



1763

# De motu et attritu lentium dum super catinis poliuntur

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu et attritu lentium dum super catinis poliuntur" (1763). *Euler Archive - All Works*. 278.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/278>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE  
MOTV ET ATTRITV LENTIVM  
DVM SVPER CATINIS POLIVNTVR.

Auctore

L. E V L E R O.

I.

**I**nter plures modos, quibus lentes super catinis, siue immotis, siue in gyrum actis, atteri ac poliri solent, hic eum tantum ad examen reuocare constitui, quo catino vniformiter in gyrum acto, lens ope styli eius centro applicati ad catinum apprimitur, quo fit, vt ipsa lens circa stylum libere mobilis a catini motu in gyrum agatur, et quatenus eius motus a motu catini discrepat, eidem atteratur, sicque politura perficiatur. Quoniam hac ratione arbitrio artificis nihil aliud praeter locum, vbi lentem super catino detineat, relinquitur. Hic modus lentes poliendi prae reliquis geometricae inuestigationis capax videtur, dum contra, vbi totus lentis motus ab arbitrio artificis pendet, vix quidquam definire licet.

Tab. IV. 2. Sit igitur PQRS catinus ope machinae rotatoriae certa quadam velocitate vniformiter in gyrum agendus, circa eius axem O, quem verticalem assumo, vt motus catini in plano horizontali absoluetur. Lens autem AEBF ope styli eius centro C applicati ita con-

continuo ad catinum apprimatur, ut punctum  $C$  immotum seruetur, lens autem circum id libere reuoluatur. Catino iam in gyrum acto, ipsa lens circa stylum in motum abripietur, moxque uniformiter circumagetur, cuius motus celeritatem ante definiendum oportet, quam effectus attritus, seu celeritas, qua singula lentis puncta super catino teruntur, assignari queat.

3. Denotet  $u$  celeritatem gyrationis catini, ita ad distantiam quandam fixam a centro  $O$ , unitate indicandam relatam, ut in distantia a centro quacunque  $z$  sit celeritas vera  $=uz$ , cuius quadratum  $uuzz$ , ut mensuras certas obtineamus, exprimat altitudinem huic celeritati debitam: hac ergo littera  $u$  motus catini proprius determinatur, quippe qua constat, punctum quodcunque catini  $Z$ , cuius distantia ab axe  $O$  fuerit  $OZ = z$ , ita moueri, ut eius directio sit recta  $Zm$  ad  $OZ$  normalis, celeritas vero  $=uz$ , quae tanta est intelligenda, quanta ex lapsu grauis per altitudinem  $uuzz$  acquiri solet; quandoquidem catinus in plagam  $PQRS$  circumagitur; si enim in plagam contrariam circumageretur pari celeritate, celeritas quidem puncti  $Z$  foret eadem, sed directio  $Zm$  contraria esset statuenda.

4. Quod porro ad lentem attinet, primo eius diameter  $AB$  in computum est ducendus, cuius semissis sit  $CA = CB = a$ . Deinde plurimum refert, in quanta distantia eius centrum  $C$  a centro catini  $O$  ope styli fixum detineatur, quae distantia sit  $OC = c$ . Tum vero si de effectus attritus iudicare velimus, vis qua

ea ad catinum apprimitur, rationem haberi conuenit, quae vis aequetur ponderi  $=P$ . Cum autem tanta vi tota facies lentis inferior catino apprimatur, vis quae quaelibet eius portio atque adeo elementum apprimatur, ex eius ratione ad totam faciem erit colligenda; siquidem assumimus, lenti iam catini figuram esse indutam, totumque negotium sola politura esse absolvendum.

5. His quae circa lentem sunt nota constitutis, inuestigandus est eius motus, qui ob centrum  $C$  fixum alius esse nequit, nisi gyratorius circa idem centrum, et qui inter quaerenda primum locum obtinet. Statim quidem patet, lentem ob motum catini, quem in plagam  $PQRS$  fieri pono, in similem plagam  $AEBF$  abreptum iri; sed celeritas huius motus etiam nunc est incognita. Sit ergo simili modo huius motus celeritas gyratoria  $=v$ , ita ad distantiam fixam  $=r$  relata, ut puncti lentis cuiuscunque  $Z$ , cuius distantia ab eiuscentro  $C$  fuerit  $CZ=x$ , celeritas vera futura sit  $=vx$ , directione existente  $Zn$  ad  $CZ$  normali. Tum vero ut punctum  $C$  immotum teneatur, quoniam motus catini totam lentem auerere conatur, stylo praeterea vim contranitentem applicatam esse oportet, cuius quantitas pariter erit inuestiganda.

6. Quo nunc feliciter haec, quae sunt incognita, definire liceat, ante omnia motum respectuum cuiusque lentis puncti ratione catini explorari conuenit, in quo motu verus attritus consistit. Ac primo quidem

attritus centri lentis C super catino per se est manifestus; cum enim ob. distantiam  $OC = c$ , punctum catini C celeritate  $= cu$  in directione Cc ad OC normali feratur, lentis autem punctum C quiescat, haec ipsa  $cu$  erit celeritas attritus; quae ergo eo maior est, quo longius centrum lentis Ca centro catini O detineatur. Evidens autem est, effectum politurae ab hac attritus celeritate ita pendere, ut partim illi ipsi, partim pressioni futurus sit proportionalis.

7. Celeritas attritus autem omnium reliquorum lentis punctorum super catino, non solum ab huius, sed etiam a lentis motu pendet, ad quam investigationem figuram secundam maiori specie expressam accomodemus. Sit ergo pro puncto lentis quocunque Z Tab. IV. distantia  $CZ = x$  et angulus  $ACZ = \Phi$ , ad CZ Fig. 2. normaliter iungatur  $Zn = vx$  motum verum puncti lentis Z exhibens. Catini autem punctum subiectum Z, posita distantia  $OZ = z$ , feretur in directione  $Zm$  ad OZ normali celeritate  $= uz$ . Sumta ergo  $Zm = uz$ , si catino et lenti simul motum imprimi concipiamus secundum directionem  $Zv$ , ipsi  $Zn$  oppositam, et celeritate  $Zv = vx$ ; tum vero completo parallelogrammo  $mZvz$  ducamus diagonalem  $Zz$ , res eodem recabit, ac si puncto lentis Z quiescente catinus sub eo promoveatur in directione  $Zz$  celeritate  $= Zz$ , quae ergo erit celeritas attritus puncti Z.

8. Cum autem sit  $OC = c$ ;  $CZ = x$ , et angulus  $ACZ = \Phi$ , erit  $OZ = z = \sqrt{cc + xx + 2cx \cos. \Phi}$ . Deinde posito angulo  $COZ = \omega$ , erit  $\text{tang. } \omega = \frac{x \sin. \Phi}{c + x \cos. \Phi}$   
 Tom. VIII. Nou. Comm. K k et

et  $\sin. \omega = \frac{x \sin. \Phi}{z}$ : porro ang.  $CZO = \Phi - \omega$ , et  
 $\text{tang.}(\Phi - \omega) = \frac{c \sin. \Phi}{x + c \cos. \Phi}$ , atque  $(\Phi - \omega) = \frac{c \sin. \Phi}{z}$ . In  
 triangulo autem  $Zyz$  est  $Zy = vx$ ;  $zy = Zm = uz$   
 et angulus  $Zyz = CZO = \Phi - \omega$ ; vnde colligitur  
 $Zz = \sqrt{(v^2xx + u^2zz - 2uvxz \cos.(\Phi - \omega))}$ .

Inde vero colligitur  $z \cos.(\Phi - \omega) = x + c \cos. \Phi$ , quo  
 valore substituto fit

$$Zz = \sqrt{(v^2xx + u^2zz - 2uvxz - 2cu vx \cos. \Phi)} \text{ seu}$$

$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x \cos. \Phi + (u-v)^2xx)}.$$

9. Pro fitu deinde huius lineae  $Zz$ , quae celeri-  
 tatem attritus puncti lentis  $Z$  exprimit, erit primo  
 $CZy$  angulus rectus, tum vero  $\cos. yZz$

$$= \frac{Zz^2 + Zy^2 - zv^2}{z Zz \cdot Zy} = \frac{-(u-v)x - cu \cos. \Phi}{Zz} = \sin. (CZy + yZz)$$

Tab. IV. at  $\sin. yZz = \frac{zv \sin. CZy}{Zz} = \frac{uz \sin. (\Phi - \omega)}{Zz} = \frac{cu \sin. \Phi}{Zz} = -\cos.$   
 Fig. 1.  $(CZy + yZz)$ . Si ergo in fig. 1. lineam  $Zz$  su-  
 perne cum  $CZ$  angulum constituere assumamus, erit

$$\sin. CZz = \frac{(v-v)x + cu \cos. \Phi}{Zz} \text{ et}$$

$$\cos. CZz = -\frac{cu \sin. \Phi}{Zz} \text{ existente}$$

$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x \cos. \Phi + (u-v)^2xx)};$$

vnde patet, si fuerit  $ACZ = \Phi = 0$ , fore  $Zz = cu$   
 $+ (u-v)x$ ; et angulum  $CZz$  rectum, ac si praeterea  
 fit  $x = 0$ , erit vt ante celeritas attritus centri lentis  
 $C = cu$ .

10. Iam quaestio huc redit, quamnam habitura  
 sit rationem celeritas gyratoria lentis  $v$  ad celeritatem  
 gyratoriam catini  $u$ ? ad quam resoluendam duae pa-  
 tent viae, altera indirecta ex principio minimae actio-  
 nis

nis petita, altera directa ex principiis motus negotium conficiens. Secundum priorem nullum est dubium, quin motus lentis ita comparatus sit futurus, ut attritus totus fiat minimus. Quare si in  $Z$  elementum superficiem lentis concipiatur, erit id ob variabilitatem tam distantiae  $CZ = x$ , quam anguli  $ACZ = \Phi$ , ita expressum  $= x dx d\Phi$ , quod per celeritatem attritus  $Zz$  multiplicatum, dabit eius attritus quantitatem

$$x dx d\Phi \sqrt{ccuu + 2cu(u-v)x \cos. \Phi + (u-v)^2 xx}$$

cuius integrale per totam lentem extensum minimum esse debet.

II. Producta recta  $ZC$  ultra  $C$ , concipiatur par elementum superficiem  $x dx d\Phi$  ad alteram partem rectae  $AB$ , et quia hic fit vel  $x$  vel  $\cos. \Phi$  negativum, eius quantitas attritus erit

$$x dx d\Phi \sqrt{ccuu - 2cu(u-v)x \cos. \Phi + (u-v)^2 xx}$$

Collectis his ambobus elementis, evidens est, eorum summam fieri minimam, si sumatur  $v = u$ , id quod utraque formula irrationali in seriem conuertenda facillime patet, dum additione potestates impares ipsius  $x$ , ac proinde etiam ipsius  $u-v$ , se destruant, unde minimum ratione celeritatis  $v$  inuestigando manifesto elicitur  $v = u$ , quod cum de omnibus elementorum sibi hoc modo oppositorum paribus valeat, sequitur etiam, totius lentis attritum minimum esse futurum, si fuerit  $v = u$ , ideoque lens aequè celeriter in gyrum agatur atque catinus, ita ut ambo aequalibus temporibus suas revolutiones absoluant.

12. Verum etiam via directa ad eandem conclusionem manuducet. Cum enim experimentis constet, frictionem a sola pressione pendere, neque celeritatem attritus quicquam, siue ad augendam, siue diminuendam frictionem, conferre, elementum superficiei  $x dx d\Phi$  in  $Z$  vi quadam ipsi proportionali, ob pressionem vbique aequalẽ, in directione  $Zz$  sollicitabitur; quae vis ergo sit  $= ax dx d\Phi$ ; et quia centrum lentis  $C$  immotum tenetur, erit huius respectu momentum illius vis  $= ax dx d\Phi. CZ \sin. CZz$ .

$$\frac{ax dx d\Phi. x((u-v)x + cu \cos \Phi)}{\sqrt{(ccuu + 2cu((u-v)x \cos \Phi + (u-v)^2 xx)}}$$
 Ex elemento autem opposito, vti supra, sumto, orietur momentum

$$\frac{ax dx d\Phi. x((u-v)x - cu \cos \Phi)}{\sqrt{(ccuu - 2cu((u-v)x \cos \Phi + (u-v)^2 xx)}}$$

13. Nunc autem, quia motus lentis iam ad vniuersitatem compositus statuitur, necesse est, vt horum momentorum summa vniuersa ad nihilum redigatur, quod cum fiat in binis elementis oppositis, si capiatur  $v = u$ , idem pro tota lente valebit. Idem etiam per integrationem solito more elucet, posito enim  $v = u$ , ex elemento  $Z$  oritur momentum  $= ax dx d\Phi \cos. \Phi$ , vnde pro sectore elementari  $CZ$  colligitur momentum  $= \frac{1}{2} ax^2 d\Phi \cos. \Phi$ , et pro toto ad marginem vsque extenso  $= \frac{1}{2} aa^2 d\Phi \cos. \Phi$ , cuius denuo integrale est  $= \frac{1}{2} a^3 \sin. \Phi$ , quod per totam lentem extensum, donec fiat  $\Phi = 360^\circ$ , manifesto in nihilum abit, quod non fieret, si non effet  $v = u$ . Vicissim ergo altera methodus per alteram confirmatur, et cum principium minimi per se sit evidens, patet simul



simul alterum, quo frictio a sola pressione pendere assumitur, veritati omnino esse consentaneum.

14. Definita iam celeritate  $v = u$ , non difficile erit determinare vim, cui stylus centro lentis C applicatus, praeter pressionem P, reniti debet, ne centrum lentis C a motu catini abripiatur. Cum enim sit  $v = u$ , erit  $Zz = cu$ , sin CZz = cos.  $\Phi$  et cos. CZz = -sin.  $\Phi$ , ita vt sit CZz =  $90^\circ + \Phi$ , et  $zZn = \Phi = ACZ$ . Ob frictionem autem vrgetur elementum superficiei lentis  $x dx d\Phi$  secundum directionem Zz vi constante; et quia tota superficies, quae est  $= \pi a a$ , denotante  $\pi$  peripheriam circuli, cuius diameter est  $= 1$ , apprimitur vi P, elementum illud apprimetur vi  $= \frac{P x dx d\Phi}{\pi a a}$  cuius parti quasi tertiae frictio aequatur. Scribamus autem generalius  $\lambda$  pro parte tertia, ita vt elementum in Z secundum Zz sollicitetur vi  $= \frac{\lambda P x dx d\Phi}{\pi a a}$ , quae secundum directionem CZ praebet vim  $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi}{\pi a a}$  et secundum directionem ad illam normalem vim  $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \cos. \Phi}{\pi a a}$ .

15. At per ea, quae supra ostendimus, omnes istae vires normales se destruunt, vnde stylus sustinere debet alteras illas vires secundum CZ agentes, quae sunt  $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi}{\pi a a}$ , et quasi ipsi centro lentis C secundum directionem CZ applicatae essent, concipi possunt. Quaelibet vero huiusmodi vis resoluetur secundum directiones fixas CA et Cc, eritque vis secundum CA  $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi \cos. \Phi}{\pi a a}$ , et vis secundum Cc  $= \frac{\lambda P x dx d\Phi \sin. \Phi^2}{\pi a a}$ . Illa primum integrata, posito

K k 3

$x = a$

$x = a$ , dat  $\frac{\lambda}{2\pi} P d\Phi \sin. \Phi \cos. \Phi = \frac{\lambda}{4\pi} P d\Phi \sin. 2\Phi$ , cuius porro integrale est  $= \frac{\lambda}{8\pi} P (1 - \cos. 2\Phi)$ . Posito nunc pro tota lente  $\Phi = 360^\circ$ , haec vis secundum CA evanescit. Altera vis secundum Cc semel integrata dat  $\frac{\lambda}{2\pi} P d\Phi \sin. \Phi^2 = \frac{\lambda}{4\pi} P d\Phi (1 - \cos. 2\Phi)$ , cuius sequens integrale est  $= \frac{\lambda}{4\pi} P (\Phi - \frac{1}{2} \sin. 2\Phi)$ , et posito  $\Phi = 360^\circ = 2\pi$  prodit vis secundum Cc  $= \frac{1}{2} \lambda P$ .

16. Ob motum ergo catini stylus sustinet vim  $= \frac{1}{2} \lambda P$  secundum directionem Cc, quam artifex continuo vi contraria et aequali renitendo destruere debet, siquidem centrum lentis immotum tenere velit. Quare si  $\lambda = \frac{1}{2}$ , haec vis aequatur sextae parti pressionis totius P, qua lens catino apprimitur, cui conclusioni per se verae vnicus casus aduersatur, quo centrum lentis C ipsi centro catini O apprimitur; tum enim, quia lens pari motu cum catino circumagitur, nullusque attritus exercetur, stylus etiam nullam vim sustinet. At huiusmodi exceptio semper, quando de frictione agitur, admitti debet; cum enim in motu tardissimo frictio aequae sit magna atque in celerrimo, motu tamen plane evanescente frictio quasi subito evanescit. Neque ergo hoc incommodum tanquam vitium calculo est imputandum.

17. Cum duplici demonstratione euictum sit, esse  $v = u$ , idem etiam experientia egregie confirmari deprehendi; in quacunque enim catini loco lens detinebatur, eius reuolutiones semper exactissime cum reuolutionibus catini conueniebant, neque vix vllam inaequali-

qualitatem, ne in motus quidem initio, obseruare licuit. Vnde patet statim ab initio motus reuolutiones lentis se ad eam aequalitatem componere, quam calculus ostendit; quin etiam motu catini modo intenso, modo remisso, lens eandem inaequalitatem sequi obseruata est. Hic ergo insigne cernitur specimen foccundissimi illius principii minimae actionis, quod eo magis omni attentione dignum videtur, quod etiam in motu per frictionem impedito tam felici cum successu adhiberi potuerit, cum hactenus eius usus tantum in motibus liberis a viribus veri nominis, quibus frictionem vix annumerare licet, perturbatis, sit ostensus.

18. Quoniam igitur ex eo, quod inuenimus  $v = u$ , sequitur esse celeritatem  $Zz = cu$ , patet in eodem lentis situ omnia eius puncta aequali celeritate atteri, ideoque pari vi laeuigari ac poliri, quo ipso hic mechanismus non mediocriter reliquis antecellit, cum alias alia lentis puncta fortius, alia debilius, atteri soleant. Praeterea vero hic perspicitur, celeritatem attritus rationem sequi interualli  $OC = c$ , ita vt si centrum lentis C centro catini O applicetur, nullus plane attritus sit futurus; quo longius autem interuallum OC capiatur, eo maiorem fore attritum, idque in eadem ratione. Quam ob rem omnino necesse est, vt catini magnitudo multum superet magnitudinem lentis, quae regula etiam ab artificibus probe obseruari solet.

19. Hic igitur ingens conspicitur discrimen inter frictionem et attritum, quae duae res vulgo confunduntur solent.

solent. Friccio enim, siue motus sit tardior, siue velocior, perpetuo manet eadem. cum attritus eiusque effectus, qui in abrasione est constituendus, maxime a velocitate pendent, ex quo attritus quantitatem commodissime metiemur eius celeritate  $Zz$  in pressionem ducta. Quare si in superficie lentis consideremus elementum  $dZ$ , quod quia catino apprimitur vi  $= \frac{PdZ}{\pi aa}$ , teriturque celeritate  $= cu$ , erit quantitas attritus  $= \frac{PcudZ}{\pi aa}$ . Hinc ergo lens eo promptius laeuigabitur et polietur, quo maior fuerit quantitas  $\frac{Pcu}{\pi aa}$ ; quae proportionalis est 1<sup>o</sup>, vi  $P$ , qua lens catino apprimitur, 2<sup>o</sup>, celeritati  $u$ , qua catinus in gyrum agitur, 3<sup>o</sup>, interuallo  $OC = c$  quo centrum lentis distat a centro catini, et 4<sup>o</sup>, denique reciproce superficiei lentis, ita vt quo lens fuerit maior, eo tardius laeuigatio perficiatur.

20. Hic autem non tantum ad lentis attritum est respiciendum, sed quia catinus etiam atteritur, eiusque superficies abraditur, nisi vbique aequaliter radatur, mox eius figura alteratur; vnde fit, vt deinceps etiam lenti figura a proposita aberrans inducatur. Quam ob rem necesse est, vt etiam attritus ipsius catini accuratius inuestigetur. Primo autem patet omnia catini puncta ab eius centro aequae remota quauis reuolutione aequaliter atteri. Consideremus ergo catini punctum quodcunque  $L$  a centro catini  $O$  distans interuallo  $OL = y$ , quod vna reuolutione tamdiu tantum atteritur, quamdiu per angulum  $MON$  profertur. Cum igitur attritus momentaneus sit  $= \frac{Pcu}{\pi aa}$ , vna reuolutione integra totus attritus censendus erit  $= \frac{Pcu}{\pi aa} \cdot \frac{\text{ang. } MON}{360^\circ}$ , siquidem puncti

Tab. IV.

Fig. 3.

puncti lentis L quantitas attritus vna reuolutione exprimitur per  $\frac{Pcu}{\pi aa}$ .

21. Cum nunc sit  $CM=CA=a$ ;  $OC=c$ ;  $OM=OL=y$ , erit  $\cos. LOM = \frac{cc+yy-aa}{2cy}$ , vnde, ob  $\pi=180^\circ$ , erit attritus puncti catini L durante vna reuolutione  $=\frac{Pcu}{\pi aa}$ . A  $\cos. \frac{cc-aa+yy}{2cy}$ , quae expressio tantum pro iis catini punctis valet, quorum distantia a centro O intra limites  $AO=c+a$  et  $BO=c-a$  continetur, quoniam tam in vtroque limite, quam extra eos, attritus euanescit. Hic autem notandum est, si fuerit  $c < a$ , et  $y=a-c$ , fore  $A \cos. \frac{cc-aa+yy}{2cy} = 180^\circ = \pi$ , seu haec catini puncta perpetuo atteri, quod multo magis valebit, si fuerit  $y < a-c$ , hoc scilicet casu spatium circulare circa centrum catini O, cuius radius est  $=a-c$ , perpetuo attritum patietur, et quidem aequalem ei, cui lens est subiecta. Cuiusmodi attritu si totus catinus afficeretur, non esset metuendum, vt eius figura deformaretur.

22. Cum autem solum spatium annulare catini lenti se applicans atteratur, quamdiu quidem lens in eodem loco detinetur, eius tantum figura alterationem patitur, eamque non aequabilem, vnde sphaericitas eius tandem vehementer mutabitur, lentique proinde figura a scopo non mediocriter aberrans imprimetur. Huic incommodo artifices remedium afferre conantur, dum lentem modo propius admouent ad centrum catini, modo ab eo longius remouent, quo pacto quidem cati-

num circa centrum atterunt, sed circa marginem attritus multo minor manet, ita vt ne hoc quidem modo catinus per totam superficiem aequaliter radatur. Deinde vero etsi hoc modo attritus non tam inaequabilis fit, quam si lens iugiter in eodem loco detineretur, tamen is non certa quadam lege distribuitur, vnde fit, vt figura catini a sphaerica mox notabiliter recedat, folique fortunae fit tribuendum, si quandoque bonae indolis lentes hoc modo elaborentur.

23. Ad catini autem attritum aequabilem reddendum optimum remedium videtur, si frustum quoddam vitri praeter lentem super catino atteratur, cuius figura et pressio ita sit comparata, vt singula catini puncta, tam a lente, quam ab isto frusto, aequabilem attritum patiantur. Quo huius frusti figura simplicior prodeat, ponamus interuallum  $BO$  euanescere, seu esse  $OC = c = CB = a$ , catinique radium  $OA$  diametro lentis  $2a$  esse aequalem, quandoquidem, si lens perpetuo in eodem loco detineatur, superfluum foret, catinum amplio-rem efficere. Sit igitur  $ECbi$  figura illius frusti vitrei quaesita, quod continuo czcino in eodem loco applicatum detineatur, eique pondere  $= Q$  apprimatur, cuius area sit  $= ee$ . Quoniam nihil refert, quo in loco hoc frustum applicemus, concipiamus id in situ  $DOHVT$ .

24. Cum igitur catini puncta  $L$  a centro  $O$  interuallo  $OL = y$  distantia ob  $c = a$  a lente attritum pati-

patiantur, cuius quantitas vna reuolutione est  $= \frac{Pu}{\pi \pi a} A \cos. \frac{y}{2a}$   
 $= \frac{Pu}{\pi \pi a y} \cdot LM$ . Tum vero eadem puncta L sub frusto  
 vitri per arcum VR deferuntur celeritate  $uy$ , et quia  
 pressio in singulis punctis est vt  $\frac{Q}{ee}$ , erit quantitas at-  
 tritus in vna reuolutione  $= \frac{Qu y}{ee} \cdot \frac{KV}{2\pi y} = \frac{Qu}{2\pi ee} \cdot KV$ , vbi  
 $2\pi y$  peripheriam totius circuli denotat. Neceffe ergo  
 est, vt summa harum expressionum  $\frac{Pu}{\pi \pi a y} \cdot LM + \frac{Qu}{2\pi ee} \cdot KV$   
 sit quantitas constans, quae statuatur  $= \frac{Pu}{\pi \pi a} \cdot \frac{\pi}{2}$ . At po-  
 sita recta OD ad AO perpendiculari, ob arcum LMK  
 $= \frac{\pi}{2} y$ , erit haec constans  $= \frac{Pu}{\pi \pi a y} \cdot LMK$ ; ita vt habea-  
 tur haec aequatio:

$$\frac{Pu}{\pi \pi a y} \cdot LM + \frac{Qu}{2\pi ee} \cdot KV = \frac{Pu}{\pi \pi a y} \cdot LMK$$

quae reducitur ad hanc:  $\frac{Q}{2ee} \cdot KV = \frac{P}{\pi a y} \cdot MK$ .

25. Erit ergo arcus  $KV = \frac{2Pee}{Q\pi a y} \cdot MK$ , existente  
 $OK = y$ ; vnde porro area spatii DOHVI  $= ee$  defi-  
 niri potest. Cum enim sit  $MK = y A \sin. \frac{y}{2a}$ , habebi-  
 tur  $KV = \frac{2Pee}{Q\pi a} A \sin. \frac{y}{2a}$ ; hincque areae elementum  
 $KV \cdot dy = \frac{2Pee}{Q\pi a} dy \cdot A \sin. \frac{y}{2a}$ , cuius integrale est

$$\frac{2Pee}{Q\pi a} (y A \sin. \frac{y}{2a} + \sqrt{(4aa - yy)} - 2a)$$

quod per totum frustum extensum ponendo  $y = 2a$   
 praebet aream totam

$$ee = \frac{2Pee}{Q\pi a} (2a \cdot \frac{\pi}{2} - 2a) = \frac{2Pee}{Q\pi} (\pi - 2)$$

vnde quidem non area  $ee$ , sed pondus apprimens  $Q$ , ita  
 definitur; vt sit  $Q = \frac{2P(\pi - 2)}{\pi}$ ; vnde siue ponatur  $\pi = \frac{22}{7}$

sive  $\pi = \frac{555}{113}$ , dat  $Q = \frac{8}{11}P$ , seu  $Q = \frac{258}{335}P$ , vnde constat, quanto pondere frustum vitri catino apprimi debeat.

26. Ad figuram autem frusti vitrei inueniendam quia inuenimus  $\frac{2Pee}{Q\pi} = \frac{ee}{\pi-2}$ , habebimus hanc aequationem  $KV = \frac{ee}{(\pi-2)ay} MK$ , vbi  $ee$  pro lubitu assumere licet. Statuamus ergo  $ee = (\pi-2)aa$ , vt area frusti sit ad aream lentis, vt  $\pi-2$  ad  $\pi$ , seu 4 ad 11, fiatque  $KV = \frac{a}{y} MK$ . Ad quam aequationem construendam ducto per centrum lentis C quadrante CHX, quem recta OM secet in T, erit  $TX = \frac{a}{y} MK$ , ideoque  $KV = XT$ . Vbique ergo sumatur arcus KV aequalis arcui XT, et spatium curva OHVI et radius OD inclusum dabit figuram frusti DOHVI, seu in situ lentem non impediante EO*hvi*, quod pondere  $Q = \frac{8}{11}P$  catino appressum desideratum praestabit effectum, vt figura catini non deformatur.

27. Etsi constructio lineae Ob*vi* est facilis, dum vbique arcus kv arcui xt aequalis est capiendus, constituto semicirculo OmD semissi lentis aequali, tamen conueniet, aequationem huius curuae ad coordinatas orthogonales saltem proxime reduci. Sit igitur Op = p et pv = q, existente Ok = y =  $\sqrt{pp + qq}$  et Ox = a, et vocetur angulus kOm = A sin.  $\frac{y}{2a} = \Phi$ , vt sit  $y = 2a \sin. \Phi$ , vnde ob kv = xt = a $\Phi$ , hincque angulum kOv =  $\frac{a\Phi}{y} = \frac{\Phi}{2 \sin. \Phi}$  reperietur:

$$p = 2a \sin. \Phi \cos. \frac{\Phi}{2 \sin. \Phi} \text{ et } q = 2a \sin. \Phi \sin. \frac{\Phi}{2 \sin. \Phi}, \text{ vnde}$$



vnde approximando colligitur

$$q = 0,5463p + 0,03513 \cdot \frac{p^2}{a^2}$$

Initio scilicet circa O haec curua abit in rectam ad OE angulo  $28^\circ, 39'$ , cuius arcus semissi radii aequatur inclinato; pro puncto extremo autem  $i$  fiunt coor-  
dinatae  $p = q = a\sqrt{2}$ .

28. Facillime autem huius frusti figura in praxi Tab. V. hoc modo delineabitur: Radio OE diametro lentis Fig. 2. aequali describatur circulus, in quo primo capiatur arcus  $Ei = 45^\circ$ , tum vero arcus  $En$  semissi rectae OE aequalis, qui continebit quasi  $28^\circ, 39'$ : Deinde centro O radio dimidio Oc describatur arcus  $cg$  continens  $30^\circ$ , ac ducta recta On linea quaesita circa O cum hac recta confundetur, tum vero ab ea paulatim recedens per punctum  $g$  transibit, indeque proferetur ita in punctum  $i$ , vt hic circulum  $Ei$  tangat. Frustum ergo vitri terminatum est primo recta OE, tum arcu  $Ei$ , ac denique line curua  $Ogi$  ostenso modo praescripta: hocque vitrum catino appressum pondere  $Q = \frac{2}{11}P$ , dum P est pondus, quo lens ei apprimitur, impedit catini deprauationem.

29. Hic modus figuram catini intemeratam conseruandi in vsum vocari nequit, nisi lens ita detineatur, vt eius ora ad centrum catini vsque pertingat. Si enim a lente centrum catini plane non attereretur, quoniam etiam a frusto vitri, quod catino immotum

incumbere assumo, nullum attritum pateretur, nihil inde abraderetur, neque ergo deprauatio eius caueri posset. Quae est causa, cur hic lentem vsque ad catini centrum O porrigi assumserim. Caeterum cum tam lentis centrum C ope styli, quam totum vitri frustum perpetuo in eodem loco teneri debeat, artifex strenuus ope simplicis mechanisimi haud difficulter hoc exequetur, simulque efficiet, vt cum lens dato pondere P catino apprimatur, frustum vitri debito pondere Q, quod ad illud sit vt 8 ad 11, sit oneratum. Hocque pacto lentibus praescripta figura induci poterit, dum inter operandum figura catini non deprauatur.



