1764

Investigatio functionum ex data differentialium conditione

Leonhard Euler

E285

INVESTIGATIO FVNCTIONVM EX DATA DIFFERENTIALIVM CONDITIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et y, eaque differentietur, vt prodeat eius differentiale:

$$dV = Pdx + Qdy$$

tum vero hae duae quantitates P et Q denuo differentientur, sicque proueniat:

$$dP = pdx + rdy \text{ et } dq = sdx + qdy$$

notum est, semper fore $r = s$. Quam proprietatem quoque ita exprimere soleo, vt dicam, esse:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Huiusmodi scilicet expressione $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ indico, functionem P ita differentiari, vt sola quantitas y pro variabili habeatur, et differentiale resultans per dy diuidi, quo pacto, quantitas finita a differentialibus libera proueniat, necesse est.

2. Quodsi ergo formula $Pdx + Qdy$ ita fuerit comparata, vt secundum hanc scribendi rationem in ea sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, hinc viciffim concludimus, istam formulam

mulam $Pdx + Qdy$ re vera oriri ex differentiatione cuiuspiam functionis V ipsarum x et y. Cum autem haec proprietas latissime pateat, plus inde concludere non licet, quam formulam $Pdx + Qdy$ esse integrabilem, neque quicquam per hanc solam conditionem in genere definitur, vnde vlla peculiaris proprietas eius functionis, ex cuius differentiatione est nata, colligi posset.

3. Quando autem functio V ad certum quoddam genus refertur, tum posito $dV = Pdx + Qdy$, inter quantitates P et Q, praeter illam generalem affectionem, alia quaedam particularis relatio intercedit. Ita nouimus, si V sit functio nullius dimensionis binarum variabilium x et y, tum praeter illam generalem proprietatem, qua est $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$, insuper hanc particularem locum semper habere, vt sit: $Px + Qy = 0$. Deinde simili modo demonstratum extat, si V sit functio homogenea binarum variabilium x et y, cuius dimensionum numerus sit $= n$, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ semper ita esse comparatum, vt sit

$$nV = Px + Qy.$$

Quo ergo casu hoc inprimis notatu dignum occurrit, quod formulae differentialis $Pdx + Qdy$ integrale statim assignari possit, cum sit $V = \frac{1}{n}(Px + Qy)$.

4. Quae cum sint demonstrata, iam pridem in mentem mihi venit, huiusmodi quaestiones inuerso modo tractare, atque in methodum inquirere, cuius ope, si

Y 2 posito

posito $dV = Pdx + Qdy$, compertum sit, esse vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, vicissim inueniri possit, functionem V vel esse nullius dimensionis, vel esse functionem homogeneam, in qua binae variabiles x et y vbique n dimensiones adimpleant. Scilicet nullo respectu ad illas proprietates iam cognitas, habito, ex hoc solo, quod sit vel $Px + Qy = 0$, vel $Px + Qy = nV$, per legitima analyseos ratiocinia elici oportet, functionem finitam V hac proprietate praeditam esse, vt vel sit nullius dimensionis, vel homogenea n dimensionum. Intelligendum autem est, proprietatem generalem $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ semper locum habere debere, sine qua aequatio $dV = Pdx + Qdy$ adeo esset absurda.

5. Hae quaestiones, quae vix adhuc tactae videntur, amplissimum aperiunt campum, fines analyseos vlterius extendendi. Proposita namque aequatione $dV = Pdx + Qdy$, quaeri potest indoles functionis V, si relatio quaecunque inter binas quantitates P et Q vel adeo inter ternas P, Q et V proponatur. Huiusmodi autem quaestiones etiamsi pene nouae videantur, tamen nullum est dubium, quin methodus eas rite resoluendi maximam per totam mathesin allatura sit vtilitatem. In problemate enim de cordis vibrantibus tota vis solutionis ad hoc genus est referenda, cum certa quadam relatione inter quantitates P et Q contineatur. Deinde etiam vniuersam motus fluidorum scientiam in huiusmodi formulis differentialibus sum complexus, vbi certa quaedam relatio inter partes differentialium praescribitur, ex qua autem ob defectum talis methodi vix quicquam concludere licet.

6.

6. Huiusmodi autem quaestiones etiam alio modo proponi possunt, vt solius functionis V, cuius natura quaeritur, mentio occurrat. Cum enim, posito $dV = P\,dx + Q\,dy$; sit $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$, prior quaestio ita enunciari poterit:

Inuenire indolem functionis V, *vt sit*:

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = 0$$

posterior vero hoc modo;

Inuenire indolem functionis V, *vt sit*:

$$x(\frac{dV}{dx}) + y(\frac{dV}{dy}) = nV$$

ac priori quidem ostendi debet, V esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y; posteriori vero, esse earumdem functionem homogeneam n dimensionum. Hoc scribendi autem modo in genere tenendum est, esse:

$$dV = dx(\frac{dV}{dx}) + dy(\frac{dV}{dy}).$$

7. Problema igitur latius patens ita se habebit, vt proposita quacunque relatione inter quantitates V, $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ definiri debeat, qualis functio sit V ipsarum x et y. Deinde etiam huiusmodi quaestiones ad functiones trium pluriumue variabilium extendi possunt; quin etiam quantitates ex duplici vel triplici differentiatione oriundae introduci possunt; cuiusmodi sunt $(\frac{ddV}{dx^2})$; $(\frac{ddV}{dx\,dy})$; $(\frac{ddV}{dy^2})$; $(\frac{d^3V}{dx^3})$; $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ etc. quarum significatus ita se habet, vt verbi gratia $(\frac{d^3V}{dx^2dy})$ oriatur, si primo V differentietur sola x variabili sumta, et differentiale per dx diuidatur, vt prodeat $(\frac{dV}{dx})$; tum vero haec quantitas denuo differentietur, sola x variabili

 sumta

ſumta, vt eius differentiale per dx diuiſum praebeat $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, quod denique rurſus differentiatum, ſumta ſola y variabili, et per dy diuiſum, dabit $\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right)$.

8. Dum autem hunc ſignandi modum recipimus, notandum eſt, eſſe:

$$\left(\frac{ddV}{dxdy}\right) = \left(\frac{ddV}{dydx}\right) \text{ et}$$
$$\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right) = \left(\frac{d^3V}{dxdydx}\right) = \left(\frac{d^3V}{dydx^2}\right)$$

Perinde ſcilicet eſt, quonam ordine quantitates x et y, quarum alterutra in qualibet differentiatione ſola variabilis aſſumitur, diſponantur, dummodo praeſcriptus differentiationum numerus inſtituatur. Quin etiam ſi V ſit functio trium variabilium x, y, z, ſimilis conuenientia locum habet; erit enim:

$$\left(\frac{d^3V}{dxdydz}\right)=\left(\frac{d^3V}{dxdzdy}\right)=\left(\frac{d^3V}{dydxdz}\right)=\left(\frac{d^3V}{dydzdx}\right)=\left(\frac{d^3V}{dzdxdy}\right)=\left(\frac{d^3V}{dzdydx}\right)$$

hic autem meas inueſtigationes tantum ad functiones duarum variabilium reſtringam.

9. Hoc modo deducimur non ſolum ad inſolitas et etiamnum vix tractatas quaeſtiones, ſed etiam ad noua ſigna, quibus adhuc parum ſumus adſueti; vnde haec methodus, cuius culturam tantopere expetere debemus, non immerito tanquam noua plane Analyſeos pars eſt ſpectanda. Non parum igitur mihi praeſtitiſſe videbor, ſi prima tantum iſtius methodi fundamenta conſtituero, neque ob rei nouitatem vix minimam aedificii iis ſuperſtruendi partem polliceri audeo. Tempore ſine dubio haud exiguo et indefeſſo labore opus erit, antequam iſtam Analyſeos partem, in ſe certe

certe difficillimam, non dicam perficere, sed tantum ad vberiorem vsum accommodare liceat. Quam ob rem ea, quae mihi adhuc in hoc genere sunt reperta, ordine ac dilucide exponere constitui, quo aliis, quos dignitas argumenti ad eundem laborem suscipiendum alliciet, prima quasi obstacula de via remoueam, animosque ad nouum hoc inuestigationum genus praeparem.

10. Antequam autem hoc munere fungar, principia quaedam per se perspicua praemittenda sentio. Primo scilicet, si fuerit $(\frac{dV}{dx}) = 0$; intelligitur, functionem V prorsus non ab x pendere, sed ex sola altera variabili y cum constantibus esse conflatam, sicque etiam formam $(\frac{dV}{dy})$ fore functionem ipsius y tantum. Vicissim autem si $(\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipsius y tantum, ipsa quantitas V erit aggregatum ex functione ipsius y tantum, et ex functione ipsius x tantum; quo ergo casu forma $(\frac{dV}{dx})$ erit functio ipsius x tantum. Deinde si fuerit $dV = R\,dS$, necesse est, vt R sit functio ipsius S, vel S ipsius R, vnde et V erit functio ipsius S, vel ipsius R; quia alioquin integrale $\int R\,dS$ non determinaretur. His igitur positis principiis primum binas quaestiones initio memoratas, quae huic inuestigationi ansam praebuerunt, resoluam, deinceps ad alias progressurus.

Problema 1.

11. Existente $dV = P\,dx + Q\,dy$, si fuerit $Px + Qy = 0$, inuenire, qualis V sit functio ipsarum x et y, vt huic conditioni satisfiat.

Solutio.

Solutio.

Cum igitur inter quantitates P et Q haec conditio praescribatur, vt sit $Px+Qy=0$, erit $Q=-P\frac{x}{y}$, qui valor in aequalitate $dV=Pdx+Qdy$ substitutus dabit:

$$dV=P(dx-\frac{xdy}{y})=\frac{P(ydx-xdy)}{y}$$

necesse igitur est, vt formula $\frac{P(ydx-xdy)}{y}$ sit integrabilis. Quae vt ad formam RdS perducatur, ita repraesentetur:

$$dV=Py.\frac{ydx-xdy}{yy}$$

Sumto enim $\frac{ydx-xdy}{yy}=dS$ et $S=\frac{x}{y}$, cum sit $dV=PydS$, necesse est, vt Py sit functio ipsius S, ideoque et V erit functio ipsius S, hoc est, ipsius $\frac{x}{y}$. Proprietas igitur praescripta, qua est $Px+Qy=0$, huiusmodi indolem functionis V declarat, vt sit V functio quaecunque ipsius $\frac{x}{y}$; hinc autem manifestum est, pro V prodire functionem nullius dimensionis ipsarum x et y.

Coroll. 1.

12. Quodsi ergo ob $P=(\frac{dV}{dx})$ et $Q=(\frac{dV}{dy})$ haec proprietas functionis V proponitur, vt sit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$ inde certo concludimus, V esse functionem formulae $\frac{x}{y}$ seu, quod eodem redit, esse functionem nullius dimensionis ipsarum x et y.

Coroll. 2.

13. Vicissim ergo hinc id, quod quidem iam dudum constat, confirmatur, vt, quoties fuerit V functio

ctio nullius dimensionis ipsarum x et y, toties quoque fore $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$. Verum vti hoc facillime ostenditur, ita eius inuersum singulari demonstratione indigebat.

Scholion.

14. Vis huius solutionis in eo est posita, quod differentiale functionis V ad istam formam $dV=R\,dS$ reduxerim, ex qua, cum vnicum differentiale dS contineat, liquido sequebatur, V esse functionem quantitatis S tantum; erat autem $S=\frac{x}{y}$, et notum est, omnes functiones ipsius $\frac{x}{y}$ simul esse functiones nullius dimensionis et viciffim. Eodem ergo principio in solutione sequentium problematum vtendum esse intelligetur. Caeterum sine litteris P et Q problema tam proponi, quam resolui, potuisset: si scilicet quaeri debeat indoles functionis V, vt sit $x(\frac{dV}{dx})+y(\frac{dV}{dy})=0$, cum sit $dV=dx(\frac{dV}{dx})+dy(\frac{dV}{dy})$, ob $(\frac{dV}{dy})=-\frac{x}{y}(\frac{dV}{dx})$, erit

$$dV=(dx-\frac{x\,dy}{y}).(\frac{dV}{dx})=y(\frac{dV}{dx}).\,d.\frac{x}{y}$$

manifestum est, V necessario esse debere huius vnius quantitatis $\frac{x}{y}$. Quemadmodum autem, si fuerit $dV=R\,dr$, recte concluditur, esse V functionem ipsius r tantum, ita porro, si fuerit $dV=R\,dr+S\,ds$, concludere debemus, V esse functionem binarum variabilium r et s; quod principium vtilitatem habebit, in indaganda indole functionum trium variabilium, dum quaepiam conditio differentialium proponitur.

Problema 2.

15. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $Px + Qy = nV$, denotante n numerum quemcunque.

Solutio.

Ex conditione praescripta $Px + Qy = nV$ eliciatur altera quantitatum P et Q, puta $Q = \frac{nQ}{y} - \frac{Px}{y}$; qui valor in aequalitate differentiali substitutus dabit:

$$dV = Pdx + \frac{nVdy}{y} - \frac{Pxdy}{y}$$

cui statim ista forma inducatur:

$$dV - \frac{nVdy}{y} = Py\frac{(ydx - xdy)}{yy} = Py\,d.\frac{x}{y}$$

quae, vt prius membrum integrabile reddatur, per y^{-n} multiplicetur, sicque prodibit:

$$d.y^{-n}V = Py^{1-n}d.\frac{x}{y}$$

vnde concludimus, esse $y^{-n}V$ functionem quantitatis $\frac{x}{y}$, seu functionem nullius dimensionis binarum variabilium x et y. Denotet ergo Z huiusmodi functionem quamcunque nullius dimensionis, et cum sit $y^{-n}V = Z$, erit $V = y^n Z$; talis autem expressio continet omnes functiones homogeneas ipsarum x et y, quarum dimensionum numerus est $= n$.

Coroll. 1.

16. Quando ergo nouerimus, functionem V eius esse indolis, vt sit $nV = x\left(\frac{dV}{dx}\right) + y\left(\frac{dV}{dy}\right)$, pro certo affirmare poterimus, V esse functionem homogeneam, in

in qua binae variabiles vbique n dimensiones adimpleant.

Coroll. 2.

17. Quodsi ergo ponatur $dV = P\,dx + Q\,dy$, erunt etiam P et Q functiones homogeneae ipsarum x et y, sed quarum dimensionum numerus est $n-1$, scilicet vno ordine inferior.

Coroll. 3.

18. Quare si P et Q fuerint functiones homogeneae binarum variabilium x et y, quarum numerus dimensionum sit idem, puta $= n-1$; ac si praeterea fuerit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, ita vt $P\,dx + Q\,dy$ sit formula differentialis completa; tum eius integrale facillime assignatur. Erit quippe:

$$\int (P\,dx + Q\,dy) = \frac{Px + Qy}{n}.$$

Dummodo ergo n non euanescat, integrale huiusmodi formularum sine vlla alia operatione exhiberi potest.

Scholion.

19. En ergo solutionem ambarum quaestionum, quas initio commemoraui; quae cum iam contineat specimen methodi, qua in hoc genere est vtendum, eandem ad solutionem aliorum similium problematum adhibere licebit. Cum igitur hic proponatur certa quaedam relatio inter functionem V et quantitates inde deriuatas $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$, ex qua indolem functionis V definiri oportet, vt ordinem quendam in huiusmodi quaestionibus seruem, quoniam tam P et Q, quam V, sunt functiones ipsarum x et y; primum in-

dolem alterius litterarum P et Q dari assumam; deinde ad eiusmodi problemata progrediar, in quibus relatio quaedam inter P et Q praescribitur; tum vero ad talia, vbi vel inter P et V, vel inter Q et V, relatio quaedam intercedere debet. Denique vero relationem datam ad omnes tres quantitates V, P et Q extendi assumam, quemadmodum in problemate secundo est factum. Cum autem hic tantum ad quantitates V, $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ respiciamus, euidens est, huiusmodi inuestigationes multo latius extendi posse, dum relatio praescripta alias quantitates ex V deriuatas, veluti $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddV}{dxdy}\right)$, et $\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)$, complectitur. Verum tantum abest, vt omnium istiusmodi problematum solutiones promittere audeam, vt potius ea tantum, quae insunt faciliora, sim euoluturus. Mox enim patebit, innumerabilia eiusmodi problemata proponi posse, quorum solutiones primos hos conatus longe superent, neque antequam haec quasi noua Analyseos pars penitius fuerit exculta, sperari queant.

Problema 3.

20. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si P fuerit functio ipsius x tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Ex parte differentialis Pdx iam functionem V inuenire posse notum est, dum spectata y vt constante, differentiale Pdx integratur, constans arbitraria autem adiicienda alteram variabilem y vtcunque inuoluere assumi-

assumitur. Cum igitur P sit functio ipsius x tantum, erit $\int P dx$ etiam eiusmodi functio, quae sit $= X$, et constans addenda per Y functionem quamcunque ipsius y tantum repraesentetur. Hinc ergo prodibit $V = X + Y$, seu indoles quaesita functionis V in hoc consistet, vt sit V aggregatum duarum functionum, alterius ipsius x tantum, alterius vero ipsius y tantum.

Corollarium.

21. Cum ergo hinc fiat $dV = dX + dY$, manifestum est, si P fuerit functio ipsius x tantum, tum Q fore functionem ipsius y tantum, quae quidem proprietas per se est notissima.

Problema 4.

22. Existente $dV = P dx + Q dy$, si P fuerit functio ipsius y tantum, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio ipsius y tantum, ex sola parte differentialis $P dx$, spectata y vt constante, functio V ita definitur, vt sit $V = Px + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y. Quare indoles quaesita functionis V in hoc consistet, vt designantibus P et Y functiones quascunque ipsius y, forma functionis V semper sit huiusmodi $V = Px + Y$.

Coroll. 1.

23. Si ergo $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ sit functio ipsius y tantum, cum fiat $dV = P dx + x dP + dY$, erit $Q = \frac{x dP + dY}{dy}$, seu ob $\frac{dP}{dy} = \left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right)$, fiet $Q = x\left(\frac{ddV}{dx\,dy}\right) + \frac{dY}{dy}$

Coroll. 2.

24. Quoties igitur fuerit $(\frac{dV}{dx})$ functio ipsius y tantum, toties necesse est, vt sit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{ddV}{dxdy}) + \frac{dY}{dy}$, vbi $\frac{dY}{dy}$ denotare potest functionem quamcunque ipsius y tantum. Vnde vicissim colligere licet, si fuerit $(\frac{dV}{dy}) = x(\frac{ddV}{dxdy}) + f.y$, fore $(\frac{dV}{dx})$ functionem ipsius y tantum.

Coroll. 3.

25. Simili modo ostendetur, si $Q = (\frac{dV}{dy})$ fuerit functio ipsius x tantum, fore $V = Qy + X$, denotante X functionem quamcunque ipsius x tantum: tum vero etiam, si fuerit $(\frac{dV}{dx}) = y(\frac{ddV}{dxdy}) + f.x$, fore $(\frac{dV}{dy})$ functionem ipsius x tantum.

Problema 5.

26. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit P functio homogenea ipsarum x et y, cuius dimensionum numerus sit $= n$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum P sit functio homogenea n dimensionum, si pars differentialis Pdx integretur, spectata y vt constante, integrale erit functio homogenea $n+1$ dimensionum, sit Z talis functio homogenea quaecunque, eritque $V = Z + Y$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y tantum, in quo consistit indoles quaesita functionis V.

Coroll.

Coroll.

27. Simili ergo modo ostendetur, si fuerit Q functio homogenea n dimensionum, fore $V = Z + X$, denotante, vt ante, Z functionem homogeneam quamcunque $n + 1$ dimensionum, et X ipsius x tantum.

Problema 6.

28. Existente $dV = P\,dx + Q\,dy$, si fuerit $Q = nP$, definire indolem functionis V.

Solutio.

Cum sit $Q = nP$, erit $dV = P(dx + n\,dy)$: quare, posito $x + ny = s$, fiet $dV = P\,ds$. Ex V valorem certum habere nequit, nisi sit P functio ipsius s, ex qua etiam V erit functio ipsius s. Consequenter si fuerit $Q = nP$, indoles quantitatis V in hoc consistet, vt sit V functio quaecunque formulae $x + ny$; seu si character Φ adhibeatur ad functionem quamcunque quantitatis, cui praefigitur, designandam, erit $V = \Phi : (x + ny)$.

Problema 7.

29. Existente $dV = P\,dx + Q\,dy$, si fuerit $Py + Qx = 0$, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum sit $Py + Qx = 0$, erit $Q = -\frac{Py}{x}$, atque hinc $dV = P\,dx - \frac{Py\,dy}{dx} = \frac{P}{x}(x\,dx - y\,dy)$. Posito ergo $xx - yy = s$, ob $x\,dx - y\,dy = \frac{1}{2}ds$, fit $dV = \frac{P}{2x}ds$. Quae formu-

formula cum per hypothesin sit integrabilis, necesse est, vt sit $\frac{P}{2x}$ functio ipsius s, vnde etiam V prodibit functio ipsius $s = xx - yy$. Quocirca indoles quaesita in hoc consistet, vt V sit functio quaecunque quantitatis $xx - yy$.

Problema 8.

30. Existente $dV = Pdx + Qdy$, si fuerit $Q = Pp$, dum p exprimit functionem quamcunque datam ipsarum x et y, definire indolem functionis V.

Solutio.

Habebimus ergo $dV = Pdx + Ppdy = P(dx + pdy)$. Iam consideretur formula $dx + pdy$, quae si non fuerit per se integrabilis, dabitur multiplicator q, qui eam reddat integrabilem. Sit ergo $qdx + pqdy = ds$, eritque s functio quoque data ipsarum x et y, et ob $dx + pdy = \frac{ds}{q}$, habebitur $dV = \frac{P}{q} ds$. Necesse igitur est, vt haec formula sit integrabilis, ideoque indoles quaesita in hoc consistet, vt sit V functio quaecunque quantitatis s, quae quomodo ex x et y sit composita, ex conditione quantitatis datae p colligi debet.

Coroll. 1.

31. Problema hoc satis late patet, cum in eo ratio quaecunque inter quantitates P et Q, seu $(\frac{dV}{dx})$ et $(\frac{dV}{dy})$ proponatur. Si enim sit $P : Q = 1 : p$, quaecunque functio ipsarum x et y pro p fuerit data, qualis futura sit functio V, definiri potest.

Coroll.

Coroll. 2.

32. Quanquam autem semper multiplicator q existit, qui formulam $dx + pdy$ integrabilem reddit, tamen saepe euenire potest, vt ob defectum analyseos hic multiplicator assignari nequeat. Atque his casibus solutio problematis impeditur.

Coroll. 3.

33. Alio autem loco ostendi, huiusmodi multiplicatores semper exhiberi posse, si aequatio $dx + pdy = o$ resolui queat. Quare nisi p eiusmodi fuerit functio ipsarum x et y, vt aequatio $dx + pdy$ resolui possit, huic analyseos defectui tribui debet, si problema resolui nequeat.

Problema 9.

34. Si sint X et Y functiones datae, illa ipsius x tantum, haec vero ipsius y tantum, tum vero p sit functio etiam data ipsarum x et y: definire indolem functionis V, vt posito $dV = Pdx + Qdy$, sit $Q = (P + X)p + Y$.

Solutio.

Cum igitur sit $Q = (P + X)p + Y$, erit aequatio differentialis $dV = Pdx + Ppdy + Xpdy + Ydy$, quae ad hanc reducitur formam:

$$dV = (P + X)(dx + pdy) - Xdx + Ydy$$

vbi partes Xdx et Ydy per se sunt integrabiles. Quaeratur ergo iterum multiplicator q formulam $dx + pdy$

integrabilem reddens, sitque $q(dx+p\,dy)=ds$, atque erit:

$$dV=\frac{P+X}{q}ds-X\,dx+Y\,dy$$

quae forma cum per hypothesin sit integrabilis, necesse est, vt $\frac{P+X}{q}$ sit functio ipsius s tantum, quae si ponatur $=S$, prodibit $V=\int S\,ds-\int X\,dx+\int Y\,dy$; quae est indoles desideratae functionis V.

Coroll. 1.

35. Cum igitur ex data functione p definiatur functio s, si pro Σ capiatur functio quaecunque huius quantitatis s, functio quaesita V ita debet esse comparata, vt sit

$$V=\Sigma-\int X\,dx+\int Y\,dy.$$

Coroll. 2.

36. Haec igitur adiectio functionum X et Y solutionem problematis non reddidit difficiliorem; dummodo X sit functio ipsius x tantum, et Y ipsius y tantum. Verum solutio, vt ante, pendet a resolutione aequationis differentialis $dx+p\,dy=0$, quae si vires nostras superet, etiam problema resoluere non valemus.

Coroll. 3.

37. Possunt etiam loco X et Y aliae functiones binarum variabilium x et y, puta M et N, assumi, dummodo formula $M\,dx+N\,dy$ integrationem admittat. Si enim haec conditio proponatur, vt sit $Q-N=(P-M)p$, functio quaesita V ita prodibit expressa:

$$V=\Sigma+\int(M\,dx+N\,dy).$$

Problema

Problema 10.

38. Existente $dV = P\,dx + Q\,dy$, inuenire, qualis sit V functio ipsarum x et y, vt fiat $Q = \frac{Py}{x} + nx$.

Solutio.

Cum sit $Q = \frac{Py}{x} + nx$, erit $dV = \frac{P}{x}(x\,dx + y\,dy) + nx\,dy$. Statuatur $xx + yy = ss$, vt sit $x = \surd(ss - yy)$, ac fiet

$$dV = \frac{Ps}{x}ds + nx\,dy = \frac{Ps}{x}ds + n\,dy\surd(ss - yy)$$

vnde patet, V esse functionem ipsarum y et s, et quidem talem, vt posita s constante ea differentiata praebeat $n\,dy\surd(ss - yy)$. Quare vicissim functio V reperietur, si formula $n\,dy\surd(ss - yy)$, spectato s vt constante, integretur, et insuper functio quaecunque ipsius s adiiciatur. Cum igitur sit $\int n\,dy\surd(ss - yy) = \frac{1}{2}ny\surd(ss - yy) + \frac{1}{2}nss\,\text{A sin.}\frac{y}{s}$, erit Φ pro signo functionis cuiuscunque assumendo:

$$V = \frac{1}{2}nxy + \frac{1}{2}n(xx + yy)\,\text{A tang.}\frac{y}{x} + \Phi : (xx + yy)$$

in qua forma functio quaesita V semper debet contineri.

Scholion.

39. Hoc exemplum, vtut valde particulare, tamen non continetur in problemate praecedente, neque in eius amplificatione ipsi in coroll. postremo illata, quoniam in formula reducta membrum $nx\,dy = n\,dy\surd(ss - yy)$ non est integrabile. Quare probe notetur artificium, quo hic sum vsus, et quod in hoc

consistit, quod valorem differentialis dV ad duas alias variabiles s et y, scilicet $dV = R\,ds + T\,dy$, reuocaui, cuius alterum membrum $T\,dy$ absolute datur, vnde problema ad primum genus pertinet, in quo binarum quantitatum P et Q alterutra est cognita. Huiusque artificii ope problema sequens multo latius patens resolui poterit.

Problema II.

40. Si sint p et t functiones datae quaecunque binarum variabilium x et y, definire indolem functionis V, vt posito $dV = P\,dx + Q\,dy$ sit $Q = Pp + t$.

Solutio.

Habebitur ergo, substituto pro Q isto valore:

$$dV = P(dx + p\,dy) + t\,dy$$

vbi pro formula differentiali $dx + p\,dy$ iterum idoneus multiplicator q quaeratur, qui eam integrabilem reddat. Sit ergo $q(dx + p\,dy) = ds$, et iam quantitas s tanquam noua variabilis introducatur, per quam et y altera variabilis x definiatur. Hoc modo x aequabitur cuipiam functioni datae ipsarum s et y, quae in t vbique loco x scribatur, sicque fiet t functio quoque data ipsarum s et y. Cum ergo ob $dx + p\,dy = \frac{ds}{q}$ fit $dV = \frac{P}{q}\,ds + t\,dy$, erit V eiusmodi functio ipsarum s et y, quae spectata s vt constante differentiata praebeat $t\,dy$, quare viciffim pro functione V inuenienda integretur formula differentialis $t\,dy$, spectata s vt constante, sit integrale hoc modo proueniens $\int t\,dy = T$, quod igitur etiam datur, tum quia quantitas P non datur,

datur, erit $V = T + \Phi : s$. Denique hic pro s et in T restituatur valor ipsius s vi x et y, atque patebit, quomodo functio V ex x et y sit composita.

Exemplum.

41. *Quaeratur indoles functionis* V, *vt posita* $\gamma V = Pdx + Qdy$, *sit* $Px + Qy = n(xx + yy)$

Cum ergo sit $Q = -\frac{Px}{y} + \frac{n(xx+yy)}{y}$, erit $p = -\frac{x}{y}$ et $t = \frac{n(xx+yy)}{y}$, vnde $dx + p\,dy = dx - \frac{x\,dy}{y}$. Capiatur $q = \frac{1}{y}$, erit $ds = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{yy}$ et $s = \frac{x}{y}$; hincque $x = sy$ et $t = ny(ss+1)$. Quare spectata s vt constante, habebitur $\int t\,dy = \frac{1}{2}nyy(ss+1) = \frac{1}{2}n(xx+yy) = T$; sicque tandem prodit:

$$V = \tfrac{1}{2}n(xx+yy) + \Phi : \tfrac{x}{y}$$

vbi notandum est, $\Phi : \frac{x}{y}$ exprimere functionem quamcunque nullius dimensionis binarum variabilium x et y.

Scholion.

42. Feliciter igitur expediuimus casum, quo relatio inter P et Q per aequationem quamcunque primi gradus exprimitur, in qua scilicet quantitates P et Q non vltra primam dimensionem assurgunt. Ex tali enim aequatione Q semper ita definietur, vt sit $Q = Pp + t$, existentibus p et t functionibus quibuscunque datis ipsarum x et y. Verum hic iterum aqua haeret, quoties aequationem $dx + p\,dy = 0$ resoluere non licet, quia tum quantitas s inueniri nequit. Tum vero etiamsi haec quantitas s sit inuenta, cum fuerit imprimis transcendens,

dens, ex ea plerumque difficillimum erit, variabilem x definire, ita vt tantum binae s et y in calculo superſint. Poterunt quidem ſubſidia excogitari, quibus tametſi ex functione data t variabilis x non eliminetur, tamen formulae tdy id integrale T erui queat, quod prodire debet, ſpectata quantitate s vt conſtante. Verum quantaecunque ſint iſtae difficultates, eae non huic methodo, quam adumbrare coepi, ſunt imputandae. Videamus ergo quousque nobis progredi liceat, ſi relatio inter P et Q per aequationem vel ſecundi, vel ſuperiorum graduum detur.

Problema 12.

43 Exiſtente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PQ = \alpha$.

Solutio.

Cum ſit $Q = \frac{\alpha}{P}$, erit $dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$, quaeriturque, qualis functio debeat eſſe P, vt iſta formula differentialis $Pdx + \frac{\alpha dy}{P}$ fiat integrabilis. Adhibeamus hic transformationem integralium obuiam, qua eſt $\int z du = zu - \int u dz$, ac reperietur:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} - \int x dP + \int \frac{\alpha y dP}{PP}.$$

Quare neceſſe eſt, vt haec formula differentialis $dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ integrabilis exiſtat; id quod fieri nequit, niſi $\frac{\alpha y}{PP} - x$ ſit functio ipſius P; quo caſu etiam integrale $\int dP(\frac{\alpha y}{PP} - x)$ fiet functio ipſius P. Denotet ergo Π functionem quamcunque ipſius P, ac ponatur $\frac{\alpha y}{PP} - x = \Pi$, ex cuius

ius aequationis resolutione quantitas P per x et y definiri intelligitur. Inuenta autem hac functione P habebimus:

$$V = Px + \frac{\alpha y}{P} + \int \Pi \, dP.$$

Coroll. 1.

44. Casus ergo simplicissimus, quo huic problemati satisfit, est si $\Pi = 0$, quo fit $P = \sqrt{\frac{\alpha y}{x}}$, et $\int \Pi \, dP =$ const. Habebimus ergo

$$V = 2\sqrt{\alpha x y} + \text{Const.}$$

nam ob $dV = \frac{dx\sqrt{\alpha y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy\sqrt{\alpha x}}{\sqrt{y}}$ erit vtique $PQ = \alpha$.

Coroll. 2.

45. Tum sumto $\Pi = \beta$, erit $P = \frac{\alpha y}{x+\beta}$ et $\int \Pi \, dP = \beta P$. Hoc ergo casu consequemur sequentem functionem satisfacientem:

$$V = x\sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} + \sqrt{\alpha y (x+\beta)} + \beta \sqrt{\frac{\alpha y}{x+\beta}} = 2\sqrt{\alpha y (x+\beta)}$$

et generalius satisfacere manifestum est

$$V = 2\sqrt{\alpha (x+\beta)(y+\gamma)}.$$

Coroll. 3.

46. Si velimus functiones magis compositas, quae tamen exhiberi queant, sit $\Pi = \beta PP$, ideoque $\int \Pi \, dP = \frac{1}{3}\beta P^3$. At cum habeamus:

$$\frac{\alpha y}{PP} - x = \beta PP \text{ seu } P^4 = \frac{-xPP + \alpha y}{\beta}, \text{ fiet}$$

$$PP = \frac{-x + \sqrt{(xx + 4\alpha\beta y)}}{2\beta}, \text{ vnde ob}$$

$$V = \frac{PPx + \alpha y + \frac{1}{3}\beta P^4}{P} = \frac{2PPx + 4\alpha y}{3P}$$

eet

et ſubſtitutione abſoluta:

$$V = \sqrt{\tfrac{2}{9\beta}}\left((xx+4\alpha\beta y)^{\frac{3}{2}} + x(12\alpha\beta y - x^2)\right).$$

Scholion 1.

47. Eodem modo reſolui poſſe patet problema, ſi Q debeat eſſe functio quaecunque ipſius P. Ponatur enim $dQ = R\,dP$, et fiet $V = Px + Qy - \int (x+Ry)\,dP$. Oportet ergo eſſe $x+Ry$ functionem ipſius P, cuius etiam R eſt functio data. Quare ſi ponatur, vt ante, $x+Ry=\Pi$, ex hac aequatione P per x et y definietur; quo valore deinceps in Q, R et Π ſubſtituto obtinebitur functio $V = Px + Qy - \int \Pi\,dP$ per ſolas binas variabiles x et y expreſſa.

Exemplum.

48. Quaeratur functio V, vt poſito $dV = P\,dx + Q\,dy$, ſit $PP+QQ=aa$, ſeu $Q=\sqrt{(aa-PP)}$: hincque $R = \frac{-P}{\sqrt{(aa-PP)}}$, et $x - \frac{Py}{\sqrt{(aa-PP)}} = \Pi$, vnde P debet definiri. Sumatur autem $\Pi = 0$, fiet $P = \frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)}}$, et $Q = \frac{ay}{\sqrt{(xx+yy)}}$, et $V = a\sqrt{(xx+yy)}$.

Scholion 2.

49. At ſi Q non ſolum per P detur, ſed etiam variabiles x et y vtcunque in eius determinationem ingrediantur, tum hoc modo negotium non expedire licet. Verum his caſibus perpendendum eſt, quemadmodum P et Q vt functiones ipſarum x et y conſiderantur, ita quaternarum P, Q, x et y binas quasque

vt

vt functiones binarum reliquarum confiderari poffe. Quare quouis cafu oblato non ad hanc formulam $Pdx + Qdy$ fumus adftricti, quam integrabilem reddi oporteat, fed negotium pariter conficiemus, fi vel hanc $-xdP + Qdy$, vel hanc $Pdx - ydQ$, vel hanc $-xdP - ydQ$ integrabilem reddamus; quin etiam per fubftitutiones nouae variabiles introduci poffunt, quo pacto methodus foluendi vehementer amplificabitur; cuius rei aliquot fpecimina attuliffe iuuabit.

Problema 13.

50. Exiftente $dV = Pdx + Qdy$, fi Q detur vtcunque per x et P, inuenire indolem functionis V.

Solutio.

Cum Q ponatur dari per x et P, habebitur aequatio inter ternas quantitates x, P et Q, ex quo etiam P definiri poterit per x et Q, ita vt P aequetur certae cuipiam functioni ipfarum x et Q. Sumantur ergo x et Q pro binis variabilibus, ex quibus reliqua omnia fint determinanda, et cum fit:

$$V = Qy + \int (Pdx - ydQ)$$

neceffe eft, vt formula differentialis $Pdx - ydQ$ fit integrabilis, cuius integrale fpectetur tanquam functio ipfarum x et Q. Cum igitur P per x et Q detur, quarta autem variabilis y indefinita relinquatur, hoc integrale $\int (Pdx - ydQ)$ inuenietur, fi fpectata Q vt conftante formula Pdx integretur, et ad integrale functio quaecunque ipfius Q adiiciatur. Sit igitur integrale hoc modo ſumtum $\int P dx = R$, eritque R functio data ipſarum x et Q, vnde fiat $dR = P dx + S dQ$, vtraque ſcilicet quantitate x et Q pro variabili ſumta. Quo poſito habebimus $\int (P dx - y dQ) = R + \Phi . Q$, et $V = Qy + R + \Phi . Q$. Deſignetur iam differentiale ipſius $\Phi : Q$ per $dQ . \Phi' : Q$, eritque

$$P dx - y dQ = P dx + S dQ + dQ . \Phi' : Q$$

vnde fit $y = -S - \Phi' : Q$. Denique ex hac aequatione $y = -S - \Phi' : Q$ vna cum relatione, quae inter Q, P et x intercedit, definiantur per binas variabiles x et y alterae binae P et Q, earumque valores reſtituti oſtendent, qualis functio V debeat eſſe ipſarum x et y; in quo id ipſum, quod quaeritur, conſiſtit.

Coroll. 1.

51. Simili modo, ſi Q detur per y et P, ita, vt x non ingrediatur in hanc relationem, vtendum erit hac forma $V = Px + \int (Q dy - x dP)$, quae, cum Q conſiderari debeat tanquam functio data ipſarum x et P, paribus operationibus ad integrabilitatem perducetur.

Coroll. 2.

52. Quodſi autem, vel P, vel Q, per x et y determinantur, quaeſtio nihil habet difficultatis. Si enim ſit P functio data ipſarum x et y, quaeratur integrale $\int P dx$, ſpectata y vt conſtante, poſitoque $\int P dx = R$, erit $V = R + \Phi : y$.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

53. Quoties ergo relatio inter quantitates P, Q, x et y per huiusmodi aequationem datur, in quam tantum ternae harum quantitatum ingrediantur, indoles functionis V per problemata iam tractata definiri potest.

Scholion.

54. Ex hoc ergo genere supersunt casus, quibus relatio data omnes quatuor litteras P, Q, x et y continet. At pro hoc iam eum casum euoluimus, quo erat $Q = Pp + t$, existentibus p et t functionibus quibuscunque ipsarum x et y, cuius solutio in Probl. 11 est exhibita. Quia vero loco binarum variabilium x et y, sequentia paria simili modo tractari possunt:

I. Si sit $Q = xM + N$,

existentibns M et N functionibus quibuscunque ipsarum P et y.

II. Si sit $P = yM + N$,

existentibus M et N functionibus quibuscunque ipsarum Q et x.

III. Si sit $y = xM + N$,

existentibus M et N functionibus quibuscunque ipsarum P et Q. His scilicet quoque casibus solutio per praecepta §. 40 tradita inueniri poterit.

Exemplum.

55. *Existente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat definire functionem* V, *vt sit* $xyPQ = \alpha$.

Cum ergo sit $Q = \frac{\alpha}{Pxy}$, erit

$$dV = Pdx + \frac{\alpha dy}{Pxy}$$

qui casus in nullo tractatorum continetur. Verum posito $ly = u$, cum sit $dV = Pdx + \frac{\alpha du}{Px}$, si u loco y spectemus, hancque formam cum $Pdx + Qdy$ comparemus, erit istud $Q = \frac{\alpha}{Px}$, ideoque per x et P tantum datur; ita vt hoc exemplum reductum sit ad praesens problema. Ne igitur hoc Q cum principali confundatur, cum sit $P = \frac{\alpha}{Qx}$, habebimus scribendo u loco y:

$$V = Qy + \int \left(\frac{\alpha dx}{Qx} - y\,dQ\right)$$

sumta ergo Q constante, erit $\int \frac{\alpha dx}{Qx} = R = \frac{\alpha}{Q} lx$, hincque $S = \frac{-\alpha lx}{QQ}$: vnde fit $u = ly = \frac{\alpha lx}{QQ} - \Phi' : Q$, et

$$V = Qly + \frac{\alpha lx}{Q} + \Phi : Q$$

existente $\Phi : Q = \int dQ\,\Phi' : Q$, vbi pro $\Phi' : Q$ sumi potest functio quaecunque ipsius Q.

Sit ergo pro casu simplicissimo $\Phi' : Q = 0$, eritque $Q = \sqrt{\frac{\alpha lx}{ly}}$, et $V = 2\sqrt{\alpha lx . ly} +$ Const.

Ac si sumatur $\Phi' : Q = n - \frac{\alpha m}{QQ}$, fiet $\Phi : Q = nQ + \frac{\alpha m}{Q} + C$ et $ly + n = \frac{\alpha(lx + m)}{QQ}$, hincque $Q = \sqrt{\alpha \frac{lx + m}{ly + n}}$, et

$$V = 2\sqrt{\alpha(lx + m)(ly + n)} + \text{Const.}$$

Problema 14.

56. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $PP + QQ = xx + yy$.

Solu-

Solutio.

Hoc problema in nullo casuum hactenus tractatorum continetur; verumtamen idonea transformatione ad casum facillimum reduci potest. Ponatur enim $PP + QQ = xx + yy = tt$, sitque angulis duobus indefinitis Φ et θ introducendis:

$P = t\,\text{sin.}\,\Phi$; $Q = t\,\text{cos.}\,\Phi$; $x = t\,\text{sin.}\,\theta$ et $y = t\,\text{cos.}\,\theta$

ob $dx = dt\,\text{sin.}\,\theta + t d\theta\,\text{cos.}\,\theta$, et $dy = dt\,\text{cos.}\,\theta - t d\theta\,\text{sin.}\,\theta$, erit:

$dV - tdt(\text{sin.}\Phi\,\text{sin.}\theta + \text{cos.}\Phi\,\text{cos.}\theta) - ttd\theta(\text{cos.}\Phi\,\text{sin.}\theta - \text{sin.}\Phi\,\text{cos.}\theta)$

seu $dV = tdt\,\text{cos.}(\theta - \Phi) - ttd\theta\,\text{sin.}(\theta - \Phi)$.

At est $\int tdt\,\text{cos.}(\theta-\Phi) = \frac{1}{2}tt\,\text{cos.}(\theta-\Phi) + \frac{1}{2}\int tt(d - \theta\Phi)\,\text{sin.}(\theta-\Phi)$ vnde fit:

$$V = \tfrac{1}{2}tt\,\text{cos.}(\theta - \Phi) - \tfrac{1}{2}\int tt(d\theta + d\Phi)\,\text{sin.}(\theta - \Phi).$$

Cum igitur haec formula integrabilis esse debeat, necesse est, vt sit $tt\,\text{sin.}(\theta - \Phi) = \text{funct.}\,(\theta + \Phi)$.

Quare cum sit $tt = xx + yy$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{x}{y}$, hinc angulus Φ per x et y determinabitur, cuius valor substitutus dabit functionem V, per x et y expressam.

Sit, vt functiones algebraicas simpliciores eliciamus,

$tt\,\text{sin.}(\theta - \Phi) = \alpha\,\text{sin.}(\theta + \Phi) + \beta\,\text{cos.}(\theta + \Phi)$, eritque

$$V = \tfrac{1}{2}tt\,\text{cos.}(\theta - \Phi) + \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{cos.}(\theta + \Phi) - \tfrac{1}{2}\beta\,\text{sin.}(\theta + \Phi)$$

vnde, si eliminetur tt, prodit:

$$2V\,\text{sin.}(\theta - \Phi) = \alpha\,\text{sin.}\,2\theta + \beta\,\text{cos.}\,2\theta = \frac{2\alpha xy - \beta(xx - yy)}{xx + yy}.$$

At euolutis illis angulis, fit:

$ttx\,\text{cos.}\Phi - tty\,\text{sin.}\Phi = \alpha x\,\text{cos.}\Phi + \alpha y\,\text{sin.}\Phi + \beta y\,\text{cos.}\Phi - \beta x\,\text{sin.}\Phi$

ideoque $\text{tang.}\,\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{tty + \alpha y - \beta x}$ et

 sec.

ſec. $\Phi = \frac{\surd(t^6 - 2\alpha tt(xx-yy) - 4\beta ttxy + \alpha\alpha tt + \beta\beta tt)}{tty + \alpha y - \beta x}$

ſit $T = t\surd(t^4 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)$

erit ſi $\Phi = \frac{ttx - \alpha x - \beta y}{T}$ et coſ. $\Phi = \frac{tty + \alpha y - \beta x}{T}$

hincque ſin. $(\theta - \Phi) = \frac{2\alpha xy - \beta(xx-yy)}{Tt}$, quo valore ſubſtituto, orietur $V = \frac{T}{2t}$ ideoque

$$V = \tfrac{1}{2}\surd((xx+yy)^2 - 2\alpha(xx-yy) - 4\beta xy + \alpha\alpha + \beta\beta)$$

quae functio etiam hoc modo repraeſentari poteſt:

$$V = \tfrac{1}{2}\surd((\alpha - xx + yy)^2 + (\beta - 2xy)^2).$$

Caſus ſimpliciſſimus prodit ſumendo $\alpha = 0$, et $\beta = 0$, quo fit $V = \frac{1}{2}(xx + yy)$, et $dV = xdx + ydy$.

Scholion.

57. Ex hoc problemate intelligitur, quomodo huiusmodi quaeſtiones, quae dum omnes quatuor litterae in relationem praeſcriptam ingrediuntur, ſolutu difficillimae videntur, idonea tamen ſubſtitutione interdum ad caſus iam tractatos reduci queant. Neque vero adhuc modum perſpicio, quo in genere, vtcunque relatio inter quatuor quantitates P, Q, x et y fuerit comparata, ſolutio obtineri poſſit; plurima autem alia huiusmodi exempla afferre poſſem, in quibus reductio ad caſus iam tractatos perfici queat; ſed quia hoc argumentum minime exhaurire confido, ad ſequentia capita progredior, quando relatio praeſcripta praeter quantitates P, Q, x et y etiam ipſam functionem quaeſitam V complectitur: vbi quidem per ſe eſt perſpicuum, ſi relatio inter V, x et y tantum proponeretur, ne quaeſtionem quidem fore, cum functio V immedia-

mediate per x et y daretur. Quare ab eiusmodi problematibus exordiar, vbi relatio praescripta praeter functionem V alterutram quantitatum P et Q vel etiam ambas implicat; dum variabiles x et y ipsae vel simul ingrediuntur, vel secus. Facile autem intelligitur, haec problemata multo esse difficiliora praecedentibus.

Problema 15.

58. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt fiat $P = nV$.

Solutio.

Cum sit $P = nV$, erit $dV = nVdx + Qdy$, seu $dV - nVdx = Qdy$. Multiplicetur prius membrum per e^{-nx}, vt fiat integrabile, eiusque integrale $e^{-nx}V = \int e^{-nx}Qdy$ aequari debebit functioni cuicunque ipsius y, quae sit $= Y$. Vnde functio quaesita erit $V = e^{nx}Y$.

Aliter.

Cum V debeat esse eiusmodi functio ipsarum x et y, vt eius differentiale sit $dV = nVdx + Qdy$; perspicuum est, si functio V differentietur posita y constante, proditurum esse $dV = nVdx$. Quare vicissim ex integratione formulae $dV = nVdx$ functio V inuenietur, si y vt constans spectetur; tum vero constans per integrationem ingressa quantitatem y vtcunque inuoluere poterit. At aequatio $dV = nVdx$ integrata praebet $lV = nx + lY$, seu $V = e^{nx}Y$ vt ante.

Coroll.

Coroll. 1.

59. Eodem modo resolui poterit quaestio latius patens, si P debeat esse functio quaecunque ipsius V. Consideretur enim, spectata y vt constante, haec aequatio differentialis $dV = Pdx$, quae cum duas tantum variabiles contineat V et x integretur, constanti autem ingressa quantitas y vtcunque inuoluatur.

Coroll. 2.

60. Quia binae variabiles x et y sunt inter se permutabiles, eodem modo resoluitur problema, si Q debeat esse functio quaecunque ipsius V.

Problema 16.

61. Existente $dV = Pdx + Qdy$, definire indolem functionis V, vt P fiat functio quaecunque ipsarum V et x.

Solutio.

Cum igitur P detur per V et x, si y vt constantem spectemus, habebimus hanc aequationem $dV = Pdx$ inter duas variabiles x et V. Integretur itaque ea, et loco constantis in aequationem integralem introducatur functio quaecunque ipsius y; hoc modo obtinebitur aequatio inter V, x et y, qua indoles functionis V per x et y definietur.

Coroll. 1.

62. Quaecunque igitur relatio inter ternas quantitates V, P et x proponatur, siue ex ea V per x

et

et P, siue P per V et x; siue x per V et P definiatur, solutio problematis semper erit in promtu.

Coroll. 2.

63. Ob permutabilitatem variabilium x et y, eodem modo problema soluetur, si relatio quaecunque inter Q, V et y proponatur: neque opus est, vt hunc casum seorsim euoluamus.

Exemplum 1.

64. *Posito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat esse* $P = \frac{mV}{x} + nx$; spectata ergo y vt constante, erit $dV = \frac{mVdx}{x} + nxdx$ seu $dV - \frac{mVdx}{x} = nxdx$, cuius integralis est

$$\frac{V}{x^m} = \frac{nx^{2-m}}{2-m} + Y$$

existente Y functione quacunque ipsius y. Quare erit

$$V = x^m Y + \frac{n}{2-m} xx$$

si esset $m = 2$, foret $V = xxY + nxxlx$

Exemplum 2.

65. *Posito* $dV = Pdx + Qdy$ *oporteat esse* $2V = P(aa - xx)$.

Cum ergo sit $P = \frac{aV}{aa-xx}$ erit, sumta y constante:

$$dV = \frac{aVdx}{aa-xx} \text{ seu } \frac{dV}{V} = \frac{adx}{aa-xx},$$

cuius integrale est $lV = \frac{1}{2}l\frac{a+x}{a-x}lY$, vnde habebitur $V = Y\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, denotante Y functionem quamcunque ipsius y.

Problema 17.

65. Exiſtente $dV = P\,dx + Q\,dy$, definire indolem functionis V, ſi P fiat functio quaecunque data ipſarum x, y et V.

Solutio.

Aſſumo hic, relationem propoſitam contineri aequatione quacunque inter quatuor quantitates x, y, V et P; ex qua idcirco P per x, y et V definire liceat. Spectetur igitur y vt quantitas conſtans, et cum ſit $dV = P\,dx$, haec aequatio iam duas tantum variabiles x et V inuoluet. Integretur igitur ea, et loco conſtantis introducatur functio quaecunque ipſius y, hocque modo prodibit aequatio, naturam functionis V oſtendens.

Corollarium.

67. Simili ergo modo problema ſoluetur, ſi proponatur relatio quaecunque inter quatuor quantitates x, y, Q et V, quo caſu hoc tantum diſcrimen obſeruetur, vt primum quantitas x tanquam conſtans ſpectetur.

Exemplum.

68. *Poſita* $dV = P\,dx + Q\,dy$, *oporteat eſſe* $V = \frac{Px}{y}$. Cum igitur ſit $P = \frac{Vy}{x}$, erit, ſumta y conſtante:

$$dV = \frac{Vy\,dx}{x}, \text{ ideoque } lV = y\,lx + lY$$

vnde prodit functio quaeſita $V = x^y Y$.

Scholion.

Scholion.

69. Quodsi ergo in relationem propositam alterutra tantum quantitatum P et Q ingrediatur, problemata sunt solutu facilia. Verum si vtraque quantitas P et Q insit, maior difficultas occurrit, quae quandoque tanta est, vt superari nullo modo queat. Quoniam igitur hoc casu solutionem generalem expectare non licet, nonnulla exempla, quae quidem satis late pateant, percurramus.

Problema 18.

70. Existente $dV = Pdx + Qdy$, inuenire indolem functionis V, vt fiat $V = mPx + nQy$.

Solutio.

Cum hinc sit $Q = \frac{V - mPx}{ny}$, erit:

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = Pdx - \frac{mPxdy}{ny} = \frac{P}{ny}(nydx - mxdy).$$

Quaeratur multiplicator, qui formulam $nydx - mxdy$ reddat integrabilem, qui cum sit $\frac{1}{xy}$, ideoque

$$dV - \frac{Vdy}{ny} = \frac{Px}{n}\left(\frac{ndx}{x} - \frac{mdy}{y}\right)$$

ponatur $nlx - mly = lz$ seu $z = \frac{x^n}{y^m}$; vnde fit $x = y^{\frac{m}{n}} z^{\frac{1}{n}}$, qui valor loco x substitui concipiatur. Quare cum sit $dV = \frac{Vdy}{ny} + \frac{Pxdz}{nz}$; quantitas V spectari poterit tanquam functio binarum quantitatum y et z: quae igitur talis esse debet, vt sumta z constante fiat $dV = \frac{Vdy}{ny}$. Hinc ergo integrando prodibit:

$$lV = \tfrac{1}{n}ly + lZ \text{ seu } V = y^{\frac{1}{n}}Z$$

ſumta pro Z functione quacunque ipſius $z = \frac{x^n}{y^m}$: ſicque habebitur $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^n}{y^m}$.

Coroll. 1.

71. Cum ſit $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ functio ipſius $\frac{x^n}{y^m}$, erit etiam $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi \frac{x^n}{y^m}$. Tum vero etiam ita exhiberi poteſt: $V = x^{\frac{1}{m}} \Phi . \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$; vel $V = y^{\frac{1}{n}} \Phi : \frac{x^{\lambda n}}{y^{\lambda m}}$, ſumto pro n numero quocunque.

Coroll. 2.

72. Si ſit $m = n$, caſus habebitur functionum homogenearum ſupra tractatus. Sumto enim $\lambda = \frac{1}{n}$, denotabit $\Phi : \frac{x}{y}$ functionem quamcunque nullius dimenſionis ipſarum x et y : et V fiet earundem functio homogenea, cuius dimenſionum numerus eſt $= \frac{1}{n}$.

Coroll. 3.

73. Si ponamus in genere $x^{\frac{1}{m}} = t$ et $y^{\frac{1}{n}} = u$; tum vero capiamus $\lambda = \frac{1}{m n}$, habebimus $V = t \Phi . \frac{t}{u}$, ſeu V erit functio homogenea vnius dimenſionis binarum quantitatum t et u.

Scholion.

74. Si deſideretur, vt ſit $V = mP + nQ$, ſolutio aeque parum habebit difficultatis. Nam ob $Q = \frac{V}{n} - \frac{mP}{n}$ erit

erit $dV - \frac{V\,dy}{n} = P(dx - \frac{m\,dy}{n})$. Statuatur $x - \frac{my}{n} = z$, vt sit $dV = \frac{V\,dy}{n} + P\,dz$: iam spectata z vt constante, erit $lV = \frac{y}{n} + \Phi:z$, ideoque

$$V = e^{\frac{y}{n}}\Phi:(nx - my).$$

At si debeat esse $V = mPy + nQx$, ob $Q = \frac{V - mPy}{nx}$, erit $dV = P(dx - \frac{my\,dy}{nx}) + \frac{V\,dy}{nx}$. Statuatur $nxx - myy = zz$, vt sit $x = \sqrt{\frac{zz + myy}{n}}$, et cum fiat:

$$dV = \frac{V\,dy}{\sqrt{n(zz + myy)}} + \frac{P}{nx}\,z\,dz,$$

spectetur quantitas z vt constans, et ob $\frac{dV}{nV} = \frac{dy}{\sqrt{(nzz + mnyy)}}$, erit $lV = \frac{1}{\sqrt{mn}}\,l(y\sqrt{mn} + \sqrt{n(zz + myy)}) + lZ$, ideoque ob $\sqrt{n(zz + myy)} = nx$, prodibit:

$$V = (y\sqrt{m} + x\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{mn}}}\,\Phi:(nxx - myy).$$

Quare si esse debeat $V = Py + Qx$, erit:

$$V = (x + y)\,\Phi:(xx - yy).$$

Problema autem sequens omnes huiusmodi casus in se complectetur.

Problema 19.

75. Si p sit functio quaecunque data ipsarum x et y, at M functio quaecunque etiam data ipsarum x, y et V, definire indolem functionis V, vt, posito $dV = P\,dx + Q\,dy$, fiat $Q = Pp + M$.

Solutio.

Substituto hoc loco Q valore, habemus:

$dV = M\,dy + P(dx + p\,dy)$.

Quae-

Quaeratur multiplicator q, formulam $dx + p\,dy$ integrabilem reddens, sitque $\int q(dx + p\,dy) = z$: vnde valor ipsius x definiatur per y et z, isque in M, quatenus x inest, loco x substituatur, quo facto erit:

$$dV = M\,dy + \frac{P\,dz}{q}$$

sicque V considerari poterit vt functio ipsarum y et z. Spectetur nunc z vt quantitas constans, et cum sit $dV = M\,dy$, vbi duae tantum variabiles y et V inesse sunt intelligendae, integretur haec aequatio et loco constantis introducatur functio quaecunque ipsius z: in qua si loco z valor in x et y, scilicet: $\int q(dx + p\,dy)$ restituatur, illa aequatio $dV = M\,dy$ integrata exhibebit naturam functionis V, quemadmodum ea a binis variabilibus x et y pendere debet.

Exemplum.

76. *Posito* $dV = P\,dx + Q\,dy$, *oportet esse* $V = Pyy + Qxx$. Est ergo $Q = -\frac{Pyy}{xx} + \frac{V}{nxy}$, vnde fit

$$dV = \frac{V\,dy}{xx} + P\left(dx - \frac{yy\,dy}{xx}\right)$$

Sumatur $q = xx$, erit $\int(xx\,dx - yy\,dy) = z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ seu $x^3 = y^3 + 3z$, ideoque $xx = (y^3 + 3z)^{\frac{2}{3}}$. Sumto igitur z constante, habetur

$$\frac{dV}{V} = \frac{dy}{(y^3 + 3z)^{\frac{2}{3}}}$$

Sit itaque S integrale formulae $\frac{dy}{(y^3+3z)^{\frac{2}{3}}}$, dum z constans assumitur, et obtinebitur:

V =

$$V = e^S \phi : z = e^S \Phi : (x^3 - y^3),$$

scilicet in S loco z vbique eius valor $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$ substitui debet.

Problema 20.

77. Existente $dV = P\,dx + Q\,dy$, definire indolem functionis V, vt sit $V = nPQ$.

Solutio.

Ergo ob $Q = \frac{V}{nP}$ erit

$$dV = P\,dx + \frac{V\,dy}{nP}.$$

Quo iam V ex posteriori membro possit separari, ponatur $P = R\sqrt{V}$, prodibitque:

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = R\,dx + \frac{dy}{nR},$$

vnde conuertendo obtinetur:

$$2\sqrt{V} = Rx + \frac{y}{nR} - \int dR\left(x - \frac{y}{nRR}\right).$$

Quare necesse est, vt $x - \frac{y}{nRR}$ sit functio ipsius R tantum; ac tali functione assumta definiri poterit R per x et y, vnde etiam functio quaesita V per x et y expressa reperietur.

Aliter.

Cum sit $V = nPQ$, eliminetur V, vt habeatur haec aequatio:

$$nP\,dQ + nQ\,dP = P\,dx + Q\,dy$$

ex qua fit $dy = -\frac{P\,dx}{Q} + \frac{nP\,dQ}{Q} + n\,dP$,

hincque $y = nP + \int \frac{P}{Q}(n\,dQ - dx)$.

Necesse ergo est, vt $\frac{P}{Q}$ sit functio quantitatis $nQ - x$.

Pona-

Ponatur $nQ - x = z$; fitque $\int \frac{P}{Q} dz = \Phi : z$, erit $\frac{P}{Q} = \Phi' : z$ et $y = nP + \Phi : z = nQ\Phi' : z + \Phi : z$. At eft $V = nQQ\Phi' : z$, vnde $Q = \sqrt{\frac{V}{n\Phi' : z}}$; ficque habebuntur hae aequationes:

$$\sqrt{\frac{nV}{\Phi' : z}} = x + z \quad \text{et} \quad y = \Phi z + \sqrt{nV\Phi' : z},$$

ex quibus conficitur $nV = (x + z)(y - \Phi z)$: ac fi eliminetur quantitas z, orietur functio V per x et y expreffa.

Coroll. 1.

78. Capiatur z conftans, feu $ndQ - dx = 0$, fiet $Q = \frac{x + a}{n}$ et $y = nP - b$, feu $P = \frac{y + b}{n}$; vnde oritur $V = \frac{(x + a)(y + b)}{n}$ qui eft cafus fimpliciffimus.

Coroll. 2.

79. Si ftatuatur $\Phi' : z = a$, erit $\Phi z = az + b$, vnde fit:

$\sqrt{\frac{nV}{a}} = x + z$ et $nV = (y - az - b)\sqrt{\frac{nV}{a}}$ feu $\sqrt{naV} = y - b - az$, ex quibus coniunctis nancifcimur: $2\sqrt{naV} = ax + y - b$, hincque $V = \frac{(ax + y - b)^2}{4na}$; qui eft alter cafus fimpliciffimus.

Coroll. 3.

80. Sit $\Phi' : z = \frac{1}{(az + b)^2}$; vt fit $\Phi : z = -\frac{1}{a(az + b)} + c$ et fiet:

$(az + b)\sqrt{nV} = x + z$ et $y - c + \frac{1}{a(az + b)} = \frac{\sqrt{nV}}{az + b}$ feu $a(az + b)(y - c) = a\sqrt{nV} - 1$: at inde eft $z = \frac{x - b\sqrt{nV}}{a\sqrt{nV} - 1}$, ideoque $az + b = \frac{ax - b}{a\sqrt{nV} - 1}$; hocque valore fubftituto:

a

$a(ax-b)(y-c)=(a\sqrt{n}V-1)^2$, quae euolutio praebet:

$$V=\frac{1+a(ax-b)(y-c)+2\sqrt{a(ax-b)(y-c)}}{naa}.$$

Problema 21.

81. Existente $dV=Pdx+Qdy$, si detur V vtcunque per P et Q, definire indolem functionis V, seu quemadmodum V per x et y determinetur.

Solutio.

Cum igitur sit V functio binarum quantitatum P et Q, ponatur eius differentiale $dV=MdP+NdQ$, eruntque etiam M et N functiones datae ipsarum P et Q. Quare cum sit

$MdP+NdQ=Pdx+Qdy$, erit

$dy=-\frac{Pdx}{Q}+\frac{MdP+NdQ}{Q}$, ideoque

$y=-\frac{Px}{Q}+\int(xd.\frac{P}{Q}+\frac{MdP}{Q}+\frac{NdQ}{Q})$.

Ponatur $P=QS$, qui valor in M et N loco P substitui intelligatur, ita vt iam variabiles Q et S considerandae occurrant, fietque:

$$y=-Sx+\int(dS(x+M)+\frac{dQ}{Q}(N+MS)).$$

Cum hic M et N sint functiones datae ipsarum Q et S, sumatur S pro constante, ac ponatur integrale:

$$\int\frac{dQ}{Q}(N+MS)=R+\Phi:S$$

erit ergo $x+M=(\frac{dR}{dS})+\Phi':S$, existente $\Phi S=\int dS\Phi':S$ et $y=MS-S(\frac{dR}{dS})-S\Phi'S+R+\Phi:S$.

Quia nunc R et M dantur per Q et S, et ob $P = QS$ etiam V detur per Q et S. Si haec relatio cum his binis coniungatur:

$$x = -M + \left(\frac{dR}{dS}\right) + \Phi' : S, \text{ et } y = -Sx + R + \Phi : S$$

poterunt hinc eliminari binae quantitates S et Q, quo facto prodibit aequatio, qua V determinabitur per x et y.

Exemplum I.

82. *Existente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat esse* $V = mPP + nQQ$.

Cum ergo sit $dV - 2mPdP + 2nQdQ$, erit $M = 2mP$, et $N = 2nQ$, seu $M = 2mQS$ ob $P = QS$, ita vt sit $V = QQ(mSS + n)$.

Habebimus ergo $N + MS = 2Q(mSS + n)$, ideoque spectata S vt constante:

$$R = \int \frac{dQ}{Q}(N + MS) = 2Q(mSS + n),$$

ac proinde $\left(\frac{dR}{dS}\right) = 4mQS$.

Vnde has tres aequationes adipiscimur:

I. $V = QQ(mSS + n)$.

II. $x + 2mQS = 4mQS + \Phi' : S$ seu $x = 2mQS + \Phi' : S$

III. $y + Sx = 2Q(mSS + n) + \Phi : S$

seu $y = 2nQ + \Phi : S - S\Phi' : S$.

Quodsi ex II et III eliminetur Q, erit:

IV. $nx - mSy = (mSS + n)\Phi' : S - mS\Phi : S$

ex iisdem vero coniunctis fit $Q = \frac{Sx + y - \Phi : S}{2(mSS + n)}$, quae cum prima dat $\sqrt{} : 2\sqrt{} V(mSS + n) = Sx + y - \Phi : S$.

Quare

Quare ſupereſt, vt ex IV et V eliminetur S, ſicque prodibit functio V per x et y expreſſa.

Sit $\Phi':S = a$, erit $\Phi:S = aS + b$, et

$$\text{IV. } nx - mSy = na - mbS$$

$$\text{V. } 2\sqrt{V(mSS+n)} = Sx + y - aS - b.$$

Inde eſt $S = \frac{n(x-a)}{m(y-b)}$, quo valore ſubſtituto, erit:

$$2\sqrt{mnV} = \sqrt{(n(x-a)^2 + m(y-b)^2)}$$

hincque $V = \frac{n(x-a)^2 + m(y-b)^2}{4mn}$.

Exemplum 2.

83. *Exiſtente* $dV = Pdx + Qdy$, *oporteat eſſe* $V = \frac{P}{Q}$.

Erit ergo $M = \frac{1}{Q}$; $N = -\frac{P}{QQ} = -\frac{S}{Q}$ ob $P = QS$ et $V = S$ atque $N + MS = 0$, vnde fit $R = 0$. Quare prodit:

$$x + \frac{1}{Q} = \Phi':S \text{ et } y + Sx = \Phi:S$$

et quia eſt $S = V$, ita functio V per x et y determinatur, vt ſit $y + Vx = \Phi:V$.

Ponatur $\Phi:V = \frac{\alpha + 2\beta V + \gamma VV}{2\delta + 2\varepsilon V}$, vt fiat:

$$2\delta y + 2\varepsilon Vy + 2\delta Vx + 2\varepsilon VVx = \alpha + 2\beta V + \gamma VV$$

hincque $VV = \frac{2V(\delta x + \varepsilon y - \beta) + 2\delta y - \alpha}{\gamma - 2\varepsilon x}$ et

$$V = \frac{\delta x + \varepsilon y - \beta \pm \sqrt{((\delta x - \varepsilon y)^2 + 2(\alpha\varepsilon - \beta\delta)x + 2(\gamma\delta - \beta\varepsilon)y + \beta\beta - \alpha\gamma)}}{\gamma - 2\varepsilon x}$$

ſi ſit γ et $\varepsilon = 0$, erit $V = \frac{2\delta y - \alpha}{2\beta - 2\delta x}$ ſeu $V = \frac{y - m}{n - x}$.

Scholion.

84. Plures aliae huiusmodi quaestiones proponi ac resolui possent, sed quia earum solutio iisdem principiis, quibus hactenus sum vsus, innititur, iis multiplicandis non immoror, cum allatae iam sufficere videantur, ad elementa huius nouae methodi condenda. Nonnulla adhuc adiici possent pro casibus, quibus huiusmodi etiam formulae $(\frac{ddV}{dx^2})$, $(\frac{ddV}{dxdy})$, $(\frac{ddV}{dy^2})$ in relationem propositam ingrediuntur; item quando functio quaerenda per tres pluresue variabiles definire debet; verum ne haec tractatio nimis fiat longa, ea in aliam occasionem reseruabo.

PHYSICO-