



1765

Recherches sur la connoissance mécanique des corps

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

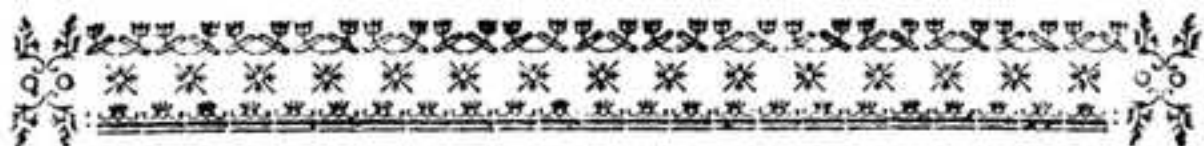
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Recherches sur la connoissance mécanique des corps" (1765). *Euler Archive - All Works*. 291.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/291>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



R E C H E R C H E S

SUR LA CONNOISSANCE MÉCANIQUE DES CORPS.

PAR M. E U L E R.

I.

On peut établir une triple connoissance des corps, la géométrique, Table I. la mécanique, & la physique. La connoissance géométrique ne regarde que l'étendue & la figure des corps: c'est la partie de la Géométrie, qui est nommée la *Stéréométrie*, qui renferme cette connoissance. La connoissance mécanique considère les corps tant qu'ils sont matière, sans avoir égard aux qualités dont la matière est douée; & il s'agit ici de connoître, non seulement la quantité de matière dont chaque corps est composé, qu'on nomme sa masse; mais aussi la manière dont la matière est distribuée par toute l'étendue des corps. Cette connoissance est absolument nécessaire lorsqu'il est question du mouvement des corps; & c'est par cette raison, qu'elle est nommée mécanique. Enfin la connoissance physique des corps renferme toutes les autres propriétés & qualités des corps, qui sont le propre objet de la Physique.

II. La connoissance mécanique des corps est le fondement de la Mécanique, puisqu'on ne sauroit déterminer le mouvement des corps sans connoître leur masse, & comment la matière est distribuée par toute leur étendue. C'est de là qu'on a tiré l'idée du centre de gravité, dont la connoissance est, comme on fait, de la dernière importance par toute la Mécanique. L'idée du centre d'oscillation y doit aussi être rapportée, au lieu de laquelle on peut substituer celle des *momens d'inertie*, dont je me suis servi jusqu'ici avec bien du succès dans mes



recherches mécaniques. Mais je viens de découvrir encore d'autres idées sur cette matiere, qui semblent porter notre connoissance mécanique à un beaucoup plus haut degré de perfection: du moins m'ont elles servi à résoudre des problemes mécaniques, qui m'avoient paru intraitables sans leur secours. Toutes ces idées jointes ensemble fourniroient un système assez complet de la connoissance mécanique des corps.

*La masse
des corps.*

III. La premiere idée que la connoissance mécanique des corps nous présente, est celle de leur masse, qui est l'assemblage de toute la matiere, dont le corps est composé. Or la matiere n'entre en considération, qu'entant qu'elle est douée de l'inertie; de sorte que la masse est la mesure de l'inertie, ou de cette qualité des corps, par laquelle ils s'efforcent de demeurer dans le même état, ou de repos, ou de mouvement uniforme rectiligne. En examinant les phénomènes de la gravité, on a trouvé que le poids de chaque corps est proportionnel à sa masse, du moins dans la même région de la terre; & partant il est permis de regarder le poids de chaque corps comme la mesure de sa masse. S'il est question des corps qui se trouvent loin de la terre, leur masse sera exprimée par le poids que ces corps auroient, s'ils étoient placés à la surface de la terre, & même dans la région qu'on aura choisie pour y fixer cette mesure. Ou bien, il suffit de connoître le rapport de la masse d'un tel corps à celle d'un corps sur la terre, dont le poids est connu. On comprend, sans que j'aye besoin d'en avertir, que je parle ici du poids que les corps auroient dans le vuide.

*Le centre de
gravité.*

IV. Si la matiere dont un corps est composé, étoit également distribuée par toute son étendue, la connoissance de sa masse seroit suffisante pour en connoître toutes les relations au mouvement; & la connoissance géométrique de sa figure fourniroit toutes les autres idées, qui entrent dans la considération du mouvement: de tels corps sont appellés homogenes. Mais, si la matiere est inégalement distribuée par l'étendue du corps, il en faut tenir compte dans la Mécanique; & de là résultent plusieurs idées, qui dépendent de la distribution de la matiere



tiere par l'étendue du corps, dont la plus connue est celle du centre de gravité. Tout le monde fait, qu'il se trouve dans chaque corps un certain point, autour du quel la pesanteur est quasi également distribuée, & dans lequel on se puisse imaginer, comme si toute la masse du corps y feroit réunie. Mais cette idée est trop vague, & demande bien des éclaircissémens & des rectifications.

V. D'abord qu'est-ce que cette égale distribution de la matiere ou de la pesanteur autour du centre de gravité? S'imagine-t-on que, si l'on coupe un corps par un plan, qui passe par son centre de gravité, les deux parties seront également pesantes? Cela seroit bien vrai dans un globe ou dans un cylindre homogène, mais un cône, quoiqu'il soit homogène, détruit cette explication; car le centre de gravité d'un tel cône se trouvant dans son axe, à une distance de la base, qui est le quart de sa hauteur, si l'on coupe le cône par un plan parallèle à sa base, & qui passe par son centre de gravité, le cône retranché sera au cône entier comme 27 à 64. donc il sera plus petit que la moitié. Or, si le corps n'est pas homogène, il n'arrive presque jamais, que les sections faites par son centre de gravité le partagent en deux parties égales, ou également pesantes.

VI. Il en est de même de l'autre propriété alléguée du centre de gravité, qui suppose qu'on puisse toujours concevoir la masse ou le poids entier du corps comme réuni dans son centre de gravité. Cela n'est vrai, que lorsqu'il s'agit de l'état d'équilibre, ou d'un mouvement purement progressif des corps, où toutes les parties se meuvent à chaque instant avec des vitesses égales suivant la même direction. Or, dès que le mouvement est gyrotoire, ou se fait autour d'un axe fixe, cette supposition n'a plus lieu: & l'on fait que le mouvement d'un pendule est bien différent de celui qu'il auroit, si toute sa masse étoit réunie dans son centre de gravité. C'est alors à un autre point qu'il faut faire attention, & qu'on nomme le centre d'oscillation du pendule.

VII. De là il est évident qu'il faut mieux fixer l'idée du centre de gravité. Et d'abord, il est constant, qu'il y a dans chaque corps un



certain point, qui tient un certain milieu entre la matiere qui compose le corps, dont la connoissance est de la derniere importance dans toute la Mécanique. Quand le corps se trouve à la surface de la terre, ce point est bien le même qu'on nomme son centre de gravité; mais, quand même le corps ne se trouveroit dans aucune liaison avec la terre, ou qu'il ne seroit pas assujetti à l'action de la gravité, ce point ne lui seroit pas moins essentiel, & entreroit également dans la détermination de ses mouvemens. Donc, puisque ce point est absolument indépendant de la gravité, & qu'il est déterminé uniquement par la distribution de la matiere dont le corps est composé, je le nommerai plutôt le *centre de masse*, ou le *centre d'inertie* de chaque corps.

VIII. Il faut aussi considérer, que ce centre d'inertie ne convient avec le centre de gravité du corps, que lorsque les directions de la gravité sur tous les élémens du corps sont paralleles entr'elles, & que le poids de chaque élément est proportionnel à sa masse, comme on peut le supposer, quand le corps se trouve à la surface de la terre, & que son étendue est quasi infiniment petite par rapport à la distance au centre de la terre. Mais, si le corps étoit extrêmement grand, de sorte que, ni les directions de la gravité ne seroient plus paralleles entr'elles, ni les forces dont les parties du corps sont sollicitées, proportionnelles à leurs masses; l'idée même du centre de gravité n'auroit plus lieu, quoique celle du centre d'inertie lui fût également essentielle.

*Le centre
d'inertie.*

IX. Par ces raisons il convient de séparer tout à fait l'idée du centre d'inertie de l'action de la gravité. Il s'agit donc de donner une juste définition de ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps. Si nous regardons à l'origine de cette idée, que fournit la Mécanique, on considère des forces appliquées à chaque élément du corps, qui soient proportionnelles chacune à l'inertie, ou la masse de l'élément, auquel elles sont appliquées, & que leurs directions soient paralleles entr'elles. Alors on cherche la direction moyenne de toutes ces forces élémentaires; & l'on observe que cette direction moyen-

ne



ne passe toujours par un certain point du corps, quelque direction qu'on donne aux forces élémentaires. C'est donc ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps, & qui est le même que son centre de gravité, lorsque le corps se trouve aux environs de la Terre, & qu'il n'est pas trop grand, pour qu'on puisse considérer les forces élémentaires de la gravité comme proportionnelles aux masses des élémens, & leurs directions comme paralleles entr'elles.

X. Mais, pour dégager cette définition de la considération des forces, qu'on rapporte le corps à un plan quelconque, en multipliant la masse de chaque élément par sa distance à ce plan; & la somme de tous ces produits sera toujours égale au produit de la masse entiere du corps par la distance de son centre d'inertie au même plan. C'est en cela que consiste la nature du centre d'inertie. Mais on a raison de douter si cette définition est possible, puisqu'elle semble plus que déterminée. Car, prenant à volonté trois plans, auxquels on rapporte le corps de la maniere prescrite, il est clair que de là le centre d'inertie sera déjà déterminé. Il est donc encore douteux, si ce point aura la même propriété à l'égard de tous les autres plans: au moins n'est-il pas permis de le supposer; mais cela demande une démonstration particulière, sans laquelle la définition donnée seroit absurde.

XI. Pour rendre cette definition plus intelligible, je nommerai le moment d'un corps par rapport à un plan donné, la somme de tous les produits, qui résultent en multipliant la masse de chaque élément du corps par sa distance au - dit plan. Cela posé, je dis, qu'il se trouve dans chaque corps un certain point de cette nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque est toujours égal à la masse entiere du corps multipliée par la distance du dit point au même plan. Ensuite, ayant démontré l'existence de ce point, la définition n'aura plus de difficulté en disant, que c'est ce point qu'on nomme le centre d'inertie d'un corps. Il faut remarquer ici, que, si le plan coupe le corps, de sorte qu'une partie du corps se trouve d'un côté & l'autre de l'autre côté du plan, le moment d'une partie par rapport au plan

*Le moment
d'un corps par
rapport à un
plan.*



plan doit être pris négativement à l'égard de l'autre; tout comme la nature du calcul exige, où les distances, qui tombent à l'autre côté du plan, doivent être censées négatives.

Fig. 1.

XII. Voilà donc un Théoreme, dont la démonstration doit précéder notre définition. Pour cet effet, je remarque d'abord que, s'il y a un point dans le corps, qui a la propriété décrite par rapport à un certain plan, il aura la même propriété par rapport à tout autre plan parallele à celui là. Car, soit LMN un corps, dont la masse $\equiv M$, & I le point en question, dont la distance au plan proposé soit $\equiv f$. Qu'on considere un élément quelconque du corps en Z, dont la masse soit $\equiv dM$, & la distance au même plan $\equiv x$. Le moment du corps par rapport à ce plan sera donc $\equiv \int x dM$, & par l'hypothese $\int x dM \equiv Mf$. Qu'on prenne maintenant un autre plan parallele au précédent à la distance $\equiv e$, & puisque l'élément dM en Z se trouve à la distance $e + x$, le moment du corps par rapport à ce plan sera $\equiv \int (e + x) dM \equiv Me + \int x dM \equiv M(e + f)$ à cause de $\int x dM \equiv Mf$. Or $e + f$ étant la distance du point I à ce nouveau plan, le moment du corps est égal au produit de la masse M par cette distance du point I à ce plan.

Fig. 2.

XIII. Rapportons maintenant le corps à trois plans AOB, AOC, & BOC, perpendiculaires entr'eux, les trois droites AO, BO, & CO, se croisans perpendiculairement à ce point O, & l'on pourra marquer le point I dans le corps, qui ait la propriété prescrite par rapport à ces trois plans proposés. Que IH soit perpendiculaire au plan AOB, & HG à la droite OA; & nommant les ligges OG $\equiv g$, & HI $\equiv h$, la droite f sera la distance du point I au plan BOC, g celle au plan AOC, & h celle au plan AOB. Qu'on considere un élément quelconque du corps en Z, dont la masse soit $\equiv dM$, la masse entiere étant $\equiv M$, & tirant pareillement la droite ZY perpendiculaire au plan AOB, & YX à la droite OA, soient OX $\equiv x$, XY $\equiv y$ & YZ $\equiv z$. De là le moment du corps par rapport au plan BOC sera $\int x dM \equiv Mf$, par rapport au plan



plan $AOC \equiv \int y dM \equiv Mg$, & par rapport au plan $AOB \equiv \int z dM \equiv Mh$: d'où trouvant les trois lignes f, g, h , le lieu du point T sera déterminé.

XIV. Il y a donc certainement dans chaque corps un point I , qui a la propriété prescrite par rapport aux trois plans perpendiculaires entr'eux; & partant il faut prouver, que la même propriété convient au point I par rapport à tout autre plan. Or il suffit de le prouver à l'égard d'un plan quelconque, qui passe par le point O . Car, après avoir démontré cette propriété à l'égard de tous les plans qui passent par le point O , puisqu'elle a lieu aussi pour tous les plans qui leur sont parallèles, elle sera vraie pour tous les plans possibles.

XV. Considérons donc un plan quelconque qui passe par le point O , & qui coupe le plan AOB par la droite OS , faisant avec OA l'angle $AOS \equiv \zeta$, & que ce plan soit incliné au plan AOB vers B de l'angle $\equiv \eta$. Il s'agit donc de trouver la distance du point Z à ce nouveau plan. Pour cet effet, ayant tiré YP à OS , perpendiculaire, on aura $OP \equiv x \cos \zeta + y \sin \zeta$ & $YP \equiv y \cos \zeta - x \sin \zeta$. Que ce nouveau plan coupe la droite YZ au point Q , & QP étant perpendiculaire à OP , l'angle YPQ sera la mesure de l'inclinaison, & partant $YPQ \equiv \eta$. Donc $YQ \equiv (y \cos \zeta - x \sin \zeta) \tan \eta$, & de là $QZ \equiv z - (y \cos \zeta - x \sin \zeta) \tan \eta$. Maintenant, tirant ZR perpendiculaire à PQR , elle sera perpendiculaire au plan proposé; & à cause de l'angle $ZQR \equiv 90^\circ - \eta$, on aura $ZR \equiv QZ \cdot \sin ZQR \equiv z \cos \eta - y \cos \zeta \sin \eta + x \sin \zeta \sin \eta$.

XVI. Or cette ligne ZR exprimant la distance du point Z au plan proposé, le moment du corps par rapport à ce plan, à cause des angles ζ & η constans, sera

$$\cos \eta \cdot \int z dM - \cos \zeta \sin \eta \int y dM + \sin \zeta \sin \eta \int x dM$$

& puisque $\int x dM \equiv Mf$, $\int y dM \equiv Mg$, $\int z dM \equiv Mh$, ce moment s'exprimera en sorte

$$Mh \cos \eta - Mg \cos \zeta \sin \eta + Mf \sin \zeta \sin \eta.$$



Mais, si nous menons du point I une perpendiculaire au plan proposé OPQ, nous la trouverons par un semblable raisonnement en employant les lettres f, g, h , au lieu de x, y, z , exprimée en sorte

$$h \cos \eta - g \cos \zeta \sin \eta + f \sin \zeta \sin \eta$$

laquelle étant multipliée par la masse du corps M, donne un produit égal au moment du corps par rapport au plan proposé OPQ.

XVII. Voilà donc cette vérité rigoureusement démontrée; qu'il y a dans chaque corps un point de telle nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque est toujours égal au produit de la masse du corps par la distance dudit point au même plan. Donc, pour trouver un tel moment, on peut toujours considérer toute la masse du corps comme réunie dans le centre d'inertie, puisqu' alors la masse multipliée par la distance de ce point au plan donne le moment du corps par rapport à ce plan. Comme la connoissance de ces moments est d'un très grand usage dans la Mécanique, il est de la dernière importance de connoître ce centre d'inertie de tous les corps, dont on veut rechercher les mouvemens; & c'est un article très essentiel qui appartient à la connoissance mécanique des corps.

XVIII. Si le plan auquel on veut rapporter le corps, passe par son centre d'inertie, le moment du corps par rapport à ce plan est $= 0$. Ou bien le corps en est partagé en deux parties, dont les moments par rapport à ce plan sont égaux. Donc, si l'on fait passer les trois plans AOB, AOC, BOC, que j'ai employés ci-dessus pour cette recherche, par le centre d'inertie même du corps, de sorte que ce centre se trouve au point O, les trois coordonnées $OX = x$, $OY = y$, $OZ = z$, qui déterminent le lieu de chaque élément du corps dM supposé en Z, ont cette propriété très remarquable, que

$$\int x dM = 0; \quad \int y dM = 0, \quad \int z dM = 0.$$

C'est à dire, la somme de tous les produits de chaque élément du corps par chacune de ses trois coordonnées se réduit à rien; ou bien,
chacu-



chacune de ces trois sommes contient autant de produits négatifs que d'affirmatifs. D'où l'on voit que le centre d'inertie se trouve au dedans du corps, qu'on peut nommer *le milieu mécanique du corps*.

XIX. C'est une vérité aussi importante que remarquable, qu'il y a dans chaque corps un tel point, que je nomme son centre d'inertie, & qui est d'ailleurs connu sous le nom de son centre de gravité. Mais, puisqu'il lui est également essentiel, quand même il n'y auroit point de gravité, & qu'il dépend uniquement de son inertie, cette raison étoit suffisante pour en changer le nom. L'idée des momens auxquels le centre d'inertie se rapporte, a aussi quelque chose de singulier; puisqu'en considérant les masses mêmes, il n'est pas possible d'assigner dans tous les corps un tel point, par lequel tous les plans tirés les partageroient en deux parties égales. Car, quoique trois plans, dont chacun divise le corps en deux parties égales, se croisent dans un point, il ne s'ensuit pas que d'autres plans, qu'on feroit passer par le même point, diviseroient aussi le corps en deux parties égales, comme nous avons vu que cela arrive à l'égard des momens.

XX. Tant que le mouvement d'un corps est progressif, ou que tous ses élémens se meuvent à chaque instant avec des vitesses égales selon la même direction, il n'y a que le centre d'inertie avec la masse du corps, qui entre dans la détermination de son mouvement, de quelque façon que la matière soit distribuée par l'étendue du corps. Mais, quand le corps se meut en tournant autour d'un certain axe, il ne suffit pas qu'on sache son centre d'inertie; il y a encore une relation tout à fait particulière dont la détermination du mouvement dépend. C'est ce que je nomme *le moment d'inertie du corps*, par rapport à l'axe, autour duquel le corps tourne, & qui est la somme de tous les produits qui résultent en multipliant la masse de chaque élément du corps par le quarré de sa distance à cet axe, ou bien à une ligne droite quelconque, qu'on regarde comme l'axe autour duquel le corps tourne.



XXI. Puisque chacun de ces produits élémentaires renferme le carré d'une ligne, aucun ne sauroit jamais devenir négatif : & partant le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne est toujours positif, & d'autant plus grand que la masse du corps est grande, & que ses parties sont éloignées de cette ligne. Il est donc nécessaire de connoître tous les momens d'inertie d'un corps par rapport à toutes les lignes droites, autour desquelles il pourroit tourner : & partant on demande une méthode, par laquelle on puisse aisément trouver tous ces momens. Or, quoique le nombre de ces lignes soit infini, je ferai premièrement voir, qu'il suffit d'avoir trouvé ces momens d'inertie par rapport aux lignes droites qui passent par le centre d'inertie du corps ; ensuite, je montrerai qu'il suffit de connoître seulement trois momens d'inertie par rapport à trois certaines lignes qui passent par son centre d'inertie, & que de ceux-ci il est ensuite fort aisé de conclure les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles, quelque position qu'elles ayent à l'égard du corps.

Fig. 3.

XXII. Je dis donc premièrement, que connoissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe ID , qui passe par son centre d'inertie I , il est aisé d'en trouver le moment d'inertie du même corps par rapport à une autre ligne droite OT , parallèle à l'axe ID . Car, soit un élément du corps, dont la masse $= dM$ en Z , d'où l'on tire au plan $IDOT$ la perpendiculaire ZY ; & de Y la droite YXV , perpendiculaire aux lignes ID & OT . Qu'on nomme $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, & puisque I est le centre d'inertie du corps, on aura, par ce que je viens de démontrer, $\int x dM = 0$, $\int y dM = 0$, & $\int z dM = 0$. Or la droite $XZ = \sqrt{yy + zz}$ marquant la distance de l'élément du corps dM en Z à l'axe ID , le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe fera $= \int dM (yy + zz)$, en étendant cette intégrale par toute la masse du corps. Donc, la valeur de cette intégrale $\int dM (yy + zz)$ est supposée être connue.

XXIII. Soit maintenant la distance entre les deux lignes parallèles ID & OD , savoir l'intervalle $IO = XV = e$, & on aura la distan-



ce de l'élément du corps dM en Z à la ligne droite OT , qui fera $ZV = \sqrt{(e+y)^2 + zz}$, à cause de $VY = e+y$. Donc, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT devient $= \int dM ((e+y)^2 + zz) = \int dM (ee + 2ey + yy + zz) = \int eedM + 2efy dM + \int dM (yy + zz)$. Or, posant la masse entière du corps $= M$, on aura $\int eedM = Mee$, & à cause de $\int ydM = 0$, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT étant $= Mee + \int dM (yy + zz)$, surpasse toujours le moment d'inertie par rapport à l'axe ID ; & l'excès est égal au produit de la masse du corps M par le carré ee de la distance entre les lignes ID & OT .

XXIV. De là on voit que si l'on considère les momens d'inertie d'un corps par rapport à une infinité de lignes, qui sont toutes parallèles entr'elles, le plus petit de tous ces momens sera toujours celui, qui répond à la ligne qui passe par le centre d'inertie du corps: ce qui est une propriété bien remarquable de ce point. La recherche des momens d'inertie d'un corps se réduit donc aux seules lignes qui passent par son centre d'inertie, de sorte qu'ayant trouvé tous ces momens d'inertie, on en peut déduire aisément les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles. Car, quelque ligne qui puisse être proposée, on n'a qu'à lui tirer une parallèle par le centre d'inertie, dont l'intervalle soit $= e$. Qu'on prenne ensuite le moment d'inertie par rapport à cette ligne tirée par le centre d'inertie, & qu'on y ajoute le produit Mee , pour avoir le moment d'inertie par rapport à la ligne proposée.

XXV. Mais la recherche des momens d'inertie par rapport à toutes les droites qui passent par le centre d'inertie du corps, demanderoit encore un travail infini, s'il n'y avoit point quelque rapport entr'eux, de sorte qu'en connoissant quelques uns, on en puisse déterminer les autres. Pour découvrir un tel rapport, considérons la chose en général, & supposons que nous connoissons les momens d'inertie d'un corps par rapport à trois axes IA, IB, IC , qui se croisent perpendiculairement entr'eux au centre d'inertie du corps I . Ensuite,

Fig. 4.



voyons ce qu'il faudroit connoître au delà pour déterminer le moment d'inertie du même corps par rapport à tout autre axe IF , qui passe aussi par le centre l'inertie I . Pour cet effet, soit un élément quelconque du corps, dont la masse $\equiv dM$ en Z , d'où l'on tire au plan AIB la perpendiculaire ZY , & de Y à l'axe IA la perpendiculaire YX . Alors, nommant les coordonnées $IX \equiv x$, $XY \equiv y$, $YZ \equiv z$, je suppose qu'on connoisse à chaque point déterminé par ces coordonnées l'élément de masse dM qui s'y trouve.

XXVI. De là il est évident, que le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IA sera $\equiv \int dM (yy + zz)$ par rapport à l'axe $IB \equiv \int dM (xx + zz)$, & par rapport à l'axe $IC \equiv \int dM (xx + yy)$. Donc, posant les intégrales suivantes étendues par toute la substance du corps,

$$\int x x dM \equiv A, \quad \int y y dM \equiv B, \quad \int z z dM \equiv C$$

les momens d'inertie seront déterminés enforte :

$$\text{Mom. d'inertie par rapport à l'axe } IA \equiv B + C$$

$$\text{Mom. d'inertie par rapport à l'axe } IB \equiv A + C$$

$$\text{Mom. d'inertie par rapport à l'axe } IC \equiv A + B$$

d'où nous connoissons d'abord cette belle propriété, que chacun de ces trois momens d'inertie est plus petit que la somme des deux autres, puisque les quantités A, B, C , sont nécessairement positives.

XXVII. Pour la position d'un autre axe quelconque IF , qui passe aussi par le centre d'inertie I , qu'on conçoive un plan perpendiculaire au plan ABC , dans lequel se trouve cet axe IF , l'intersection avec le plan ABC étant la droite IE , & soient les angles $AIE \equiv \eta$, $EIF \equiv \theta$. Qu'on mene de Y à la droite IE la perpendiculaire YP , & on aura $IP \equiv x \cos \eta + y \sin \eta$, & $PY \equiv y \cos \eta - x \sin \eta$. Qu'on tire de P la droite PK parallèle & égale à $YZ \equiv z$, laquelle se trouvera dans le plan EIF , & coupera la droite IF quelquepart en Q , de sorte que

$$PQ = IP \cdot \text{tang } \theta = (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) \text{ tang } \theta \quad \&$$

$$IQ = IP : \text{cof } \theta = (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) : \text{cof } \theta$$

done $QR = z - (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) \text{ tang } \theta.$

Baïssons enfin de R sur IF la perpendiculaire RS, & puisque l'angle QRS = FIE = θ , nous aurons,

$$RS = QR \text{ cof } \theta = z \text{ cof } \theta - (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) \text{ fin } \theta, \quad \&$$

$$QS = QR \text{ fin } \theta = z \text{ fin } \theta - (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) \text{ fin } \theta^2 : \text{cof } \theta.$$

Ajoutons y IQ = $(x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) : \text{cof } \theta$, & à cause de

$$\frac{1}{\text{cof } \theta} - \frac{\text{fin } \theta^2}{\text{cof } \theta} = \text{cof } \theta, \quad \text{nous obtiendrons :}$$

$$IS = z \text{ fin } \theta + (x \text{ cof } \eta - y \text{ fin } \eta) \text{ cof } \theta.$$

XXVIII. Maintenant ces trois lignes

$$IS = z \text{ fin } \theta + (x \text{ cof } \eta - y \text{ fin } \eta) \text{ cof } \theta$$

$$SR = z \text{ cof } \theta - (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) \text{ fin } \theta$$

$$RZ = PY = y \text{ cof } \eta - x \text{ fin } \eta$$

étant perpendiculaires entr'elles, & paralleles à des directions fixes, dont l'une est le nouvel axe IF, une autre perpendiculaire à IE dans le plan AIB, & la troisième perpendiculaire aux deux autres, & partant aussi donnée; on les peut regarder comme trois autres coordonnées paralleles à trois autres axes perpendiculaires entr'eux. De là la droite ZS exprimant la distance du point Z à l'axe IF, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe fera

$$\int dM(RZ^2 + SR^2) = \int dM((y \text{ cof } \eta - x \text{ fin } \eta)^2 + (z \text{ cof } \theta - (x \text{ cof } \eta + y \text{ fin } \eta) \text{ fin } \theta)^2)$$

qui se réduit à cette forme

$$\int dM \left\{ \begin{array}{l} +xx \text{ fin } \eta^2 + yy \text{ cof } \eta^2 + zz \text{ cof } \theta^2 - 2xy \text{ fin } \eta \text{ cof } \eta - 2xz \text{ cof } \eta \text{ fin } \theta \text{ cof } \theta - 2yz \text{ fin } \eta \text{ fin } \theta \text{ cof } \theta \\ +xx \text{ cof } \eta^2 \text{ fin } \theta^2 + yy \text{ fin } \eta^2 \text{ fin } \theta^2 + 2xy \text{ fin } \eta \text{ cof } \eta \text{ fin } \theta^2 \end{array} \right\}$$



XXIX. Ayant supposé $\int x x dM = A$, $\int y y dM = B$, $\int z z dM = C$, si nous supposons de plus les intégrales suivantes prises par toute l'étendue du corps: $\int y z dM = D$; $\int x z dM = E$; $\int x y dM = F$ le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IF sera

$$A(\sin^2 \eta + c \eta^2 \sin^2 \theta) + B(c \eta^2 + \sin^2 \eta \sin^2 \theta) - C c \eta^2 - 2D \sin \eta \sin \theta c \eta - 2E c \eta \sin \theta c \eta - 2F \sin \eta c \eta c \eta^2$$

Donc, si nous savions, outre les moments d'inertie par rapport aux axes IA, IB, IC, encore les valeurs des intégrales D, E, F, nous serions en état d'assigner le moment d'inertie du corps par rapport à tout autre axe IF tiré par le centre d'inertie, & partant aussi par rapport à toutes les lignes droites.

XXX. Mais, pour rendre cette méthode encore plus simple, & pour éclaircir mieux la théorie des momens d'inertie, il est bon de considérer plus en détail les momens d'inertie par rapport à tous les axes tirés par le centre d'inertie. Et d'abord, je remarque, puisqu'aucun de ces momens ne sauroit devenir infini, ni évanouir, qu'il doit y avoir parmi eux tant un plus grand qu'un plus petit; & il est important de connoître parmi cette infinité d'axes celui auquel répond le moment le plus grand, de même que le plus petit. Ensuite, en réfléchissant sur l'usage dans la Mécanique, on fait que le corps ne sauroit tourner librement, qu'autour d'un tel axe, par rapport auquel toutes les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement. Or l'une & l'autre de ces deux conditions reviennent au même; ce qui est encore une très remarquable propriété dans la théorie des momens d'inertie.

XXXI. Pour prouver cette belle harmonie, cherchons premièrement quelle position doit avoir l'axe IF, afin que le moment d'inertie qui lui répond soit, ou le plus grand, ou le plus petit. Pour cet effet, on n'a qu'à différencier la formule trouvée pour le moment d'inertie par rapport à l'axe IF, en supposant les angles η & θ variables, & à égaler les différentiels à zero: Or la variabilité de l'angle η nous fournit cette équation:



$$2A(\sin\eta\cos\eta - \sin\eta\cos\eta\sin\theta^2) + 2B(\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2 - \sin\eta\cos\eta) \\ - 2D\cos\eta\sin\theta\cos\theta + 2E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta^2 = 0$$

qui se réduit à cette forme :

$$A\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - B\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - D\cos\eta\sin\theta\cos\theta + E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta^2 = 0$$

Mais la variabilité de l'angle θ donne cette équation

$$2A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + 2B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - 2C\sin\theta\cos\theta - 2D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) \\ - 2E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 4F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

ou bien celle-ci :

$$A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) \\ - E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

De ces deux équations on déterminera les deux angles η & θ , & partant la position de l'axe IF , par rapport auquel le moment d'inertie est, ou le plus grand, ou le plus petit.

XXXII. Voyons maintenant, aussi quelle doit être la position de l'axe I' , afin que le corps puisse tourner librement autour de lui, ou que les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement. On fait que la force centrifuge de l'élément dM en Z est proportionnelle au produit de sa masse dM par la distance ZS de l'axe IF , ou bien à $ZS \cdot dM$, & qu'elle agit selon la direction SZ . Décomposons cette force selon les directions SR , & RZ . & nous aurons la force selon $SR = SR \cdot dM$, & selon $RZ = RZ \cdot dM$. Ces deux forces étant en deux plans fixes, il faut que les unes & les autres se détruisent séparément, & non seulement les forces mêmes, mais aussi leurs moments. Or, puisque $SR = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta$ & $RZ = PY = y\cos\eta - x\sin\eta$, il est évident qu'il y aura, tant $\int SR \cdot dM = 0$, que $\int RZ \cdot dM = 0$ puisque nous avons déjà, par la condition du centre d'inertie I , $\int x \cdot dM = 0$, $\int y \cdot dM = 0$, $\int z \cdot dM = 0$.



XXXIII. Il reste donc que les momens aussi de ces doubles forces se détruisent mutuellement. Rapportons ces momens au point fixe I, ou multiplions les forces trouvées & appliquées au point S par la distance IS = $z \sin \theta + (x \cos \eta + y \sin \eta) \cos \theta$, & il faudra qu'il provienne tant $\int SR. IS. dM = 0$ que $\int RZ. IS. dM = 0$. Voilà donc deux équations pour la détermination de l'axe IF, qui, en substituant les valeurs assignées, seront

$$I \left\{ \begin{aligned} & z z \sin \theta \cos \theta - x x \cos \eta^2 \sin \theta \cos \theta - y y \sin \eta^2 \sin \theta \cos \theta + x z \cos \eta \cos \theta^2 + y z \sin \eta \cos \theta^2 - 2 x y \sin \eta \cos \eta \sin \theta \cos \theta \\ & - x z \cos \eta \sin \theta^2 - y z \sin \eta \sin \theta^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

&

$$dM \left\{ \begin{aligned} & - x x \sin \eta \cos \eta \cos \theta + y y \sin \eta \cos \eta \cos \theta - x z \sin \eta \sin \theta + y z \cos \eta \sin \theta + x y \cos \eta^2 \cos \theta \\ & - x y \sin \eta^2 \cos \theta \end{aligned} \right\} = 0$$

Il faut étendre ces deux intégrales par toute la substance du corps pour avoir deux équations finies, d'où l'on puisse déterminer les deux angles η & θ .

XXXIV. Puisque les angles η & θ sont constans, nous n'avons qu'à mettre pour les formules intégrales $\int x x dM$, $\int y y dM$, &c. les valeurs supposés, & nous obtiendrons ces deux équations finies:

$$\begin{aligned} & - A \cos \eta^2 \sin \theta \cos \theta - B \sin \eta^2 \sin \theta \cos \theta + C \sin \theta \cos \theta \\ & + D \sin \eta (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) + E \cos \eta (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) - 2 F \sin \eta \cos \eta \sin \theta \cos \theta = 0 \\ & - A \sin \eta \cos \eta \cos \theta + B \sin \eta \cos \eta \cos \theta + D \cos \eta \sin \theta - E \sin \eta \sin \theta + F (\cos \eta^2 - \sin \eta^2) \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

lesquelles conviennent parfaitement avec les deux équations trouvées ci-dessus. Donc les axes, autour desquels un corps peut tourner librement, ont en même tems cette belle propriété que, par rapport à eux, le moment d'inertie du corps est, ou un plus grand, ou un plus petit. Il est donc de la dernière importance de connoître ces axes dans chaque corps; & je les distinguerai des autres par le titre d'*axes principaux du corps*.



XXXV. Les axes principaux d'un corps sont donc de certaines Les axes
principaux
des corps. lignes droites, qui passent par le centre d'inertie du corps, autour desquelles le corps peut tourner librement, de sorte que les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement; & qui ont encore en même tems cette belle propriété, que les momens d'inertie par rapport à ces axes sont, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Par cette dernière propriété on comprend qu'il y a dans chaque corps au moins deux axes principaux; car, puisque de tous les momens d'inertie rapportés à des axes qui passent par le centre d'inertie, aucun ne sauroit devenir, ni infini, ni évanouissant; il faut bien, que parmi eux il y en ait un, qui soit le plus grand, & un qui soit le plus petit. Mais on verra dans la suite, qu'il y a effectivement dans chaque corps trois axes principaux, qui se croisent au centre d'inertie à angles droits; ce qui est une propriété aussi remarquable, que celle que nous venons d'observer.

XXXVI. Donc, pour trouver les axes principaux d'un corps, nous n'avons qu'à résoudre les deux équations, auxquelles nous avons été conduits par l'une & l'autre considération, & à en déterminer les deux angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, en regardant les six intégrales comme connues:

$$\int xxdM = A; \int yydM = B, \int zzdM = C; \int yzdM = D, \int xzdM = E, \int xydM = F$$

Or nos deux équations à résoudre sont:

$$I. (A-B) \sin \eta \cos \eta \cos \theta - (D \cos \eta - E \sin \eta) \sin \theta - F(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) \cos \theta = 0$$

$$II. (A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta) \sin \theta \cos \theta - C \sin \theta \cos \theta - (D \sin \eta + E \cos \eta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2F \sin \eta \cos \eta \sin \theta \cos \theta = 0.$$

dont celle-ci, à cause de $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ & $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$, se réduit à cette forme:

$$II. (A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta) \sin 2\theta - C \sin 2\theta - 2(D \sin \eta + E \cos \eta) \cos 2\theta + 2F \sin \eta \cos \eta \sin 2\theta = 0$$

La première donne d'abord la tangente de l'angle θ

$$\text{tang } \theta = \frac{(A-B) \sin \eta \cos \eta - F(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta)}{D \cos \eta - E \sin \eta}$$

& la seconde la tangente du double angle :

$$\operatorname{rang} 2\theta = \frac{2D \sin \eta + 2E \operatorname{cof} \eta}{A \operatorname{cof} \eta^2 + B \sin \eta^2 - C + 2F \sin \eta \operatorname{cof} \eta}$$

XXXVII. Or, puisque $\operatorname{rang} \theta - \operatorname{cot} \theta + 2 \operatorname{cot} 2\theta = 0$, nous en tirons cette équation :

$$\frac{(A-B) \sin \eta \operatorname{cof} \eta - F(\operatorname{cof} \eta^2 - \sin \eta^2)}{D \operatorname{cof} \eta - E \sin \eta} - \frac{D \operatorname{cof} \eta + E \sin \eta}{(A-B) \sin \eta \operatorname{cof} \eta - F(\operatorname{cof} \eta^2 - \sin \eta^2)} + \frac{A \operatorname{cof} \eta^2 + B \sin \eta^2 - C + 2F \sin \eta \operatorname{cof} \eta}{D \sin \eta + \operatorname{cof} \eta} = 0$$

& joignant le premier & dernier membre ensemble, on trouve

$$\frac{(AD-CD-EF) \operatorname{cof} \eta + (DF-BE+CE) \sin \eta}{(D \operatorname{cof} \eta - E \sin \eta)(D \sin \eta + E \operatorname{cof} \eta)} - \frac{D \operatorname{cof} \eta + E \sin \eta}{(A-B) \sin \eta \operatorname{cof} \eta - F(\operatorname{cof} \eta^2 - \sin \eta^2)} = 0$$

& posant $\operatorname{tang} \eta = t$ il en résulte cette équation cubique :

$$t^3(DFE - DEE + (C-B)EF) - t(E^3 - 2DDE + EFF + (B+C-2A)DF + (A-B)(B-C)E) - t(D^3 - 2DEE + DFF + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D) + EFF - DDE + (C-A)DF = 0$$

dont la racine donne la tangente de l'angle η . De là on trouvera aussi l'angle θ , & partant la position de l'axe IF fera déterminée.

XXXVIII. Puisque cette équation cubique :

$$\begin{aligned} &+ (DFE - DEE + (C-B)EF) t^3 \\ &- (EFF + E^3 - 2DDE + (B+C-2A)DF + (B-A)(C-B)E) t t \\ &- (DFF + D^3 - 2DEE + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D) t \\ &+ EFF - DDE + (C-A)DF = 0 \end{aligned}$$

a certainement une racine réelle, on en trouve un axe principal: pour les deux autres racines, il ne paroît pas de l'équation, si elles sont réelles, ou imaginaires. Mais, puisque nous savons déjà qu'il doit y avoir au moins deux axes principaux, cette équation aura nécessairement

ment

ment plus qu'une racine réelle. D'où il est certain que toutes les racines sont réelles; & puisque chacune indique un axe principal, il s'enfuit, qu'il se trouve dans tout corps trois axes principaux.

XXXIX. Mais, ayant trouvé un axe principal par la méthode précédente, il sera fort aisé de trouver les deux autres par la méthode suivante. Soit IA cet axe principal, qu'on aura déjà trouvé, & qu'on en prenne à volonté deux autres IB & IC, qui soient tant entr'eux qu'au premier IA perpendiculaires, pour y rapporter les éléments du corps par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Soit encore $\int x x dM = A$, $\int y y dM = B$ & $\int z z dM = C$, où il ne faut pas confondre ces lettres avec celles, que nous avons employées dans la recherche précédente. Maintenant, puisque IA est un axe principal, & que les forces centrifuges se détruisent mutuellement, lorsque le corps tourne autour de cet axe, il faut que les intégrales $\int y x dM$ & $\int x z dM$ évanouissent. Donc, dans les intégrations précédentes, nous aurons $E = 0$ & $F = 0$; mais la formule $\int y z dM = D$ pourra encore avoir une valeur finie.

Fig. 4.

XI. Supposant donc que IA est un axe principal du corps, soit IF un autre axe principal; & posant, pour en trouver la position, les angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, nous aurons par le même calcul dont nous nous sommes servi ci-dessus, à cause de $E = 0$ & $F = 0$, ces équations :

$$I. (A - B) \sin \eta \cos \eta \cos \theta - D \cos \eta \sin \theta = 0$$

$$II. (A \cos \eta^2 + B \sin \eta^2) \sin \theta \cos \theta - C \sin \theta \cos \theta - D \sin \eta (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) = 0$$

dont la première donne, ou $\cos \eta = 0$, ou $\tan \theta = \frac{(A - B) \sin \eta}{D}$.

Or cette dernière valeur étant substituée dans l'autre équation, en produit une, qui étant divisible par $D \sin \eta$ donne $(A - B)(A - C) - DD = 0$ qui ne détermine rien. Il faut donc qu'il soit, ou $\sin \eta = 0$ ou $\cos \eta = 0$. Mais la valeur $\sin \eta = 0$ donne aussi $\tan \theta = 0$;



ce qui conduit au même axe IA déjà connue. Il ne reste donc que la valeur $\cos \eta = 0$, d'où l'angle AIE devient droit.

XLI. Il est donc clair que, pour que l'axe IF soit aussi principal, l'angle AIE doit être droit, ou $\eta = 90^\circ$; ce qui montre, que l'autre axe principal IF est perpendiculaire à l'axe connu IA. Or, posant $\eta = 90^\circ$, l'autre équation qui devient $(B-C)\sin \theta \cos \theta - D(\cos \theta - \sin \theta^2) = 0$ donne $\text{tang } 2 \theta = \frac{2D}{B-C}$. Cette équation fournit une double valeur pour l'angle θ ; car, si l'une est $\theta = \zeta$, l'autre sera $\theta = \zeta + 90^\circ$: de sorte que voilà en tout trois axes principaux qui sont perpendiculaires entr'eux. C'est bien un paradoxe, puisque la condition du plus grand & plus petit semble ne devoir donner que deux axes principaux, à l'un desquels réponde le plus grand, & à l'autre le plus petit moment d'inertie. Mais on fait que la méthode des plus grands & plus petits donne souvent aussi des cas, qui ne sont, ni l'un, ni l'autre; pourvu que les changemens élémentaires y évanouissent; & c'est ici précisément le cas.

XLII. Voilà donc une vérité bien importante, qui est, que dans chaque corps il y a trois axes principaux, qui se croisent à angles droits dans le centre d'inertie. Ces axes principaux ont une double propriété fort remarquable; l'une, que le corps peut tourner librement autour de chacun d'eux; l'autre, que des momens d'inertie par rapport à ces trois axes, un est le plus grand, un autre le plus petit de tous les possibles, & le troisième tient un tel milieu entre les deux autres, que, quoiqu'on change l'axe infiniment peu, le changement qui en résulte dans le moment d'inertie, évanouisse. Cependant il peut arriver que deux axes deviennent indefinis, auquel cas tous les axes situés dans leur plan peuvent être également censés principaux; comme il dans la formule $\text{tang } 2 \theta = \frac{2D}{B-C}$, devenoit & $D = 0$ & $B = C$. Car alors l'angle θ pourroit être pris à volonté. Il peut même aussi arriver que toutes les lignes tirées par le centre d'inertie acquier-



acquierrent la propriété des axes principaux, comme dans un globe homogène.

XLIII. Ayant expliqué la méthode de déterminer les trois axes principaux de chaque corps, on les peut regarder comme connus dans la Mécanique, de même que les momens d'inertie par rapport à ces axes, que je nommerai *les trois momens principaux d'un corps*. Et alors on sera en état d'entreprendre les plus profondes recherches, dont on ne sauroit surmonter les obstacles sans ce secours. Puisque les trois axes principaux sont perpendiculaires entr'eux, il sera bon de les employer au lieu des trois directrices, auxquelles on rapporte les élémens du corps par le moyen de trois coordonnées qui leur sont parallèles. Soient donc pour un corps quelconque les droites IA, IB & IC, ses trois axes principaux, auxquels soient parallèles les coordonnées IX = x , XY = y & YZ = z , qui déterminent la position de l'élément dM situé en Z; & on pourra regarder cet élément comme connu à l'égard des trois coordonnées x, y, z , auxquelles il est rapporté. Les trois momens d'inertie principaux.

XLIV. Puisque les lignes IA, IB, IC, sont les axes principaux du corps, les intégrales $\int yz dM, \int xz dM, \int xy dM$ évanouissent, ou l'on aura dans les formules supérieures $D = 0, E = 0, F = 0$, de sorte que les trois autres $\int xx dM = A, \int yy dM = B, \& \int zz dM = C$ demeurent seulement dans le calcul. Or, posant la masse du corps = M , soient ses momens d'inertie principaux par rapport à l'axe IA = Maa , à l'axe IB = Mbb , & à l'axe IC = Mcc ; & on aura par les intégrales

$$Maa = B + C; \quad Mbb = A + C; \quad Mcc = A - B$$

& partant réciproquement :

$$A = \frac{1}{2}M(bb + cc - aa), \quad B = \frac{1}{2}M(aa + cc - bb); \quad C = \frac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

De



De là le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque IF déterminé par les angles $AIS = \eta$ & $EIF = \theta$ sera par le §. 29.

$$\frac{1}{2}M(bb+cc-aa)(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2) + \frac{1}{2}M(aa+cc-bb)(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2) \\ + \frac{1}{2}M(aa+bb-cc) \cos\theta^2$$

qui se réduit à cette forme plus simple,

$$Maa \cos\eta^2 \cos\theta^2 + Mbb \sin\eta^2 \cos\theta^2 + Mcc \sin\theta^2$$

XLV. Ayant donc trouvé les trois momens d'inertie principaux Maa , Mbb , & Mcc , d'un corps, il est fort aisé d'en déterminer le moment d'inertie par rapport à tout autre axe quelconque IF , tiré par le centre d'inertie. Et pour rendre cette détermination plus évidente, j'observe que $\cos\eta \cos\theta$ exprime le cosinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IA . De même $\sin\eta \cos\theta$ exprime le cosinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IB ; & $\sin\theta$ le cosinus de l'angle que fait l'axe IF avec le principal IC . Donc, si nous posons les angles $AIF = \alpha$; $BIF = \beta$; $CIF = \gamma$, que fait l'axe IF avec les trois axes principaux IA , IB , IC par rapport auxquels les momens d'inertie sont supposés Maa , Mbb , Mcc , le moment d'inertie par rapport à l'axe IF est $= Maa \cos\alpha^2 + Mbb \cos\beta^2 + Mcc \cos\gamma^2$. Où il faut remarquer que $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$, puisque $\cos\alpha = \cos\eta \cos\theta$, $\cos\beta = \sin\eta \cos\theta$ & $\cos\gamma = \sin\theta$. Donc, si Maa est le plus grand, Mcc le plus petit, & Mbb le moyen moment principal; le moment d'inertie par rapport à l'axe IF sera $= Maa - M(aa-bb) \cos\beta^2 - M(aa-cc) \cos\gamma^2$, & partant moindre que Maa , ou $= Mcc + M(aa-cc) \cos\alpha^2 + M(aa-bb) \cos\beta^2$, & partant plus grand que Mcc .

XLVI. Ensuite, on peut aussi voir combien il s'en faut, qu'un axe quelconque IF n'ait la propriété d'un axe principal. Car, pour qu'il fût tel, il faudroit qu'il fût tant $\int SR$. IS. $dM = 0$, que $\int RZ$. IS. $dM = 0$. Or, à cause de $D = 0$. $E = 0$. $F = 0$, nous avons par le §. XXXIV.

$\int SR$.

$$fSR. IS. dM = (C - A \cos \eta^2 - B \sin \eta^2) \sin \theta \cos \theta \text{ \&}$$

$$fRZ. IS. dM = (B - A) \sin \eta \cos \eta \cos \theta,$$

& substituant pour A, B, C, les valeurs des momens principaux,

$$fSR. IS. dM = M(aa \cos \eta^2 + bb \sin \eta^2 - cc) \sin \theta \cos \theta = M((aa - cc) \cos^2 \alpha + (bb - cc) \cos^2 \beta) \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}$$

$$fRZ. IS. dM = M(aa - bb) \sin \eta \cos \eta \cos \theta = M(aa - bb) \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \gamma}$$

D'où l'on voit, que, si les trois momens principaux sont égaux entr'eux, ou $aa = bb = cc$, toutes les lignes IF auront la propriété des axes principaux. Mais, s'ils sont inégaux entr'eux, il n'y a que les trois axes principaux IA, IB & IC.

XLVII. Si deux momens principaux sont égaux entr'eux, savoir $M bb = M aa$, l'axe IF aura la propriété d'un axe principal, pourvu qu'il y ait $\cos \gamma = 0$ ou $\theta = 0$. Dans le cas donc que les momens d'inertie des deux axes principaux IA & IB sont égaux entr'eux, toute ligne IE tirée du centre d'inertie I dans le plan AIB aura la propriété d'un axe principal; & à cause de $\cos \gamma = 0$ & $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, le moment d'inertie par rapport à toutes les lignes IE sera $= M aa = M bb$. Il en est de même si deux autres momens d'inertie principaux sont égaux entr'eux; & toute autre ligne tirée de I dans le plan de ces deux axes principaux aura le même moment d'inertie, & la propriété d'un axe principal. Il y a donc dans ces cas une infinité d'axes principaux. Or, dans le cas où tous les trois momens d'inertie principaux sont égaux entr'eux, toutes les lignes tirées du centre d'inertie seront des axes principaux.

