquelle eſt déterminée par les angles α, β, γ, on aura

$$\cos\alpha = \frac{x}{\varkappa};\ \cos\beta = \frac{y}{\varkappa};\ \cos\gamma = \frac{z}{\varkappa}.$$

Mais nous ne ſavons pas encore la poſition des axes principaux du corps pour l'inſtant préſent, qu'il faut chercher par la réſolution des ſix autres équations, les trois premieres étant deja parfaitement réſolues.

XXXVI. Pour faciliter cette recherche, il eſt bon d'obſerver que les trois premieres équations y peuvent beaucoup contribuer. Car, ſi nous ſi nous multiplions la premiere par $aa \cos l$, la ſeconde par $bb \cos m$, et la troiſieme par $cc \cos n$, nous obtiendrons cette ſomme:

$$0 = aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n + ccyzdt \cos l - bbyzdt \cos l + aaxzdt \cos m$$
$$- ccxzdt \cos m + bbxydt \cos n - aaxydt \cos n$$

laquelle, par les équations IV. V. & VI. ſe change en cette forme:

$$0 = aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n - aaxdl \sin l - bbydm \sin m - ccxdn \sin n$$

qui étant intégiable donne

$$aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = \text{Conſt.} = \mathfrak{D}$$

& nous avions déjà $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Donc, ſi nous avions encore une ſeule équation intégrale entre les arcs l, m et n, nous pourrions déterminer chacun à part. Or les équations IV. V. VI. fourniſſent cette équation differentielle aſſès ſimple

$$xdl \sin l + ydm \sin m + zdn \sin n = 0$$

XXXVII. Au lieu des arcs l, m, n introduiſons une nouvelle variable v, en poſant $x \cos l + y \cos m + z \cos n = v$. & à cauſe de la propriété remarquée nous aurons:

$$dv = dx \cos l + dy \cos m + dz \cos n \text{ ou}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{A \cos l}{x} + \frac{B \cos m}{y} + \frac{C \cos n}{z}.$$

& maintenant tout revient à déterminer v par u. Pour cet effet il faut chercher les valeurs de $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, de ces trois équations:

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$
$$aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = \mathfrak{D}$$
$$x \cos l + y \cos m + z \cos n = v$$

dont la réſolution mene enfin à cette formule irrationelle

$$\sqrt{\left\{\begin{matrix} + AAa^4yyzz - \mathfrak{D}\mathfrak{D}(xx + yy + zz) \\ + BBb^4xxzz + 2\mathfrak{D}v(aaxx + bbyy + cczz) \\ + CCc^4xxyy - vv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) \end{matrix}\right\}}$$

XXXVIII.

XXXVIII. Mettons pour abréger le ligne $V(\ldots)$ pour cette formule, & l'on trouvera les valeurs ſuivantes :

$$\operatorname{cof} l = \frac{\mathfrak{D}x(Cccyy - Bbbzz) + bbccxv(Bzz - Cyy) + Aaayz V(\ldots)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\operatorname{cof} m = \frac{\mathfrak{D}y(Aaazz - Cccxx) + aaccyv(Cxx - Azz) + Bbbxz V(\ldots)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\operatorname{cof} n = \frac{\mathfrak{D}z(Bbbxx - Aaayy + aabbzv(Ayy - Bxx) + Cccxy V(\ldots)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

Et ſi nous ſubſtituons ces valeurs dans l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = \frac{A \operatorname{cof} l}{x} + \frac{B \operatorname{cof} m}{y} + \frac{C \operatorname{cof} n}{z}$, nous parviendrons à cette équation à intégrer :

$$\frac{dv}{du}(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy) =$$

$$ABC\mathfrak{D}(aaxx + bbyy + cczz) - ABCv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) + \frac{AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy}{xyz} V(\ldots)$$

XXXIX. Maintenant nous n'avons qu'à ſubſtituer au lieu de x, y, z leurs valeurs aſſignées ci-deſſus, qui donnent :

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCc^4\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\ - 2ABCu(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)$$

$$AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy = AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\ - 2ABCu(\mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc)$$

$$xx + yy + zz = 2(A + B + C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$

$$aaxx + bbyy + cczz = \mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc$$

$$a^4xx + b^4yy + c^4zz = \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4$$

Poſons

Posons ensuite pour abréger,

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=E;\ \mathfrak{A}aa+\mathfrak{B}bb+\mathfrak{C}cc=F;\ \mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4=G;$$

$$AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C}+BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C}+CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B}=H$$

$$AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C}+BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C}+CCc^4\mathfrak{A}\mathfrak{B}=K.$$

d'où il s'ensuit $K=EG-FF$.

XL. En introduisant ces valeurs à cause de $A+B+C=-ABC$, notre formule irrationelle sera

$$\sqrt{(..)}=(K-2ABCGu+2\mathfrak{D}\mathfrak{D}ABCu-\mathfrak{D}\mathfrak{D}E+2\mathfrak{D}Fv-Gvv)$$

& notre équation différentielle deviendra

$$\frac{dv}{du}(K-2ABCGu)=ABC\mathfrak{D}F-ABCGv$$
$$+\frac{H-2ABCFu}{xyz}\sqrt{(..)}$$

qui se réduit à cette forme,

$$\frac{Kdv-ABCF\mathfrak{D}du-2ABCGudv+ABCGvdu}{\sqrt{(K-\mathfrak{D}\mathfrak{D}E+2ABC(\mathfrak{D}\mathfrak{D}-G)u+2\mathfrak{D}Fv-Gvv)}}=$$
$$\frac{Hdu-2ABCFudu}{\sqrt{(2Au+\mathfrak{A})(2Bu+\mathfrak{B})(2Cu+\mathfrak{C})}}$$

dont il s'agit de trouver l'intégrale.

XLI. Comme le dernier membre de cette équation ne renferme que la seule variable u, il est évident que, si l'on pouvoit trouver une fonction de u, par laquelle le premier membre étant multiplié devint intégrable, on auroit la résolution complette de cette équation. J'ai déjà exposé une methode de trouver de tels facteurs; & si l'on en fait l'application à cette équation proposée, on découvre ce facteur cherché $=\frac{1}{K-2ABCGu}$; ou bien, si nous divisons notre équation par K — $2ABCGu$, l'un & l'autre membre deviendra intégrable, ou constructible par des quadratures. Multiplions donc par $\frac{\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$, et mettons le dernier membre

$$\frac{(H - 2ABCFu)\,du.\,\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}} = dU$$

de sorte que U puisse être regardé comme une fonction connue de la variable u, dont nous avons déjà le rapport au tems t.

XLII. Pour le premier membre, en le multipliant par $\frac{G}{(K - 2ABCGu)\sqrt{G}}$, la formule radicale pourra être représentée en sorte:

$$\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}$$

à cause de $K = EG - FF$; & partant ce premier membre sera

$$\frac{(K - 2ABCGu)\,G\,dv + ABCG\,(Gv - \mathfrak{D}F)\,du}{(K - 2ABCGu)\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}}$$

qui, posant $K - 2ABCGu = pp$, $Gv - \mathfrak{D}F = q$, & $G - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = ff$, prendra cette forme $\frac{p\,dq - q\,dp}{p\sqrt{(ffpp - qq)}}$, qui, posant $q = ps$, se change en celle-ci $\frac{ds}{\sqrt{(ff - ss)}}$, dont l'intégrale est Arc. sin $\frac{s}{f}$ = Arc. sin $\frac{fp}{q}$.

Et partant l'intégrale du premier membre sera

$$\text{Arc. sin}\,\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{f\sqrt{(K - 2ABCGu)}} = \text{Arc sin}\,\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}}$$

XLIII. Cette quantité eſt donc égale à la formule intégrale

$$U = \int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\,\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}}$$

& conſidérant U comme un angle, notre équation intégrale ſera:

$$\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}} = \text{ſin}\,U.$$

d'où nous tirons

$$\frac{\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}} = \text{coſ}\,U,$$

de ſorte que notre formule irrationnelle réſulte

$$\sqrt{(..)} = \frac{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}}\ \text{coſ}\,U$$

XLIV. Subſtituons ces valeurs pour v, & la formule irrationnelle dans les expreſſions aſſignées ci-deſſus pour les coſinus des arcs l, m, & n; & après avoir fait les réductions néceſſaires, nous trouverons.

$$\text{coſ}\,l = \frac{\mathfrak{D}aax}{G} + \frac{bbccx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}.\text{ſin}\,U + \frac{Aayz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}\text{coſ}\,U$$

$$\text{coſ}\,m = \frac{\mathfrak{D}bby}{G} + \frac{aaccy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\ \text{ſin}\,U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}\ \text{coſ}\,U$$

$$\text{coſ}\,n = \frac{\mathfrak{D}ccz}{G} + \frac{aabbz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\ \text{ſin}\,U + \frac{Cccxy\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}\ \text{coſ}\,U$$

Donc, puiſqu'on peut définir pour un tems écoulé quelconque t la quantité u, & de celle-ci les variables x, y, z, avec la formule intégrale U, on connoitra auſſi pour le même tems les arcs l, m, & n; de

ſorte

forte que le probleme est résolu jusqu'à la détermination des angles λ, μ, ν, dont il suffit de chercher un seul.

XLV. Mais, puisque nous avons trouvé, tant les quantités x, y, z, que les arcs l, m, n, exprimés par la seule quantité u, & qu'il y a $dt = \frac{du}{xyz}$, la détermination de l'angle $QPA = \lambda$ n'aura aucune difficulté par le moyen de l'équation différentielle $d\lambda = -\frac{dt\,(y \operatorname{cos} m + z \operatorname{cos} n)}{\operatorname{sin} l^2}$. Cependant, puisqu'il n'y a point de raison de chercher plutôt cet angle λ, que les deux autres μ & ν, il semble qu'on fera mieux de chercher l'angle QPO, que fait l'arc PO avec le cercle fixe PQS. Posons donc l'angle $QPO = \phi$; & puisque nous avons déjà trouvé $\operatorname{sin} OAP = \frac{\operatorname{cos}\gamma \operatorname{cos} m - \operatorname{cos}\beta \operatorname{cos} n}{\operatorname{sin}\alpha \ \operatorname{sin} l}$, & $\operatorname{cos} OAP = \frac{\operatorname{cos}\beta \operatorname{cos} m + \operatorname{cos}\gamma \operatorname{cos} n}{\operatorname{sin}\alpha \ \operatorname{sin} l}$, nous aurons $\operatorname{cos} OP = \operatorname{cos}\alpha \operatorname{cos} l + \operatorname{cos}\beta \operatorname{cos} m + \operatorname{cos}\gamma \operatorname{cos} n = \frac{v}{\varkappa}$, à cause de $v = x \operatorname{cos} l + y \operatorname{cos} m + z \operatorname{cos} n$. Mais nous venons de trouver $v = \frac{\mathfrak{D}F}{G} + \frac{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}}{G} \operatorname{sin} U$, & pour $\varkappa$ nous avons $\varkappa\varkappa = E - 2ABCu$.

XLVI. Que dans le tems infiniment petit dt le pole de rotation O soit transporté en o, & tirant l'arc Ao, & la perpendiculaire Op, nous aurons $op = d\alpha$; & puisque le pole O change également par rapport aux axes principaux, soit que nous les regardions comme fixes, ou que nous tenions compte de leur mouvement, considéſidérons l'angle BAO, pour lequel nous avons $\operatorname{cof} BAO = \frac{\operatorname{cof}\beta}{\operatorname{fin}\alpha}$, & $\operatorname{fin} BAO = \frac{\operatorname{cof}\gamma}{\operatorname{fin}\alpha}$. De là nous tirerons $d.\,BAO =$

$OAo = \frac{-d\alpha \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\gamma - d\gamma \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\gamma}{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{cof}\beta}$, & partant $Op =$

$-\frac{d\alpha \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\gamma - d\gamma \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\gamma}{\operatorname{cof}\beta}$. Prolongeons l'arc oO en V, & nous aurons $\operatorname{tang} AoO = \operatorname{tang} AOV = \frac{-\operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\gamma}{\operatorname{cof}\beta} - \frac{d\gamma \operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin}\gamma}{d\alpha \operatorname{cof}\beta}$,

& $Oo = \frac{d\alpha}{\operatorname{cof} AOV} = \sqrt{(d\alpha^2 \operatorname{fin}\alpha^2 + d\beta^2 \operatorname{fin}\beta^2 + d\gamma^2 \operatorname{fin}\gamma^2)}$

qui ſe réduit à cette forme $Oo = \frac{1}{u}\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2)}$..

Maintenant, pour trouver l'angle POV nous avons pour l'angle AOP

$\operatorname{fin} AOP = \frac{\operatorname{fin} OAP.\ \operatorname{fin} l}{\operatorname{fin} PO} = \frac{\operatorname{cof}\gamma \operatorname{cof} m - \operatorname{cof}\beta \operatorname{cof} n}{\operatorname{fin}\alpha\ \operatorname{fin} PO}$ &

$\operatorname{cof} AOP = \frac{\operatorname{cof} l - \operatorname{cf}\alpha \operatorname{cf} OP}{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin} PO} = \frac{\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cof} l - \operatorname{cf}\alpha \operatorname{cf}\beta \operatorname{cf} m - \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cf}\gamma \operatorname{cf} n}{\operatorname{fin}\alpha\ \operatorname{fin} PO}$

& partant

$\operatorname{fin} POV = \frac{(\operatorname{cof}\gamma \operatorname{cf} m - \operatorname{cf}\beta \operatorname{cf} n) \operatorname{cf} AOV - (\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cf} l - \operatorname{cf}\alpha \operatorname{cf}\beta \operatorname{cf} m - \operatorname{cf}\alpha \operatorname{cf}\gamma \operatorname{cf} n) \operatorname{fin} AOV)}{\operatorname{fin}\alpha\ \operatorname{fin} PO}$

XLVII. Or $Oo \operatorname{fin} POV$ donne le petit arc Oq perpendiculaire à l'arc Po, lequel étant auſſi $= d\Phi \operatorname{fin} PO$, nous aurons

$$d\Phi \operatorname{fin} PO = Oo \operatorname{fin} POV = \frac{d\alpha \operatorname{fin} POV}{\operatorname{cof} AOV}, \text{ \& partant}$$

$$d\Phi = \frac{d\alpha}{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin} PO^2} (\operatorname{cof}\gamma \operatorname{cf} m - \operatorname{cf}\beta \operatorname{cf} n - (\operatorname{fin}\alpha^2 \operatorname{cf} l - \operatorname{cf}\alpha \operatorname{cf}\beta \operatorname{cf} m - \operatorname{cf}\alpha \operatorname{cf}\gamma \operatorname{cf} n) \operatorname{tang} AOV).$$

Sub-

Subſtituons ici la valeur de tang $AOV = \frac{-d\alpha \cos\alpha \, c\!f\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{d\alpha \, \cos\beta}$, & parceque $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \, c\!f\beta + d\gamma \sin\gamma \, c\!f\gamma = 0$, nous trouverons

$$d\Phi \sin PO^2 = (d\gamma \cos\beta \sin\gamma - d\beta \sin\beta \, c\!f\gamma) c\!f l + (d\alpha \sin\alpha \, c\!f\gamma - d\gamma \, c\!f\alpha \sin\gamma) \cos m$$
$$+ (d\beta \cos\alpha \sin\beta - d\alpha \sin\alpha \cos\beta) \cos n.$$

Or, puisque $\cos\alpha = \frac{x}{u}$; $\cos\beta = \frac{y}{u}$, $\cos\gamma = \frac{z}{u}$, on aura $d\beta \sin\beta = \frac{y\,du}{uu}$

$$- \frac{dy}{u}, \ \& \ d\gamma \sin\gamma = \frac{z\,du}{uu} - \frac{dz}{u}, \quad \text{donc}$$

$$d\gamma \cos\beta \sin\gamma - d\beta \sin\beta \, c\!f\gamma = \frac{z\,dy - y\,dz}{uu} = \frac{du(Bzz - Cyy)}{uuyz} = \frac{x\,dt(Bzz - Cyy)}{uu},$$

& partant, à cauſe de $Bzz - Cyy = B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}$, nous aurons

$$d\Phi = \frac{dt\,(x(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) \cos l + y(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) \cos m + z(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) \cos n)}{E - 2ABCu - vv}$$

XLVIII. Subſtituons enfin pour $\cos l$, $\cos m$ & $\cos n$ leurs valeurs trouvées; & puisque

$$aaxx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) + bbyy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) + cczz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) = -H + 2ABCFu$$
$$bbccxx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})^2 + aaccyy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})^2 + aabbzz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})^2 =$$
$$(aaxx + bbyy + cczz)(AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy) -$$
$$xxyyzz(Aaa + Bbb + Ccc)^2 = F(H - 2ABCFu)$$
$$Aaa(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) + Bbb(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) + Ccc(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) = ABCF$$

De là nous concluons: $\frac{d\Phi(E - 2ABCu - vv)}{dt} =$

$$- \frac{\mathfrak{D}(H - 2ABCFu)}{G} + \frac{F(H - 2ABCFu)\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \sin U$$
$$+ \frac{ABCFxyz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G}(K - 2ABCGu)} . \cos U$$

Où

Où il faut remarquer qu'il y a $GG(E - 2ABCu - vv) = (G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})FF + G(K-2ABCGu) - (G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)\sin U^2$
$$- 2\mathfrak{D}F\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}.\ \sin U$$

XLIX. Puisque $dU = \frac{dt(H - 2ABCFt)\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$, & $du = xyzdt$, notre différentiel $d\Phi$ sera égal à une fraction, dont le numérateur est
$$-\mathfrak{D}dU(K-2ABCGu)\sqrt{G} + FdU\sqrt{G(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)}.\sin U$$
$$+ \frac{ABCFGdu\sqrt{G(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cos U$$
& le dénominateur:
$$(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})FF + G(K-2ABCGu) - 2\mathfrak{D}F\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)}.\sin U$$
$$- (G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)\sin U^2$$
Pour abréger cette formule, posons $\sqrt{(K - 2ABCGu)} = s$, & $\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})} = h$, de sorte que $ABCGdu = -sds$, & le numérateur sera:
$$- \mathfrak{D}ssdU\sqrt{G} + FhsdUG.\sin U - Fhds\sqrt{G}.\ \cos U$$
& le dénominateur:
$$hhFF + Gss - 2\mathfrak{D}Fhs\sin U - hhss\sin U^2$$

L. Ayant introduit ces valeurs abrégées, nous aurons à intégrer cette formule
$$d\Phi = \frac{-\mathfrak{D}ssdU + FhsdU\sin U - Fhds\cos U}{FFhh + Gss - 2\mathfrak{D}Fhs\sin U - hhss\sin H^2}\sqrt{G}$$
laquelle, à cause de $hh = G - \mathfrak{D}\mathfrak{D}$, se réduit à
$$d\Phi = \frac{-\mathfrak{D}ssdU + FhsdU\sin U - Fhds\cos U}{(Fh - \mathfrak{D}s\sin U)^2 + Gss\cos U^2}\sqrt{G}$$

dont

dont l'intégrale eſt évidemment :

$$\Phi = \text{Arc. tang. } \frac{Fh - \mathfrak{D}s \sin U}{s \cos U . \sqrt{G}}.$$

ou bien $\quad \tang \Phi = \dfrac{Fh - \mathfrak{D}s \sin U}{s \cos U . \sqrt{G}}$.

Cette formule, en reſtituant pour s & h les valeurs ſuppoſées, ſe réduit à celle-ci :

$$\tang \Phi = \frac{F\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \mathfrak{D} \sin U \sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\cos U \sqrt{G(K - 2ABCGu)}}$$

LI. On peut donc trouver cet angle QPO $= \Phi$ indépendamment de la quantité v, où je n'ai pas introduit une nouvelle conſtante, puiſque le cercle fixe PQS peut être établi à volonté. Donc, ſuppoſant cet angle Φ connu, puiſque nous venons de trouver $u \sin PO = \sqrt{(E - 2ABCu - vv)}$, cette quantité eſt égale à $\dfrac{\sqrt{((Fh - \mathfrak{D}s \sin U)^2 + Gss \cos U^2)}}{G}$; & partant à $\dfrac{s \cos U}{\cos \Phi . \sqrt{G}}$; de ſorte que $u \sin PO = \dfrac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} . \dfrac{\cos U}{\cos \Phi}$,

et $\sin PO = \dfrac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(E - 2ABCu)}} . \dfrac{\cos U}{\cos \Phi}$, &

$$\cos PO = \frac{\mathfrak{D}F + \sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)} \sin U}{G\sqrt{(E - 2ABCu)}}$$

Or, ayant trouvé l'angle QPO $= \Phi$, il en faut retrancher l'angle APO pour avoir l'angle QPA $= \lambda$. Pour cet effet nous avons

$\sin APO = \dfrac{z \cos m - y \cos n}{u \sin PO \sin l}$ & $\cos APO = \dfrac{x \sin l^2 - y \cos l \cos m - z \cos l \cos n}{u \sin PO \sin l}$

LII. Quand j'ai traité ce problème la premiere fois, sans faire réflexion que la quantité $aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n$ étoit une quantité constante, il m'a été impossible de déterminer les arcs l, m, n malgré tous les efforts que je fis pour résoudre les équations n°. IV, V, VI du §. XXXIII, quoique j'eusse déjà déterminé les quantités x, y & z, par le tems t. Aussi m'imaginai-je, que ce problème conçû en general surpassoit les forces du calcul; & je ne crûs pas d'y réussir mieux en composant ce Mémoire. Je vis donc avec bien de la surprise que la méthode que j'ai employée ici, m'a conduit au but proposé, laquelle mérite par cette raison d'autant plus d'attention, qu'elle nous fournit un exemple, combien il est dangereux de prononcer sur l'impossibilité de résoudre quelque probleme, quoiqu'on y rencontre les plus grandes difficultés, qui semblent même surmonter toute l'adresse du calcul. Par cette raison il vaudra bien la peine de mettre devant les yeux toutes les parties de la solution de ce problème.

PROBLEME.

Un corps solide d'une figure quelconque n'étant sollicité par aucunes forces, si on lui imprime un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement.

LIII. Si le corps a un mouvement progressif, puisqu'il demeurera pérpetuellement le même, qu'on l'en dépouille, en sorte que son centre d'inertie demeure en repos; & la question revient à déterminer le mouvement de rotation, ou pour chaque tems écoulé tant l'axe de rotation que la vitesse angulaire. Pour cet effet, il faut considérer les trois axes principaux du corps, qui soient IA, IB, IC, et par rapport à eux les momens d'inertie Maa, Mbb, & Mcc. Rapportons le corps à une sphere fixe décrite autour du centre d'inertie du corps I; qu'après le tems $= t$ secondes les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, dans la surface de la sphere, & l'axe de rotation au point O, autour duquel le corps tourne dans le sens ABC avec la vitesse angulaire $= \gamma$, où γ marque l'angle décrit dans une seconde, le sinus total, ou le rayon de la sphere, étant $= 1$. Fig. 1. Fig. 3.

LIV. Poſons pour ce tems de t ſecondes écoulé depuis le commencement: $\text{ȣ}\cos AO = x$; $\text{ȣ}\cos BO = y$; $\text{ȣ}\cos CO = z$: & ſoit pour abréger $\frac{bb-cc}{aa} = A$; $\frac{cc-aa}{bb} = B$; $\frac{aa-bb}{cc} = C$. Cela poſé, s'il fut au commencement $x = \sqrt{\mathfrak{A}}$; $y = \sqrt{\mathfrak{B}}$; & $z = \sqrt{\mathfrak{C}}$, & partant la viteſſe angulaire $= \sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}$, il faut intégrer cette équation $dt = \frac{du}{\sqrt{(\mathfrak{A}+2Au)(\mathfrak{B}+2Bu)(\mathfrak{C}+2Cu)}}$, en ſorte que, faiſant $t = 0$, il devienne $u = 0$. De là on aura pour le tems indéfini t la valeur de u, & enſuite:

$$x = \sqrt{(\mathfrak{A}+2Au)};\ y = \sqrt{(\mathfrak{B}+2Bu)};\ z = \sqrt{(\mathfrak{C}+2Cu)}$$

d'où l'on tirera la viteſſe angulaire

$$\text{ȣ} = \sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-2ABCu)}$$

puiſque $A+B+C = -ABC$. Après cela on connoitra aiſément les arcs OA, OB, OC, des formules $\cos AO = \frac{x}{\text{ȣ}}$; $\cos BO = \frac{y}{\text{ȣ}}$; $\cos CO = \frac{z}{\text{ȣ}}$, qui déterminent la ſituation de l'axe de rotation IO par rapport aux axes principaux du corps.

LV. Enſuite, pour trouver la poſition des axes principaux à l'égard de la ſphere fixe, où je prends à plaiſir un point fixe P avec un cercle fixe PQS, poſons les arcs $PA = l$, $PB = m$, $PC = n$, & ſoit pour abréger:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C} = E;\ \mathfrak{A}aa+\mathfrak{B}bb+\mathfrak{C}cc = F;\ \mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4 = G$$

$$AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} = H$$

$$AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} = K$$

Qu'on cherche maintenant un arc, ou angle U, de ſorte que

$$U = \int \frac{(H-2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K-2ABCGu)\sqrt{(\mathfrak{A}+2Au)(\mathfrak{B}+2Bu)(\mathfrak{C}+2Cu)}}$$

qui

qui renferme une constante arbitraire, outre laquelle on y introduise encore une autre $\mathfrak{D}$; & alors on aura:

$$\cos l = \frac{\mathfrak{D}aax}{G} + \frac{bbccx(B\mathfrak{C}-C\mathfrak{B})\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\sin U + \frac{Aaayz\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\cos U$$

$$\cos m = \frac{\mathfrak{D}bby}{G} + \frac{aaccy(C\mathfrak{A}-A\mathfrak{C})\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\sin U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\cos U$$

$$\cos n = \frac{\mathfrak{D}ccz}{G} + \frac{aabbz(A\mathfrak{B}-B\mathfrak{A})\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\sin U + \frac{Cccxy\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\cos U$$

LVI. Pour ces deux constantes, dont l'une est $\mathfrak{D}$, & l'autre renfermée dans l'arc U, il les faut prendre en sorte, que pour le commencement où $t = 0$ & $u = 0$, les arcs l, m, n, deviennent aussi grands qu'ils ont été précisement alors. Car, quoiqu'il y en ait trois, il suffit d'en avoir déterminé deux, à cause de leur rélation $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Enfin, pour la position à l'égard du cercle PQS, si nous posons l'angle $OPQ = \Phi$, nous aurons en introduisant une nouvelle constante pour l'ajuster à l'état initial,

$$\tan(\Phi + \mathfrak{F}) = \frac{F\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \mathfrak{D}\sin U.\ \sqrt{(K-2ABCGu)}}{\cos U.\ \sqrt{G(K-2ABCGu)}}$$

Or, $\sin APO = \frac{z\cos m - y\cos n}{v\sin PO.\sin l}$, & $v\sin PO = \frac{\sqrt{(K-2ABCGu)}}{\sqrt{G}}.\ \frac{\cos U}{\cos(\Phi+\mathfrak{F})}$

Par ces formules le probleme proposé est parfaitement résolu.

Autre solution du même Probleme.

LVII. La solution précédente n'est si compliquée que parce qu'elle se rapporte en général à un point fixe quelconque P, & à un cercle fixe PQS quelconque, d'où il doit y entrer un grand nombre de constantes. Mais, puisque ces lieux fixes sont arbitraires, on les peut établir en sorte, que nos formules deviennent beaucoup plus simples:

 La

La conſtante $\mathfrak{D}$ dépend principalement du point P, & rien n'empêche, qu'on ne le prenne au commencement en ſorte qu'il devienne $G - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = 0$, ou $\mathfrak{D} = \sqrt{G} = \sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)}$. Alors, ayant trouvé l'angle U comme ci-deſſus, on aura par des formules fort ſimples

$$\operatorname{cof} l = \frac{aax}{\sqrt{G}}; \quad \operatorname{cof} m = \frac{bby}{\sqrt{G}}; \quad \operatorname{cof} n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$$

& partant pour déterminer ces arcs l, m, n, on n'a pas même beſoin de chercher l'angle U. Or pour l'angle $OPQ = \Phi$, on aura, en négligeant la conſtante $\mathfrak{F}$, cette équation $\operatorname{tang} \Phi = -\frac{\sin U}{\operatorname{cof} U}$, ou bien $\Phi = -U$. de ſorte que

$$\Phi = \int \frac{(H - 2ABCFu)du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

LVIII. Mais ayant exprimé ſi commodément les arcs l, m, & n, on peut immédiatement déterminer les angles $QPA = \lambda$, $QPB = \mu$, & $QPC = \nu$, par les premieres formules N°. VII. VIII. & IX. Car, puisque $\sin l^2 = \operatorname{cof} m^2 + \operatorname{cof} n^2 = \frac{b^4yy + c^4zz}{G}$ $= \frac{G - a^4xx}{G}$, & $y \operatorname{cof} m + z \operatorname{cof} n = \frac{bbyy + cczz}{\sqrt{G}} = \frac{F - aaxx}{\sqrt{G}}$ nous aurons $d\lambda = \frac{-dt(F + aaxx)}{G - a^4xx}$, ou bien

$$d\lambda = \frac{-du(\mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc - 2Aaau)\sqrt{G}}{(\mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 - 2Aa^4u)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

Outre cela, nous trouverons, puisque $K = G(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) - FF$

$$\operatorname{cf} PO = \frac{aaxx + bbyy + cczz}{s\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{G}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}$$

&

& sin PO $= \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}}$. & delà

$$\sin APO = \frac{Aayz\sqrt{G}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)(G - a^4xx)}}$$

& $\cos APO = \frac{Gx\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)} - Faax}{\sqrt{(K - 2ABCGu)(G - a^4xx)}}$

Or, pour avoir le point P, on n'a qu'à prendre au commencement $\cos AP = aa\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{G}}$; $\cos BP = bb\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{G}}$ & $\cos CP = cc\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{G}}$.

LIX. Il sera bon de voir, comment ces simples formules données pour $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, satisfont aux équations N°. IV. V. & VI. Puisque $dx = Ayzdt$; $dy = Bxzdt$ & $dz = Cxydt$: les formules $\cos l = \frac{aax}{\sqrt{G}}$; $\cos m = \frac{bby}{\sqrt{G}}$, & $\cos n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$, donnent $dl \sin l = \frac{-Aayzdt}{\sqrt{G}}$; $dm \sin m = \frac{-Bbbxzdt}{\sqrt{G}}$; $dn \sin n = \frac{-Ccxydt}{\sqrt{G}}$

Or $y \cos n - z \cos m = \frac{(cc - bb)yz}{\sqrt{G}} = \frac{-Aayz}{\sqrt{G}}$, & de même $z \cos l - x \cos n = \frac{-Bbbxz}{\sqrt{G}}$; $x \cos m - y \cos l = \frac{-Ccxy}{\sqrt{G}}$; d'où l'égalité est évidente. Mais la principale circonstance qui fournit cette commodité, est que $a^4xx + b^4yy + c^4zz$ est une quantité constante $= G$, sans laquelle il n'y auroit point $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Pour cet effet il faut observer, qu'il y a non seulement $Aaa + Bbb + Ccc = 0$, mais aussi $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$, de sorte que tant $aaxx + bbyy + cczz$ que $a^4xx + b^4yy + c^4zz$ sont des quantités constantes. Mais dévelopons quelques cas particuliers.

I. Si tous les momens d'inertie sont égaux.

LX. Puisque $aa = bb = cc$, nous aurons $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, & partant $x = \sqrt{\mathfrak{A}}$; $y = \sqrt{\mathfrak{B}}$, & $z = \sqrt{\mathfrak{C}}$. Donc $\varkappa = \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$. La vitesse angulaire $\varkappa$ demeurera donc toujours la même, & l' -: de rotation ne changera point par rapport aux axes principaux, puisque les arcs AO, BO, CO demeurent aussi constans. Ensuite, à cause de $\cos l = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{aa\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}} = \cos AO$, $\cos m = \cos BO$, & $\cos n = \cos CO$, le point fixe P tombe en O. D'où nous voyons que l'axe de rotation IO demeure aussi fixe. Concevons donc le point O en P, & l'angle $QOA = \lambda$ sera exprimé par cette équation :

$$d\lambda = \frac{-du\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = -dt\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})} = -\varkappa dt$$

qui est par conséquent proportionel au tems. Tout cela revient à ce qui est dejà connu d'ailleurs, qu'un tel corps, où les momens d'inertie sont égaux entr'eux, quelque mouvement de rotation qu'il ait reçu, le conserve toujours uniformement, & que l'axe de rotation demeure fixe, ou dirigé constamment vers le même point du Ciel.

II. Si deux momens principaux d'inertie sont egaux entr'eux.

LXI. Soit donc $bb = cc$, & nous aurons $A = 0$; $B = 1 - \frac{aa}{cc}$ & $C = \frac{aa}{cc} - 1$, ou $B = -C$. Il faudra donc intégrer cette formule $dt = \frac{du}{\sqrt{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - 2Cu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$, d'où

$$t = \frac{1}{2C\sqrt{\mathfrak{A}}}\,\text{Arc. sin}\,\frac{4Cv - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}} - \frac{1}{2C\sqrt{\mathfrak{A}}}\,\text{Arc. sin}\,\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$$

pour

pour faire en forte que u évanouiffe, pofant $t = 0$. Nous aurons donc pour le tems écoulé de t fecondes

$$u = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{4C} \sin 2C(t + \delta)\sqrt{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{4C}$$

prenant δ en forte que $\sin. 2C\delta\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$, & partant

$$\cos 2C\delta\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}:$$ par conféquent

$$u = \frac{2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{4C} \sin 2Ct\sqrt{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{4C}(1 - \cos 2Ct\sqrt{\mathfrak{A}})$$ ou

$$u = \frac{(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\sin Ct\sqrt{\mathfrak{A}} + 2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}.\cos Ct\sqrt{\mathfrak{A}}}{2C} \sin Ct\sqrt{\mathfrak{A}}.$$

& de là:

$$x = \sqrt{\mathfrak{A}};\ y = \sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)};\ z = \sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}\ \&\ v = \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$$

LXII. La viteffe de rotation demeure donc toujours la même, & puisque $\cos AO = \frac{x}{v} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, l'axe principal IO, par rapport auquel le moment d'inertie eft $= Maa$, les deux autres étant égaux entr'eux $= Mcc$, cet axe confervera toujours la même inclinaifon à l'axe de rotation IO. Enfuite, qu'on prenne un tel point fixe P qu'il y eût au commencement $\cos PA = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$; $\cos PB = \frac{cc\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{G}}$, & $\cos PC = \frac{cc\sqrt{\mathfrak{C}}}{\sqrt{G}}$, où $G = \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}c^4 + \mathfrak{C}c^4$; & après le tems de t fecondes on aura

$$\cos PA = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}};\ \cos PB = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)}}{\sqrt{G}};\ \cos PC = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}}{\sqrt{G}}$$

de

de ſorte que le point A conſerve toujours la même diſtance AP du point fixe P. Enfin, prenant $F = \mathfrak{A}aa + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})cc$, on aura $d\lambda = \frac{-dt}{cc}\sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})c^4)}$, ou bien le point A tournera uniformement autour du point P. De même, pour l'angle $QPO = \phi$ on aura $d\phi = \frac{-dt}{cc}\sqrt{G}$, où l'angle APO eſt auſſi conſtant.

LXIII. Puiſque l'arc PA eſt conſtant, ſon coſinus étant $= \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$, & que cet arc tourne uniformement autour du point fixe P avec la viteſſe angulaire $= \sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{A}a^4}{c^4})}$ dans le ſens RQ, au lieu de conſidérer le point O, examinons l'angle PAB, dont le coſinus eſt $= \frac{\cos m}{\sin l} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, & le ſinus $= \frac{-\cos n}{\sin l} = \frac{-\sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$. Le coſinus de cet angle étoit au commencement $= \frac{\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, & ſon ſinus $= \frac{-\sqrt{\mathfrak{C}}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$. Donc, poſant après le tems t cet angle $PAB = \omega$, nous aurons $d\omega \cos\omega = \frac{-Cdu}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$, & partant $d\omega = \frac{-Cdu}{\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}} = -Cdt\sqrt{\mathfrak{A}}$. D'où nous voyons que l'arc AB tourne uniformement autour du point A, dans le ſens BP, avec la viteſſe angulaire $= C\sqrt{\mathfrak{A}}$. De cette manie-

maniere on ſe repréſentera le plus diſtinctement le mouvement du corps, en diſant que le point du corps A tourne uniformement autour du point fixe P, & que cependant le corps lui même tourne uniformement autour du point A.

LXIV. Puisque les poles B & C peuvent être pris à volonté, pourvu qu'ils ſoient éloignés du pole A de 90°, le mouvement d'un tel corps pourra être repréſenté en général de cette maniere. Premierement, le pole A tournera autour d'un point fixe P uniformément, pendant que le corps lui même tourne auſſi uniformement autour du pole A. Enſuite, poſant l'arc AP $= \zeta$, la viteſſe angulaire, dont l'arc PA tourne autour de P vers PQ, $= \epsilon$, & la viteſſe angulaire, dont le corps tourne autour du pole A dans le ſens BP, $= \delta$. Les équations $\operatorname{cof}\zeta = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$ ou $\operatorname{tang}\zeta = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}$;

$\epsilon = \sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{A}a^4}{c^4})}$ & $\delta = (\frac{aa}{cc} - 1)\sqrt{\mathfrak{A}}$, donnent

$\frac{\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{aa}{cc}\operatorname{tang}\zeta$ & $\frac{\epsilon}{\delta} = \frac{cc}{aa-cc}\sqrt{(\frac{a^4}{c^4}\operatorname{tang}\zeta^2 + \frac{a^4}{c^4})} = \frac{aa}{(aa-cc)\operatorname{cf}\zeta}$,

de ſorte que $\epsilon : \delta = aa : (aa - cc)\operatorname{cof}\zeta$. Qui eſt le rapport entre les viteſſes angulaires ϵ & δ.