1763

De motu et attrutu lentium dum super catinis poliuntur

Leonhard Euler

DE MOTV ET ATTRITV LENTIVM DVM SVPER CATINIS POLIVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Inter plures modos, quibus lentes ſuper catinis, ſiue immotis, ſiue in gyrum actis, atteri ac poliri ſolent, hic eum tantum ad examen reuocare conſtitui, quo catino vniformiter in gyrum acto, lens ope ſtyli eius centro applicati ad catinum apprimitur, quo fit, vt ipſa lens circa ſtylum libere mobilis a catini motu in gyrum agatur, et quatenus eius motus a motu catini diſcrepat, eidem atteratur, ſicque politura perficiatur. Quoniam hac ratione arbitrio artificis nihil aliud praeter locum, vbi lentem ſuper catino detineat, relinquitur. Hic modus lentes poliendi prae reliquis geometricae inueſtigationis capax videtur, dum contra, vbi totus lentis motus ab arbitrio artificis pendet, vix quidquam definire licet.

Tab. IV. Fig. 1. 2. Sit igitur PQRS catinus ope machinae rotatoriae certa quadam velocitate vniformiter in gyrum agendus, circa eius axem O, quem verticalem aſſumo, vt motus catini in plano horizontali abſoluatur. Lens autem AEBF ope ſtyli eius centro C applicati ita con-

continuo ad catinum apprimatur, vt punctum C immotum seruetur, lens autem circum id libere reuolui queat. Catino iam in gyrum acto, ipsa lens circa stylum in motum abripietur, moxque vniformiter circumagetur, cuius motus celeritatem ante definiri oportet, quam effectus attritus, seu celeritas, qua singula lentis puncta super catino teruntur, assignari queat.

3. Denotet u celeritatem gyratoriam catini, ita ad distantiam quandam fixam a centro O, vnitate indicandam relatam, vt in distantia a centro quacunque z sit celeritas vera $= uz$, cuius quadratum $uuzz$, vt mensuras certas obtineamus, exprimat altitudinem huic celeritati debitam: hac ergo littera u motus catini prorsus determinatur, quippe qua constat, punctum quodcunque catini Z, cuius distantia ab axe O fuerit OZ $= z$, ita moueri, vt eius directio sit recta Zm ad OZ normalis, celeritas vero $= uz$, quae tanta est intelligenda, quanta ex lapsu grauis per altitudinem $uuzz$ acquiri solet; quandoquidem catinus in plagam PQRS circumagitur; si enim in plagam contrariam circumageretur pari celeritate, celeritas quidem puncti Z foret eadem, sed directio Zm contraria esset statuenda.

4. Quod porro ad lentem attinet, primo eius diameter AB in computum est ducendus, cuius semissis sit CA $=$ CB $= a$. Deinde plurimum refert, in quanta distantia eius centrum C a centro catini O ope styli fixum detineatur, quae distantia sit OC $= c$. Tum vero si de effectu attritus iudicare velimus, vis qua

ea

ea ad catinum apprimitur, rationem haberi conuenit; quae vis aequetur ponderi $= P$. Cum autem tanta vi tota facies lentis inferior catino apprimatur, vis qua quaelibet eius portio atque adeo elementum apprimitur, ex eius ratione ad totam faciem erit colligenda; siquidem assumimus, lenti iam catini figuram esse inductam, totumque negotium sola politura esse absoluendum.

5. His quae circa lentem sunt nota constitutis, inuestigandus est eius motus, qui ob centrum C fixum alius esse nequit, nisi gyratorius circa idem centrum, et qui inter quaerenda primum locum obtinet. Statim quidem patet, lentem ob motum catini, quem in plagam PQRS fieri pono, in similem plagam AEBF abreptum iri; sed celeritas huius motus etiam nunc est incognita. Sit ergo simili modo huius motus celeritas gyratoria $= v$, ita ad distantiam fixam $= 1$ relata, vt puncti lentis cuiuscunque Z, cuius distantia ab eius centro C fuerit $CZ = x$, celeritas vera futura sit $= vx$, directione existente Zn ad CZ normali. Tum vero vt punctum C immotum teneatur, quoniam motus catini totam lentem auehere conatur, stylo praeterea vim contranitentem applicatam esse oportet, cuius quantitas pariter erit inuestiganda.

6. Quo nunc felicius haec, quae sunt incognita, definire liceat, ante omnia motum respectiuum cuiusque lentis puncti ratione catini explorari conuenit, in quo motu verus attritus consistit. Ac primo quidem at-

attritus centri lentis C ſuper catino per ſe eſt manifeſtus; cum enim ob. diſtantiam $OC = c$, punctum catini C celeritate $= cu$ in directione Cc ad OC normali feratur, lentis autem punctum C quieſcat, haec ipſa cu erit celeritas attritus; quae ergo eo maior eſt, quo longius centrum lentis C a centro catini O detineatur. Euidens autem eſt, effectum politurae ab hac attritus celeritate ita pendere, vt partim illi ipſi, partim preſſioni futurus ſit proportionalis.

7. Celeritas attritus autem omnium reliquorum lentis punctorum ſuper catino, non ſolum ab huius, ſed etiam a lentis motu pendet, ad quam inueſtigationem figuram ſecundam maiori ſpecie expreſſam accommodemus. Sit ergo pro puncto lentis quocunque Z diſtantia $CZ = x$ et angulus $ACZ = \Phi$, ad CZ normaliter iungatur $Zn = vx$ motum verum puncti lentis Z exhibens. Catini autem punctum ſubiectum Z, poſita diſtantia $OZ = z$, feretur in directione Zm ad OZ normali celeritate $= uz$. Sumta ergo $Zm = uz$, ſi catino et lenti ſimul motum imprimi concipiamus ſecundum directionem $Z\nu$, ipſi Zn oppoſitam, et celeritate $Z\nu = vx$; tum vero completo parallelogrammo $mZ\nu z$ ducamus diagonalem Zz, res eodem redibit, ac ſi puncto lentis Z quieſcente catinus ſub eo promoueatur in directione Zz celeritate $= Zz$, quae ergo erit celeritas attritus puncti Z. Tab. IV. Fig. 2.

8. Cum autem ſit $OC = c$; $CZ = x$, et angulus $ACZ = \Phi$, erit $OZ = z = \sqrt{(cc + xx + 2cx \operatorname{cof.} \Phi)}$. Deinde poſito angulo $COZ = \omega$, erit tang. $\omega = \frac{x \operatorname{fin.} \Phi}{c + x \operatorname{cof.} \Phi}$

 et

et $\sin.\omega = \frac{x \sin.\Phi}{z}$: porro ang. $CZO = \Phi - \omega$, et $\operatorname{tang}.(\Phi - \omega) = \frac{c \sin.\Phi}{x + c \cos.\Phi}$, atque $(\Phi - \omega) = \frac{c \sin.\Phi}{z}$. In triangulo autem $Z\nu z$ eſt $Z\nu = vx$; $z\nu = Zm = uz$ et angulus $Z\nu z = CZO = \Phi - \omega$; vnde colligitur $Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxz \cos.(\Phi - \omega))}$.
Inde vero colligitur $z \cos.(\Phi - \omega) = x + c \cos.\Phi$, quo valore ſubſtituto fit

$$Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxx - 2cuvx \cos.\Phi)} \text{ ſeu}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}.$$

9. Pro ſitu deinde huius lineae Zz, quae celeritatem attritus puncti lentis Z exprimit, erit primo $CZ\nu$ angulus rectus, tum vero $\cos.\nu Zz$
$= \frac{Zz^2 + Z\nu^2 - z\nu^2}{2 Zz . Z\nu} = \frac{-(u-v)x - cu \cos.\Phi}{Zz} = \sin.(CZ\nu + \nu Zz)$
Tab. IV. Fig. 1. at $\sin \nu Zz = \frac{z\nu . \sin.Z\nu z}{Zz} = \frac{uz \sin.(\Phi - \omega)}{Zz} = \frac{cu \sin.\Phi}{Zz} = -\cos.(CZ\nu + \nu Zz)$. Si ergo in fig. 1. lineam Zz ſuperne cum CZ angulum conſtituere aſſumamus, erit

$$\sin.CZz = \frac{(v-v)x + cu \cos.\Phi}{Zz} \text{ et}$$
$$\cos.CZz = \frac{-cu \sin.\Phi}{Zz} \text{ exiſtente}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)};$$

vnde patet, ſi fuerit $ACZ = \Phi = 0$, fore $Zz = cu + (u-v)x$; et angulum CZz rectum, ac ſi praeterea ſit $x = 0$, erit vt ante celeritas attritus centri lentis $C = cu$.

10. Iam quaeſtio huc redit, quamnam habitura ſit rationem celeritas gyratoria lentis v ad celeritatem gyratoriam catini u? ad quam reſoluendam duae patent viae, altera indirecta ex principio minimae actionis

nis petita, altera directa ex principiis motus negotium conficiens. Secundum priorem nullum eſt dubium, quin motus lentis ita comparatus ſit futurus, vt attritus totus fiat minimus. Quare ſi in Z elementum ſuperficiei lentis concipiatur, erit id ob variabilitatem tam diſtantiae $CZ = x$, quam anguli $ACZ = \Phi$, ita expreſſum $= x\,dx\,d\Phi$, quod per celeritatem attritus Zz multiplicatum, dabit eius attritus quantitatem

$$x\,dx\,d\Phi\sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u-v)^2xx)}$$

cuius integrale per totam lentem extenſum minimum eſſe debet.

11. Producta recta ZC vltra C, concipiatur par elementum ſuperficiei $x\,dx\,d\Phi$ ad alteram partem rectae AB, et quia hic fit vel x vel coſ. Φ negatiuum, eius quantitas attritus erit

$$x\,dx\,d\Phi\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u-v)^2xx)}$$

Collectis his ambobus elementis, euidens eſt, eorum ſummam fieri minimam, ſi ſumatur $v = u$, id quod vtraque formula irrationali in ſeriem conuertenda facillime patet, dum additione poteſtates impares ipſius x, ac proinde etiam ipſius $u - v$, ſe deſtruant, vnde minimum ratione celeritatis v inueſtigando manifeſto elicitur $v = u$, quod cum de omnibus elementorum ſibi hoc modo oppoſitorum paribus valeat, ſequitur etiam, totius lentis attritum minimum eſſe futurum, ſi fuerit $v = u$, ideoque lens aeque celeriter in gyrum agatur atque catinus, ita vt ambo aequalibus temporibus ſuas reuolutiones abſoluant.

12. Verum etiam via directa ad eandem conclusionem manuducet. Cum enim experimentis constet, frictionem a sola pressione pendere, neque celeritatem attritus quicquam, siue ad augendam, siue diminuendam frictionem, conferre, elementum superficiei $x dx d\Phi$ in Z vi quadam ipsi proportionali, ob pressionem vbique aequalem, in directione Zz sollicitabitur; quae vis ergo sit $= \alpha x dx d\Phi$; et quia centrum lentis C immotum tenetur, erit huius respectu momentum illius vis $= \alpha x dx d\Phi .\, \mathrm{CZ} \sin.\, \mathrm{CZ}z$ $= \frac{\alpha x dx d\Phi .\, x((u-v)x + cu \cos \Phi)}{\sqrt{(ccuu + 2cu((u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}}$. Ex elemento autem opposito, vti supra, sumto, orietur momentum $\frac{\alpha x dx \Phi .\, x((u-v)x - cu \cos.\Phi)}{\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x \cos.\Phi + (u-v)^2 xx)}}$.

13. Nunc autem, quia motus lentis iam ad vniformitatem compositus statuitur, necesse est, vt horum momentorum summa vniuersa ad nihilum redigatur, quod cum fiat in binis elementis oppositis, si capiatur $v = u$, idem pro tota lente valebit. Idem etiam per integrationem solito more elucet, posito enim $v = u$, ex elemento Z oritur momentum $= \alpha x x dx d\Phi \cos.\Phi$, vnde pro sectore elementari CZ colligitur momentum $= \frac{1}{3}\alpha x^3 d\Phi \cos.\Phi$, et pro toto ad marginem vsque extenso $= \frac{1}{3}\alpha a^3 d\Phi \cos.\Phi$, cuius denuo integrale est $= \frac{1}{\alpha} a^3 \sin.\Phi$, quod per totam lentem extensum, donec fiat $\Phi = 360°$, manifesto in nihilum abit, quod non fieret, si non esset $v = u$. Vicissim ergo altera methodus per alteram confirmatur, et cum principium minimi per se sit euidens, patet simul

ſimul alterum, quo frictio a ſola preſſione pendere aſſumitur, veritati omnino eſſe conſentaneum.

14. Definita iam celeritate $v=u$, non difficile erit determinare vim, cui ſtylus centro lentis C applicatus, praeter preſſionem P, reniti debet, ne centrum lentis C a motu catini abripiatur. Cum enim ſit $v=u$, erit $Zz=cu$, ſin $CZz=$ coſ. Φ et coſ. $CZz=$ -ſin. Φ, ita vt ſit $CZz=90^\circ+\Phi$, et $zZn=\Phi=ACZ$. Ob frictionem autem vrgetur elementum ſuperficiei lentis $xdxd\Phi$ ſecundum directionem Zz vi conſtante; et quia tota ſuperficies, quae eſt $=\pi aa$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $=1$, apprimitur vi P, elementum illud apprimetur vi $=\frac{Pxdxd\Phi}{\pi aa}$ cuius parti quaſi tertiae frictio aequatur. Scribamus autem generalius λ pro parte tertia, ita vt elementum in Z ſecundum Zz ſollicitetur vi $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi}{\pi aa}$, quae ſecundum directionem CZ praebet vim $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi}{\pi aa}$ et ſecundum directionem ad illam normalem vim $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi\, \text{coſ.}\,\Phi}{\pi aa}$.

15. At per ea, quae ſupra oſtendimus, omnes iſtae vires normales ſe deſtruunt, vnde ſtylus ſuſtinere debet alteras illas vires ſecundum CZ agentes, quae ſunt $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi}{\pi aa}$, et quaſi ipſi centro lentis C ſecundum directionem CZ applicatae eſſent, concipi poſſunt. Quaelibet vero huiusmodi vis reſoluatur ſecundum directiones fixas CA et Cc, eritque vis ſecundum $CA=\frac{\lambda Pxdxd\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi\, \text{coſ.}\,\Phi}{\pi aa}$, et vis ſecundum $Cc=\frac{\lambda Pxdxd\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi^2}{\pi aa}$. Illa primum integrata, poſito

$x = a$, dat $\frac{\lambda}{2\pi} P\, d\Phi\, \text{fin.}\, \Phi\, \text{cof.}\, \Phi = \frac{\lambda}{4\pi} P\, d\Phi\, \text{fin.}\, 2\Phi$, cuius porro integrale eſt $= \frac{\lambda}{8\pi} P(1 - \text{cof.}\, 2\Phi)$. Poſito nunc pro tota lente $\Phi = 360°$, haec vis ſecundum CA euaneſcit. Altera vis ſecundum Cc ſemel integrata dat $\frac{\lambda}{2\pi} P\, d\Phi\, \text{fin.}\, \Phi^2 = \frac{\lambda}{4\pi} P\, d\Phi(1 - \text{cof.}\, 2\Phi)$, cuius ſequens integrale eſt $= \frac{\lambda}{4\pi} P(\Phi - \frac{1}{2}\text{fin.}\, 2\Phi)$, et poſito $\Phi = 360°$ $= 2\pi$ prodit vis ſecundum $Cc = \frac{1}{2}\lambda P$.

16. Ob motum ergo catini ſtylus ſuſtinet vim $= \frac{1}{2}\lambda P$ ſecundum directionem Cc, quam artifex continuo vi contraria et aequali renitendo deſtruere debet, ſiquidem centrum lentis immotum tenere velit. Quare ſi $\lambda = \frac{1}{3}$, haec vis aequatur ſextae parti preſſionis totius P, qua lens catino apprimitur, cui concluſioni per ſe verae vnicus caſus aduerſatur, quo centrum lentis C ipſi centro catini O apprimitur; tum enim, quia lens pari motu cum catino circumagitur, nullusque attritus exercetur, ſtylus etiam nullam vim ſuſtinet. At huiusmodi exceptio ſemper, quando de frictione agitur, admitti debet; cum enim in motu tardiſſimo frictio aeque ſit magna atque in celerrimo, motu tamen plane euaneſcente frictio quaſi ſubito euaneſcit. Neque ergo hoc incommodum tanquam vitium calculo eſt imputandum.

17. Cum duplici demonſtratione euictum ſit, eſſe $v = u$, idem etiam experientia egregie confirmari deprehendi; in quacunque enim catini loco lens detinebatur, eius reuolutiones ſemper exactiſſime cum reuolutionibus catini conueniebant, neque vix vllam inaequali-

qualitatem, ne in motus quidem initio, obseruare licuit. Vnde patet statim ab initio motus reuolutiones lentis se ad eam aequalitatem componere, quam calculus ostendit; quin etiam motu catini modo intenso, modo remisso, lens eandem inaequalitatem sequi obseruata est. Hic ergo insigne cernitur specimen foecundissimi illius principii minimae actionis, quod eo magis omni attentione dignum videtur, quod etiam in motu per frictionem impedito tam felici cum successu adhiberi potuerit, cum hactenus eius vsus tantum in motibus liberis a viribus veri nominis, quibus frictionem vix annumerare licet, perturbatis, sit ostensus.

18. Quoniam igitur ex eo, quod inuenimus $v = u$, sequitur esse celeritatem $Zz = cu$, patet in eodem lentis situ omnia eius puncta aequali celeritate atteri, ideoque pari vi laeuigari ac poliri, quo ipso hic mechanismus non mediocriter reliquis antecellit, cum aliis alia lentis puncta fortius, alia debilius, atteri soleant. Praeterea vero hic perspicitur, celeritatem attritus rationem sequi interualli $OC = c$, ita vt si centrum lentis C centro catini O applicetur, nullus plane attritus sit futurus; quo longius autem interuallum OC capiatur, eo maiorem fore attritum, idque in eadem ratione. Quam ob rem omnino necesse est, vt catini magnitudo multum superet magnitudinem lentis, quae regula etiam ab artificibus probe obseruari solet.

19. Hic igitur ingens conspicitur discrimen inter frictionem et attritum, quae duae res vulgo confundi solent.

ſolent. Frictio enim, ſiue motus ſit tardior, ſiue velocior, perpetuo manet eadem. cum attritus eiusque effectus, qui in abraſione eſt conſtituendus, maxime a velocitate pendent, ex quo attritus quantitatem commodiſſime metiemur eius celeritate Zz in preſſionem ducta. Quare ſi in ſuperficie lentis conſideremus elementum dZ, quod quia catino apprimitur vi $= \frac{PdZ}{\pi aa}$, teriturque celeritate $= cu$, erit quantitas attritus $= \frac{PcudZ}{\pi aa}$. Hinc ergo lens eo promtius laeuigabitur et polietur, quo maior fuerit quantitas $\frac{Pcu}{\pi aa}$; quae proportionalis eſt 1°, vi P, qua lens catino apprimitur, 2°, celeritati u, qua catinus in gyrum agitur, 3°, interuallo $OC = c$ quo centrum lentis diſtat a centro catini, et 4°, denique reciproce ſuperficiei lentis, ita vt quo lens fuerit maior, eo tardius laeuigatio perficiatur.

20. Hic autem non tantum ad lentis attritum eſt reſpiciendum, ſed quia catinus etiam atteritur, eiusque ſuperficies abraditur, niſi vbique aequaliter radatur, mox eius figura alteratur; vnde fit, vt deinceps etiam lenti figura a propoſita aberrans inducatur. Quam ob rem neceſſe eſt, vt etiam attritus ipſius catini accuratius inueſtigetur. Primo autem patet omnia catini puncta ab eius centro aeque remota quauis reuolutione aequaliter atteri. Conſideremus ergo catini punctum quodcunque L a centro catini O diſtans interuallo $OL = y$, quod vna reuolutione tamdiu tantum atteritur, quamdiu per angulum MON profertur. Cum igitur attritus momentaneus ſit $= \frac{Pcu}{\pi aa}$, vna reuolutione integra totus attritus cenſendus erit $= \frac{Pcu}{\pi aa} \cdot \frac{ang.\,MON}{360°}$, ſiquidem puncti

Tab. IV. Fig. 3.

puncti lentis L quantitas attritus vna reuolutione exprimatur per $\frac{Pcu}{\pi aa}$.

21. Cum nunc sit $CM = CA = a$; $OC = c$; $OM = OL = y$, erit cos. $LOM = \frac{cc + yy - aa}{2cy}$, vnde, ob $\pi = 180°$, erit attritus puncti catini L durante vna reuolutione $= \frac{Pcu}{\pi\pi aa}$. A cos. $\frac{cc - aa + yy}{2cy}$, quae expressio tantum pro iis catini punctis valet, quorum distantia a centro O intra limites $AO = c + a$ et $BO = c - a$ continetur, quoniam tam in vtroque limite, quam extra eos, attritus euanescit. Hic autem notandum est, si fuerit $c < a$, et $y = a - c$, fore A cos. $\frac{cc - aa + yy}{2cy} = 180° = \pi$, seu haec catini puncta perpetuo atteri, quod multo magis valebit, si fuerit $y < a - c$, hoc scilicet casu spatium circulare circa centrum catini O, cuius radius est $= a - c$, perpetuo attritum patietur, et quidem aequalem ei, cui lens est subiecta. Cuiusmodi attritu si totus catinus afficeretur, non esset metuendum, vt eius figura deformaretur.

22. Cum autem solum spatium annulare catini lenti se applicans atteratur, quamdiu quidem lens in eodem loco detinetur, eius tantum figura alterationem patitur, eamque non aequabilem, vnde sphaericitas eius tandem vehementer mutabitur, lentique proinde figura a scopo non mediocriter aberrans imprimetur. Huic incommodo artifices remedium afferre conantur, dum lentem modo propius admouent ad centrum catini, modo ab eo longius remouent, quo pacto quidem cati-

 num

num circa centrum atterunt, ſed circa marginem attritus multo minor manet, ita vt ne hoc quidem modo catinus per totam ſuperficiem aequaliter radatur. Deinde vero etſi hoc modo attritus non tam inaequabilis ſit, quam ſi lens iugiter in eodem loco detineretur, tamen is non certa quadam lege diſtribuitur, vnde fit, vt figura catini a ſphaerica mox notabiliter recedat, ſolique fortunae ſit tribuendum, ſi quandoque bonae indolis lentes hoc modo elaborentur.

23. Ad catini autem attritum aequabilem reddendum optimum remedium videtur, ſi fruſtum quoddam vitri praeter lentem ſuper catino atteratur, cuius figura et preſſio ita ſit comparata, vt ſingula catini puncta, tam a lente, quam ab iſto fruſto, aequabilem attritum patiantur. Quo huius fruſti figura ſimplicior prodeat, ponamus interuallum BO euaneſcere, ſeu eſſe $OC = c = CB = a$, catinique radium OA diametro lentis $2a$ eſſe aequalem, quandoquidem, cum lens perpetuo in eodem loco detineatur, ſuperfluum foret, catinum ampliorem efficere. Sit igitur $EGhi$ figura illius fruſti vitrei quaeſita, quod continuo catino in eodem loco applicatum detineatur, eique pondere $= Q$ apprimatur, cuius area ſit $= ee$. Quoniam nihil refert, quo in loco hoc fruſtum applicemus, concipiamus id in ſitu DOHVT.

Tab. V. Fig. 1.

24. Cum igitur catini puncta L a centro O interuallo $OL = y$ diſtantia ob $c = a$ a lente attritum pati-

patiantur, cuius quantitas vna reuolutione est $=\frac{Pu}{\pi\pi a}\text{A cos.}\frac{y}{2a}$ $=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM$. Tum vero eadem puncta L sub frusto vitri per arcum VR deferuntur celeritate uy, et quia pressio in singulis punctis est vt $\frac{Q}{ee}$, erit quantitas attritus in vna reuolutione $=\frac{Quy}{ee}.\frac{KV}{2\pi y}=\frac{Qu}{2\pi ee}.KV$, vbi $2\pi y$ peripheriam totius circuli denotat. Necesse ergo est, vt summa harum expressionum $\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM+\frac{Qu}{2\pi ee}.KV$ sit quantitas constans, quae statuatur $=\frac{Pu}{\pi\pi a}.\frac{\pi}{2}$. At posita recta OD ad AO perpendiculari, ob arcum LMK $=\frac{\pi}{2}y$, erit haec constans $=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LMK$; ita vt habeatur haec aequatio:

$$\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM+\frac{Qu}{2\pi ee}.KV=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LMK$$

quae reducitur ad hanc: $\frac{Q}{2ee}.KV=\frac{P}{\pi ay}.MK$.

25. Erit ergo arcus KV $=\frac{2Pee}{Q\pi ay}.MK$, existente OK $=y$; vnde porro area spatii DOHVI $=ee$ definiri potest. Cum enim sit MK $=y\text{A sin.}\frac{y}{2a}$, habebitur KV $=\frac{2Pee}{Q\pi a}\text{A sin.}\frac{y}{2a}$; hincque areae elementum $KV.dy=\frac{2Pee}{Q\pi a}dy.\text{A sin.}\frac{y}{2a}$, cuius integrale est

$$\frac{2Pee}{Q\pi a}(y\text{A sin.}\frac{y}{2a}+\sqrt{(4aa-yy)}-2a)$$

quod per totum frustum extensum ponendo $y=2a$ praebet aream totam

$$ee=\frac{2Pee}{Q\pi a}(2a.\frac{\pi}{2}-2a)=\frac{2Pee}{Q\pi}(\pi-2)$$

vnde quidem non area ee, sed pondus apprimens Q, ita definitur, vt sit $Q=\frac{2P(\pi-2)}{\pi}$; vnde siue ponatur $\pi=\frac{22}{7}$

fiue $\pi = \frac{355}{113}$, dat $Q = \frac{8}{11}P$, feu $Q = \frac{258}{355}P$, vnde conftat, quanto pondere fruftum vitri catino apprimi debeat.

26. Ad figuram autem frufti vitrei inueniendam quia inuenimus $\frac{2Pee}{Q\pi} = \frac{ee}{\pi - 2}$, habebimus hanc aequationem $KV = \frac{ee}{(\pi - 2)ay}.MK$, vbi ee pro lubitu affumere licet. Statuamus ergo $ee = (\pi - 2)aa$, vt area frufti fit ad aream lentis, vt $\pi - 2$ ad π, feu 4 ad 11, fiatque $KV = \frac{a}{y}.MK$. Ad quam aequationem conftruendam ducto per centrum lentis C quadrante CHX, quem recta OM fecet in T, erit $TX = \frac{a}{y}.MK$, ideoque $KV = XT$. Vbique ergo fumatur arcus KV aequalis arcui XT, et fpatium curua OHVI et radio OD inclufum dabit figuram frufti DOHVI, feu in fitu lentem non impediente E$Obvi$, quod pondere $Q = \frac{8}{11}P$ catino appreffum defideratum praeftabit effectum, vt figura catini non deformetur.

27. Etfi conftructio lineae $Obvi$ eft facilis, dum vbique arcus kv arcui xt aequalis eft capiendus, conftituto femicirculo OmD femiffi lentis aequali, tamen conueniet, aequationem huius curuae ad coordinatas orthogonales faltem proxime reduci. Sit igitur $Op = p$ et $pv = q$, exiftente $Ok = y = \sqrt{(pp + qq)}$ et $Ox = a$, et vocetur angulus $kOm = A\,\text{fin.}\frac{y}{2a} = \Phi$, vt fit $y = 2a$ fin. Φ, vnde ob $kv = xt = a\Phi$, hincque angulum $kOv = \frac{a\Phi}{y} = \frac{\Phi}{2\,\text{fin.}\Phi}$ reperietur:

$$p = 2a\,\text{fin.}\Phi\,\text{cof}\frac{\Phi}{2\,\text{fin.}\Phi} \text{ et } q = 2a\,\text{fin.}\Phi\,\text{fin.}\frac{\Phi}{2\,\text{fin.}\Phi},$$

vnde

vnde approximando colligitur

$$q = 0,5463 p + 0,03513 \cdot \frac{p^3}{aa}.$$

Initio ſcilicet circa O haec curua abit in rectam ad OE angulo 28°, 39′, cuius arcus ſemiſſi radii aequatur inclinato; pro puncto extremo autem i fiunt coordinatae $p = q = a\sqrt{2}$.

28. Facillime autem huius fruſti figura in praxi hoc modo delineabitur: Radio OE diametro lentis aequali deſcribatur circulus, in quo primo capiatur arcus $Ei = 45°$, tum vero arcus En ſemiſſi rectae OE aequalis, qui continebit quaſi 28°, 39′: Deinde centro O radio dimidio Oc deſcribatur arcus cg continens 30°, ac ducta recta On linea quaeſita circa O cum hac recta confundetur, tum vero ab ea paulatim recedens per punctum g tranſibit, indeque proferetur ita in punctum i, vt hic circulum Ei tangat. Fruſtum ergo vitri terminandum eſt primo recta OE, tum arcu Ei, ac denique linea curua Ogi oſtenſo modo praeſcripta: hocque vitrum catino appreſſum pondere $Q = \frac{8}{11}P$, dum P eſt pondus, quo lens ei apprimitur, impediet catini deprauationem. Tab. V. Fig. 2.

29. Hic modus figuram catini intemeratam conſeruandi in vſum vocari nequit, niſi lens ita detineatur, vt eius ora ad centrum catini vsque pertingat. Si enim a lente centrum catini plane non attereretur, quoniam etiam a fruſto vitri, quod catino immotum

incumbere aſſumo, nullum attritum pateretur, nihil inde abraderetur, neque ergo deprauatio eius caueri poſſet. Quae eſt cauſa, cur hic lentem vsque ad catini centrum O porrigi aſſumſerim. Caeterum cum tam lentis centrum C ope ſtyli, quam totum vitri fruſtum perpetuo in eodem loco teneri debeat, artifex ſtrenuus ope ſimplicis mechaniſmi haud difficulter hoc exequetur, ſimulque efficiet, vt cum lens dato pondere P catino apprimatur, fruſtum vitri debito pondere Q, quod ad illud ſit vt 8 ad 11, ſit oneratum. Hocque pacto lentibus praeſcripta figura induci poterit, dum inter operandum figura catini non deprauatur.

DE

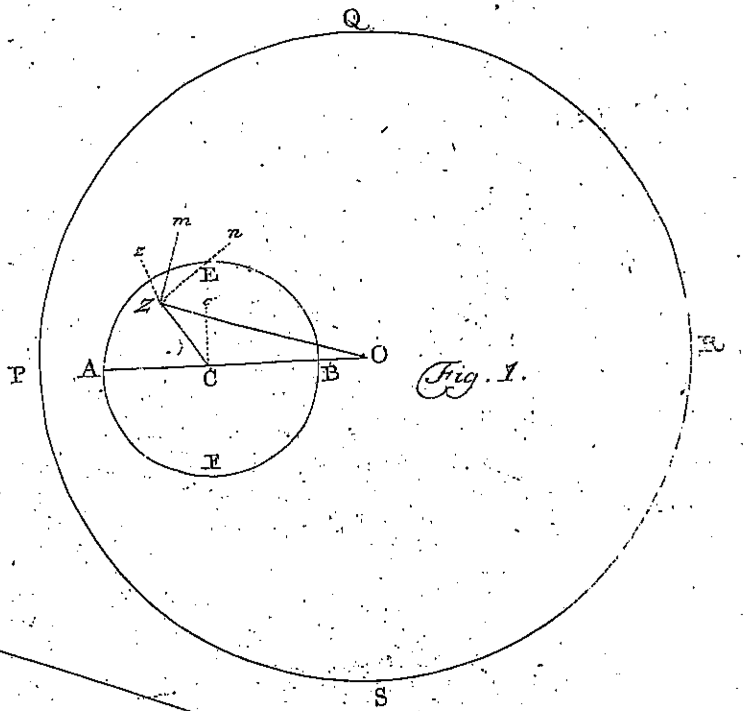

Fig. 1.

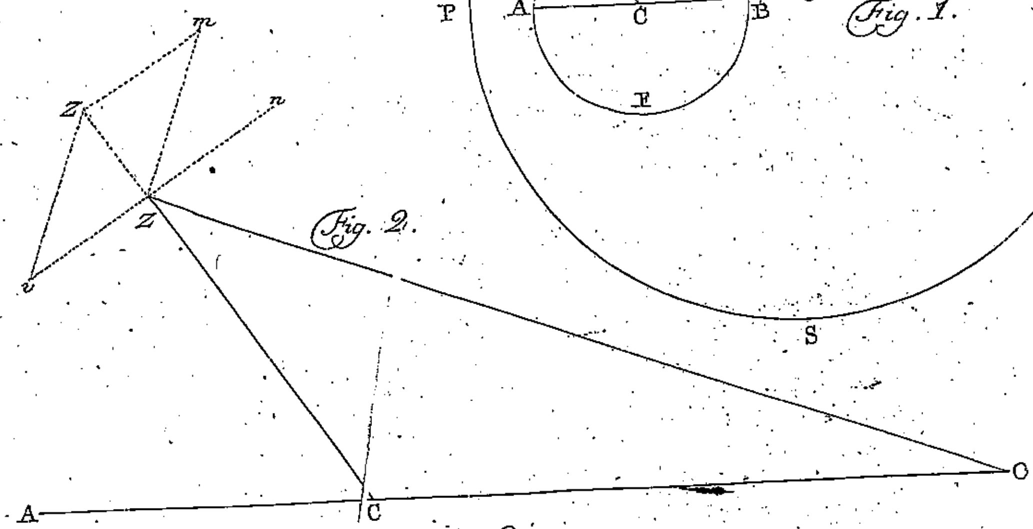

Fig. 2.

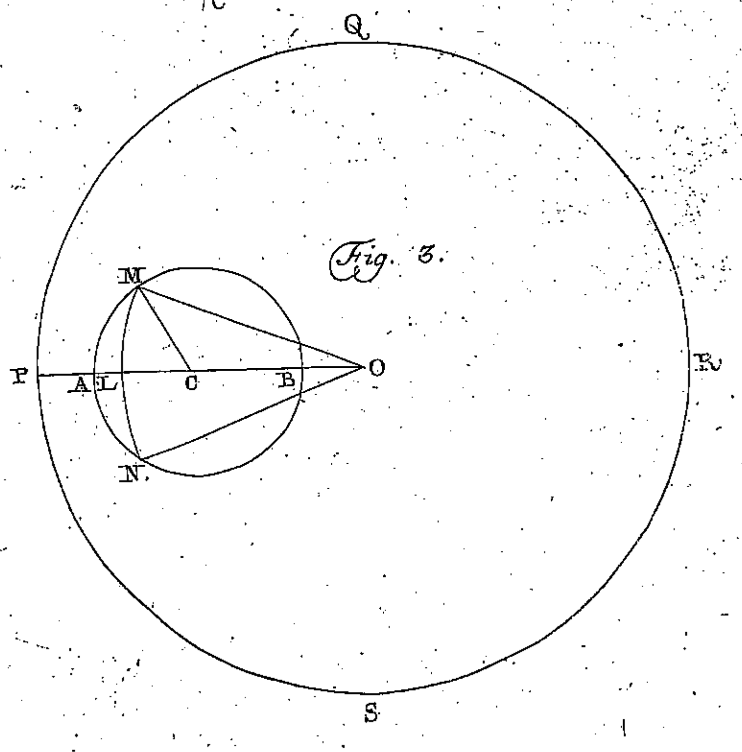

Fig. 3.

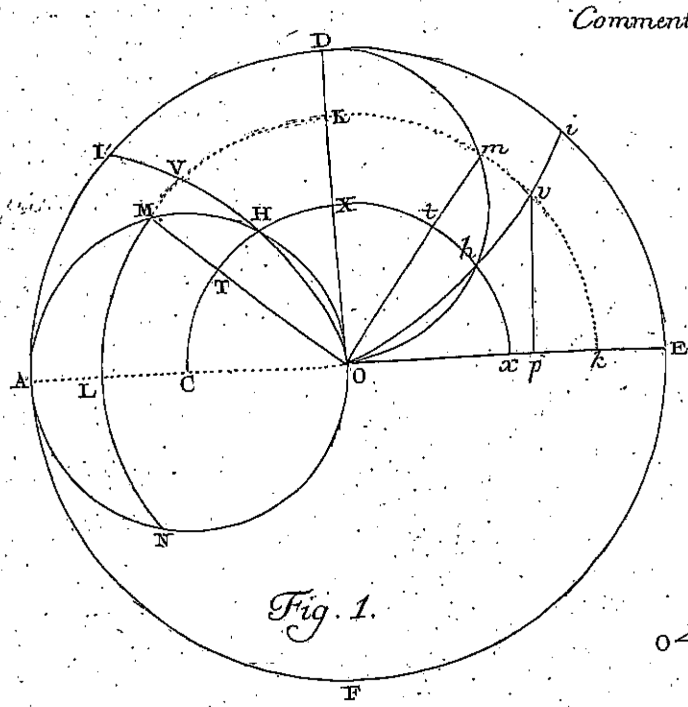

Fig. 1.

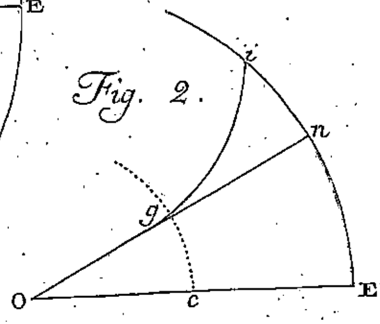

Fig. 2.

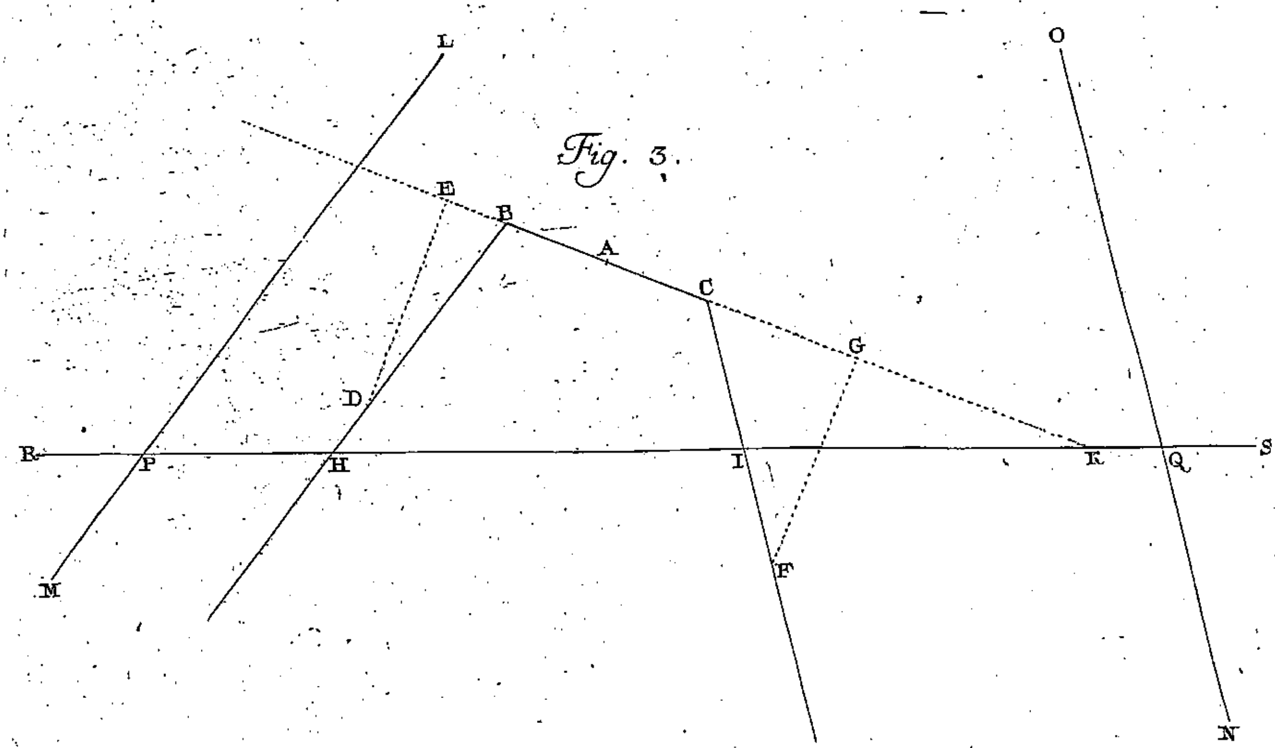

Fig. 3.