



1764

# Cogitationes de aggeribus construendis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Cogitationes de aggeribus construendis" (1764). *Euler Archive - All Works*. 288.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/288>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

# COGITATIONES DE AGGERIBVS CONSTRVENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

I.

**D**e hoc argumento, quod amplissimam rerum maritimarum notitiam postulat, commentari nunquam mihi in mentem venisset, nisi nuper mihi quaestio eo spectans cum controuersia coniuncta esset proposita, ut sententiam meam aperirem, quandoquidem totum negotium ad Geometriam et Analysin reuoluebatur. Res autem ita se habebat: In prouincia maritima extra aggerem, quo littora sunt munita, fluctibus tantum terrae erat aggestum, ut nouo aggere includendum videretur. Vetus agger secundum lineam

Tab. VIII.

Fig. I. AGKE erat ductus, et terra extrinsecus adiecta usque ad lineam ABCDE patebat, secundum quam etiam nouus agger longitudine 1128 perticarum erat extractus: quo pacto totum spatium inter veterem nouumque aggerem interiectum in lucrum cessit. Constitit hoc opus 120000 Thal. et singularum linearum mensurae in perticis in figura sunt adscriptae.

2. Iam iis, qui hunc aggerem extrui curauerant, obiectum est, cum hic agger secundum lineam inflexam ABCDE esset ductus, a puncto A ad E,  
cum

eum potius secundum arcum circulare, qui aequale spatium concluderet, duci oportuisse, subductoque calculo compertum est, hunc aggerem 76 perticis breviorum futurum fuisse, ita ut idem commodum minoribus impensis, quot scilicet extractio aggeris 76 perticas longi requirit, obtineri potuisse. Cuius obiectionis ratio huic fundamento inniti videbatur, quod linea circularis inter omnes alias tantumdem spatii includentes sit brevissima, ac damnum quidem, ex neglectu huius principii natum, ad 9600 Thal. aestimabatur. Controversia igitur in hoc versabatur, num ab Architecto, vel iis, qui hunc aggerem extrui curauerunt, restitutio huius damni iure exigi queat? Atque hic quidem videndum est, utrum Architectus ob ignorantiam istius principii geometrici peccauerit, an ob alias causas ab eo recedere sit coactus?

3. Principium autem hoc Geometricum non solum nunc quidem est notissimum, sed etiam naturae nostrae quasi ingenitum, ut mihi nullo modo persuadere queam, eius ignorationem in causa fuisse, cur Architectus aggerem secundum lineam inflexam ABCDE duxerit. Si haec circuli proprietates ipsi incognita fuisset, cur aggerem non potius iuxta rectam AE duxit? vel si maius spatium complecti voluit, cur non latera polygoni cuiusdam regularis est secutus? Mihi quidem extra omne dubium positum videtur, si in aggere ducendo quicquam Architecti arbitrio esset relictum, illum certe nequaquam hunc ductum sinuosum ABCDE electurum fuisse. Ei quidem, postquam ab

A ad B peruenit, non in mentem incidere non potuit, aggerem recta ab B ad E potius, quam per partes intus vergentes BC, CD, DE continuare; quippe quo modo breuiori aggere adeo maius spatium inclusisset. Quin hoc nouerit Architectus, quantumuis caeterum fuisset Geometriae rudis, dubitari nullo modo potest.

4. Causa igitur subesse debet, cur potius tractum hunc infractum ABCDE, quam alium quemcunque, in extruendo aggere sit secutus; atque, etsi omnes rationes Architecturae maritimae mihi non sunt perspectae, haec tamen causa manifesto in figura terrae fortuito aggestae sita videtur: agger enim constitui nequit, nisi ubi terra supra fundum maris iam satis fuerit eleuata et confirmata. Loca igitur B, C, D ita videntur comparata, ut regio exterior, ob defectum fundi sufficientis, aggerem recipere non potuerit. Quod si ergo rectas lineas AB, BC, CD, DE ut limites spectemus, ultra quos aggerem remouere non liceat, causa manifesta est, ob quam Architectus aggerem iuxta has ipsas lineas constituerit; simulque perspicuum est, arcum illum circularem, qui aequale spatium includeret, hic adhiberi non potuisse, propterea quod alicubi ultra hos limites extendi debuisset.

5. Si enim vsquam hos limites transgredi licuisset, equidem non in hoc Architectum reprehenderem, quod aggerem non secundum arcum circularem, qui aequale spatium includeret, duxerit, sed potius ideo, quod non eiusmodi arcum super corda AE constituerit,

rit, qui etiam maius spatium effret complexus. Etsi enim hoc modo agger maiorem longitudinem esset nactus, tamen sumtuum incrementum maiori terrae spatio in vsum conuertendo fortasse fuisset compensatum: ad hoc scilicet diiudicandum sumtus in singulas perticas, quibus agger longior redditur, impendendi vna cum sorte pecuniae ad conseruationem requisitae cum pretio singularum perticarum quadratarum, quibus terra vsui futura augetur, comparari debent, vt pateat, vtrum augmentum impensae superet lucri augmentum nec ne? Haec disquisitio ibi erit necessaria, vbi satis terrae firmatae fuerit aggestum, vt quousque libuerit aggerem extendere liceat, qui casus, etsi a proposito abhorreere videatur, eum tamen accuratius enoluerere haud erit incongruum.

### Problema I.

Si extra aggerem APQB tantum terrae a fluitibus maris sit cumulatum, vt a terminis A et B nouum aggerem ADB quousque libuerit, protendere liceat, definire eum aggerem, qui maximum lucrum sit allaturus. Fig. 2.

### Solutio.

6. Primum obseruo, huic aggeri nouo ab A ad B ducendo figuram arcus circularis tribui oportere: quamcunque enim aliam figuram haberet, semper arcus circularis dari possret aequale spatium includens, qui, cum sit breuior, minoresque propterea sumtus postulet, illi omnino erit antefendus. Sit igitur ADB huiusmodi arcus circularis centrum habens in O, ponatur

Y y 2 que

que cordae semiffis  $AC = BC = c$ , et anguli ad  $O$  semiffis  $AOD = BOD = \omega$ ; tum vero fit spatium inter aggerem veterem  $APQB$  et rectam  $AB$  inclusum  $= bb$ , quod partem constituit spatii extractione noui aggeris acquirendi. Hinc ergo fit radius circuli  $OA = \frac{c}{\sin \omega}$  et  $OC = \frac{c \cos \omega}{\sin \omega}$ ; ideoque arcus  $ADB = \frac{2c\omega}{\sin \omega}$ , qui dat longitudinem aggeris. Porro erit sector  $AOB = \frac{c^2 \omega}{\sin \omega^2}$ , indeque auferendo triangulum  $AOB = \frac{c^2 \cos \omega}{\sin \omega}$ , relinquatur area segmenti  $ADBA = \frac{cc(\omega - \sin \omega \cos \omega)}{\sin \omega^2}$ , ita vt spatium terrae aggere  $ADB$  acquisitum fit  $= \frac{cc(\omega - \sin \omega \cos \omega)}{\sin \omega^2} + bb$ .

7. Ponamus, has mensuras in perticis dari, sintque sumtus ad vnam perticam aggeris exstruendam  $= m$ ; Thal. comprehensis simul impensis ad conseruationem, quos casu exposito vidimus, exurgere ad 100. Thal. Pretium autem vnus perticae quadratae terrae statuetur  $= n$  Thal. quod vtique ab indole terrae et fructibus inde percipiendis pendet. Hinc lucrum deductis impensis erit:

$$\frac{nc(\omega - \sin \omega \cos \omega)}{\sin \omega^2} + nbb - \frac{2mc\omega}{\sin \omega},$$

quod, nisi valorem obtineat positium, praestabit res in pristino statu relinquere, neque exstructionem noui aggeris suscipere, quoniam sumtus superarent fructus inde sperandos.

8. Incipiamus a casu, quo agger recta ab  $A$  ad  $B$  ducitur; et quia terrae spatium fit  $= bb$ , et longitudo aggeris  $= 2c$ , erit lucrum  $= nbb - 2mc$ . Nisi ergo fit  $bb > \frac{2m}{n}c$ , seu  $c < \frac{nbb}{2m}$ , hic nouus agger dam-

damnum. afferret: ex quo duo casus. evolendi occur-  
runt; alter, quo  $bb < \frac{2m}{n}c$ , alter vero quo  $bb > \frac{2m}{n}c$ ;  
illo casu non sine damno agger rectus iuxta cordam  
AB duceretur, hoc vero lucrum quidem praeberet,  
sed videndum est, num aggerem secundum arcum cir-  
cularem incuruando non maius lucrum obtineri queat.  
Priori vero casu, quo agger rectus cum manifesto dam-  
no est coniunctus, inquiri conuenit, an aggeris curua-  
tura damnum non minuatur, ac tandem in lucrum  
conuertere queat?

9. Sit igitur  $bb < \frac{2m}{n}c$ , et videamus, si angu-  
lus AOB =  $2\omega$  minimus capiatur, vtrum detrimentum  
minuatur nec ne? Ponamus, si  $\omega = z$ , et ob  $\omega = z + \frac{1}{2}z^2$   
et  $\cos \omega = 1 - \frac{1}{2}z^2$ , erit  $\sin \omega \cos \omega = z - \frac{1}{2}z^3$ , vnde  
aestimatio lucri oritur:

$$\frac{2}{3}nccz + nbh - 2mc(1 + \frac{1}{6}z^2)$$

quae ergo maior est praecedente  $nbh - 2mc$ , quoniam  
 $\frac{2}{3}nccz > \frac{2}{3}mccz$  ob  $z$  minimum. Certum ergo est,  
incuruatione aggeris damnum diminui; an autem con-  
tinuo minuatur? differentiatio nostrae formulae osten-  
det, quae praebet:

$$\frac{2ncc d\omega (\sin \omega - \omega \cos \omega)}{\sin^3 \omega} - \frac{2mcd\omega (\sin \omega - \omega \cos \omega)}{\sin^3 \omega} - \text{seu}$$

$$\frac{2cd\omega (\sin \omega - \omega \cos \omega)}{\sin^3 \omega} (nc - m \sin \omega)$$

Cum igitur sit  $\sin \omega > \omega \cos \omega$ , aestimatio lucri agge-  
rem magis incuruando continuo crescit, quamdiu est  
 $nc > m \sin \omega$ .

10. Si effct  $nc < m$ , seu  $c < \frac{m}{n}$ , lucrum eousque tantum cresceret, quoad fieret  $\sin. \omega = \frac{nc}{m}$ , tum vero, vltra augendo angulum  $\omega$ , iterum decresceret, neque vero perpetuo. Nam cum anguli  $\omega$ , postquam vltra rectum, quo casu arcus ADB fit semicirculus, fuerit acutus, sinus iterum decrescat, quando infra valorem  $\frac{nc}{m}$  decreuerit, lucri aestimatio iterum crescere incipit, idque deinceps continuo ac tantopere, vt tandem in infinitum augeatur. Quare lucrum dato quouis maius obtineri potest, dummodo angulus  $\omega$  maxime obtusus capiatur, et arcus ADB segmentum maius maximi circuli constituat. Atque hoc in genere valet, siue fuerit  $hb > \frac{2m}{n}c$ , siue  $hb < \frac{2m}{n}c$ , ita vt neutro casu verum maximum locum habeat, sed lucrum continuo maius consequi liceat.

11. Sin autem aliae circumstantiae prohibeant, quo minus segmentum ADB vltra semicirculum augeri possit, tum semper, dummodo fuerit  $c > \frac{m}{n}$ , aggerem in figuram semicirculi duci conueniet, vt maximum lucrum, vel certe minimum damnum, obtineatur. Tum autem posito  $\pi$  pro semicircumferentia circuli, cuius radius est  $= 1$ , vt  $\frac{1}{2}\pi$  angulum rectum denotet, ob  $\omega = \frac{1}{2}\pi$ , fiet lucri aestimatio:

$$\frac{1}{2}\pi ncc + nbh - \pi mc$$

quae expressio, nisi sit negatiua, aggerem maxime lucrosum indicat, contra autem praestabit, nullam plane aggerem extruere. At si fuerit  $c < \frac{m}{n}$ , statuatur  $c = \frac{m}{n}\sin. \zeta$ , ac tum segmentum ADB minus esse oportet semicirculo,



culo, fumendo angulum  $AOD = \zeta$ ; vt lucrum maximum vel damnum minimum euadat. Posito autem

$\omega = \zeta$  et  $c = \frac{m}{n} \sin. \zeta$  fit lucri aestimatio:

$$\frac{nc \cos. \zeta - \sin. \zeta \cos. \zeta}{\sin. \zeta^2} + nbb - \frac{2mc\zeta}{\sin. \zeta} = nbb - \frac{mc}{\sin. \zeta} (\zeta + \sin. \zeta \cos. \zeta)$$

$$\text{feu} = nbb - \frac{m^2}{n} (\zeta + \sin. \zeta \cos. \zeta).$$

Nisi ergo sit  $bb > \frac{m^2}{n} (\zeta + \sin. \zeta \cos. \zeta)$  nequidem aggerem sine damno extruere licet: nisi arcus semicirculo maiores admittantur.

12. Haec igitur sunt fere obseruanda, quando terra aggesta nullos limites ponit, vltra quos aggerem extendere non liceat, qui casus, cum nunquam locum habere possit, quandoquidem nunquam aggerem quasi in infinitum extendere conceditur, reuertor ad ipsam quaestionem propositam, vbi ratio terrae extra veterem aggerem adiectae non permittit, vt agger vsquam vltra limites per lineas AB, BC, CD, DE designatos producat. Atque hoc quidem casu manifestum Tab. VIII. est, nouo aggere maiorem terrae quantitatem cingi Fig. I. non posse, quam quae figura est repraesentata; hocque spatium aliter in vsum conuerti non posse, nisi agger secundum ipsos illos limites extruatur; vtcunque enim ab iis recedatur, quoniam non extra eos vagari licet, semper minor terrae portio includetur. Quare si Architecto propositum fuerit, tantum terrae includere, quantum fieri licet, necessario aggerem iuxta ipsos limites extruere coactus fuit, neque quicquam in hoc opere ipsi vitio verti potest.

13. Hic

13. Hic autem alia quaestio meo quidem iudicio grauiſſima oritur, an non vtilius fuiſſet, aliquid de campo includendo remittere, et aggerem intra limites praescriptos ita ducere, vt deductis impensis aggeris a pretio terrae acq̄ſitae lucrum idque maximum obtineretur. Queritur ſcilicet eiſmodi aggeris conſtructio, qui ſi breuior ſit, quam linea limitum ABCDE,  $p$  perticis, ſpatium autem includat minus quam id, quod intra limites illos contineretur,  $qq$  perticis quadratis, vt lucrum ex diminutione aggeris natum, quod valet  $mp$  Thal. maxime ſuperet damnum ob diminutionem terrae ortum, quod aeſtimatur  $nqq$  Thal. ſeu vt  $mp - nqq$  fiat maximum. Quem in finem, vt res generaliter ac dilucide pertractetur, ſequentia problema-  
ta euoluam.

### Problema 2.

Fig. 3. Si limites, vltra quos aggerem protendi non liceat, ſiat rectae AB et BC, in B datum angulum conſtituentes, determinare rectam PQ, ita vt, ſi agger iuxta rectas AP, PQ, QC ducatur, quo pacto quidem terrae ſpatium PBQ perit, maximum tamen lucrum obtineatur.

### Solutio.

14. Quodſi loco aggeris ABC aggere APQC vtamur, in eius longitudine tot perticas lucratur, quot excessus laterum  $BP + BQ$  iunctim ſumtorum ſupra latus PQ exhibet, quod ergo in expensis lucrum praebet  $= m(BP + BQ - PQ)$  Thal. Contra vero in campo

campo includendo amittimus tot perticas quadratas, quot continet area trianguli PBQ, cuius pretium ad  $n \cdot \Delta PBQ$  Thal. est constituendum. Lineam rectam ergo PQ ita duci oportet, vt haec quantitas  $m(BP + BQ - PQ) - n \cdot \Delta PBQ$  maximum valorem adipiscatur.

15. Ponamus angulum  $ABC = \beta$ , qui datur, sintque lineae quaesitae  $BP = x$ , et  $BQ = y$ , erit  $PQ = \sqrt{(xx - 2xy \cos. \beta + yy)}$  quae breuitatis gratia dicatur  $= z$ , et area trianguli PBQ fit  $= \frac{1}{2}xy \sin. \beta$ ; vnde his longitudinibus  $x$  et  $y$  in perticis expressis, habetur lucrum ad pecuniam reductum  $= m(x + y - z) - \frac{1}{2}nxy \sin. \beta$  Thal. quod maximum est reddendum. Vnde, cum fit

$$dz = \frac{x dx - y dx \cos. \beta - x dy \cos. \beta + y dy}{z},$$

prout vel  $x$  vel  $y$  vt variabilis tractatur, hae duae aequationes eliciuntur:

$$m\left(1 - \frac{x + y \cos. \beta}{z}\right) - \frac{1}{2}ny \sin. \beta = 0$$

$$m\left(1 + \frac{x \cos. \beta - y}{z}\right) - \frac{1}{2}nx \sin. \beta = 0.$$

16. Quodsi illa per  $x$ , haec vero per  $y$ , multiplicetur, differentia ad hanc perducit aequationem:

$$m\left(x - y - \frac{xx + yy}{z}\right) = 0 = m(x - y)\left(1 - \frac{x - y}{z}\right).$$

Cum igitur fieri nequeat  $1 = \frac{x + y}{z}$ , seu  $z = x + y$ , necesse est, sit  $x = y$ , seu  $BP = BQ$ , quam quidem conditionem ipsa quaestionis natura statim suppeditare potuisset, cum nulla sit ratio, cur linea BP et BQ inaequales capi deberent. Sit ergo  $y = x$ , et quia tum

Tom. IX. Nou. Comm. Z z fit

fit  $z = \sqrt{2xx - 2xx \cos. \beta} = 2x \sin. \frac{1}{2} \beta$ , alterutra illarum aequationum abit in hanc formam:

$$m \left( 1 + \frac{\cos. \beta - 1}{2 \sin. \frac{1}{2} \beta} \right) - \frac{1}{2} n x \sin. \beta = 0,$$

$$\text{feu } m(1 - \sin. \frac{1}{2} \beta) = \frac{1}{2} n x \sin. \beta,$$

$$\text{vnde fit } x = \frac{2m(1 - \sin. \frac{1}{2} \beta)}{n \sin. \beta} = \frac{m(1 - \sin. \frac{1}{2} \beta)}{n \sin. \frac{1}{2} \beta \cos. \frac{1}{2} \beta},$$

$$\text{siue } x = \frac{m}{n \sin. \frac{1}{2} \beta} \sqrt{\frac{1 - \sin. \frac{1}{2} \beta}{1 + \sin. \frac{1}{2} \beta}} = \frac{m \tan. (45^\circ - \frac{1}{4} \beta)}{n \sin. \frac{1}{2} \beta}$$

17. Problemati ergo ita satisfit, vt capiatur:

$$BP = BQ = \frac{2m(1 - \sin. \frac{1}{2} \beta)}{n \sin. \beta},$$

siquidem lineae BA et BC fuerint maiores, sin autem hae lineae sint minores, tum euidens est, rectarum BP et BQ alteram breuiori aequalem capi oportere, vnde altera per eandem methodum definitur. Atque hoc modo, si limites habeant plures angulos, singuli refecari poterunt, siquidem extus sint versi, qui anguli enim intus vergunt, vt C et D in fig. 1, ii hanc operationem non admittunt, quin etiam deinceps novos angulos ad P et Q ortos simili modo subtendere licebit, quae operatio si continuetur, tandem agger figuram quasi curuileam consequetur, quae omnium maximam vilitatem apportabit. Eam autem circuli arcum fore manifestum est, quem statim sequenti modo determinare poterimus.

Pro-

Problema 3.

18. Si limites, ultra quos aggerem protendi non licet, sint rectae AB et BC, in B datum angulum facientes, determinare eam aggeris figuram APSQC, qua maximum lucrum obtineatur. Tab. VIII.  
Fig. 4.

Solutio.

Primo patet, ut ante, partes a limitibus rescissas BP et BQ aequales esse debere, dummodo ipsae lineae BA et BC satis sint longae, ut huiusmodi partes mox definiendas contineant, quod quidem hic assumo; si enim altera, vel utraque, brevior fuerit, hic casus peculiarem evolutionem postulat. Tum vero etiam patet, lineam curvam PSQ fore circularem, quam totam intra limites contineri necesse est; eius ergo centrum erit in recta BO, angulum B bifecante.

Ponamus itaque angulum ABC =  $2\beta$ , ut fit semiffis ABO = CBO =  $\beta$ ; tum vero statuatur BP = BQ =  $x$ , erit PR = QR =  $x \sin. \beta$  et BR =  $x \cos. \beta$ , unde conficitur area trianguli PBQ =  $xx \sin. \beta \cos. \beta$ . Ponatur porro anguli POQ semiffis BOP = BOQ =  $\omega$ , erit radius circuli PO = QO =  $\frac{x \sin. \beta}{\sin. \omega}$ , et OR =  $\frac{x \sin. \beta \cos. \omega}{\sin. \omega}$ , hincque ipse arcus PSQ =  $\frac{2x \omega \sin. \beta}{\sin. \omega}$ , et sector PSQO =  $\frac{xx \omega \sin. \beta^2}{\sin. \omega^2}$ , unde, cum fit triangulum POQ =  $\frac{xx \sin. \beta^2 \cos. \omega}{\sin. \omega}$ , fit area segmenti PSQP =  $\frac{xx \sin. \beta^2}{\sin. \omega^2} (\omega - \sin. \omega \cos. \omega)$  et trilinei BPSQB =  $xx \sin. \beta \cos. \beta - \frac{xx \sin. \beta^2}{\sin. \omega^2} (\omega - \sin. \omega \cos. \omega)$ .

Quod si iam agger non iuxta ipsos limites ABC, sed lineam mixtam APSQC ducatur, in longitudine

Z z 2

aggeris

aggeris lucramur  $PB + QB - PSQ = 2x - \frac{2x\omega \sin.\beta}{\sin.\omega}$ ,  
 quod lucrum valet  $2mx(1 - \frac{\omega \sin.\beta}{\sin.\omega})$  at in campo per-  
 dimus trilineum  $BPSQB$ , quod damnum valet  
 $nx(\sin.\beta \cos.\beta - \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\omega^2}(\omega - \sin.\omega \cos.\omega))$ . Nunc igitur  
 excessus lucri supra damnum maximus reddi debet,  
 vnde ob binas variables  $x$  et  $\omega$  binas sequentes nan-  
 ciscimus aequationes:

$$I. m(1 - \frac{\omega \sin.\beta}{\sin.\omega}) - nx(\sin.\beta \cos.\beta - \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\omega^2}(\omega - \sin.\omega \cos.\omega)) = 0$$

$$II. -\frac{2mx\sin.\beta}{\sin.\omega^2}(\sin.\omega - \omega \cos.\omega) - \frac{2nx\omega \sin.\beta^2}{\sin.\omega^3}(\omega \cos.\omega - \sin.\omega) = 0$$

$$\text{seu } II. -\frac{2x \sin.\beta}{\sin.\omega^3}(\sin.\omega - \omega \cos.\omega)(m \sin.\omega - nx \sin.\beta) = 0.$$

Ex hac posteriori, quia fieri nequit  $\sin.\omega - \omega \cos.\omega = 0$ ,  
 fit  $m \sin.\omega = nx \sin.\beta$ , seu  $x = \frac{m \sin.\omega}{n \sin.\beta}$ , qui valor, in  
 priori substitutus, praebet

$$m(1 - \frac{\omega \sin.\beta}{\sin.\omega}) - m(\cos.\beta \sin.\omega - \frac{\sin.\beta}{\sin.\omega}(\omega - \sin.\omega \cos.\omega)) = 0,$$

seu  $\sin.\omega - \omega \sin.\beta - \cos.\beta \sin.\omega^2 + \omega \sin.\beta - \sin.\beta \sin.\omega \cos.\omega = 0$ ,  
 quae, per  $\sin.\omega$  diuisa, dat:

$$1 - \cos.\beta \sin.\omega - \sin.\beta \cos.\omega = 0, \text{ seu } 1 \sin.(\beta + \omega)$$

vnde concludimus, fore  $\beta + \omega = 90^\circ$ , seu  $\omega = 90^\circ - \beta$ ,  
 ita vt angulus  $BPO$  sit rectus, ideoque arcus  $PSQ$  a  
 limitibus  $AB$  et  $BC$  tangatur: ex quo totus arcus  
 $PSQ$  intra limites cadit, quemadmodum natura rei  
 postulat.

Cum igitur sit  $\omega = 90^\circ - \beta$ , erit  $BP = BQ = x = \frac{m \cos.\beta}{n \sin.\beta}$   
 $= \frac{m}{n \tan.\beta}$ , seu  $x \tan.\beta = PO = \frac{m}{n}$ , ita vt  $\frac{m}{n}$  perticae  
 semper dent radium circuli  $PSQ$ , iuxta quem agge-  
 rem duci oportet, qui arcus cum limites tangere de-  
 beat,

beat, tota constructio est facilis. In recta enim BO, angulum ABC bifecante, id punctum O capi debet, e quo perpendiculum in alterum litem demissum OP fiat  $= \frac{m}{n}$ , eritque O centrum circuli, et OP eius radius.

Tum autem sumtis  $BP=BQ=\frac{m \cot. \beta}{n \cos. \beta}$ , erit arcus PSQ  $= \frac{m}{n}(\pi - 2\beta)$  denotante  $\pi$  semicircumferentiam et  $2\beta$  arcum circuli, angulum ABC metientis, sinu toto existente  $= 1$ , vnde, lucrum ex aggeris diminutione ortum, est  $= \frac{m^m}{n} (2 \cot. \beta - \pi + 2\beta)$  Thal. Diminuum autem, ob diminutionem spatii inclusi natum, est  $= \frac{m^m}{n} (\cot. \beta - \frac{1}{2}\pi + \beta)$ , quod lucri semissi aequatur, ita vt totum lucrum sit  $= \frac{m^m}{n} (\beta + \cot. \beta - \frac{1}{2}\pi)$  Thal.

Coroll. 1.

19. Quo maior ergo est angulus ABC  $= 2\beta$ , eo minores fiunt partes rescindendae BP=BQ, et plane evanescent, si ille angulus ad duos rectos excreseat. Hinc quo obtusior fuerit angulus ABC, eo minus hac correctione est opus.

Coroll. 2.

20. At si angulus ABC fuerit acutus, ideoque  $\beta$  semirecto minor, partes rescindendae BP=BQ maiores fiunt, quam  $\frac{m}{n}$ , hocque casu imprimis necesse erit, aggerem intra limites contrahi; quia alias ingentes sumtus frustra impenderentur.

## Coroll. 3.

21. Quo facilius pro quouis angulo ABC constructio aggeris maxime conueniens perspiciatur, hanc tabellam subiungo:

Angulus ABC	Partes rescindendae BP=BQ	Diminutio aggeris	Diminutio terrae inclusae	Lucrum in pecunia
10°	11,430052 $\frac{m}{n}$	19,89304 $\frac{m}{n}$	9,94652 $\frac{m^2}{n^2}$	9,94652 $\frac{mm}{n}$
20	5,671282 $\frac{m}{n}$	8,55004 $\frac{m}{n}$	4,27502 $\frac{mm}{nn}$	4,27502 $\frac{mm}{n}$
30	3,732051 $\frac{m}{n}$	4,84611 $\frac{m}{n}$	2,42305 $\frac{mm}{nn}$	2,42305 $\frac{mm}{n}$
40	2,747477 $\frac{m}{n}$	3,05149 $\frac{m}{n}$	1,52575 $\frac{mm}{nn}$	1,52575 $\frac{mm}{n}$
50	2,144507 $\frac{m}{n}$	2,02008 $\frac{m}{n}$	1,01004 $\frac{mm}{nn}$	1,01004 $\frac{mm}{n}$
60	1,732051 $\frac{m}{n}$	1,36970 $\frac{m}{n}$	0,68485 $\frac{mm}{nn}$	0,68485 $\frac{mm}{n}$
70	1,428148 $\frac{m}{n}$	0,93643 $\frac{m}{n}$	0,46821 $\frac{mm}{nn}$	0,46821 $\frac{mm}{n}$
80	1,191754 $\frac{m}{n}$	0,63817 $\frac{m}{n}$	0,31909 $\frac{mm}{nn}$	0,31909 $\frac{mm}{n}$
90	1,000000 $\frac{m}{n}$	0,42920 $\frac{m}{n}$	0,21460 $\frac{mm}{nn}$	0,21460 $\frac{mm}{n}$
100	0,839099 $\frac{m}{n}$	0,28193 $\frac{m}{n}$	0,14097 $\frac{mm}{nn}$	0,14097 $\frac{mm}{n}$
110	0,700207 $\frac{m}{n}$	0,17868 $\frac{m}{n}$	0,08934 $\frac{mm}{nn}$	0,08934 $\frac{mm}{n}$
120	0,577350 $\frac{m}{n}$	0,10750 $\frac{m}{n}$	0,05375 $\frac{mm}{nn}$	0,05375 $\frac{mm}{n}$
130	0,466308 $\frac{m}{n}$	0,05995 $\frac{m}{n}$	0,02997 $\frac{mm}{nn}$	0,02997 $\frac{mm}{n}$
140	0,363970 $\frac{m}{n}$	0,02981 $\frac{m}{n}$	0,01490 $\frac{mm}{nn}$	0,01490 $\frac{mm}{n}$
150	0,267949 $\frac{m}{n}$	0,01230 $\frac{m}{n}$	0,00615 $\frac{mm}{nn}$	0,00615 $\frac{mm}{n}$
160	0,176327 $\frac{m}{n}$	0,00358 $\frac{m}{n}$	0,00179 $\frac{mm}{nn}$	0,00179 $\frac{mm}{n}$
170	0,087488 $\frac{m}{n}$	0,00044 $\frac{m}{n}$	0,00022 $\frac{mm}{nn}$	0,00022 $\frac{mm}{n}$
180	0,000000 $\frac{m}{n}$	0,00000 $\frac{m}{n}$	0,00000 $\frac{mm}{nn}$	0,00000 $\frac{mm}{n}$

Coroll. 4.



Coroll. 4.

22. Tota haec determinatio pendet a pretio aggeris, vnam perticam longi, quod  $m$  Thaleros posuimus, et a pretio vnus perticae quadratae agri, quod  $n$  Thal. sumimus, quae duo pretia prouti variauerint, exstructio aggeris maxime idonea inde determinationem consequitur.

Scholion 1.

23. Casu ergo proposito, quo angulus B est fere angulus rectus, ductum aggeris ita intra hunc angulum statui conueniet, vt rescissis rectis  $BP = BQ = \frac{m}{n}$  pertic. a P ad Q arcus circuli ducatur, quem rectae BP et BQ tangunt: haecque constructio tanto vtilior erit, quam si agger secundum ipsos limites duceretur, vt lucrum futurum fit  $= \frac{2146}{10000} \cdot \frac{m}{n}$  Thal. Cum igitur, vt vidimus, vna pertica aggeris constet 100 Thal. si perticam quadratam agri aestimemus ad 1 Thal. vt fit  $m=100$  et  $n=1$ , abscindi oportet  $BP=BQ=100$  pert. aggerque a P ad Q per arcum circalarem PSQ extruatur; sicque lucrum obtinebitur  $= 2146$  Thal. Haec scilicet constructio maxime praeferenda est ei, qua agger secundum ipsos limites PB et QB ad ipsum angulum B vsque produceretur; minor quidem terrae portio hoc modo includitur, deficiens 2146 perticis quadratis, quarum pretium 2146 Thal. aestimatur: at agger hoc modo breuior fit  $42\frac{22}{100}$  perticis, quae sumtum  $= 4292$  Thal. requirent, vnde lucrum obtinetur 2146 Thal. Circa reliquos angulos C et D, quoniam intus vergunt, nulla emendatio locum habet, vtcunque enim agger a Q et E intra hos limites

mites constitueretur, non solum minor campus concluderetur, sed etiam agger longior euaderet. Vnde Architectus ideo tantum est reprehendendus, quod aggerem vsque ad angulum extus vergentem B extenderit, sicque sumtus inutiles 2146 Thal. erogarit, quos euitare licuisset; verum haec solertia ab homine Geometriae sublimioris experte non est exigenda.

### Scholion 2.

24. Comparemus etiam casum, quo agger secundum ipsam rectam AE duceretur, cum casu, quo iuxta limites ABCDE est ductus, visuri, vtrum lucrum, an damnum, inde fuisset expectandum. Hoc autem modo agger breuior prodiisset 86 perticis, vnde sumtuum diminutio fuisset 8600 Thal. Periisset autem omnis terra, inter limites ABCDE et rectam AE contenta, quae cum sit 44237 perticarum quadratarum, damnum totidem Thalerorum esset aestimandum, vnde agger iuxta limites ductus praestat aggere secundum rectam AE ducto, discrimine existente 35637 Thal. Verum, vti iam vidimus, magis expedit arcus PSQ a limitibus recedere, quam ipsos limites sequi, lucro existente 2146 Thal. Hoc modo tota aggeris longitudo foret 1085 perticarum, cuius extractio, vti posuimus, postulat 108500 Thal. ac nunc quidem videndum est, an agri sic acquisiti quantitas, quae est spatium inter veterem aggerem AGKE et nouum APSQCDE, superet 108500 perticas quadratas nec ne? si enim minor esset, praestitisset omnino extractio-  
ne noui aggeris supersedere; eatenus enim tantum  
hoc

hoc opus suscipere operae pretium fuisset, quatenus quantitas terrae acquisitae superasset 108500 perticas quadratas, siquidem pretium vnus perticae quadratae ad vnum Thalerum constituatur. Praeterea vero etiam perpendendum est, extracto nouo aggere, veterem aggerem nullos amplius sumtus ad conseruationem requirere; cuius commodi ratio etiam in aestimatione lucri est habenda: impensae scilicet noui aggeris tanto minores sunt censendae. Cum igitur agger secundum ipsos limites sit extractus, qui ad 1128 perticas porriguntur, dummodo maior terrae quantitas quam 112800 pert. quadratarum fuerit acquisita, lucrum inde est comparatum, quod etsi non fuerit maximum, tamen Architecto vitio verti non potest, atque perpetuo extractio nouorum aggerum secundum haec principia diiudicanda videtur, postquam tam sumtus in singulas aggeris perticas, quam pretium cuiusque perticae quadratae fuerit constitutum.

Scholion. 3.

25. Reuertamur ad nostrum problema, quo limites duabus rectis AB et BC contineri assumimus, ac perpendamus casum, quo altera harum duarum rectarum, puta BC, minor est quam pars abscindenda, quae supra est inuenta  $= \frac{m}{n} \cot. \beta$ , existente altera  $BA > BC$ . Atque hic facile perspicitur, arcum circuli per ipsum punctum C transire debere; secet is ergo alteram in P, ac pariter euidens est, rectam PB huius arcus tangentem esse debere; si enim non tangeret, a puncto quodam

Tom. IX. Nou. Comm.

A a a rectae

rectae BA a B remotiori duci posset ad C arcus. re-  
ctam BA tangens, aequale spatium ab angulo rescin-  
dens, quae cum aggerem breuiorem daret, utique  
esset praeferenda. Manente ergo angulo ABC = 2β,  
sit recta BC = b, et quaesita BP = x: Ducta PO ad  
BP normali, sit O centrum arcus PSC, unde OR  
cordam CP bifecans simul angulum COP bifecabit,  
et ad CP erit normalis. Statuatur angulus COR = POR  
= ω, erit CPB = ω, et PCB = 180° - 2β - ω, unde  
colligitur BP = x =  $\frac{b \sin. (\beta + \omega)}{\sin. \omega}$  et CP =  $\frac{b \sin. 2\beta}{\sin. \omega}$ , vt fit:  
PR =  $\frac{b \sin. \beta}{2 \sin. \omega}$ , et PO =  $\frac{b \sin. 2\beta}{2 \sin. \omega^2}$ , atque OR =  $\frac{b \sin. 2\beta \cos. \omega}{2 \sin. \omega^2}$ .

Hinc prodit arcus PSC =  $\frac{b \omega \sin. 2\beta}{\sin. \omega^2}$ , et sector OPSC  
=  $\frac{b b \omega \sin. 2\beta^2}{4 \sin. \omega^4}$ , unde, ablato triangulo OCP =  $\frac{b b \sin. 2\beta^2 \cos. \omega}{4 \sin. \omega^4}$

relinquitur segmentum CSPC =  $\frac{b b \sin. 2\beta^2}{4 \sin. \omega^4} (\omega - \sin. \omega \cos. \omega)$ .

Cum iam sit BC + BP =  $b \left( 1 + \frac{\sin. (\beta + \omega)}{\sin. \omega} \right)$ , diminu-  
tio aggeris est =  $b \left( 1 + \frac{\sin. (\beta + \omega)}{\sin. \omega} - \frac{\omega \sin. 2\beta}{\sin. \omega^2} \right)$ ; et ob

aream trianguli CBP =  $\frac{1}{2} b x \sin. 2\beta = \frac{b b \sin. 2\beta \sin. (\beta + \omega)}{2 \sin. \omega}$

diminutio campi includendi =  $\frac{b b \sin. 2\beta}{4 \sin. \omega^4} (2 \sin. \omega \sin. (\beta + \omega) - \sin. 2\beta (\omega - \sin. \omega \cos. \omega))$ . Quare lucrum erit:

$$m b \left( 1 + \frac{\sin. (\beta + \omega)}{\sin. \omega} - \frac{\omega \sin. 2\beta}{\sin. \omega^2} \right) - \frac{1}{4} n b b \sin. 2\beta \left( \frac{2 \sin. (\beta + \omega)}{\sin. \omega} - \frac{\sin. 2\beta (\omega - \sin. \omega \cos. \omega)}{\sin. \omega^4} \right)$$

cuius differentiale nihilo aequatum et per Φ cos. Φ - sin. Φ  
diuisum. praebet  $n b \sin. 2\beta = 2 m \sin. \omega^2$ , unde fit

$$PO = \frac{m}{n} \text{ et}$$

$$\sin. \omega = \sqrt{\frac{n b \sin. 2\beta}{2 m}} = \sqrt{\frac{n b \sin. \beta \cos. \beta}{m}}, \text{ et } x = \frac{b \sin. (\beta + \omega)}{\sin. \omega}$$

vbi, cum sit  $b < \frac{m \cos. \beta}{n \sin. \beta}$ , erit  $\sin. \omega < \cos. \beta$  seu  $\omega < 90^\circ - \beta$   
ideo

ideoque  $BP > BC$ . Hinc sequitur, si effet  $BA < BP$  tum arcum circuli per ambo puncta A et C duci convenire, vt rectam BA tangat; tum scilicet magis lucrum obtinere non licet.

Problema 4.

26. Si limites, quos aggerem transgredi non oportet, tribus lineis rectis AB, BC, CD consent, definire aggeris constructionem maxime lucrosam. Fig. 6.

Solutio.

Sit, vt ante,  $m$  pretium aggeris vniam perticam longi, et  $n$  pretium vnus perticae quadratae agri, ponatur angulus  $ABC = 2\beta$  et angulus  $BCD = 2\gamma$ , ac si fuerit  $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$  solutionem praecedens problema suppeditat. Primum enim circa B abscindantur portiones  $BP = BQ = \frac{m}{n}\cot.\beta$ , et circa C portiones  $CR = CS = \frac{m}{n}\cot.\gamma$ ; describanturque, tam per puncta P et Q, quam per R et S, eodem radio  $= \frac{m}{n}$  pert. bini arcus circulares PQ et RS limites tangentes; quo facto aggerem secundum lineam mixtam APQRS duci conueniet. Hoc modo maximum lucrum acquiretur, quod maius erit, quam si agger iuxta ipsos limites duceretur, excessu existente:

$$\frac{m}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi);$$

aggeris enim longitudo diminuetur quantitate:

$$\frac{m}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert.}$$

A a a 2

at

at agri inclusi spatium minuitur quantitate:

$$\frac{m}{n}(\beta + \gamma + \cot. \beta + \cot. \gamma - \pi) \text{ pert. II.}$$

Quodsi lineae BA et CD vel alterutra earum minor fuerit quam portio inde rescindenda, puncta P et S in A et D capi oportet, et arcus PQ et SR semper eodem radio  $= \frac{m}{n}$  pert. describendi tantum lineam BC tangent. Hoc casu non opus est, ut sit  $BC > \frac{m}{n}(\cot. \beta + \cot. \gamma)$  sed sufficit, si BC non fuerit minor quam BQ et CR, quippe quae partes BQ et CR minores erunt quam casu praecedente. Si alteruter angulorum B et C intus vergat, in eo nulla correctio locum habet, sed tantum angulus extus vergens arcu erit subtendus.

Si fuerit praecise  $BC = \frac{m}{n}(\cot. \beta + \cot. \gamma)$ , puncta Q et R conuenient, prodibitque vnus arcus continuus PQRS limites tangens, iuxta quem aggerem construi oportet. Sin autem recta BC minor fuerit quam  $\frac{m}{n}(\cot. \beta + \cot. \gamma)$  neque rectae BA et CD tam sint paruae, ut praecedens solutio locum habere posset, sequenti modo solutio eruetur:

Fig. 7. Cum euidentis sit, aggerem intra rectam BC cadere, is etiam maximi proprietate gaudebit, si rectae AV et BV ad concursum V productae limites constituerent. Erit autem angulus  $V = 2\beta + 2\gamma - 180^\circ$ ; unde posita recta BC = b, ut sit  $b < \frac{m}{n}(\cot. \beta + \cot. \gamma)$  pert. erit  $BV = \frac{b \sin. \gamma}{\sin. (\beta + 2\gamma - 180^\circ)} = -\frac{b \sin. 2\gamma}{\sin. (2\beta + 2\gamma)}$  et  $CV = \frac{b \sin. 2\beta}{\sin. (\beta + 2\gamma)}$  tum

Tum capiatur  $VP=VS=\frac{m}{n} \cot.(\beta+\gamma-90^\circ)=-\frac{m}{n} \text{tang.}(\beta+\gamma)$   
 et per puncta P et S radio  $=\frac{m}{n}$  pert. ducatur arcus  
 circuli PQRS, limites AB et CD in P et S tan-  
 gens, qui dabit ductum aggeris. Quodsi ponamus  
 $b=\frac{\lambda m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)=\frac{\lambda m \sin.(\beta+\gamma)}{n \sin.\beta \sin.\gamma}$  ut sit  $\lambda < 1$ ,  
 reperitur :

$$BP=\frac{m}{n}(\lambda \cot.\beta-(1-\lambda)\text{tang.}(\beta+\gamma))$$

$$CS=\frac{m}{n}(\lambda \cot.\gamma-(1-\lambda)\text{tang.}(\beta+\gamma)).$$

Quantum autem lucrum hoc modo obtineatur, ita co-  
 gnoscetur : Cum sit

$$VP+VS-PQRS=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma-\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi) \text{ et}$$

$$VPQRSV=\frac{m^2}{n^2}(\beta+\gamma-\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)$$

$$\text{tum vero } BV+CV-BC=-\frac{b(\sin.2\beta+\sin.2\gamma \sin.(2\beta+2\gamma))}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$$

$$\text{seu } BV+CV-BC=-\frac{2\lambda m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma+\text{tang.}(\beta+\gamma))$$

$$=-\frac{2\lambda m}{n} \cot.\beta \cot.\gamma \text{tang.}(\beta+\gamma)$$

qua expressione inde ablata, prodit aggeris diminutio:

$$PB+BC+CS-PQRS=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\lambda \cot.\beta+\lambda \cot.\gamma$$

$$-(1-\lambda)\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)$$

$$=\frac{2m}{n}(\beta+\gamma-(1-\lambda \cot.\beta \cot.\gamma)\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)$$

$$\text{Deinde ob } \triangle BVC=-\frac{b \sin.2\beta \sin.2\gamma}{2 \sin.(2\beta+2\gamma)}=-\frac{\lambda \lambda m m}{n n} \cot.\beta$$

$$\cot.\gamma \text{tang.}(\beta+\gamma)$$

fit campi includendi diminutio : BPQRSC =

$$\frac{m^2}{n^2}(\beta+\gamma-(1-\lambda \cot.\beta \cot.\gamma)\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)=$$

$$\frac{m^2}{n^2}(\beta+\gamma+\lambda \cot.\beta+\lambda \cot.\gamma-(1-\lambda \cot.\beta \cot.\gamma)\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)$$

vnde totum lucrum aestimandum erit:

$$\frac{m}{n}(\beta + \gamma - \text{tang}(\beta + \gamma) + \lambda(2 - \lambda) \cot \beta \cos \gamma \text{tang}(\beta + \gamma) - \pi) =$$

$$\frac{m}{n}(\beta + \gamma + \lambda(2 - \lambda)(\cot \beta + \cos \gamma) - (1 - \lambda)^2 \text{tang}(\beta + \gamma) - \pi).$$

### Coroll. 1.

27. Si rectae AB et DC extus conuergant, uti in figura exhibentur, erit  $2\beta + 2\gamma > 180^\circ$ , ideoque  $\xi + \gamma > 90^\circ$ , vnde  $\text{tang}(\xi + \gamma)$  fit negativa, hincque  $BP > \frac{\lambda m}{n} \cot \xi$  et  $CS > \frac{\lambda m}{n} \cot \gamma$ . Qui etiam posito  $\xi + \gamma = 90^\circ + \theta$ , ut fit  $V = 2\theta$  habebitur  $BP = \frac{m}{n}(\cot \xi + \frac{(1 - \lambda) \cos \gamma}{\sin \beta \sin \theta})$  et  $CS = \frac{m}{n}(\cot \gamma + \frac{(1 - \lambda) \cos \beta}{\sin \gamma \sin \theta})$  adeoque  $BP > \frac{m}{n} \cot \xi$  et  $CS > \frac{m}{n} \cot \gamma$ .

### Coroll. 2.

28. Hoc ergo casu, quo  $\xi + \gamma = 90^\circ + \theta$ , nihil obstat, quo minus solutio inuenta applicari possit, dummodo rectae BA et CD superent valores pro BP et CS inuentos. Sin autem altera vel vtraque fuerit breuior, arcus circuli radio  $\frac{m}{n}$  describendi per terminum breuioris ita duci debet, ut longiorem tangat; at si ne hoc quidem fieri queat, per vtrumque terminum A et D ita ducatur, ut longiorem tangat.

### Coroll. 3.

29. Quodsi autem fuerit  $\xi + \gamma = 90^\circ + \theta$ , et solutionem inuentam applicare liceat, erit aggeris diminutio:

$$\frac{2m}{n}(\xi + \gamma + \cot \xi + \cos \gamma - \pi + (1 - \lambda) \cot \xi \cot \gamma \cot \theta)$$

Campi



Campi autem includendi decrementum

$$\frac{m}{n} (\xi + \gamma + \cot. \xi + \cot. \gamma - \pi + (1 - \lambda\lambda) \cot. \xi \cot. \gamma \cot. \theta)$$

ita vt verum lucrum fit

$$\frac{m}{n} (\xi + \gamma + \cot. \xi + \cot. \gamma - \pi + (1 - \lambda)^2 \cot. \xi \cot. \gamma \cot. \theta).$$

Coroll. 4.

30. At si rectae BA et CD intus conuergant, quo casu angulus  $\theta$  fit negatiuus, partes BP et CS minores euadunt, quam casu  $\lambda = 1$ , ideoque arcus circuli vltra rectam BC porrigeretur, quod cum naturae aduersetur, hoc casu verum maximum locum non inuenit. Quod etiam inde patet, quod intra rectas BA et CD conuergentes circulum radii  $= \frac{m}{n}$ , qui utramque tangat, describere non licet.

Scholion 1.

31. Antequam casum rectarum BA et CD in- Fig. 3.  
tus conuergentium perpendamus, consideremus casum, quo sunt parallelae, ideoque  $\beta + \gamma = 90^\circ$ , et  $\theta = 0$ , atque  $BC = b = \frac{\lambda^m}{n \sin. \beta \sin. \gamma} = \frac{\lambda^m}{n \sin. 2 \beta}$ , existente  $\lambda < 1$ . Sit autem  $BA > \frac{m}{n} \cot. \beta$  et  $CD > \frac{m}{n} \cot. \gamma$ ; per solutionem iam partes BP et CD capi deberent infinitae; quod cum fieri nequeat, arcum circulearem ita per terminum breuiorem D duci conueniet, vt alteram rectam BA tangat, radio  $= \frac{m}{n}$ , ac si esset etiam  $BA < BP$ , alio radio circulus per A et D duci deberet, quia rectam BA in A tangeret. Quantum igitur hinc lucrum oriatur, generalius inuestigemus: Sit  $CD = c$ , ac de-  
missio

misso ex D in BA perpendicularo DM, erit  $DM = b \sin. 2\beta$   
 $= \frac{2 \lambda m}{n}$ , et  $BM = c + b \cos. 2\beta$ ; ponatur radius cir-  
 culi  $DO = MN = z$ , erit  $DN = b \sin. 2\beta - z$ , et  $ON$   
 $= \sqrt{(2bz \sin. 2\beta - bb \sin. 2\beta^2)}$ ; vocetur autem angu-  
 lus  $DON = \Phi$ , erit  $\frac{b \sin. 2\beta - z}{z} = \sin. \Phi$  et  $z = \frac{b \sin. 2\beta}{1 + \sin. \Phi}$ ;  
 ideoque  $ON = PM = \frac{b \sin. 2\beta \cos. \Phi}{1 + \sin. \Phi}$ ; hinc arcus  $PQRD$   
 $= \left( \frac{90^\circ + \Phi}{1 + \sin. \Phi} \right) b \sin. 2\beta$ . Quare ob  $BP = c + b \cos. 2\beta$   
 $+ \frac{b \sin. 2\beta \cos. \Phi}{1 + \sin. \Phi}$ , respectu casus, quo agger secundum  
 ipsos limites duceretur, in longitudine aggeris lucrare-

mur  $b + 2c + b \cos. 2\beta + \frac{\beta \sin. 2\beta \cos. \Phi}{1 + \sin. \Phi} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi) b \sin. 2\beta}{1 + \sin. \Phi}$

Porro est sector  $DOP = \frac{(\frac{1}{2}\pi - \Phi) bb \sin. 2\beta^2}{2(1 + \sin. \Phi)^2}$ , area au-

tem  $BCDOP = bc \sin. 2\beta + \frac{1}{2} bb \sin. 2\beta \cos. 2\beta$   
 $+ \frac{bb \sin. 2\beta^2 \cos. \Phi}{(1 + \sin. \Phi)^2} + \frac{bb \sin. 2\beta^2 \sin. \Phi \cos. \Phi}{2(1 + \sin. \Phi)^2}$ , vnde in magnitu-  
 dine campi perdimus:

$$bc \sin. 2\beta + \frac{1}{2} bb \sin. 2\beta \cos. 2\beta + \frac{bb \sin. 2\beta^2 \cos. \Phi}{(1 + \sin. \Phi)^2}$$

$$+ \frac{bb \sin. 2\beta^2 \sin. \Phi \cos. \Phi}{2(1 + \sin. \Phi)^2} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi) bb \sin. 2\beta^2}{2(1 + \sin. \Phi)^2}$$

Hinc igitur posito  $\Phi$  constante statim patet, eo maius  
 fore lucrum, quo maiorem capere liceat lineam  $CD = c$ ;  
 ea enim elemento  $dc$  aucta, lucri augmentum erit  
 $dc(2m - nb \sin. 2\beta) = 2(1 - \lambda) mdc$ . Cum autem  $c$   
 detur, sumto angulo  $\Phi$  variabili, lucrum erit maxi-  
 mum, si

$$m b \sin. 2 \beta \left( d \frac{\cos. \Phi}{1 + \sin. \Phi} - d \frac{\frac{1}{2} \pi + \Phi}{1 + \sin. \Phi} \right) =$$

$$m b b \sin. 2 \beta^2 \left( d \frac{\cos. \Phi}{(1 + \sin. \Phi)^2} + \frac{1}{2} d \frac{\sin. \Phi \cos. \Phi}{(1 + \sin. \Phi)^2} - \frac{1}{2} d \frac{\frac{1}{2} \pi + \Phi}{(1 + \sin. \Phi)^2} \right)$$

quae aequatio euoluta commode ad hanc reducitur:

$$m = \frac{n b \sin. 2 \beta}{1 + \sin. \Phi} = n z, \text{ ita ut sit } z = \frac{m}{n}$$

vti quidem iam ex superioribus liquet. Erit ergo

$$1 + \sin. \Phi = \frac{n b \sin. 2 \beta}{m} = 2 \lambda \text{ et } \sin. \Phi = 2 \lambda - 1.$$

Quia  $\lambda < 1$ , ponatur  $\lambda = \cos. \zeta$ , erit  $\sin. \Phi = 2 \cos. \zeta - 1 = \cos. 2 \zeta$ , et  $\Phi = 90^\circ - 2 \zeta = \frac{1}{2} \pi - 2 \zeta$ ; hinc  $\cos. \Phi = \sin. 2 \zeta$ .

Diminutio ergo aggeris secundum longitudinem ob

$$b = \frac{2 m \cos. \zeta^2}{n \sin. 2 \beta} \text{ erit } = 2 c + \frac{2 m \cos. \zeta \cos. (\beta - \zeta)}{n \sin. \beta} = \frac{m}{n} (\pi - 2 \zeta)$$

et diminutio agri inclusi:

$$\frac{2 m \cos. \zeta^2}{n} + \frac{m m}{n n} (\sin. \zeta \cos. \zeta + \frac{2 \cos. \zeta^2 \cos. (\beta - \zeta)}{\sin. 2 \beta} - \frac{1}{2} (\pi - 2 \zeta)).$$

### Scholion 2.

32. Quod si lineae BA et CD intus conuergant, vt sit  $\delta + \gamma = 90^\circ - \theta$ , et  $BC = b < \frac{m \cos. \theta}{n \sin. \beta \sin. \gamma}$ , quaestio est magis difficilis, verumtamen ex principiis hactenus stabilitis expediri poterit. Huc imprimis pertinet casus, quo insula quaedam figurae et magnitudinis cuiuscunque aggere esset cingenda, cuius figura si fuerit polygonum, cuius singula latera superent quantitatem  $\frac{m}{n} (\cot. \frac{1}{2} p + \cot. \frac{1}{2} q)$  existentibus,  $p$  et  $q$  angulis cuique lateri adiacentibus, quaestio nullam habet diffi-

378 DE AGGERIBVS CONSTRVENDIS.

cultatem, dum finguli anguli arcubus circuli, cuius radius est  $= \frac{m}{n}$  pert. ita subtendi debent, vt latera fiant tangentes. At si quaedam latera, vel adeo omnia, fiat minora, peculiari solutione est opus, cui autem hic non immoror, cum quaestio digna videatur, quae omni cura euoluatur, et ad vsum communem accommodetur; quod opus, vel aliis perficiendum relinquo, vel in tempus magis opportunum mihi referuo.

---

---

---

PHYSI-