1764

Cogitationes de aggeribus construendis

Leonhard Euler

COGITATIONES
DE AGGERIBVS CONSTRVENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

De hoc argumento, quod amplissimam rerum maritimarum notitiam postulat, commentari numquam mihi in mentem venisset, nisi nuper mihi quaestio eo spectans cum controuersia coniuncta esset proposita, vt sententiam meam aperirem, quandoquidem totum negotium ad Geometriam et Analysin reuoluebatur. Res autem ita se habebat: In prouincia maritima extra aggerem, quo littora sunt munita, fluctibus tantum terrae erat aggestum, vt nouo aggere includendum videretur. Vetus agger secundum lineam AGKE erat ductus, et terra extrinsecus adiecta vsque ad lineam ABCDE patebat, secundum quam etiam nouus agger longitudine 1128 perticarum erat extructus: quo pacto totum spatium inter veterem nouumque aggerem interiectum in lucrum cessit. Constitit hoc opus 120000 Thal. et singularum linearum mensurae in perticis in figura sunt adscriptae.

Tab. VIII. Fig. 1.

2. Iam iis, qui hunc aggerem extrui curauerant, obiectum est, cum hic agger secundum lineam inflexam ABCDE esset ductus, a puncto A ad E, eum

eum potius ſecundum arcum circularem, qui aequale ſpatium concluderet, duci oportuiſſe, ſubductoque calculo compertum eſt, hunc aggerem 76 perticis breuiorem futurum fuiſſe, ita vt idem commodum minoribus impenſis, quot ſcilicet extructio aggeris 76 perticas longi requirit, obtineri potuiſſe. Cuius obiectionis ratio huic fundamento inniti videbatur, quod linea circularis inter omnes alias tantumdem ſpatii includentes ſit breuiſſima, ac damnum quidem, ex *neglectu* huius principii natum, ad 9600 Thal. aeſtimabatur. Controuerſia igitur in hoc verſabatur, num ab Architecto, vel iis, qui hunc aggerem extrui curauerunt, reſtitutio huius damni iure exigi queat? Atque hic quiden videndum eſt, vtrum Architectus ob ignorantiam iſtius principii geometrici peccauerit, an ob alias cauſas ab eo recedere ſit coactus?

3. Principium autem hoc Geometricum non ſolum nunc quidem eſt notiſſimum, ſed etiam naturae noſtrae quaſi ingenitum, vt mihi nullo modo perſuadere queam, eius ignorationem in cauſa fuiſſe, cur Architectus aggerem ſecundum lineam inflexam ABCDE duxerit. Si haec circuli proprietas ipſi incognita fuiſſet, cur aggerem non potius iuxta rectam AE duxit? vel ſi maius ſpatium complecti voluit, cur non latera polygoni cuiusdam regularis eſt ſecutus? Mihi quidem extra omne dubium poſitum videtur, ſi in aggere ducendo quicquam Architecti arbitrio eſſet relictum, illum certe neutiquam hunc ductum ſinuoſum ABCDE electurum fuiſſe. Ei quidem, poſtquam ab

A ad B peruenit, non in mentem incidere non potuit, aggerem recta ab B ad E potius, quam per partes intus vergentes BC, CD, DE continuare; quippe quo modo breuiori aggere adeo maius spatium inclusisset. Quin hoc nouerit Architectus, quantumuis caeterum fuisset Geometriae rudis, dubitari nullo modo potest.

4. Causa igitur subesse debet, cur potius tractum hunc infractum ABCDE, quam alium quemcunque, in extruendo aggere sit secutus; atque, etsi omnes rationes Architecturae maritimae mihi non sunt perspectae, haec tamen causa manifesto in figura terrae fortuito aggestae sita videtur: agger enim constitui nequit, nisi vbi terra supra fundum maris iam satis fuerit eleuata et confirmata. Loca igitur B, C, D ita videntur comparata, vt regio exterior, ob defectum fundi sufficientis, aggerem recipere non potuerit. Quodsi ergo rectas lineas AB, BC, CD, DE vt limites spectemus, vltra quos aggerem remouere non liceat, causa manifesta est, ob quam Architectus aggerem iuxta has ipsas lineas constituerit; simulque perspicuum est, arcum illum circularem, qui aequale spatium includeret, hic adhiberi non potuisse, propterea quod alicubi vltra hos limites extendi debuisset.

5. Si enim vspiam hos limites transgredi licuisset, equidem non in hoc Architectum reprehenderem, quod aggerem non secundum arcum circularem, qui aequale spatium includeret, duxerit, sed potius ideo, quod non eiusmodi arcum super corda AE constituerit,

rit, qui etiam maius ſpatium eſſet complexus. Etſi enim hoc modo agger maiorem longitudinem eſſet nactus, tamen ſumtuum incrementum maiori terrae ſpatio in vſum conuertendo fortaſſe fuiſſet compenſatum: ad hoc ſcilicet diiudicandum ſumtus in ſingulas perticas, quibus agger longior redditur, impendendi vna cum ſorte pecuniae ad conſeruationem requiſitae cum pretio ſingularum perticarum quadratarum, quibus terra vſui futura augetur, comparari debent, vt pateat, vtrum augmentum impenſae ſuperet lucri augmentum nec ne? Haec disquiſitio ibi erit neceſſaria, vbi ſatis terrae firmae fuerit aggeſtum, vt quousque libuerit aggerem extendere liceat, qui caſus, etſi a propoſito abhorrere videatur, eum tamen accuratius euoluere haud erit incongruum.

Problema I.

Si extra aggerem APQB tantum terrae a fluctibus maris ſit cumulatum, vt a terminis A et B nouum aggerem ADB quousque libuerit, protendere liceat, definire eum aggerem, qui maximum lucrum ſit allaturus. Fig. 2.

Solutio.

6. Primum obſeruo, huic aggeri nouo ab A ad B ducendo figuram arcus circularis tribui oportere: quamcunque enim aliam figuram haberet, ſemper arcus circularis dari poſſet aequale ſpatium includens, qui, cum ſit breuior, minoresque propterea ſumtus poſtulet, illi omnino erit anteferendus. Sit igitur ADB huiusmodi arcus circularis centrum habens in O, ponaturque

que cordae femiffis $AC = BC = c$, et anguli ad O femiffis $AOD = BOD = \omega$; tum vero fit fpatium inter aggerem veterem APQB et rectam AB inclufum $= bb$, quod partem conftituit fpatii extructione noui aggeris acquirendi. Hinc ergo fit radius circuli $OA = \frac{c}{\mathit{fin.}\,\omega}$ et $OC = \frac{c\,\mathit{cof.}\,\omega}{\mathit{fin.}\,\omega}$; ideoque arcus $ADB = \frac{2c\omega}{\mathit{fin.}\,\omega}$, qui dat longitudinem aggeris. Porro erit fector $AOB = \frac{cc\omega}{\mathit{fin.}\,\omega^2}$, indeque auferendo triangulum $AOB = \frac{cc\,\mathit{cof.}\,\omega}{\mathit{fin.}\,\omega}$, relinquitur area fegmenti $ADBA = \frac{cc(\omega - \mathit{fin.}\,\omega\,\mathit{cof.}\,\omega)}{\mathit{fin.}\,\omega^2}$, ita vt fpatium terrae aggere ADB acquifitum fit $= \frac{cc(\omega - \mathit{fin.}\,\omega\,\mathit{cof.}\,\omega)}{\mathit{fin.}\,\omega^2} + bb$.

7. Ponamus, has menfuras in perticis dari, fintque fumtus ad vnam perticam aggeris exftruendam $= m$ Thal. comprehenfis fimul impenfis ad conferuationem, quos cafu expofito vidimus exfurgere ad 100. Thal. Pretium autem vnius perticae quadratae terrae ftatuatur $= n$ Thal. quod vtique ab indole terrae et fructibus inde percipiendis pendet. Hinc lucrum deductis impenfis erit

$$\frac{ncc(\omega - \mathit{fin.}\,\omega\,\mathit{cof.}\,\omega)}{\mathit{fin.}\,\omega^2} + nbb - \frac{2mc\omega}{\mathit{fin.}\,\omega},$$

quod, nifi valorem obtineat pofitiuum, praeftabit res in priftino ftatu relinquere, neque exftructionem noui aggeris fufcipere, quoniam fumtus fuperarent fructus inde fperandos.

8. Incipiamus a cafu, quo agger recta ab A ad B ducitur; et quia terrae fpatium fit $= bb$, et longitudo aggeris $= 2c$, erit lucrum $= nbb - 2mc$. Nifi ergo fit $bb > \frac{2m}{n}c$, feu $c < \frac{nbb}{2m}$, hic nouus agger dam-

damnum afferret: ex quo duo caſus euoluendi occurrunt; alter, quo $bb < \frac{2m}{n}c$, alter vero quo $bb > \frac{2m}{n}c$; illo caſu non ſine damno agger rectus iuxta cordam AB duceretur, hoc vero lucrum quidem praeberet, ſed videndum eſt, num aggerem ſecundum arcum circularem incuruando non maius lucrum obtineri queat. Priori vero caſu, quo agger rectus cum manifeſto damno eſt coniunctus, inquiri conuenit, an aggeris curuatura damnum non minuatur, ac tandem in lucrum conuerti queat?

9. Sit igitur $bb < \frac{2m}{n}c$, et videamus, ſi angulus $AOB = 2\omega$ minimus capiatur, vtrum detrimentum minuatur nec ne? Ponamus, ſi $\omega = z$, et ob $\omega = z + \frac{1}{6}z^3$ et $\cos.\,\omega = 1 - \frac{1}{2}zz$, erit $\sin.\,\omega \cos.\,\omega = z - \frac{1}{2}z^3$, vnde aeſtimatio lucri oritur:

$$\tfrac{2}{3}nccz + nbb - 2mc(1 + \tfrac{1}{6}zz)$$

quae ergo maior eſt praecedente $nbb - 2mc$, quoniam $\frac{2}{3}nccz > \frac{2}{6}mczz$ ob z minimum. Certum ergo eſt, incuruatione aggeris damnum diminui; an autem continuo minuatur? differentiatio noſtrae formulae oſtendet, quae praebet:

$$\frac{2nccd\omega(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^3} - \frac{2mcd\omega(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^2} \text{ ſeu}$$

$$\frac{2cd\omega(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)}{\sin.\omega^3}(nc - m\sin.\omega)$$

Cum igitur ſit $\sin.\omega > \omega\cos.\omega$, aeſtimatio lucri aggerem magis incuruando continuo creſcit, quamdiu eſt $nc > m\sin.\omega$.

10. Si esset $nc < m$, seu $c < \frac{m}{n}$, lucrum eousque tantum cresceret, quoad fieret sin. $\omega = \frac{nc}{m}$, tum vero, vltra augendo angulum ω, iterum decresceret, neque vero perpetuo. Nam cum anguli ω, postquam vltra rectum, quo casu arcus ADB fit semicirculus, fuerit acutus, sinus iterum decrescat, quando infra valorem $\frac{nc}{m}$ decreuerit, lucri aestimatio iterum crescere incipit, idque deinceps continuo ac tantopere, vt tandem in infinitum augeatur. Quare lucrum dato quouis maius obtineri potest, dummodo angulus ω maxime obtusus capiatur, et arcus ADB segmentum maius maximi circuli constituat. Atque hoc in genere valet, siue fuerit $bb > \frac{2m}{n}c$, siue $bb < \frac{2m}{n}c$, ita vt neutro casu verum maximum locum habeat, sed lucrum continuo maius consequi liceat.

11. Sin autem aliae circumstantiae prohibeant, quo minus segmentum ADB vltra semicirculum augeri possit, tum semper, dummodo fuerit $c > \frac{m}{n}$, aggerem in figuram semicirculi duci conueniet, vt maximum lucrum, vel certe minimum damnum, obtineatur. Tum autem posito π pro semicircumferentia circuli, cuius radius est $= 1$, vt $\frac{1}{2}\pi$ angulum rectum denotet, ob $\omega = \frac{1}{2}\pi$, fiet lucri aestimatio:

$$\tfrac{1}{2}\pi ncc + nbb - \pi mc$$

quae expressio, nisi sit negatiua, aggerem maxime lucrosum indicat, contra autem praestabit, nullum plane aggerem extruere. At si fuerit $c < \frac{m}{n}$, statuatur $c = \frac{m}{n}$sin. ζ, ac tum segmentum ADB minus esse oportet semicirculo,

culo, ſumendo angulum $AOD = \zeta$; vt lucrum maximum vel damnum minimum euadat. Poſito autem $\omega = \zeta$ et $c = \frac{m}{n} \text{ſin.}\, \zeta$ fit lucri aeſtimatio:

$$\frac{ncc(\zeta - \text{ſin.}\,\zeta \,\text{coſ.}\,\zeta)}{\text{ſin.}\,\zeta^2} + nbb - \frac{2mc\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta} = nbb - \frac{mc}{\text{ſin.}\,\zeta}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta \,\text{coſ.}\,\zeta)$$

ſeu $= nbb - \frac{mm}{n}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta \,\text{coſ.}\,\zeta)$.

Niſi ergo ſit $bb > \frac{mm}{nn}(\zeta + \text{ſin.}\,\zeta \,\text{coſ.}\,\zeta)$ nequidem aggerem ſine damno extruere licet: niſi arcus ſemicirculo maiores admittantur.

12. Haec igitur ſunt fere obſeruanda, quando terra aggeſta nullos limites ponit, vltra quos aggerem extendere non liceat, qui caſus, cum nunquam locum habere poſſit, quandoquidem nunquam aggerem quaſi in infinitum extendere conceditur, reuertor ad ipſam quaeſtionem propoſitam, vbi ratio terrae extra veterem aggerem adiectae non permittit, vt agger vsquam vltra limites per lineas AB, BC, CD, DE deſignatos producatur. Atque hoc quidem caſu manifeſtum Tab. VIII. Fig. 1. eſt, nouo aggere maiorem terrae quantitatem cingi non poſſe, quam quae figura eſt repraeſentata; hocque ſpatium aliter in vſum conuerti non poſſe, niſi agger ſecundum ipſos illos limites extruatur; vtcunque enim ab iis recedatur, quoniam non extra eos vagari licet, ſemper minor terrae portio includetur. Quare ſi Architecto propoſitum fuerit, tantum terrae includere, quantum fieri licet, neceſſario aggerem iuxta ipſos limites extruere coactus fuit, neque quicquam in hoc opere ipſi vitio verti poteſt.

13. Hic

13. Hic autem alia quaestio meo quidem iudicio grauissima oritur, an non vtilius fuisset, aliquid de campo includendo remittere, et aggerem intra limites praescriptos ita ducere, vt deductis impensis aggeris a pretio terrae acquisitae lucrum idque maximum obtineretur. Quaeritur scilicet eiusmodi aggeris constructio, qui si breuior sit, quam linea limitum ABCDE, p perticis, spatium autem includat minus quam id, quod intra limites illos contineretur, qq perticis quadratis, vt lucrum ex diminutione aggeris natum, quod valet mp Thal. maxime superet damnum ob diminutionem terrae ortum, quod aestimatur nqq Thal. seu vt $mp-nqq$ fiat maximum. Quem in finem, vt res generaliter ac dilucide pertractetur, sequentia problemata euoluam.

Problema 2.

Fig. 3. Si limites, vltra quos aggerem protendi non liceat, sint rectae AB et BC, in B datum angulum constituentes, determinare rectam PQ, ita vt, si agger iuxta rectas AP, PQ, QC ducatur, quo pacto quidem terrae spatium PBQ perit, maximum tamen lucrum obtineatur.

Solutio.

14. Quodsi loco aggeris ABC aggere APQC vtamur, in eius longitudine tot perticas lucramur, quot excessus laterum $BP+BQ$ iunctim sumtorum supra latus PQ exhibet, quod ergo in expensis lucrum praebet $= m(BP+BQ-PQ)$ Thal. Contra vero in campo

campo includendo amittimus tot perticas quadratas, quot continet area trianguli PBQ, cuius pretium ad $n.\triangle PBQ$ Thal. eſt conſtituendum. Lineam rectam ergo PQ ita duci oportet, vt haec quantitas $m(BP+BQ-PQ)-n.\triangle PBQ$ maximum valorem adipiſcatur.

15. Ponamus angulum $ABC=\beta$, qui datur, ſintque lineae quaeſitae $BP=x$, et $BQ=y$, erit $PQ=\surd(xx-2xy\,\text{coſ.}\,\beta+yy)$ quae breuitatis gratia dicatur $=z$, et area trianguli PBQ fit $=\frac{1}{2}xy\,\text{ſin.}\,\beta$; vnde his longitudinibus x et y in perticis expreſſis, habetur lucrum ad pecuniam reductum $=m(x+y-z)-\frac{1}{2}nxy\,\text{ſin}\,\beta$ Thal. quod maximum eſt reddendum. Vnde, cum ſit

$$dz=\frac{xdx-ydx\,\text{coſ.}\,\beta-xdy\,\text{coſ.}\,\beta+ydy}{z},$$

prout vel x vel y vt variabilis tractatur, hae duae aequationes eliciuntur:

$$m\left(1-\frac{x+y\,\text{coſ.}\,\beta}{z}\right)-\tfrac{1}{2}ny\,\text{ſin.}\,\beta=0$$
$$m\left(1+\frac{x\,\text{coſ.}\,\beta-y}{z}\right)-\tfrac{1}{2}nx\,\text{ſin.}\,\beta=0.$$

16. Quodſi illa per x, haec vero per y, multiplicetur, differentia ad hanc perducit aequationem:

$$m\left(x-y-\frac{xx+yy}{z}\right)=0=m(x-y)\left(1-\frac{x-y}{z}\right).$$

Cum igitur fieri nequeat $1=\frac{x+y}{z}$, ſeu $z=x+y$, neceſſe eſt, ſit $x=y$, ſeu $BP=BQ$, quam quidem conditionem ipſa quaeſtionis natura ſtatim ſuppeditare potuiſſet, cum nulla ſit ratio, cur linea BP et BQ inaequales capi deberent. Sit ergo $y=x$, et quia tum fit $z = \sqrt{(2xx - 2xx \operatorname{cof.} \beta)} = 2x \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta$, alterutra illarum aequationum abit in hanc formam:

$$m\left(1 + \frac{\operatorname{cof.} \beta - 1}{2 \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta}\right) - \tfrac{1}{2} n x \operatorname{fin} \beta = 0,$$

feu $m(1 - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\beta) = \tfrac{1}{2} n x \operatorname{fin.} \beta$,

vnde fit $x = \dfrac{2m(1 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta)}{n \operatorname{fin.} \beta} = \dfrac{m(1 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta)}{n \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta \operatorname{cof.} \frac{1}{2}\beta}$,

fiue $x = \dfrac{m}{n \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta} \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta}{1 + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta}} = \dfrac{m \operatorname{tang.} (45° - \frac{1}{4}\beta)}{n \operatorname{fin} \frac{1}{2}\beta}$

17. Problemati ergo ita fatisfit, vt capiatur:

$$BP = BQ = \frac{2m(1 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\beta)}{n \operatorname{fin.} \beta},$$

fiquidem lineae BA et BC fuerint maiores, fin autem hae lineae fint minores, tum euidens eft, rectarum BP et BQ alteram breuiori aequalem capi oportere, vnde altera per eandem methodum definietur. Atque hoc modo, fi limites habeant plures angulos, finguli refecari poterunt, fiquidem extus fint verfi, qui anguli enim intus vergunt, vt C et D in fig. 1, ii hanc operationem non admittunt, quin etiam deinceps nouos angulos ad P et Q ortos fimili modo fubtendere licebit, quae operatio fi continuetur, tandem agger figuram quafi curuilineam confequetur, quae omnium maximam vtilitatem apportabit. Eam autem circuli arcum fore manifeftum eft, quem ftatim fequenti modo determinare poterimus.

Pro-

Problema 3.

18. Si limites, vltra quos aggerem protendi non licet, ſint rectae AB et BC, in B datum angulum facientes, determinare eam aggeris figuram APSQC, qua maximum lucrum obtineatur. Tab. VIII. Fig. 4.

Solutio.

Primo patet, vt ante, partes a limitibus reſciſſas BP et BQ aequales eſſe debere, dummodo ipſae lineae BA et BC ſatis ſint longae, vt huiusmodi partes mox definiendas contineant, quod quidem hic aſſumo; ſi enim altera, vel vtraque, breuior fuerit, hic caſus peculiarem euolutionem poſtulat. Tum vero etiam patet, lineam curuam PSQ fore circularem, quam totam intra limites contineri neceſſe eſt; eius ergo centrum erit in recta BO, angulum B biſecante.

Ponamus itaque angulum $ABC = 2\beta$, vt ſit ſemiſſis $ABO = CBO = \beta$; tum vero ſtatuatur $BP = BQ = x$, erit $PR = QR = x\,\text{ſin.}\,\beta$ et $BR = x\,\text{coſ}\,\beta$, vnde conficitur area trianguli $PBQ = xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta$. Ponatur porro anguli POQ ſemiſſis $BOP = BOQ = \omega$, erit radius circuli $PO = QO = \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et $OR = \frac{x\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, hincque ipſe arcus $PSQ = \frac{2x\omega\,\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\omega}$, et ſector PSQO $= \frac{xx\omega\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}$, vnde, cum ſit triangulum $POQ = \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega}$, ſit area ſegmenti $PSQP = \frac{xx\,\text{ſin}\,\beta^3}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega)$ et trilinei $BPSQB = xx\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta - \frac{xx\,\text{ſin.}\,\beta^2}{\text{ſin.}\,\omega^2}(\omega - \text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega)$.

Quod ſi iam agger non iuxta ipſos limites ABC, ſed lineam mixtam APSQC ducatur, in longitudine aggeris lucramur $PB + QB - PSQ = 2x - \frac{2x\omega\,\sin.\beta}{\sin.\omega}$, quod lucrum valet $2mx(1 - \frac{\omega\sin.\beta}{\sin.\omega})$ at in campo perdimus trilineum BPSQB, quod damnum valet $nxx(\sin.\beta\cos.\beta - \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\omega^2}(\omega - \sin.\omega\cos.\omega))$. Nunc igitur excessus lucri supra damnum maximus reddi debet, vnde ob binas variabiles x et ω binas sequentes nanciscimur aequationes:

$$\mathrm{I.}\ m(1 - \frac{\omega\sin\beta}{\sin.\omega}) - nx(\sin.\beta\cos\beta - \frac{\sin.\beta^2}{\sin.\omega^2}(\omega - \sin\omega\cos.\omega)) = 0$$

$$\mathrm{II.}\ -\frac{2mx\sin.\beta}{\sin.\omega^2}(\sin.\omega - \omega\cos.\omega) - \frac{2nxx\sin.\beta^2}{\sin.\omega^3}(\omega\cos.\omega - \sin.\omega)) = 0$$

seu $\mathrm{II.}\ -\frac{2x\sin.\beta}{\sin.\omega^3}(\sin.\omega - \omega\cos.\omega)(m\sin.\omega - nx\sin.\beta) = 0$. Ex hac posteriori, quia fieri nequit $\sin.\omega - \omega\cos.\omega = 0$, fit $m\sin.\omega = nx\sin.\beta$, seu $x = \frac{m\sin.\omega}{n\sin.\beta}$, qui valor, in priori substitutus, praebet

$$m(1 - \frac{\omega\sin.\beta}{\sin.\omega}) - m(\cos.\beta\sin.\omega - \frac{\sin.\beta}{\sin.\omega}(\omega - \sin.\omega\cos\omega)) = 0,$$

seu $\sin.\omega - \omega\sin.\beta - \cos.\beta\sin.\omega^2 + \omega\sin.\beta - \sin.\beta\sin.\omega\cos.\omega = 0$, quae, per $\sin.\omega$ diuisa, dat:

$$1 - \cos.\beta\sin.\omega - \sin\beta\cos.\omega = 0, \text{ seu } 1\ \sin.(\beta + \omega)$$

vnde concludimus, fore $\beta + \omega = 90°$, seu $\omega = 90° - \beta$, ita vt angulus BPO sit rectus, ideoque arcus PSQ a limitibus AB et BC tangatur: ex quo totus arcus PSQ intra limites cadit, quemadmodum natura rei postulat.

Cum igitur sit $\omega = 90° - \beta$, erit $BP = BQ = x = \frac{m\cos.\beta}{n\sin.\beta} = \frac{m}{n\,tang.\beta}$, seu $x\,tang.\beta = PO = \frac{m}{n}$, ita vt $\frac{m}{n}$ perticae semper dent radium circuli PSQ, iuxta quem aggerem duci oportet, qui arcus cum limites tangere debeat,

beat, tota constructio est facilis. In recta enim BO, angulum ABC bisecante, id punctum O capi debet, e quo perpendiculum in alterum limitem demissum OP fiat $= \frac{m}{n}$, eritque O centrum circuli, et OP eius radius.

Tum autem sumtis $BP = BQ = \frac{m\, cos.\beta}{n\, cos.\beta}$, erit arcus $PSQ = \frac{m}{n}(\pi - 2\beta)$ denotante π semicircumferentiam et 2β arcum circuli, angulum ABC metientis, sinu toto existente $= 1$, vnde, lucrum ex aggeris diminutione ortum, est $= \frac{mm}{n}(2\cot.\beta - \pi + 2\beta)$ Thal. Damnum autem, ob diminutionem spatii inclusi natum, est $= \frac{mm}{n}(\cot.\beta - \frac{1}{2}\pi + \beta)$, quod lucri semissi aequatur, ita vt totum lucrum sit $= \frac{mm}{n}(\beta + \cot.\beta - \frac{1}{2}\pi)$ Thal.

Coroll. 1.

19. Quo maior ergo est angulus $ABC = 2\beta$, eo minores fiunt partes rescindendae $BP = BQ$, et plane euanescunt, si ille angulus ad duos rectos excrescat. Hinc quo obtusior fuerit angulus ABC, eo minus hac correctione est opus.

Coroll. 2.

20. At si angulus ABC fuerit acutus, ideoque β semirecto minor, partes rescindendae $BP = BQ$ maiores fiunt, quam $\frac{m}{n}$, hocque casu imprimis necesse erit, aggerem intra limites contrahi; quia alias ingentes sumtus frustra impenderentur.

Coroll. 3.

21. Quo facilius pro quouis angulo ABC constructio aggeris maxime conueniens perſpiciatur, hanc tabellam ſubiungo:

Angulus ABC	Partes reſcindendae BP = BQ	Diminutio aggeris	Diminutio terrae incluſae	Lucrum in pecunia
10°	$11{,}430052.\frac{m}{n}$	$19{,}89304.\frac{m}{n}$	$9{,}94652.\frac{m^2}{n^2}$	$9{,}94652.\frac{mm}{n}$
20	$5{,}671282.\frac{m}{n}$	$8{,}55004.\frac{m}{n}$	$4{,}27502.\frac{mm}{nn}$	$4{,}27502.\frac{mm}{n}$
30	$3{,}732051.\frac{m}{n}$	$4{,}84611.\frac{m}{n}$	$2{,}42305.\frac{mm}{nn}$	$2{,}42305.\frac{mm}{n}$
40	$2{,}747477\,\frac{m}{n}$	$3{,}05149\,\frac{m}{n}$	$1{,}52575.\frac{mm}{nn}$	$1{,}52575.\frac{mm}{n}$
50	$2{,}144507.\frac{m}{n}$	$2{,}02008\,\frac{m}{n}$	$1{,}01004\,\frac{mm}{nn}$	$1{,}01004.\frac{mm}{n}$
60	$1{,}732051.\frac{m}{n}$	$1{,}36970.\frac{m}{n}$	$0{,}68485\,\frac{mm}{nn}$	$0{,}68485.\frac{mm}{n}$
70	$1{,}428148.\frac{m}{n}$	$0{,}93643.\frac{m}{n}$	$0{,}46821.\frac{mm}{nn}$	$0{,}46821.\frac{mm}{n}$
80	$1{,}191754.\frac{m}{n}$	$0{,}63817.\frac{m}{n}$	$0{,}31909.\frac{mm}{nn}$	$0{,}31909.\frac{mm}{n}$
90	$1{,}000000.\frac{m}{n}$	$0{,}42920.\frac{m}{n}$	$0{,}21460.\frac{mm}{nn}$	$0{,}21460.\frac{mm}{n}$
100	$0{,}839099.\frac{m}{n}$	$0{,}28193.\frac{m}{n}$	$0{,}14097.\frac{mm}{nn}$	$0{,}14097.\frac{mm}{n}$
110	$0{,}700207.\frac{m}{n}$	$0{,}17868.\frac{m}{n}$	$0{,}08934.\frac{mm}{nn}$	$0{,}08934.\frac{mm}{n}$
120	$0{,}577350.\frac{m}{n}$	$0{,}10750\,\frac{m}{n}$	$0{,}05375.\frac{mm}{nn}$	$0{,}05375.\frac{mm}{n}$
130	$0{,}466308.\frac{m}{n}$	$0{,}05995.\frac{m}{n}$	$0{,}02997.\frac{mm}{nn}$	$0{,}02997.\frac{mm}{n}$
140	$0{,}363970.\frac{m}{n}$	$0{,}02981.\frac{m}{n}$	$0{,}01490.\frac{mm}{nn}$	$0{,}01490.\frac{mm}{n}$
150	$0{,}267949.\frac{m}{n}$	$0{,}01230.\frac{m}{n}$	$0{,}00615.\frac{mm}{nn}$	$0{,}00615.\frac{mm}{n}$
160	$0{,}176327.\frac{m}{n}$	$0{,}00358.\frac{m}{n}$	$0{,}00179.\frac{mm}{nn}$	$0{,}00179.\frac{mm}{n}$
170	$0{,}087488.\frac{m}{n}$	$0{,}00044.\frac{m}{n}$	$0{,}00022.\frac{mm}{nn}$	$0{,}00022.\frac{mm}{n}$
180	$0{,}000000.\frac{m}{n}$	$0{,}00000.\frac{m}{n}$	$0{,}00000.\frac{mm}{nn}$	$0{,}00000.\frac{mm}{n}$

Coroll. 4.

Coroll. 4.

22. Tota haec determinatio pendet a pretio aggeris, vnam perticam longi, quod m Thaleros posuimus, et a pretio vnius perticae quadratae agri, quod n Thal. sumsimus, quae duo pretia prouti variauerint, exstructio aggeris maxime idonea inde determinationem consequitur.

Scholion 1.

23. Casu ergo proposito, quo angulus B est fere angulus rectus, ductum aggeris ita intra hunc angulum statui conueniet, vt resciſſis rectis $BP = BQ = \frac{m}{n}$ pertic. a P ad Q arcus circuli ducatur, quem rectae BP et BQ tangunt: haecque constructio tanto vtilior erit, quam si agger secundum ipsos limites duceretur, vt lucrum futurum sit $= \frac{2146}{10000} \cdot \frac{mm}{n}$ Thal. Cum igitur, vti vidimus, vna pertica aggeris constet 100 Thal. si perticam quadratam agri aestimemus ad 1 Thal. vt sit $m=100$ et $n=1$, abscindi oportet $BP=BQ=100$ pert. aggerque a P ad Q per arcum circularem PSQ extruatur; sicque lucrum obtinebitur $=2146$ Thal. Haec scilicet constructio maxime praeferenda est ei, qua agger secundum ipsos limites PB et QB ad ipsum angulum B vsque produceretur; minor quidem terrae portio hoc modo includitur, deficiens 2146 perticis quadratis, quarum pretium 2146 Thal. aestimatur: at agger hoc modo breuior fit $42\frac{92}{100}$ perticis, quae sumtum $=4292$ Thal. requirent, vnde lucrum obtinetur 2146 Thal. Circa reliquos angulos C et D, quoniam intus vergunt, nulla emendatio locum habet, vtcunque enim agger a Q et E intra hos limites

mites constitueretur, non solum minor campus concluderetur, sed etiam agger longior euaderet. Vnde Architectus ideo tantum est reprehendendus, quod aggerem vsque ad angulum extus vergentem B extenderit, sicque sumtus inutiles 2146 Thal. erogarit, quos euitare licuisset; verum haec solertia ab homine Geometriae sublimioris experte non est exigenda.

Scholion 2.

24. Comparemus etiam casum, quo agger secundum ipsam rectam AE duceretur, cum casu, quo iuxta limites A B C D E est ductus, visuri, vtrum lucrum, an damnum, inde fuisset expectandum. Hoc autem modo agger breuior prodiisset 86 perticis, vnde sumtuum diminutio fuisset 8600 Thal. Periisset autem omnis terra, inter limites ABCDE et rectam AE contenta, quae cum sit 44237 perticarum quadratarum, damnum totidem Thalerorum esset aestimandum, vnde agger iuxta limites ductus praestat aggere secundum rectam AE ducto, discrimine existente 35637 Thal. Verum, vti iam vidimus, magis expedit arcus PSQ a limitibus recedere, quam ipsos limites sequi, lucro existente 2146 Thal. Hoc modo tota aggeris longitudo foret 1085 perticarum, cuius extructio, vti posuimus, postulat 108500 Thal. ac nunc quidem videndum est, an agri sic acquisiti quantitas, quae est spatium inter veterem aggerem AGKE et nouum APSQCDE, superet 108500 perticas quadratas nec ne? si enim minor esset, praestitisset omnino extructione noui aggeris supersedere; eatenus enim tantum hoc

hoc opus suscipere operae pretium fuisset, quatenus quantitas terrae acquisitae superasset 108500 perticas quadratas, siquidem pretium vnius perticae quadratae ad vnum Thalerum constituatur. Praeterea vero etiam perpendendum est, extructo nouo aggere, veterem aggerem nullos amplius sumtus ad conseruationem requirere; cuius commodi ratio etiam in aestimatione lucri est habenda: impensae scilicet noui aggeris tanto minores sunt censendae. Cum igitur agger secundum ipsos limites sit extructus, qui ad 1128 perticas porriguntur, dummodo maior terrae quantitas quam 112800 pert. quadratarum fuerit acquisita, lucrum inde est comparatum, quod etsi non fuerit maximum, tamen Architecto vitio verti non potest, atque perpetuo extructio nouorum aggerum secundum haec principia diiudicanda videtur, postquam tam sumtus in singulas aggeris perticas, quam pretium cuiusque perticae quadratae fuerit constitutum.

Scholion. 3.

25. Reuertamur ad nostrum problema, quo limites duabus rectis AB et BC contineri assumsimus, ac perpendamus casum, quo altera harum duarum rectarum, puta BC, minor est quam pars abscindenda, quae supra est inuenta $= \frac{m}{n}\cot.\beta$, existente altera $BA > BC$. Atque hic facile perspicitur, arcum circuli per ipsum punctum C transire debere; secet is ergo alteram in P, ac pariter euidens est, rectam PB huius arcus tangentem esse debere; si enim non tangeret, a puncto quodam

 rectae

rectae BA a B remotiori duci posset ad C arcus rectam BA tangens, aequale spatium ab angulo rescindens, quae cum aggerem breuiorem daret, vtique esset praeferenda. Manente ergo angulo $ABC = 2\beta$, sit recta $BC = b$, et quaesita $BP = x$. Ducta PO ad BP normali, sit O centrum arcus PSC, vnde OR cordam CP bisecans simul angulum COP bisecabit, et ad CP erit normalis. Statuatur angulus $COR = POR = \omega$, erit $CPB = \omega$, et $PCB = 180^\circ - 2\beta - \omega$, vnde colligitur $BP = x = \frac{b\,\text{fin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{fin.}\,\omega}$ et $CP = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta}{\text{fin.}\,\omega}$, vt sit $PR = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta}{2\,\text{fin.}\,\omega}$, et $PO = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta}{2\,\text{fin.}\,\omega^2}$, atque $OR = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\omega}{2\,\text{fin.}\,\omega^2}$. Hinc prodit arcus $PSC = \frac{b\,\omega\,\text{fin.}\,2\beta}{\text{fin.}\,\omega^2}$, et sector $OPSC = \frac{bb\,\omega\,\text{fin.}\,2\beta^2}{4\,\text{fin.}\,\omega^4}$, vnde, ablato triangulo $OCP = \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{cof.}\,\omega}{4\,\text{fin.}\,\omega^3}$, relinquitur segmentum $CSPC = \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2}{4\,\text{fin.}\,\omega^4}(\omega - \text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega)$. Cum iam sit $BC + BP = b\left(1 + \frac{\text{fin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{fin.}\,\omega}\right)$, diminutio aggeris est $= b\left(1 + \frac{\text{fin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{fin.}\,\omega} - \frac{\omega\,\text{fin.}\,2\beta}{\text{fin.}\,\omega^2}\right)$; et ob aream trianguli $CBP = \frac{1}{2} bx\,\text{fin.}\,2\beta = \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{fin.}\,(2\beta + \omega)}{2\,\text{fin.}\,\omega}$, diminutio campi includendi $= \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta}{4\,\text{fin.}\,\omega^4}(2\,\text{fin.}\,\omega^3\,\text{fin.}\,(2\beta + \omega) - \text{fin.}\,2\beta(\omega - \text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega))$. Quare lucrum erit =

$$mb\left(i + \frac{\text{fin.}\,(i\beta + \omega)}{\text{fin.}\,\omega} - \frac{\omega\,\text{fin.}\,2\beta}{\text{fin.}\,\omega^2}\right) - \frac{1}{4} nbb\,\text{fin.}\,2\beta\left(\frac{2\,\text{fin.}\,(2\beta + \omega)}{\text{fin.}\,\omega} - \frac{\text{fin.}\,2\beta(\omega - \text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega)}{\text{fin.}\,\omega^4}\right),$$

cuius differentiale nihilo aequatum et per $\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - \text{fin.}\,\Phi$ diuisum praebet $nb\,\text{fin.}\,2\beta = 2m\,\text{fin.}\,\omega^2$, vnde fit $PO = \frac{m}{n}$ et

$$\text{fin.}\,\omega = \sqrt{\frac{nb\,\text{fin.}\,2\beta}{2m}} = \sqrt{\frac{nb\,\text{fin.}\,\beta\,\text{cof.}\,\beta}{m}}, \text{ et } x = \frac{b\,\text{fin.}\,(2\beta + n)}{\text{fin.}\,\omega},$$

vbi, cum sit $b < \frac{m\,\text{cof.}\,\beta}{n\,\text{fin.}\,\beta}$, erit $\text{fin.}\,\omega < \text{cof.}\,\beta$ seu $\omega < 90 - \beta$. ideo, ideoque $BP > BC$. Hinc sequitur, si esset $BA < BP$ tum arcum circuli per ambo puncta A et C duci convenire, vt rectam BA tangat; tum scilicet magis lucrum obtinere non licet.

Problema 4.

26. Si limites, quos aggerem transgredi non oportet, tribus lineis rectis AB, BC, CD constent, definire aggeris constructionem maxime lucrosam. Fig. 6.

Solutio.

Sit, vt ante, m pretium aggeris vnam perticam longi, et n pretium vnius perticae quadratae agri, ponatur angulus $ABC = 2\beta$ et angulus $BCD = 2\gamma$, ac si fuerit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma)$ solutionem praecedens problema suppeditat. Primum enim circa B abscindantur portiones $BP = BQ = \frac{m}{n}\cot.\beta$, et circa C portiones $CR = CS = \frac{m}{n}\cot.\gamma$; describanturque, tam per puncta P et Q, quam per R et S, eodem radio $= \frac{m}{n}$ pert. bini arcus circulares PQ et RS limites tangentes; quo facto aggerem secundum lineam mixtam APQRSD duci conueniet. Hoc modo maximum lucrum acquiretur, quod maius erit, quam si agger iuxta ipsos limites duceretur, excessu existente:

$$\frac{mm}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi);$$

aggeris enim longitudo diminuetur quantitate:

$$\frac{2m}{n}(\beta + \gamma + \cot.\beta + \cot.\gamma - \pi) \text{ pert.}$$

at agri inclusi spatium minuitur quantitate:

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi) \text{ pert. II.}$$

Quodsi lineae BA et CD vel alterutra earum minor fuerit quam portio inde rescindenda, puncta P et S in A et D capi oportet, et arcus PQ et SR semper eodem radio $=\frac{m}{n}$ pert. describendi tantum lineam BC tangent. Hoc casu non opus est, vt sit $BC > \frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$ sed sufficit, si BC non fuerit minor quam BQ et CR, quippe quae partes BQ et CR minores erunt quam casu praecedente. Si alteruter angulorum B et C intus vergat, in eo nulla correctio locum habet, sed tantum angulus extus vergens arcu erit subtendendus.

Si fuerit praecise $BC=\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$, puncta Q et R conuenient, prodibitque vnus arcus continuus PQRS limites tangens, iuxta quem aggerem construi oportet. Sin autem recta BC minor fuerit quam $\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$ neque rectae BA et CD tam sint paruae, vt praecedens solutio locum habere posset, sequenti modo solutio eruetur:

Fig. 7. Cum euidens sit, aggerem intra rectam BC cadere, is etiam maximi proprietate gaudebit, si rectae AV et BV ad concursum V productae limites constituerent. Erit autem angulus $V=2\beta+2\gamma-180°$; vnde posita recta $BC=b$, vt sit $b<\frac{m}{n}(\cot.\beta+\cot.\gamma)$ pert. erit $BV=\frac{b\,\sin.\,2\gamma}{\sin.(2\beta+2\gamma-180°)}=-\frac{b\,\sin.\,2\gamma}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$ et $CV=-\frac{b\,\sin.\,2\beta}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$.

Tum

Tum capiatur $VP = VS = \frac{m}{n}\cot.(\beta+\gamma-90^\circ) = -\frac{m}{n}\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)$ et per puncta P et S radio $= \frac{m}{n}$ pert. ducatur arcus circuli PQRS, limites AB et CD in P et S tangens, qui dabit ductum aggeris. Quodsi ponamus $b = \frac{\lambda m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma) = \frac{\lambda m \sin.(\beta+\gamma)}{n \sin.\beta \sin.\gamma}$ vt sit $\lambda < 1$, reperitur:

$$BP = \frac{m}{n}(\lambda \cot.\beta - (1-\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma))$$

$$CS = \frac{m}{n}(\lambda \cot.\gamma - (1-\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)).$$

Quantum autem lucrum hoc modo obtineatur, ita cognoscetur: Cum sit

$$VP + VS - PQRS = \frac{2m}{n}(\beta+\gamma-\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)-\pi) \text{ et}$$

$$VPQRSV = \frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

tum vero $BV + CV - BC = -\frac{b(\sin.2\beta + \sin.2\gamma \sin.(2\beta+2\gamma))}{\sin.(2\beta+2\gamma)}$

seu $BV + CV - BC = -\frac{2\lambda m}{n}(\cot.\beta + \cot.\gamma + \operatorname{tang}.(\beta+\gamma))$

$$= -\frac{2\lambda m}{n}\cot.\beta \cot.\gamma \operatorname{tang}.(\beta+\gamma)$$

qua expressione inde ablata, prodit aggeris diminutio:

$$PB + BC + CS - PQRS = \frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\lambda\cot.\beta+\lambda\cos.\gamma - (1-\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

$$= \frac{2m}{n}(\beta+\gamma-(1-\lambda\cot.\beta\cot.\gamma)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

Deinde ob $\triangle BVC = -\frac{bb\sin.2\beta\sin.2\gamma}{2\sin.(2\beta+2\gamma)} = -\frac{\lambda\lambda nm}{nn}\cot.\beta \cos.\gamma \operatorname{tang}(\beta+\gamma)$

fit campi includendi diminutio: $BPQRSC =$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma-(1-\lambda\lambda\cot.\beta\cos.\gamma)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)-\pi) =$$

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\lambda\lambda\cot.\beta+\lambda\lambda\cot.\gamma-(1-\lambda\lambda)\operatorname{tang}.(\beta+\gamma)-\pi)$$

 vnde

vnde totum lucrum aestimandum erit:

$$\frac{mm}{n}(\beta+\gamma-\text{tang.}(\beta+\gamma)+\lambda(2-\lambda)\cot.\beta\,\text{cos.}\gamma\,\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi)=$$
$$\frac{m.m}{n}(\beta+\gamma+\lambda(2-\lambda)(\cot.\beta+\text{cos.}\gamma)-(1-\lambda)^2\text{tang.}(\beta+\gamma)-\pi).$$

Coroll. 1.

27. Si rectae AB et DC extus conuergant, vti in figura exhibentur, erit $2\beta+2\gamma>180°$, ideoque $\beta+\gamma>90°$, vnde tang. $(\beta+\gamma)$ fit negatiua, hincque $BP>\frac{\lambda m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{\lambda m}{n}\cot.\gamma$. Qui etiam posito $\beta+\gamma=90°+\theta$, vt fit $V=2\theta$ habebitur $BP=\frac{m}{n}(\cot.\beta+\frac{(1-\lambda)\text{cos.}\gamma}{\text{sin.}\beta\,\text{sin.}\theta})$ et $CS=\frac{m}{n}(\cot.\gamma+\frac{(1-\lambda)\text{cos.}\beta}{\text{sin.}\gamma\,\text{sin.}\theta})$ adeoque $BP>\frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CS>\frac{m}{n}\cot.\gamma$.

Coroll. 2.

28. Hoc ergo casu, quo $\beta+\gamma=90°+\theta$, nihil obstat, quo minus solutio inuenta applicari possit, dummodo rectae BA et CD superent valores pro BP et CS inuentos. Sin autem altera vel vtraque fuerit breuior, arcus circuli radio $\frac{m}{n}$ describendi per terminum breuioris ita duci debet, vt longiorem tangat; at si ne hoc quidem fieri queat, per vtrumque terminum A et D ita ducatur, vt longiorem tangat.

Coroll. 3.

29. Quodsi autem fuerit $\beta+\gamma=90°+\theta$, et solutionem inuentam applicare liceat, erit aggeris diminutio:

$$\frac{2m}{n}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\text{cos.}\gamma-\pi+(1-\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

Campi

Campi autem includendi decrementum

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda\lambda)\cot.\beta\cot.\gamma\cot.\theta)$$

ita vt verum lucrum fit

$$\frac{mm}{nn}(\beta+\gamma+\cot.\beta+\cot.\gamma-\pi+(1-\lambda)^2\cot.\beta\cot.\gamma\cot\theta).$$

Coroll. 4.

30. At si rectae BA et CD intus conuergant, quo casu angulus θ fit negatiuus, partes BP et CS minores euadunt, quam casu $\lambda=1$, ideoque arcus circuli vltra rectam BC porrigeretur, quod cum naturae aduersetur, hoc casu verum maximum locum non inuenit. Quod etiam inde patet, quod intra rectas BA et CD conuergentes circulum radii $=\frac{m}{n}$, qui vtramque tangat, describere non licet.

Scholion 1.

31. Antequam casum rectarum BA et CD intus conuergentium perpendamus, consideremus casum, quo sunt parallelae, ideoque $\beta+\gamma=90^\circ$, et $\theta=0$, atque $BC=b=\frac{\lambda m}{n\,\sin.\beta\,\sin.\gamma}=\frac{2\lambda m}{n\,\sin.2\beta}$, existente $\lambda<1$. Sit autem $BA>\frac{m}{n}\cot.\beta$ et $CD>\frac{m}{n}\cot.\gamma$; per solutionem iam partes BP et CD capi deberent infinitae; quod cum fieri nequeat, arcum circularem ita per terminum breuiorem D duci conueniet, vt alteram rectam BA tangat, radio $=\frac{m}{n}$, ac si esset etiam $BA<BP$, alio radio circulus per A et D duci deberet, quia rectam BA in A tangeret. Quantum igitur hinc lucrum oriatur, generalius inuestigemus: Sit $CD=c$, ac demisso Fig. 8.

missio

misso ex D in BA perpendiculo DM, erit $DM = b\,\text{fin.}\,2\beta = \frac{2\lambda m}{n}$, et $BM = c + b\,\text{cof.}\,2\beta$; ponatur radius circuli $DO = MN = z$, erit $DN = b\,\text{fin.}\,2\beta - z$, et $ON = \sqrt{(2bz\,\text{fin.}\,2\beta - bb\,\text{fin.}\,2\beta^2)}$; vocetur autem angulus $DON = \Phi$, erit $\frac{b\,\text{fin.}\,2\beta - z}{z} = \text{fin.}\,\Phi$ et $z = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta}{1 + \text{fin.}\,\Phi}$; ideoque $ON = PM = \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\Phi}{1 + \text{fin.}\,\Phi}$; hinc arcus PQRD $= \frac{(90^\circ + \Phi)\,b\,\text{fin.}\,2\beta}{1 + \text{fin.}\,\Phi}$. Quare ob $BP = c + b\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{b\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\Phi}{1 + \text{fin.}\,\Phi}$, respectu casus, quo agger secundum ipsos limites duceretur, in longitudine aggeris lucraremur $b + 2c + b\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{\beta\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,\Phi}{1 + \text{fin.}\,\Phi} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,b\,\text{fin.}\,2\beta}{1 + \text{fin.}\,\Phi}$.

Porro est sector $DOP = \frac{(\frac{1}{2}\pi - \Phi)\,bb\,\text{fin.}\,2\beta^2}{2(1 + \text{fin.}\,\Phi)^2}$, area autem $BCDOP = bc\,\text{fin.}\,2\beta + \frac{1}{2}bb\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{cof.}\,\Phi}{(1 + \text{fin.}\,\Phi)^2} + \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{2(1 + \text{fin.}\,\Phi)^2}$, vnde in magnitudine campi perdimus:

$$bc\,\text{fin.}\,2\beta + \tfrac{1}{2}bb\,\text{fin.}\,2\beta\,\text{cof.}\,2\beta + \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{cof.}\,\Phi}{(1 + \text{fin.}\,\Phi)^2}$$
$$+ \frac{bb\,\text{fin.}\,2\beta^2\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi}{2(1 + \text{fin.}\,\Phi)^2} - \frac{(\frac{1}{2}\pi + \Phi)\,bb\,\text{fin.}\,2\beta^2}{2(1 + \text{fin.}\,\Phi)^2}.$$

Hinc igitur posito Φ constante statim patet, eo maius fore lucrum, quo maiorem capere liceat lineam $CD = c$; ea enim elemento dc aucta, lucri augmentum erit $dc(2m - nb\,\text{fin.}\,2\beta) = 2(1 - \lambda)\,m\,dc$. Cum autem c detur, sumto angulo Φ variabili, lucrum erit maximum, si

mb

$$mb\,\text{fin.}\,2\beta\left(d.\frac{\text{cof.}\Phi}{1+\text{fin}\,\Phi}-d.\frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{1+\text{fin.}\,\Phi^2}\right)=$$

$$nbb\,\text{fin.}\,2\beta^2\left(d\frac{\text{cof.}\Phi}{(1+\text{fin.}\Phi)^2}+\tfrac{1}{2}d.\frac{\text{fin}\,\Phi\,\text{cof}\,\Phi}{(1+\text{fin.}\Phi)^2}-\tfrac{1}{2}d.\frac{\frac{1}{2}\pi+\Phi}{(1+\text{fin.}\Phi)^2}\right),$$

quae aequatio euoluta commode ad hanc reducitur:

$$m=\frac{nb\,\text{fin.}\,2\beta}{1+\text{fin.}\Phi}=nz, \text{ ita vt fit } z=\frac{m}{n}$$

vti quidem iam ex superioribus liquet. Erit ergo

$$1+\text{fin.}\Phi=\frac{nb\,\text{fin.}\,2\beta}{m}=2\lambda \text{ et fin.}\Phi=2\lambda-1.$$

Quia $\lambda<1$, ponatur $\lambda=\text{cof.}\zeta^2$, erit $\text{fin.}\Phi=2\,\text{cof}\,\zeta^2-1=\text{cof.}\,2\zeta$, et $\Phi=90^\circ-2\zeta=\frac{1}{2}\pi-2\zeta$; hinc $\text{cof.}\Phi=\text{fin.}\,2\zeta$.

Diminutio ergo aggeris secundum longitudinem ob $b=\frac{2m\,\text{cof.}\zeta^2}{n\,\text{fin.}\,2\beta}$ erit $=2c+\frac{2m\,\text{cof.}\zeta\,\text{cof.}(\beta-\zeta)}{n\,\text{fin.}\beta}-\frac{m}{n}(\pi-2\zeta)$ et diminutio agri inclusi:

$$\frac{2m\,c\,\text{cof.}\zeta^2}{n}+\frac{mm}{nn}\left(\text{fin.}\zeta\,\text{cof.}\zeta+\frac{2\,\text{cof.}\zeta^3\,\text{cof.}(2\beta-\zeta)}{\text{fin.}\,2\beta}-\tfrac{1}{2}(\pi-2\zeta)\right).$$

Scholion 2.

32. Quod si lineae BA et CD intus conuergant, vt sit $\beta+\gamma=90^\circ-\theta$, et $BC=b<\frac{m\,\text{cof.}\theta}{n\,\text{fin.}\beta\,\text{fin.}\gamma}$, quaestio est magis difficilis, veruntamen ex principiis hactenus stabilitis expediri poterit. Huc imprimis pertinet casus, quo insula quaedam figurae et magnitudinis cuiuscunque aggere esset cingenda; cuius figura si fuerit polygonum, cuius singula latera superent quantitatem $\frac{m}{n}(\text{cot.}\tfrac{1}{2}p+\text{cot}\tfrac{1}{2}q)$ existentibus, p et q angulis cuique lateri adiacentibus, quaestio nullam habet diffi-

cultatem, dum ſinguli anguli arcubus circuli, cuius radius eſt $= \frac{m}{n}$ pert. ita ſubtendi debent, vt latera fiant tangentes. At ſi quaedam latera, vel adeo omnia, ſint minora, peculiari ſolutione eſt opus, cui autem hic non immoror, cum quaeſtio digna videatur, quae omni cura euoluatur, et ad vſum communem accommodetur; quod opus, vel aliis perficiendum relinquo, vel in tempus magis opportunum mihi reſeruo.

PHYSI-