1764

De resolutione formularum quadricarum indeterminatarum per numeros integros

Leonhard Euler

DE
RESOLVTIONE FORMVLARVM
QVADRATICARVM INDETERMINATARVM PER NVMEROS INTEGROS.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

1.

Propofita formula irrationali $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}$ inuenire numeros pro x fubftituendos, qui eam rationalem reddant.

Solutio.

Ante omnia notantum eft, hanc inueftigationem fruftra fufcipi, nifi vnus faltem cafus conftet, quo ea fiat rationalis. Ponamus ergo hoc euenire cafu $x=a$, eoque effe:

$$\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$$

ita vt b fit numerus rationalis. Huiusmodi autem cafus, vnico cognito, innumerabiles alios ex eo deriuare licet. Ponatur in hunc finem

$$x=a+mz \text{ et } \sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=b+nz$$

et hac aequatione quadrata fit:

$$\begin{aligned}&+\alpha aa+2\alpha maz+\alpha mmzz=bb+2nbz+nnzz\\&+\beta a+\beta mz\\&+\gamma.\end{aligned}$$

Cum iam per hypothesin sit $bb=\alpha aa+\beta a+\gamma$, reliqua aequatio per z diuisa dabit:

$$2\alpha ma+\beta m+\alpha mmz=2nb+nnz$$

ex qua elicitur:

$$z=\frac{2\alpha ma-2nb+\beta m}{nn-\alpha mm}$$

Quo valore substituto concludimus:

si ponatur $x=\frac{(nn+\alpha mm)a-2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$

fore $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=\frac{2\alpha mna-(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}$

Quicunque ergo numeri pro m et n accipiantur, ex casu cognito: $\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$, infinitis aliis modis formula $\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}$ rationalis effici potest, et quia numerum b tam negatiue, quam affirmatiue, assumere licet, exploratis numeris a et b, ac pro lubitu assumtis numeris m et n, capiatur

$$x=\frac{(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$$

eritque:

$$\sqrt{(\alpha xx+\beta x+\gamma)}=\frac{2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}.$$

Scholion.

2. Ad hoc ergo problema soluendum necesse est, vt aliunde vnus saltem casus sit cognitus, quo formula proposita fiat rationalis. Neque vero, pro huiusmodi casu explorando vlla certa regula praescribi potest, cum etiam

etiam dentur eiusmodi formulae, quas nullo plane casu rationales fieri posse demonstratum est. Si enim verbi gratia haec formula $\sqrt{(3xx+2)}$ proponeretur, certum est, nullum numerum rationalem pro x inueniri posse, quo ea fieret rationalis. Quanquam autem satis noti sunt casus, quibus formula $\alpha xx+\beta x+\gamma$ talis reductionis est capax, quippe quod euenit, quoties in hac formula generali $(px+q)^2+(rx+s)(tx+u)$ continetur: tamen hic non curo, vnde casus ille, quem cognitum assumo, sit haustus, siue certa quadam ratione, siue diuinatione innotuerit. Verum cum cognito vno casu inuentio infinitorum aliorum nulla laboret difficultate, hic potissimum ad solutiones, quae numeris integris absoluuntur, respicio. Cum enim valores pro x inuenti per fractionem exprimantur, noua iam oritur quaestio, quomodo numeros m et n assumi oporteat, vt inde numeri integri pro x obtineantur.

Problema II.

3. Si α, β, γ sint numeri integri dati, inuenire numeros integros pro x sumendos, qui formulam $\alpha xx+\beta x+\gamma$ quadratam reddant.

Solutio.

Iterum assumo vnum numerum integrum a constare, qui quaesito satisfaciat, ita vt sit:

$$\sqrt{(\alpha aa+\beta a+\gamma)}=b$$

ac modo vidimus,

si sumatur $x=\frac{(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm}{nn-\alpha mm}$

 fore

fore $V(\alpha xx+\beta x+\gamma)=\frac{2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mn}{nn-\alpha mm}$
Supereſt ergo tantum, vt videamus, cuiusmodi numeros pro m et n aſſumi oporteat, vt hae formulae integrae euadant. Quod quidem ſtatim fieri perſpicuum eſt, ſi vtriusque denominator $nn-\alpha mm$ ſtatuatur vnitati aequalis. Sit igitur $nn-\alpha mm=1$, ſeu

$$nn=\alpha mm+1\text{, ideoque } n=V(\alpha mm+1)$$

niſi autem ſit α vel numerus quadratus, vel negatiuus, huic formulae ſemper ſatisfieri poteſt; ſin autem ſit vel quadratus, vel negatiuus, ne problema quidem propoſitum reſoluere licet. Etſi enim quandoque duo pluresue caſus aſſignari queant, tamen infiniti non dantur, cuiusmodi tamen hic euolui conuenit. Sit ergo α numerus integer poſitiuus non quadratus, ac ſemper numeri m et n aſſignari poſſunt, vt fiat $n=V(\alpha mm+1)$, quod etſi infinitis modis fieri poteſt, tamen ſufficit minimos ſolos noſſe. Erit ergo

$$x=(nn+\alpha mm)a\pm 2mnb+\beta mm \text{ et}$$

$$V(\alpha xx+\beta x+\gamma)=2\alpha mna\pm(nn+\alpha mm)b+\beta mm\text{,}$$

ſicque habetur nouus caſus quaeſtioni ſatisfaciens. Ex hoc vero ſimili modo, quo is ex a et b prodiit, nouus deriuabitur, hincque porro continuo alii in infinitum. Ponantur enim valores hoc modo pro x oriundi ſucceſſiue: a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, etc. reſpondentes vero valores formulae $V(\alpha xx+\beta x+\gamma)$ ſint $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$ etc. ac ſequenti modo bini quique poſteriores ex binis antecedentibus definientur,

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm;\quad b^{I} = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$
$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} \pm 2mnb^{I} + \beta mm;\quad b^{II} = 2\alpha mna^{I} \pm (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$
$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} \pm 2mnb^{II} + \beta mm;\quad b^{III} = 2\alpha mna^{II} \pm (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$
etc.

Hac igitur ratione continuo vlterius progredi licet, sicque ex vna solutione, in numeris integris cognita, innumerabiles aliae in numeris integris quoque elicientur.

Coroll. 1.

4. Vt igitur formula $\alpha xx + \beta x + \gamma$ infinitis modis in numeris integris quadratum effici possit, necesse est, vt α neque sit numerus quadratus, neque negatiuus, ac praeterea, vt vnus casus, quo ea fit quadratum, vndecunque sit cognitus.

Coroll. 2.

5. At si α fuerit numerus positiuus non quadratus, tum primum quaerantur duo numeri m et n, vt sit $n = \sqrt{(\alpha mm + 1)}$, id quod semper fieri potest. Quibus inuentis, si ponatur:

$$\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = y$$

atque iam cognitus fuerit casus quaestioni satisfaciens, qui sit $x = a$ et $y = b$, ex eo per primam operationem non solum vnus, sed duo noui, inuenientur ob signi ambiguitatem. Erit quippe:

$$x = (nn + \alpha mm)a \pm 2mnb + \beta mm \text{ et}$$
$$y = 2\alpha mna \pm (nn + \alpha mm)b + \beta mn.$$

Coroll. 3.

Coroll. 3.

6. Si ſumantur tantum ſignorum ambiguorum ſuperiora, vt continuo ad maiores numeros ſatisfacientes perueniamus, atque valores pro x hoc modo ſucceſſiue prodeuntes deſignentur per $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc valores autem pro y reſpondentes per $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. erit:

$$a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm; \quad b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$$

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 2mnb^{I} + \beta mm; \quad b^{II} = 2\alpha mna^{I} + (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

$$a^{III} = (nn + \alpha mm)a^{II} + 2mnb^{II} + \beta mm; \quad b^{III} = 2\alpha mna^{II} + (nn + \alpha mm)b^{II} + \beta mn$$

etc.

Coroll. 4.

7. Duplicem ergo hinc progreſſionem numerorum $a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ etc. et $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}$ etc. adipiſcimur, quarum vtriusque continuatio ab vtraque pendet, vtraque tamen ab altera iſta ſeiungi poteſt, vt termini vtriusque ſenſim ſine adminiculo alterius continuari queant; formabitur autem tum in vtraque ſerie quilibet terminus ex binis praecedentibus.

Coroll. 5.

8. Si enim in valore a^{II} pro b^{I} eius valor ſubſtituatur, habebitur:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha m^2 n^2 a + 2mn(nn + \alpha mm)b + 2\beta mmnn + \beta mm$$

Verum

Verum ex valore ipſius a^{I} eſt:

$$2mnb = a^{I} - (nn + \alpha mm)a - \beta mm$$

quo valore ipſius $2mnb$ ibi ſubſtituto prodibit:

$$a^{II} = (nn + \alpha mm)a^{I} + 4\alpha mmnna$$
$$+ (nn + \alpha mm)a^{I} - (nn + \alpha mm)^{2}a - \beta mm(nn + \alpha mm)$$
$$+ 2\beta mmnn$$
$$+ \beta mm.$$

At ob $nn = \alpha mm + 1$, eſt $4\alpha mmnn - (nn + \alpha mm)^{2}$ $= -(nn - \alpha mm)^{2} = -1$, et $2\beta mmnn - \beta mm(nn + \alpha mm)$ $= \beta mm(nn - \alpha mm) = \beta mm$, vnde fit:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm.$$

Coroll. 6.

9. Cum igitur ſimili modo ſit:

$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm \text{ etc.}$$

Statim atque in ſerie a, a^{I}, a^{II}, a^{III} etc. duo primi termini habentur, primus ſcilicet a vndecunque, et ſecundus ex formula $a^{I} = (nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm$, ex his ſequentes omnes per has formulas definientur:

$$a^{II} = 2(nn + \alpha mm)a^{I} - a + 2\beta mm$$
$$a^{III} = 2(nn + \alpha mm)a^{II} - a^{I} + 2\beta mm$$
$$a^{IV} = 2(nn + \alpha mm)a^{III} - a^{II} + 2\beta mm.$$

Coroll. 7.

10. Pari autem modo progreſſio numerorum $b, b^{I}, b^{II}, b^{III}$ etc. eſt comparata. Primo enim eius termino aliunde cognito, et ſecundo per formulam

$b^{I} = 2\alpha mna + (nn + \alpha mm)b + \beta mn$, ſi in b^{II} pro a^{I} valor ſubſtituatur, erit:

$$b^{II} = 2\alpha mn(nn + \alpha mm)a + 4\alpha mmnnb + 2\alpha\beta m^3 n$$
$$+ (nn + \alpha mm)b^{I} + \beta mn$$

at ex valore ipſius b^{I} eſt $2\alpha mna = b^{I} - (nn + \alpha mm)b - \beta mn$ quo ſubſtituto fit ob $nn - \alpha mm = 1$

$$b^{II} = 2(nn + \alpha mm)b^{I} - b \text{ ſimiliterque}$$
$$b^{III} = 2(nn + \alpha mm)b^{II} - b^{I}$$
$$b^{IV} = 2(nn + \alpha mm)b^{III} - b^{II}$$
etc.

Coroll. 8.

11. Cum igitur vtraque ſeries ita ſit comparata, vt quilibet terminus ex binis praecedentibus ſecundum certam legem definiatur; vtraque ſeries erit recurrens, ſcala relationis exiſtente $2(nn + \alpha mm), -1$. Hinc ergo, formata aequatione $zz = 2(nn + \alpha mm)z - 1$, eius radices erunt:

$$z = 2nn - 1 \pm 2n\sqrt{(nn - 1)} = (n \pm m\sqrt{\alpha})^2.$$

Coroll. 9.

12. Hinc ergo ex doctrina ſerierum recurrentium progreſſionis a; a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV} etc. terminus quicunque indefinite per ſequentem formulam exprimetur:

$$\left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta}{4\alpha} + \tfrac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n + m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta}{4\alpha} - \tfrac{b}{2\sqrt{\alpha}}\right)(n - m\sqrt{\alpha})^{2\nu} - \tfrac{\beta}{2\alpha} = x$$

alterius vero ſeriei b, b^{I}, b^{II}, b^{III} etc. terminus quicunque per hanc:

$$\left(\tfrac{b}{2} + \tfrac{a\sqrt{\alpha}}{2} + \tfrac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n + m\sqrt{\alpha})^{2\nu} + \left(\tfrac{b}{2} - \tfrac{a\sqrt{\alpha}}{2} - \tfrac{\beta}{4\sqrt{\alpha}}\right)(n - m\sqrt{\alpha})^{2\nu} = y$$

ſumto pro ν numero quocunque integro.

Scholion.

Scholion.

13. Si hic pro 2ν substituamus successiue omnes numeros integros 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. vtraque progressio prodibit interpolata, cuius termini medii quaesito aeque satisfacient, dummodo fuerint integri. At reperiemus: posito

$$2\nu = 0;\ x = a;$$
$$2\nu = 1;\ x = na + mb + \frac{\beta(n-1)}{2\alpha};$$
$$2\nu = 2;\ x = (nn + \alpha mm)a + 2mmb + \beta mm;$$
$$y = b$$
$$y = nb + \alpha ma + \frac{\beta m}{2}$$
$$y = (nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn.$$

Quae vtraque series est recurrens, scalam relationis habens $2n, -1$; ac pro priori quidem valorum ipsius x, si terni termini consecutiui sint P, Q, R, erit

$$R = 2nQ - P + \frac{\beta(n-1)}{\alpha};$$

at si in progressione valorum ipsius y terni termini se ordine sequentes sint P, Q et R, erit

$$R = 2nQ - P:$$

Quodsi ergo fuerit $\frac{\beta(n-1)}{2\alpha}$ numerus integer, omnes hi termini problema aeque resoluent, sicque duplo plures obtinebimus solutiones, quam methodus adhibita suppeditauerat. Quod autem plures locum habere possint solutiones, quam inuenimus, inde facile colligitur, quod praeter necessitatem primum erutarum formularum $nn - \alpha mm$ vnitati aequalem posuimus, cum tamen sine dubio saepe etiam numerator per denominatorem diuidi possit, etiamsi hic vnitate sit maior. Quemadmodum igitur omnes plane solutiones in numeris integris inueniri queant, sequenti problemate accuratius examinemus.

Problema 3.

14. Si α sit numerus integer positiuus non quadratus, dato vno numero integro a, qui pro x positus reddat formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ quadratam, inuenire infinitos alios numeros integros, qui pro x sumti idem sint praestituri.

Solutio.

Ponatur in genere $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)} = y$, casu autem cognito, quo $x = a$, esse $\sqrt{(\alpha aa + \beta a + \gamma)} = b$, atque hinc in genere fractionibus non exclusis fore vidimus:

$$x = \frac{(nn + \alpha mm)a + 2mnb + \beta mm}{nn - \alpha mm}$$

$$y = \frac{(nn + \alpha mm)b + 2\alpha mna + \beta mn}{nn - \alpha mm}$$

Iam quidem, vt hi numeri fiant integri, non absolute necesse est, vt denominator $nn - \alpha mm$ ad vnitatem reuocetur, verum sufficit, vt fractiones $\frac{nn + \alpha mm}{nn - \alpha mm}$ et $\frac{2mn}{nn - \alpha mm}$ in numeros integros abeant. Ponamus ergo esse

$$\frac{nn + \alpha mm}{nn - \alpha mm} = p, \text{ et } \frac{2mn}{nn - \alpha mm} = q$$

vnde fit $p - 1 = \frac{2\alpha mm}{nn - \alpha mm}$; ideoque

$$\frac{\beta mm}{nn - \alpha mm} = \frac{\beta}{2\alpha}(p - 1) \text{ et } \frac{\beta mn}{nn - \alpha mm} = \tfrac{1}{2}\beta q.$$

Deinde

Deinde autem ex formulis assumtis fiet

$$pp-\alpha qq=\frac{(nn+\alpha mm)^2-4\alpha m^2n^2}{(nn-\alpha mm)^2}=1$$

ita vt sit $pp=\alpha qq+1$ et $p=\sqrt{(\alpha qq+1)}$. Iterum igitur vt ante ex numero α binos numeros p et q assignari oportet, vt sit $p=\sqrt{(\alpha qq+1)}$, quibus inuentis habebitur:

$$x=pa+qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1) \text{ et } y=pb+\alpha qa+\tfrac{1}{2}\beta q.$$

Dummodo ergo fuerit $\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ numerus integer, hi valores satisfaciunt. Quia autem numeros p et q tam negatiue, quam positiue, sumere licet, hae formulae insuper tres alias solutiones suppeditant:

$$x=\ \ pa-qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1);\ \text{et } y=pb-\alpha qa-\tfrac{1}{2}\beta q$$
$$x=-pa+qb-\frac{\beta}{2\alpha}(p+1);\ \text{et } y=-pb+\alpha qa+\tfrac{1}{2}\beta q$$
$$x=-pa-qb-\frac{\beta}{2\alpha}(p+1);\ \text{et } y=-pb-\alpha qa-\tfrac{1}{2}\beta q$$

Quod si porro horum bini quicunque pro a et b assumantur, ex quolibet quatuor nouae solutiones orientur. Hinc tamen non 61, sed tantum sex diuersae oriuntur, inter quas adeo prima cognita $x=a$ et $y=b$, et quae huic est affinis $x=-a-\frac{\beta}{\alpha}$, et $y=b$ continentur; reliquae vero quatuor sunt

$$x=(pp+\alpha qq)a\pm 2pqb+\beta qq;$$
$$y=(pp+\alpha qq)b\pm 2\alpha pqa\pm\beta pq$$
$$x=-(pp+\alpha qq)a\pm 2pqb-\frac{\beta}{\alpha}pp;$$
$$y=(pp+\alpha qq)b\mp 2\alpha pqa\mp\beta pq$$

ex quibus deinceps nouae aliae in infinitum inueniri possunt.

Coroll. 1.

15. Quodsi ergo fuerit vel $\beta = 0$, vel eiusmodi numerus, vt $\beta(p-1)$, vel etiam $\beta(p+1)$ per 2α diuisibile existat, tum hoc modo plures solutiones in integris obtinentur, quam modo ante exposito.

Coroll. 2.

16. In genere autem obseruandum est, si satisfecerit casus quicunque $x = v$, tum etiam satisfacturum esse casum $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, ex vtroque enim y eundem valorem nanciscitur. Quare cum hi casus ex illis tam facile eliciantur, his omissis inuestigatio solutionum conuenientium ad dimidium reducitur.

Coroll. 3.

17. Reiectis ergo casibus $x = -v - \frac{\beta}{\alpha}$, quippe qui sponte se produnt inuentis casibus $x = v$, ex casu $x = a$ et $y = b$ statim bini reperiuntur:

$$x = pa \pm qb + \frac{\beta}{2\alpha}(p-1);\quad y = \alpha qa \pm pb + \frac{1}{2}\beta q$$

hincque porro per operationem secundam bini:

$$x = (pp+\alpha qq)a \pm 2pqb + \beta qq;\quad y = 2\alpha pqa \pm (pp+\alpha qq)b + \beta pb$$

quae duplicitas ex signo ambiguo numeri b nascitur.

Coroll. 4.

18. Si haec cum §. §. 12 et 13 conferantur, patebit omnes has formulas in sequentibus expressionibus generalibus contineri, siquidem pro μ successiue omnes numeri integri substituantur.

I.

$$\text{I}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

et

$$\text{II}\begin{cases} x=\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}+\frac{1}{4\alpha}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{\beta}{2\alpha} \\ y=\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta-2b\sqrt{\alpha})(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}-\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}(2\alpha a+\beta+2b\sqrt{\alpha})(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

Coroll. 5.

19. Hinc igitur duplices ſeries pro valoribus numerorum x et y reperiuntur, quae eandem progreſſionis legem tenebunt. Si enim ponamus:

$x=a;\ a^{I};\ a^{II};\ a^{III};\ a^{IV};\ a^{V};$ etc. P, Q, R

$y=b;\ b^{I};\ b^{II};\ b^{III};\ b^{IV};\ b^{V};$ etc. S, T, V

erit pro altera: $a^{I}=pa+qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{I}=\alpha qa+pb+\frac{1}{2}\beta q$

et pro altera: $a^{I}=pa-qb+\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ et $b^{I}=\alpha qa-pb+\frac{1}{2}\beta q$

pro vtraque vero haec communis progreſſionis lex valebit, vt ſit:

$$R=2pQ-P+\frac{\beta}{\alpha}(p-1) \text{ et } V=2pT-S.$$

Coroll. 6.

20. Cum ſit $pp-\alpha qq=1$, erit $(p+q\sqrt{\alpha})^{\mu}=(p-q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$ et $(p-q\sqrt{\alpha})^{\mu}=(p+q\sqrt{\alpha})^{-\mu}$; hincque, ſi alterae ſeries retrorſum continuentur, prodibunt alterae. Sufficit ergo pro altero caſu has ſeries inſtruxiſſe, quae tam antrorſum, quam retrorſum, continuatae omnes ſolutiones, ex ambiguitate numeri b oriundas, in ſe continebunt.

Scholion.

Scholion.

21. Si ergo fuerit $\beta = 0$, vt habeatur haec formula: $V(\alpha xx + \gamma) = y$, rationalis reddenda, casusque constet, quo sit $V(\alpha aa + \gamma) = b$, sumtis numeris p et q ita, vt sit $p = V(\alpha qq + 1)$, innumerabiles alii valores satisfacientes continebuntur in his seriebus:

$$x = a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, \ldots . P, Q, R$$
$$y = b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, \ldots . S, T, V$$

vbi secundi termini ita debent accipi, vt sit

$$a^{I} = pa + qb;\ b^{I} = \alpha qa + pb$$

deinde vtraque series est recurrens, scala relationis existente $2p, -1$. Erit scilicet:

$$a^{II} = 2pa^{I} - a; \text{ et in genere } R = 2pQ - P$$
$$b^{II} = 2pb^{I} - b; \ldots . V = 2pT - S$$

ambae vero series etiam retrorsum continuari debent, sicque duplo plures prodibunt solutiones, nisi sit vel $a = 0$, vel $b = 0$. Neque autem hic in censum veniunt solutiones negatiuae, quibus si satisfecerit $x = v$, etiam satisfacit $x = -v$. Omnes porro istae solutiones continentur in his formulis generalibus,

$$x = \tfrac{1}{2V\alpha}(aV\alpha + b)(p + qV\alpha)^{\mu} + \tfrac{1}{2V\alpha}(aV\alpha - b)(p - qV\alpha)^{\mu}$$
$$y = \tfrac{1}{2}(aV\alpha + b)(p + qV\alpha)^{\mu} - \tfrac{1}{2}(aV\alpha - b)(p - qV\alpha)^{\mu}$$

Pro variis igitur numeris, qui coefficientem α constituunt, sequentia exempla euoluamus, et quidem generalius, vt etiam coefficientis β ratio habeatur, pro casibus scilicet, quibus forte $\frac{\beta}{2\alpha}(p-1)$ fuerit numerus integer.

Exem-

Exemplum I.

22. *Propofita formula* $\sqrt{(2xx + \beta x + \gamma)} = y$, *inuenire infinitos valores integros ipfius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, fiquidem vna folutio conftet.*

Sit folutio cognita $x = a$ et $y = b$, et ob $\alpha = 2$, habebimus $p = \sqrt{(2qq + 1)}$, ideoque $q = 2$ et $p = 3$. Hinc fecundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}} = 3a \pm 2b + \tfrac{\beta}{2};\ b^{\mathrm{I}} = 4a \pm 3b + \beta.$$

Cum igitur in §. 19. fit $R = 6Q - P + \beta$ et $V = 6T - S$, habebimus fequentes feries valorum fatisfacientium et quidem integrorum, fi β fuerit numerus par:

Valores ipfius x	Valores ipfius y
a	$+b$
$3a \pm 2b + \frac{\beta}{2}$	$4a \pm 3b + \beta$
$17a \pm 12b + 4\beta$	$24a \pm 17b + 6\beta$
$99a \pm 70b + \frac{49}{2}\beta$;	$140a \pm 99b + 35\beta$
$577a \pm 408b + 144\beta$;	$816a \pm 577b + 204\beta$
$3363a \pm 2378b + \frac{1681}{2}\beta$;	$4756a \pm 3363b + 1189\beta$
etc.	etc.

Tum vero cum y eosdem retineat valores, fi pro x fcribatur $-x - \frac{\beta}{2}$, etiam hae folutiones locum habebunt:

Valores ipfius x	Valores ipfius y
$-a - \frac{1}{2}\beta$	$+b$
$-3a \mp 2b - \beta$	$4a \pm 3b + \beta$
$-17a \mp 12b - \frac{9}{2}\beta$	$34a \pm 17b + 6\beta$
$-99a \mp 706b - 25\beta$	$140a \pm 99b + 35\beta$
$-577a \mp 408b - \frac{289}{2}\beta$	$816a \pm 577b + 204\beta$
$-3363a \mp 2378b - 841\beta$	$4756a \pm 3363b + 1189\beta$
etc.	etc.

 Etiamfi

Etiamsi ergo β non fuerit numerus par, tamen in vtroque ordine semissis valorum ipsius x fuerit numeri integri.

Exemplum 2.

23. *Proposita formula* $\sqrt{(3xx + \beta x + \gamma)} = y$, *inuenire infinitos valores integros ipsius* x, *quibus haec formula rationalis euadit, siquidem vnus casus constet.*

Praebeat casus cognitus $x = a$ et $y = b$, tum vero ob $\alpha = 3$ capiatur $p = \sqrt{(3qq + 1)}$, eritque $q = 1$ et $p = 2$. Hinc pro secundo casu habebimus:

$$a^{I} = 2a \pm b + \tfrac{\beta}{6};\ b^{I} = 3a \pm 2b + \tfrac{1}{2}\beta,$$

ex quibus formentur binae series recurrentes, secundum has scalas relationis:

$$R = 4Q - P + \tfrac{\beta}{3};\ V = 4T - S,$$

vnde obtinentur:

Valores ipsius x	Valores ipsius y
a	$\pm b$
$2a \pm b + \frac{1}{6}\beta$	$3a \pm 2b + \frac{1}{2}\beta$
$7a \pm b + \beta$	$12a \pm 7b + 2\beta$
$26a \pm 15b + \frac{25}{6}\beta$	$45a \pm 26b + \frac{15}{2}\beta$
$97a \pm 56b + 16\beta$	$168a \pm 97b + 28\beta$
$362a \pm 209b + \frac{361}{6}\beta$	$627a \pm 362b + \frac{209}{2}\beta$
$1351a \pm 780b + 225\beta$	$2340a \pm 1351b + 390\beta$
etc.	etc.

Praete-

Praeterea vero ſcribendo $-x-\frac{\beta}{5}$ pro x prodibunt

valores ipſius x	valores ipſius y
	$\pm b$
$-a-\frac{1}{5}\beta$	$3a\pm 2b+\frac{1}{2}\beta$
$-2a\mp b-\frac{1}{2}\beta$	$12a\pm 7b+2\beta$
$-7a\mp 4b-\frac{4}{3}\beta$	$45a\pm 26b+\frac{15}{2}\beta$
$-26a\mp 15b\frac{9}{2}\beta$	$168a\pm 97b+28\beta$
$-97a\mp 56b-\frac{49}{3}\beta$	$627a\pm 362b+\frac{209}{2}\beta$
$-362a\mp 209b-\frac{121}{2}\beta$	$2340a\pm 1351b+390\beta$
$-1351a\mp 780b-\frac{676}{3}\beta$	etc.
etc.	

Prout ergo numerus β diuiſibilis fuerit per 2, vel 3, vel vtrumque, hinc eo plures ſolutiones in integris eliciuntur.

Exemplum 3.

24. *Propoſita formula* $\sqrt{(5xx+\beta x+\gamma)}=y$, *inuenire infinitos valores integros ipſius* x, *quibus haec formula rationalis euadat, ſiquidem vnus caſus fuerit cognitus.*

Pro caſu cognito ſit $x=a$ et $y=b$, et ob $\alpha=5$, quaerantur numeri p et q, vt ſit $p=\sqrt{(5qq+1)}$. Fiet ergo $q=4$ et $p=9$; et hinc ſecunda ſolutio prodibit:

$$a^{I}=9a\pm 4b+\tfrac{4}{5}\beta;\ b^{I}=20a\pm 9b+2\beta.$$

Cum ergo ſit $a^{II}=18a^{I}-a+\frac{8}{5}\beta$ et $b^{II}=18b^{I}-b$, ſequentes ſolutiones habebuntur:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$9a\pm 4b+\frac{4}{5}\beta$	$20a\pm 9b+2\beta$
$161a\pm 72b+16\beta$	$360a\pm 161b+36\beta$
$2889a\pm 1292b+\frac{1444}{5}\beta$	$6460a\pm 2839b+646\beta$
etc.	etc.

vbi pro quolibet valore ipſius x etiam poni poteſt $-x-\frac{\beta}{\gamma}$.

Scholion I.

25. Cum hoc modo ex vna ſolutione in integris cognita, infinitae aliae ſolutiones etiam in integris eliciantur, quaeſtio naſcitur, an hoc modo omnes plane ſolutiones integrae obtineantur, nec ne? Ac in exemplis quidem primo et ſecundo nullum erit dubium, quin hac methodo omnes ſolutiones integrae obtineantur. Verum in exemplo tertio vtique dantur caſus, quibus multo plures ſolutiones in integris exhiberi poſſunt, quam quidem hac methodo reperiuntur. Veluti ſi propoſita fuerit formula $\sqrt{(5xx+4)}=y$, quae pro caſu cognito praebet $a=0$ et $b=2$, noſtra ſolutio dat:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
0	2
8	18
144	322
2584	5778
etc.	etc.

Verum hanc formulam diligentius ſcrutanti patebit, non ſolum his caſibus $\sqrt{(5xx+4)}$ fieri rationalem, ſed etiam iſtis numeris pro x ſubſtituendis

$$x=0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377,\ 987,\ \text{etc.}$$

vnde ſolutionum numerus triplicatur. Cuius rei ratio eſt, quod ad formulam $p=\sqrt{(5qq+1)}$ reſoluendam poſuimus $q=4$; vnde fit $p=9$, quae quidem eſt ſimpliciſſima ſolutio in numeris integris. At quoniam in

ſcala

ſcala relationis ineſt $2p$, ea numeris integris conſtabit, etiamſi p ſit fractio denominatorem habens 2. Hanc ob rem iſtas ſimpliciores ſolutiones nanciſcemur, ſi ponamus $q = \frac{1}{2}$, vnde fit $p = \frac{3}{2}$; ſicque, ob $\alpha = 5$, ſecundi valores erunt:

$$a^{\mathrm{I}} = \tfrac{3}{2}a \pm \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{20}\beta;\quad b^{\mathrm{I}} = \tfrac{5}{2}a \pm \tfrac{3}{2}b + \tfrac{1}{4}\beta$$

ac tertii cum ſequentibus per hanc legem ſuppeditabuntur:

$$a^{\mathrm{II}} = 3a^{\mathrm{I}} - a + \tfrac{1}{10}\beta,\quad b^{\mathrm{II}} = 3b^{\mathrm{I}} - b,$$

vnde nanciſcimur hos valores:

Valores ipſius x	Valores ipſius y
a	$\pm b$
$\frac{3}{2}a \pm \frac{1}{2}b + \frac{1}{20}\beta$	$\frac{5}{2}a \pm \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\beta$
$\frac{7}{2}a \pm \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\beta$	$\frac{15}{2}a \pm \frac{7}{2}b + \frac{5}{4}\beta$
$9a \pm 4b + \frac{4}{5}\beta$	$20a \pm 9b + 2\beta$
$\frac{47}{2}a \pm \frac{21}{2}b + \frac{9}{4}\beta$	$\frac{105}{2}a \pm \frac{47}{2}b + \frac{21}{4}\beta$
$\frac{123}{2}a \pm \frac{55}{2}b + \frac{121}{20}\beta$	$\frac{275}{2}a \pm \frac{123}{2}b + \frac{55}{4}\beta$
$161a \pm 72b + 16\beta$	$360a \pm 161b + 36\beta$
etc.	etc.

Atque hinc illae triplo plures ſolutiones oriuntur, quoties fuerit $a \pm b$ numerus par, ac β vel $= 0$, vel per 20 diuiſibile.

Scholion 2.

26. Quandoque ergo plures ſolutiones in numeris integris reperiuntur, ſi pro p et q fractiones cum denominatore 2 aſſumuntur, quod quando in genere eueniat, operae pretium erit inueſtigaſſe. Plerumque autem hi caſus locum non habent, niſi ſit vel $\beta = 0$,

 vel

vel formula ad talem formam reduci poſſit. Sit ergo propoſita formula $\sqrt{(\alpha xx + \gamma)} = y$, cui ſatisfaciat caſus $x = a$ et $y = b$; tum ſtatuatur $p = \frac{m}{2}$ et $\frac{n}{2}$, ſeu quaerantur numeri m et n, vt ſit $mm = \alpha nn + 4$ et $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$. Tum vero ſolutio prima ſtatim dat ſecundam;

$$a^{\mathrm{I}} = \frac{ma + nb}{2} \quad \text{et} \quad b^{\mathrm{I}} = \frac{\alpha na + mb}{2},$$

vbi quidem numeri m et n tam negatiue, quam affirmatiue, accipi poſſunt. Denique his binis primis inventis, ſequentes per hanc regulam reperientur;

$$a^{\mathrm{II}} = ma^{\mathrm{I}} - a \quad \text{et} \quad b^{\mathrm{II}} = mb^{\mathrm{I}} - b.$$

In genere autem quilibet numerus pro x ſatisfaciens continetur hac formula:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha} + b)\left(\frac{m + n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(a\sqrt{\alpha} - b)\left(\frac{m - n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu},$$

ex qua fit:

$$y = \tfrac{1}{2}(a\sqrt{\alpha} + b)\left(\frac{m + n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu} - \tfrac{1}{2}(a\sqrt{\alpha} - b)\left(\frac{m - n\sqrt{\alpha}}{2}\right)^{\mu}.$$

Quoties igitur $ma + nb$ prodierit numerus par, neque tamen m et n ſint pares, toties triplo plures ſolutiones in integris prodeunt, quam methodo praecedente. Hae vero ſolutiones ita ſe habebunt:

$= a$	$b = b$
$a^{\mathrm{I}} = \frac{ma + nb}{2}$	$b^{\mathrm{I}} = \frac{mb + \alpha na}{2}$
$a^{\mathrm{II}} = \frac{(mm - 2)a + mnb}{2}$	$b^{\mathrm{II}} = \frac{(mm - 2)b + \alpha mna}{2}$
$a^{\mathrm{III}} = \frac{(m^3 - 3m)a + (mm - 1)nb}{2}$	$b^{\mathrm{III}} = \frac{(m^3 - 3m)b + \alpha(mm - 1)na}{2}$
$a^{\mathrm{IV}} = \frac{(m^4 - 4mm + 2)a + (m^3 - 2m)nb}{2}$	$b^{\mathrm{IV}} = \frac{(m^4 - 4m^2 + 2)b + \alpha(m^3 - 2m)na}{2}$
$a^{\mathrm{V}} = \frac{(m^6 - 5m^3 + 5m)a + (m^4 - 3m^2 + 1)nb}{2}$	$b^{\mathrm{V}} = \frac{(m^5 - 5m^3 + 5m)b + \alpha(m^4 - 3m^2 + 1)na}{2}$

etc.

Obſer-

Obseruatio I.

27. Haec altera methodus tum demum plures solutiones in numeris integris suppeditat, quam prior, cum m et n fuerint numeri impares, simulque a et b ambo vel pares, vel impares. Si enim m et n sint numeri pares, p et q erunt integri, et formula $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, easdem solutiones praebebit, ac formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Deinde si $ma + nb$ non fuerit numerus par, valores a^{I}, a^{II} non euadent integri, neque propterea plures solutiones reperiuntur, quam priore methodo, dum adhibetur formula $p = \sqrt{(\alpha qq + 1)}$. Distingui ergo oportet eos casus, quibus formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$, numeris imparibus pro m et n accipiendis, satisfieri potest, id quod statim patet fieri non posse, si α fuerit numerus formae $4z - 1$, vel etiam huius $8z + 1$. Quare pro α alii numeri impares non relinquuntur, nisi qui sint formae $4z + 5$. Pro his ergo casibus minimos valores, formulae $m = \sqrt{(\alpha nn + 4)}$ satisfacientes, sequens tabella exhibet:

Si fuerit	capiatur	eritque	Si fuerit	capiatur	eritque
$\alpha = 5$	$n = 1$	$m = 3$	$\alpha = 61$	$n = 195$	$m = 1523$
$\alpha = 13$	$n = 3$	$m = 11$	$\alpha = 69$	$n = 75$	$m = 623$
$\alpha = 21$	$n = 1$	$m = 5$	$\alpha = 77$	$n = 1$	$m = 9$
$\alpha = 29$	$n = 5$	$m = 27$	$\alpha = 85$	$n = 9$	$m = 83$
$\alpha = 37$	$n = -$	$m = -$	$\alpha = 93$	$n = 57$	$m = 839$
$\alpha = 45$	$n = 1$	$m = 7$			
$\alpha = 53$	$n = 7$	$m = 51$			

quaeritur hic ratio, cur casus $\alpha = 37$ non recipiat valores impares pro m et n?

Hic

Hic igitur patet, si sit $\alpha = 37$, non dari numeros impares pro m et n, pro reliquis autem casibus resolutio succedit. Ita si proponatur haec formula $\sqrt{(53xx+28)} = y$, habetur statim $a = 1$ et $b = 9$. Deinde ob $n = 7$ et $m = 51$, erit $a^{\mathrm{I}} = \frac{51+63}{2} = 57$ et $b^{\mathrm{I}} = \frac{371+459}{2} = 415$, seu etiam $a^{\mathrm{I}} = -6$; et $b^{\mathrm{I}} = -44$; et series recurrentes pro x et y, quarum scala relationis est $51, -1$, erunt:

$$x = \text{etc.} - 307; - 6; 1; 57; 2906; \text{etc.}$$
$$y = \text{etc.} + 2235; + 44; 9; 415; 21156; \text{etc.}$$

Obseruatio 2.

28. Sufficit autem casus euoluisse, quibus in formula generali $\alpha xx + \beta x + \gamma$ secundus terminus deest, quoniam haec ad talem formam salua numerorum integritate reuocari potest. Vulgaris quidem modus, quo ex aequationibus secundus terminus tolli solet, ponendo $x = y - \frac{\beta}{2\alpha}$, hic locum habere nequit, nisi β sit numerus per 2α diuisibilis. Verum si $\alpha xx + \beta x + \gamma$ debeat esse quadratum, ponatur $\alpha xx + \beta x + \gamma = yy$, ac multiplicando per 4α prodibit $4\alpha\alpha xx + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 4\alpha yy$,

ideoque $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma = (2\alpha x + \beta)^2$

Quaerantur ergo casus, quibus formula $4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma$ fit quadratum, indeque habebuntur valores pro x substituendi, qui formulam $\alpha xx + \beta x + \gamma$ reddant quadratam, scilicet si fuerit $\sqrt{(4\alpha yy + \beta\beta - 4\alpha\gamma)} = z$, erit $2\alpha x + \beta = z$, hincque $x = \frac{z - \beta}{2\alpha}$.

Quodsi

Quodsi β fuerit numerus par, puta 2δ, posito: $\alpha xx + 2\delta x + \gamma = yy$, erit $(\alpha x + \delta)^2 = \alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ sicque formula $\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma$ ad quadratum est reuocanda; ac si inuenimus $\sqrt{(\alpha yy + \delta\delta - \alpha\gamma)} = z$, erit $\alpha x + \delta = z$, et $x = \frac{z - \delta}{\alpha}$, vnde plerumque pro x numeri integri reperiuntur; etsi enim forte $\frac{z-\delta}{\alpha}$ non fuerit integer, tamen ex vno valore z cognito, si modo supra tradito alii eliciantur in infinitum, alterni saltem erunt numeri integri. Ex quo perspicuum est, resolutionem formularum quadraticarum radicalium $\sqrt{(\alpha xx + \beta x + \gamma)}$ nulla limitatione affici, etiamsi terminus βx plane omittatur, sicque totum negotium huc redit, vt formulae huiusmodi $\sqrt{(\alpha xx + \gamma)}$ rationales, et quidem in numeris integris reddantur.

Obseruatio 3.

29. Iam annotaui, formulam $\alpha xx + \gamma$ in numeris integris saltem pluribus ac infinitis modis quadratum effici non posse, nisi α sit numerus positiuus non quadratus. Existente autem α tali numero, problema non ita resolui potest, vt pro quocunque numero pro γ assumto, solutio succedat: possent enim vtique eiusmodi numeri pro γ dari, vt problema nullam plane solutionem admitteret, atque hanc ob rem postulari vnam saltem solutionem cognitam esse debere, quo ipso casus insolubiles exclusi. Verum dato α characteres exhiberi possunt, ex quibus dignosci liceat, vtrum numerus γ sit eiusmodi, qui solutionem admittat, nec ne? Ac primo quidem perspicuum est, nullam solu-

tionem locum habere posse, nisi γ sit numerus in tali formula $bb-\alpha aa$ contentus. Dato ergo numero α, formetur series omnium numerorum, tam positiuorum, quam negatiuorum, qui quidem in formula $bb-\alpha aa$ sint contenti; ac nisi γ in hac serie reperiatur, certo pronunciare licet, formulam $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}$ nullo modo rationalem reddi posse: vicissim autem, quoties γ in hac serie comprehenditur, quia tum est $\gamma=bb-\alpha aa$, formula $\alpha xx+\gamma$ fit quadratum, ponendo $x=a$, eritque $\sqrt{(\alpha xx+\gamma)}=b$. Haec igitur series, cuius quasi terminus generalis est $bb-\alpha aa$, primo continebit, sumto $a=0$, omnes numeros quadratos $1, 4, 9, 16, 25$, etc. tum vero omnes quadratos per $-\alpha$ multiplicatos nempe: $-\alpha$, -4α, $-\alpha 9$, $-\alpha 16$, etc. Praeterea si p et q fuerint numeri in hac serie contenti, in ea quoque reperietur eorum productum pq; nam cum sit $p=bb-\alpha aa$ et $q=dd-\alpha cc$, erit $pq=(bd\pm\alpha ac)^2-\alpha(bc\pm ad)^2$, et ob ambiguitatem signi hoc productum duplici modo est numerus formae $bb-\alpha aa$, ideoque statim habentur duae solutiones $x=bc+ad$ et $x=bc-ad$.

Obseruatio 4.

30. Hinc ergo consecuti sumus hoc Theorema eximium, quod fundamentum superiorum solutionum in se complectitur:

„Si fuerit $\alpha xx+p=yy$ casu $x=a$ et $y=b$ tum
„vero etiam $\alpha xx+q=yy$ casu $x=c$ et $y=d$; haec
„formula $\alpha xx+pq=yy$ adimplebitur capiendo

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

Si

Si enim ſit $q=1$ et $dd=\alpha cc+1$, praeterea vero formulae $\alpha xx+p=yy$ ſatisfiat caſu $x=a$ et $y=b$; qui eſt caſus ſupra pro cognito aſſumtus; tum eidem formulae ſatisfacient valores:

$$x=bc\pm ad \text{ et } y=bd\pm\alpha ac$$

vnde eadem omnino ſolutio conficitur, quam ſupra exhibuimus, atque ex longe diuerſis principiis elicuimus: quocirca haec poſtrema inueſtigationis ratio ob concinnitatem et perſpicuitatem eo magis eſt notatu digna. Hic vero accedit, quod haec ratio multo latius pateat, quam praecedens, quippe quae ad caſum $q=1$ fuerat adſtricta. Demonſtratio autem iſtius Theorematis elegantiſſimi ita breuiſſime ſe habebit:

„ Cum ſit $\alpha aa+p=bb$, erit $p=bb-\alpha aa$
„ et ob $\alpha cc+q=dd$, erit $q=dd-\alpha cc$
„ hinc erit $pq=(bb-\alpha aa)(dd-\alpha cc)$, quae expres-
„ ſio reducitur ad hanc:

$$pq=(bd\pm\alpha ac)^2-\alpha(bc\pm ad)^2$$

„ Quodſi ergo fuerit $x=bc\pm ad$ et $y=bd\pm\alpha ac$,
„ erit $pq=yy-\alpha xx$, ideoque $\alpha xx+pq=yy$.

Q. E. D.

Obſeruatio. 5.

31. Cum igitur pro quolibet numero α formulae $\alpha xx+\gamma=yy$ numerus γ debeat eſſe formae $bb-\alpha aa$, numeri in hac forma contenti diligentius examinari merentur; et quoniam, ſi inter eos occurrunt numeri p et q, ſimul quoque eorum productum pq

occurrit, praeter numeros quadratos 1, 4, 9, 16, 25 etc. eorumque multipla negatiua $-\alpha$, -4α, -9α, -16α, -25α etc. imprimis numeri primi in hac forma contenti sunt spectandi, quippe ex quibus deinceps per multiplicationem compositi nascuntur.

I. Sit $\alpha = 2$ et numeri primi formae $bb - 2aa$ sunt:

positiui: $+1, +2, +7, +17, +23, +31, +41, +47, +71, +73, +79, +89, +97$ etc.

negatiui: $-1, -2, -7, -17, -23, -31, -41, -47, -71, -73, -79, -89, -97$ etc.

qui praeter $+2$ et -2 omnes in forma $\pm(8n \pm 1)$ continentur.

II. Sit $\alpha = 3$ et numeri primi formae $bb - 3aa$ sunt:

positiui: $+1, +13, +37, +61, +73, +97, +109$, etc.

negatiui: $-2, -3, -11, -23, -47, -59, -71, -83, -107$, etc.

qui praeter -2 et -3 omnes continentur in forma $12n + 1$, siquidem pro n tam numeri positiui, quam negatiui, capiantur.

III. Sit $\alpha = 5$ et numeri primi formae $bb - 5aa$ sunt:

positiui: $+1, +5, +11, +19, +29, +31, +41, +59, +61, +71, +79, +89, +101$, etc.

negatiui: $-1, -5, -11, -19, -29, -31, -41, -59, -61, -71, -79, -89, -101$. etc.

qui praeter $+5$ et -5, omnes in forma $10n \pm 1$ continentur.

IV.

IV. Sit $\alpha = 6$ et numeri primi formae $bb - 6aa$ ſunt:

poſitiui: $+1, +3, +19, +43, +67, +73, +97$, etc.

negatiui: $-2, -23, -29, -47, -53, -71, -101$, etc.

qui, praeter -2 et $+3$, omnes in alterutra harum formarum: $24n+1$ et $24n-5$ continentur, ſumendo pro n numeros tam negatiuos, quam poſitiuos.

V. Sit $\alpha = 7$ et numeri primi formae $bb - 7aa$ ſunt:

poſitiui: $+1, +2, +29, +37, +53, +109$ etc.

negatiui: $-7, -3, -19, -31, -47, -59, -83$ etc.

qui praeter $+2$ et -7 omnes in vna harum formarum continentur: $28n+1$; $28n+9$; $28n+25$.

Obſeruatio 6.

32. Hinc colligimus, omnes numeros primos in formula $bb - \alpha aa$ contentos ſimul in quibusdam huiusmodi formulis $-4\alpha n + A$ contineri, dum pro A certi quidam numeri ſubſtituuntur. Quod idem etiam hoc modo oſtendi poteſt: ponatur $b = 2\alpha p + r$ et $a = 2q + s$ ac formula $bb - \alpha aa$ tranſit in hanc:

$$4\alpha\alpha pp + 4\alpha pr + rr - 4\alpha qq - 4\alpha qs - \alpha ss$$

ſtatuatur $\alpha pp + pr - qq - qs = n$ et habebimus:

$$bb - \alpha aa = 4\alpha n + rr - \alpha ss$$

omnes ergo numeri primi formae $bb - \alpha aa$ quoque in hac forma $4\alpha n + rr - \alpha ss$ continentur; atque vt hi numeri ſint primi, r et s ita accipi oportet, vt numerus $rr-\alpha ss$ fit vel ipſe primus, vel ſaltem ad 4α primus. Primo ergo ſumto $s=0$, pro r ſucceſſiue accipi poſſunt numeri impares ad α primi, ac ſi rr fuerit maius quam 4α, inde 4α toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt, vt reſiduum ſit minus quam 4α, et quot hoc modo diuerſi numeri reſultant, ii in formula $4\alpha n+A$ loco A collocentur. Deinde etiam ſimili modo colligantur numeri ex formulis $rr-\alpha$, qui quatenus ſunt diuerſi, ad illos inſuper adiiciantur. Non autem opus eſt, pro s alios numeros praeter vnitatem aſſumere; ſi enim s eſſet numerus par, numerus $-\alpha ss$ iam in forma $4\alpha n$ contineretur, et ſi s eſſet impar, numerus $-\alpha ss$ haberet formam $-4\alpha N-\alpha$, cuius pars $-4\alpha N$ iam in $4\alpha n$ continetur, ſicque ſufficit pro formulis $4\alpha n+A$, quouis caſu has $4\alpha n+rr$ et $4\alpha n+rr-\alpha$ euoluere, eaeque iam omnes numeros primos, qui quidem in formula $bb-\alpha aa$ comprehenduntur, in ſe complectentur. Num autem viciſſim omnes numeri primi, in his formulis $4\alpha n+rr$ et $4\alpha n+rr-\alpha$ contenti, ſimul ſint numeri formae $bb-\alpha aa$? quaeſtio eſt altioris indaginis, quae tamen affirmanda videtur.

Obſeruatio 7.

33. Quo haec exemplo illuſtremus, ſit $\alpha=13$, et ex $4\alpha n+rr$ et $4\alpha n+rr-\alpha$ orientur hae formulae pro numeris primis:

ex

ex $4\alpha n + rr$	ex $4\alpha + rr - \alpha$
$52n + 1$	$52n - 9$
$52n + 9$	$52n + 3$
$52n + 25$	$52n + 23$
$52n + 49 = 52n - 3$	$52n + 51 = 52n - 1$
$52n + 81 = 52n - 23$	$52n + 87 = 52n - 17$
$52n + 121 = 52n + 17$	$52n + 131 = 52n - 25$

quae formulae reducuntur ad has:

$52n \pm 1$; $52n \pm 3$; $52n \pm 9$; $52n \pm 17$; $52n \pm 23$; $52n \pm 25$;

ac numeri primi in his contenti sunt:

± 1; ± 3; ± 17; ± 23; ± 29; ± 43; ± 53; ± 61; ± 79; ± 101; ± 103;

quibus addi debet ± 13; tum vero omnes numeri quadrati; atque si insuper adiiciantur producta ex binis pluribusque horum numerorum, obtinebuntur hoc quidem casu omnes numeri, qui pro γ substituti producunt formulam $13xx + \gamma = yy$ in numeris integris resolubilem; seu quicunque illorum numerorum pro γ accipiatur, vnus primo deinde infiniti numeri integri pro x inueniri possunt, quibus formula $13xx + \gamma$ quadratum reddatur. Omnes enim isti numeri simul in forma $bb - 13aa$ continentur; qui enim huc difficiliores reductu videntur, sunt: $-1 = 18^2 - 13 \cdot 5^2$

$+13 = 65^2 - 13 \cdot 18^2$; $-3 = 7^2 - 13 \cdot 2^2$; $17 = 15^2 - 13 \cdot 4^2$; $-17 = 10^2 - 13 \cdot 3^2$

$-23 = 43^2 - 13 \cdot 12^2$; $+29 = 9^2 - 13 \cdot 2^2$; $-29 = 32^2 - 13 \cdot 9^2$; $+43 = 76^2 - 13 \cdot 21^2$

-43

$-43 = 3^2 - 13.2^2$; $+53 = 51^2 - 13.14^2$; $-53 = 8^2 - 13.3^2$;
$+61 = 23^2 - 13.6^2$
$-61 = 24^2 - 13.7^2$; $+79 = 14^2 - 13.3^2$; $-79 = 16^2 - 13.5^2$;
etc.

Cum ergo sit $-1 = 18^2 - 13.5^2$, si fuerit $+\gamma = bb - 13aa$, erit $-\gamma = (18b \pm 65a)^2 - 13(18a \pm 5b)^2$, vnde casus difficiliores resoluuntur.

Proposita ergo resoluenda hac aequatione $13xx + 43.79 = yy$, cum sit $\gamma = 43.79 = -43. -79$. habebitur per compositionem:

I. $\gamma = (14.76 \pm 13.63)^2 - 13(14.21 \pm 3.76)^2$
ergo $x = 294 \pm 228$ et $y = 1064 \pm 819$

II. $\gamma = (3.16 \pm 13.10)^2 - 13(2.16 \pm 3.5)^2$
ergo $x = 32 \pm 15$ et $y = 130 \pm 48$

vnde statim 4 solutiones obtinentur.

Obseruatio 8.

34. Verum non semper ex his numeris primis, quos modo inuestigare docuimus, cum quadratis omnes plane numeri, qui pro γ assumi possunt, reperiuntur, cuius rei exemplum est casus $\alpha = 10$, pro quo valores ipsius γ in hac forma $bb - 10aa$ continentur; iique sunt, tam negatiue, quam positiue, sumti:

1, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 24, 25, 26, 31, 36, 39, 40, 41, 49, 54, 60, 64, 65, 71, 74, 79, 81, 86, 89, 90, 96, 100, 104, 106, 111, 121, 124, 129, 134, 135, 144, 150, 151, 156, 159, 160, 164, 166, 169, 185, 186, 191, 196, 199, 201, etc.

inter

inter quos numeros occurrunt primo omnes quadrati:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, etc.
deinde numeri primi 31, 41, 71, 79, 89, 151, 191, 199, etc.
qui in his formulis continentur $40n \pm 1$ et $40n \pm 9$. insuperque accedunt producta ex binis pluribusue horum numerorum. Tertio vero praeter hos adsunt numeri ex binis numeris primis compositi, qui sunt:

2.3; 2.5; 2.13; 2.37; 2.43; 2.53; 2.67; 2.83; etc.
3.5; 3.13; 3.37; 3.43; 3.53; 3.67; etc.
5.13, 5.37, etc.

At hi numeri primi, quorum semper bini sunt in se multiplicandi, sunt primo 2 et 5, reliqui vero in his formulis continentur $40n \pm 3$ et $40n \pm 13$. Denique etiam secundum regulam generalem adiici debent producta ex binis pluribusue numeris, qui per se satisfaciunt. Ita resolui poterit haec aequatio: $10xx + 13.53.151 = yy$ nam est $13.53 = bb - 10aa$ existente $b = 27$ et $a = 2$ et $151 = dd - 10cc$; existente $d = 31$ et $c = 9$. hincque

$$13.53.151 = (bd \pm 10ac)^2 - 10(ad \pm bc)^2$$
et $x = ad \pm bc$ et $y = bd \pm 10ac$.

Deinde cum etiam sit $-13.53 = BB - 10AA$ et $-151 = DD - 10CC$, hinc duae aliae solutiones reperiuntur. Cum autem sit $-1 = 3^2 - 10.1^2$, si fuerit $\gamma = bb - 10aa$, erit $-\gamma = (3a \pm b)^2 - 10(3a \pm b)^2$. Solutiones autem hinc oriundae sunt:

$$x = 181;\ x = 305;\ x = 307;$$
$$y = 657;\ y = 1017;\ y = 1023;$$

duae enim inter se conueniunt, ita vt hinc tres tantum reperiantur.

Obſeruatio 9.

35. Hoc ergo caſu $\alpha = 10$ pro γ triplicis generis numeros primitiuos inuenimus, primo ſcilicet numeros quadratos omnes, deinde certos numeros primos in formulis $40n + 1$ et $40n + 9$ contentos, tertio autem producta ex binis certis numeris primis, qui ſunt 2, 5 et reliqui ex his formulis $40n + 3$ et $40n + 13$ petendi, atque ex hoc demum triplici ordine omnes numeri pro γ idonei formantur, vt huic aequationi $10xx + \gamma = yy$ ſatisfieri poſſit. Ipſi autem numeri primi in formulis $40n + 3$ et $40n + 13$ contenti non conueniunt, quia non ſunt formae $bb - 10aa$, ſed tamen hi numeri omnes ſunt formae $2bb - 5aa$; vti etiam duo iis iungendi 2 et 5. Manifeſtum autem eſt, ſi habeantur duo numeri huiusmodi $2bb - 5aa$ et $2dd - 5cc$, eorum productum fore $= (2bd + 5ac)^2 - 10(bc + ad)^2$, ideoque pro γ adhiberi poſſe. Huiusmodi igitur producta binorum numerorum primorum, qui ipſi non ſatisfaciunt, occurrere nequeunt, ſi α fuerit numerus primus, ſed tantum, vti hic vſu venit, ſi α fuerit numerus compoſitus; quod tamen etiam non ſemper locum habet, vti vidimus caſu $\alpha = 6 = 2 \cdot 3$, quo numeri formae $3bb - 2aa$ conueniunt cum numeris formae $bb - 6aa$. Quodſi ergo in genere fuerit $\alpha = pq$, et aequatio $pqxx + \gamma = yy$ reſolui debeat, numerus γ vel eſſe debet numerus quadratus, vel primus formae $bb - pqaa$, vel productum ex duobus numeris primis formae $pbb - qaa$, propterea quod huiusmodi productum eſt:

$$(pbb - qaa)(pdd - qcc) = (pbd + qac)^2 - pq(bc + ad)^2$$

Niſi

Nisi ergo tales numeri primi iam ipsi $pbb-qaa$ in forma $bb-pqaa$ contineantur, tertius ille ordo numerorum ex binis numeris primis conflatorum accedit. Quemadmodum deinde numeri primi solitarii continentur in formulis

$$4pqn+rr \quad \text{et} \quad 4pqn+rr-pq$$

ita numeri primi alteri combinandi ex formula hac:

$$4pqn+prr-qss$$

deriuari debent.

Exemplum 1.

36. Inuestigentur omnes valores idonei ipsius γ, vt haec aequatio $30xx+\gamma=yy$ resolutionem admittat.

Primo quidem pro γ assumi possunt omnes numeri quadrati, deinde omnes numeri primi in his formis $120n+rr$ et $120n+n-30$ contenti, quae reducuntur ad has:

$120n+1$; $120n+49$; $120n+19$; $120n-29$, cum -5 vnde oriuntur hi numeri primi infra 200

positiui: $+19, +139$

et negatiui: $-5, -29, -71, -101, -149, -191$

Tertio ob $\alpha=2 \cdot 3 \cdot 5$, sumi possunt producta trinorum primorum, qui contineantur vel ambo in vna harum formularum:

I. $120n+2rr-15ss$, II. $120n+3rr-10ss$;
III. $120n+5rr-6ss$

harum autem binae priores eosdem numeros primos dant, qui sunt $+2.+3$, et reliqui in his formulis

E 2 conti-

continentur:

$120n-7$; $120n-13$; $120n+17$; $120n-37$

vnde nascuntur hi numeri primi infra 200

positiui. $+2$; $+3$; $+17$; $+83$; $+107$; $+113$; $+137$

negatiui: -7; -13; -37; -103; -127

quorum binorum producta pro γ capienda sunt;

$+6, +34, +51, +91, +166$

$-14, -21, -26, -39, -74, -111, -119$

Tertia autem formula continet numerum primum $+5$, cum his formis:

$120n-1$; $120n-19$; $120n+29$; $120n-49$

vnde nascuntur hi numeri primi infra 200

positiui: $5, +29, +71, +101, +149, +191$

negatiui: $-1, -19, -139$

At ex horum combinatione iidem nascuntur numeri, qui iam ex numeris primis primitiuis oriuntur. Quocirca omnes numeri, qui pro γ substitui possunt, erunt infra 200:

$+1, +4, +9, +16, +25, +36, +49, +64, +81, +100, +121, +144, +169, +196,$

$-5, +19, -29, -71, -101, +139, -149, -191$

$+6, -14, -21, -26, -34, -39, +51, -74, +91, -111, -119, +166$

$-20, +24, -30, -45, +54, -56, +70, +76, -80, -84, -95, +96, -104, +105$

$+114, -116, -125, -126, +130, +136, +145, +150, -156, -170, +171, -189, +195$

reliqui

reliqui autem numeri omnes pro γ assumti reddent problema impossibile.

Exemplum 2.

37. *Resoluere in numeris integris aequationem*

$$5xx + 11.\,19.\,29 = yy$$

Quia est $\alpha = 5$ et $\gamma = 11.\,19.\,29$, factores hi cum forma $bb - 5aa$ conueniunt, et singuli in ea contineri deprehenduntur: nam

pro 11 est $b=4$, $a=1$ vnde etiam producta ex
19 -- $b=8$, $a=3$ binis in eadem forma
29 -- $b=7$, $a=2$ continentur

pro $11.\,19$ est $\left\{\begin{matrix} b=17;\ a=4 \\ b=47;\ a=20 \end{matrix}\right\}$ ergo tertium adiungendo

pro $11.\,19.\,29$ est $\left\{\begin{matrix} b=79;\ a=6 \\ b=159;\ a=62 \\ b=129;\ a=46 \\ b=529;\ a=234 \end{matrix}\right\}$

Cum iam sit $1 = 9^2 - 5.4^2$, seu $b=9$ et $a=4$ pro 1, hae formulae insuper per 1 multiplicatae duplicabuntur, fietque pro $11.\,19.\,29$

$b=591;\ a=262$	$b=241;\ a=102$
$b=831;\ a=370$	$b=2081;\ a=930$
$b=191;\ a=78$	$b=81;\ a=10$
$b=2671;\ a=1194$	$b=9441;\ a=4222$

Hinc ergo iam duodecim solutiones problematis sumus nacti, quae sunt:

I. $x=6$; $y=79$	VII. $x=234$; $y=529$
II. $x=10$; $y=81$	VIII. $x=262$; $y=591$
III. $x=46$; $y=129$	IX. $x=370$; $y=831$
IV. $x=62$; $y=159$	X. $x=930$; $y=2081$
V. $x=78$; $y=191$	XI. $x=1194$; $y=2671$
VI. $x=102$; $y=241$	XII. $x=4222$; $y=9441$

ex quibus porro cum formula $1=9^2-5.4^2$ coniungendis infinite nouae eaeque omnes elicientur: ex secunda scilicet prodit

$x=414$; $y=929$; et ex sexta $x=1882$; $y=4209$ ex quinta $x=1466$; $y=3279$; ex octaua $x=4722$; $y=10559$; sicque iam sedecim solutiones sumus adepti.

Conclusio.

38. His expositis non amplius coacti sumus, proposita huiusmodi aequatione $\alpha xx+\gamma=yy$, primum quasi diuinando vnum casum satisfacientem anquirere, sed numerum γ examinando secundum formulas modo traditas statim pronunciare possumus, vtrum aequatio resolutionem admittat, nec ne? ac si admittit, per eadem principia vnam saltem solutionem elicere licebit, quod quidem promte fieri poterit, si numerus γ fuerit resolubilis in factores non nimis magnos. Verum si numerus γ sit primus ac praegrandis, iudicium quidem solubilitatis aeque est facile, at inuentio vnius solutionis maiorem laborem requirit. Veluti si proponatur $30xx+1459=yy$, quia 1459 est numerus primus formae $120n+19$, aequatio est resolubilis; verum ei satisfieri sumendo $x=39$ et $y=217$ non

non tam facile inueſtigatur. Inueſtigatio tamen ſubleuatur, ſi ſtatuamus $y = 30z + 7$, vnde fit $xx = 30zz + 14z - 47$, et iam citius reperiemus $z = 7$, et $x = 39$ vnde prodit $y = 217$. At ſi ponamus $y = 30z + 13$, fit $xx = 30zz + 26z - 43$, promtiusque inuenitur $x = 5$ et $y = 47$. Verum in numeris multo maioribus labor euadit inſuperabilis, methodusque certa adhuc deſideratur negotium conficiendi: deinde etiam quod omnes numeri primi, in ſupra allatis formulis $4\alpha n + A$ contenti, ſimul ſint numeri huius formae $bb - \alpha aa$, ad eas propoſitiones pertinet, quas veras credimus, etiamſi demonſtrare non valeamus. In quo cum eximia pars Theoriae numerorum verſetur, qui huius generis problemata diligentius perſcrutari voluerit, nullum eſt dubium, quin non contemnendas veritates ſit eruturus; ob eandemque cauſam confido haec ipſa, quae hic attuli, vſu non eſſe caritura: ea ipſa enim quae adhuc ſunt incognita accuratius expoſuiſſe non parum iuuabit.

DE