1763

Principia theoriae machinarum

Leonhard Euler

PRINCIPIA
THEORIAE MACHINARVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Primum omnes machinas in duas classes distribui convenit: quarum prima eas complectitur, quae dum in actione versantur, ita uniformiter mouentur, vt omnes eius partes perpetuo motu vniformi ferantur. Ad alteram vero classem eae pertinent machinae, quarum singulae partes in motu suo modo accelerantur, modo retardantur, etiamsi forte tota machina motum vniformem mentiatur.

Prioris classis sunt machinae oneribus eleuandis destinatae, item molae frumentariae, quippe quae dum in actione debita versantur, omnes earum partes iugiter motu vniformi agitantur, ita vt nusquam neque acceleratio, neque retardatio motus, adsit. Pistrina vero, aliaeque machinae, quae tundendo opus conficiunt, quoniam pistilla alternatim attolluntur, ac remittuntur, ad classem posteriorem sunt referendae: quorsum etiam pertinent omnis generis horologia, in quibus cum nullum proprie adsit onus superandum, tota actio in alterna partium acceleratione ac retardatione consumitur. Machinae quoque aquis attollendis destinatae huic classi sunt annumerandae, quoniam cum embola non motu vniformi

formi agitantur, tum etiam ipſi aquae, quae primum fuerat in quiete, motus imprimi debet, ad quod neceſſario acceleratio requiritur. Poſterior ergo claſſis latiſſime patet, atque adeo ſaepe machinas, quae ad priorem pertinere debebant, recipit; id quod earum vitio euenit, quando dentes, quibus rotae ſe mutuo vrgent, non ita fuerint elaborati, vt dum vna motu vniformi gyratur, reliquae pari motu cieantur, ſed quaſi per ſuccuſſiones impellantur. Alio autem loco oſtendi, cuiusmodi figuram dentibus binarum rotarum ſe inuicem trudentium tribui oporteat, vt dum altera motu vniformi circumagitur, alterius quoque motus futurus ſit vniformis. Quam neceſſaria autem haec ſit machinarum diſtinctio, ad earum actionem recte perſpiciendam, mox clarius exponetur.

2. *In Machinis primae claſſis, quae in omnibus partibus motu vniformi feruntur, vis ad earum motum conſeruandum requiſita praeciſe aequalis eſt ei, qua opus eſt ad aequilibrium, ſeu quae reſiſtentiae tantum non ſuperandae par eſt.*

Quae igitur vis aequilibrio producendo ſufficit, eadem motum quantumuis celerem in machina, dummodo fuerit vniformis, conſeruare valet. Hinc ſi machina ponderi 100 librarum eleuando deſtinata ita ſit inſtructa, vt pro aequilibrio opus ſit vi 10 librarum, eadem vis 10 librarum ſufficiet ad idem pondus 100 ℔ celeritate quantumuis magna vniformiter eleuandum. Statim enim ac motus machinae ad vniformitatem eſt perductus, quia ſingulae partes ob inertiam ad hunc mo-

motum conseruandum sunt dispositae, continuatio motus plus non requirit, quam vt resistentia motui aduersans superetur, quae cum eadem sit atque in statu quietis, eadem vis, quae machinam in statu quietis conseruare, eiue motum vel minimum valet, ad motum vniformem conseruandum sufficit. Mirum quidem videbitur et experientiae contrarium, quod celerrimus motus maiori vi non indigeat, quam tardissimus; cum tamen in machinis, vel aqua, vel animalibus actis, nullum sit dubium, quin ad motum velociorem producendum maior aquae copia, maiorue animalium numerus requiratur. Verum his casibus perpendendum est, augendo vel aquae copiam, vel animalium numerum, vim inde ortam non augeri, propterea quod, quo velocius machina mouetur, siue aquae, siue animalium vis in machinam agens minuatur: vnde fit, vt etiamsi pro motu celeriori maior vis non requiratur, tamen maiori siue aquae copia, siue animalium numero sit opus: quod idem de reliquis virium generibus, quae ad machinas momouendas adhiberi solent, est tenendum. Minime igitur nostra propositio, qua motum etiam velocissimum, dummodo fuerit vniformis, maiorem vim non exigere statuimus, quam tardissimum affirmamus, veritati aduersari est censenda, quin potius, vti firmissimis Theoriae principiis innititur, ita quoque experientiae apprime conformis deprehenditur, dummodo quantitatem virium rite aestimare discamus.

3. *Hinc euidens est, si vis machinam sollicitans vel maior fuerit, vel minor ea, quae ad aequilibrium conseruandum requiritur, seu quae ipsi vel minimum motum im-*

imprimere valet, tum motum machinae priori casu accel eratum posteriori vero retardatum iri.

Viciſſim ergo intelligitur, ſi motus machinae debeat accelerari, maiorem vim requiri, quam quae aequilibrio conſeruando ſufficiat: hoc enim caſu non ſolum reſiſtentiam, ſeu vim motui machinae proprie aduerſantem, vinci oportet, ſed etiam ipſi accelerationi inertia tam oneris, quam ſingularum ipſius machinae partium, reluctatur. Quamobrem ſi ex vi data, quae ſuperet eam, qua ad aequilibrium ſuſtinendum opus eſt, motus machinae acceleratus definiri debeat, praeter vim reſiſtentem ſimul inertiae ratio eſt habenda, quae inveſtigatio idcirco proprie ex principiis motus eſt expedienda, dum conſideratio motus vniformis per ſola principia ſtatica, ſeu aequilibrii, perfici poteſt. Vnde fit, vt ſi accelerationem cuiuspiam machinae definire velimus, in calculos plerumque admodum moleſtos prolabamur, dum motus vniformis facillime ad calculum reuocatur. Similis eſt ratio retardationis motus, quae oritur, ſi vis ſollicitans minor fuerit ea, quam aequilibrii conſeruatio exigit: tum enim vis reſiſtentiae, motui machinae reluctans, quatenus vim ſollicitantem ſuperat, in retardationem motus impenditur; cuius accurata explicatio pariter ex motus principiis eſt petenda. Quando ergo machina alternatim motu accelerato et retardato agitatur, tuto concludere poſſumus, vim ſollicitantem alternatim maiorem minoremque eſſe ea, quae ad motum vniformem eſſet neceſſaria: difficillimum autem plerumque erit ipſam accelerationem et retardationem aſſignare. Interim tamen ſine dubio pronunciare licet, ſi omnes

 illae

illae vires modo maiores, modo minores, ad mediam quandam vim reuocentur, hanc minorem non esse futuram ea vi, quae ad motum vniformem requireretur; si modo acceleratio et retardatio vtrinque aeque a motu vniformi discedant.

4. *In machinis prioris classis, quae motu vniformi agitantur, productum ex vi sollicitante in celeritatem, qua incedit, aequale est producto ex vi resistente in celeritatem, qua promouetur.*

Haec propositio sequitur ex principio vniuersali aequilibrii, quo constat tum binas vires contrarias machinae cuicunque applicatas esse in aequilibrio, cum impresso machinae vel minimo motu vires fuerint reciproce vt spatia percursa, seu vti celeritates; hinc enim producta vtriusque vis in suam celeritatem fient inter se aequalia. Ostendimus autem, in motu machinarum vniformi ad resistentiam vincendam maiorem vim non requiri, quam in statu aequilibrii: vnde, cum motus machinae tam vi sollicitanti, quam resistenti, certum celeritatis gradum tribuat, si vtraque vis per suam celeritatem multiplicetur, ambo producta necesse est, vt inter se sint aequalia. Verum celeritas, qua vis quaecunque mouetur, secundum directionem eius propriam aestimari debet, in directione scilicet vis mente concipiatur fixum quodpiam punctum, cum quo conferatur punctum, vbi vis machinae applicatur; et ex mutatione momentanea distantiae horum punctorum celeritatem definiri oportet. Quomodo autem quouis casu haec bina producta, quorum aequalitate actio machinae continetur, recte exprimi conueniat, mox accuratius exponetur.

tur. Quod autem ad machinas motu non vniformi operantes attinet, hinc satis est perspicuum, si productum ex vi sollicitante in suam celeritatem maius fuerit, quam productum ex vi resistente in suam celeritatem, quoniam tum vis sollicitans maior est quam motus vniformitas requirit, motum machinae inde accelerari; contra vero, si illud productum hoc fuerit minus, retardari. Ex quo intelligitur, istorum productorum accuratam cognitionem ad actionem omnis generis machinarum definiendam maxime esse necessariam. Quomodocunque ergo machina fuerit composita, hic non tam ipsa compositionis ratio in computum ingreditur, quam ratio celeritatum, quibus cum potentia tum onus, dum machinae motus imprimi concipitur, promouentur: quandoquidem ex hac ratione statim ratio inter potentiam et onus, quam tam motus vniformis, quam acceleratus et retardatus requirit, innotescit.

5. *Momentum effectus inuenitur, si vis motui machinae reluctans, seu cui mouendae machina destinatur, per viam ab ea dato tempore descriptam multiplicetur. Pro hoc autem tempore hic perpetuo minutum secundum assumemus.*

In hoc momento effectus vera continetur notio effectus a machina quacunque editi. Quo celerius enim onus, seu vis resistens, mouetur, seu, quo maius fuerit spatium, per quod dato tempore promouetur, eo maior aestimatur machinae effectus, et, manente celeritate eadem, quo maior fuerit ipsa resistentia, eo maior quoque effectus censetur. Ad hoc ergo momentum definiendum primo ipsa vis resistens, quatenus motui machinae reluctatur, explorari, eiusque quantitas

 per

per pondus aequiualens exprimi debet, tum vero dispiciendum est, per quantum spatium ea dato quodam tempore promoueatur. Hinc momentum effectus ad definitum quodpiam tempus adstringitur, pro quo hic commoditatis gratia minutum secundum assumamus; ita vt hac expressione effectus vno minuto secundo editus indicetur, vnde autem facile ad quoduis aliud tempus, siquidem motus fuerit vniformis, transferri poterit. Ita si onus, cuius pondus $= Q$, sit verticaliter attollendum, idque singulis minutis secundis per altitudinem a eleuetur, erit momentum effectus $= Qa$. Sin autem onus horizontaliter promoueri debeat, eius tantum frictio superanda est, quae si aequiualeat ponderi Q, onusque pariter per spatium a singulis minutis secundis protrahatur, momentum effectus pariter erit $= Qa$. At si onus super plano inclinato sursum trahi debeat, vis resistens Q partim pondere oneris, partim frictione exprimenda erit. Quod si in molis momentum effectus sit aestimandum, indagari debet vis ad molam circumagendam requisita, cuius quidem punctum applicationis imprimis est spectandum; quod enim quo magis ab axe motus fuerit remotum, eo minor vis resistentiae superandae par erit. Quoniam vero haec vis per spatium vno minuto secundo per cursum multiplicari debet, quod in ratione distantiae ab axe crescit, productum eandem quantitatem retinebit, siue distantia illa maior minorue assumatur, vnde momentum effectus fixum obtinebit valorem. Si machina ad aquam eleuandam fuerit accommodata, ex Theoria fluidorum ostendi potest, momentum effectus inueniri, si copia aquae,

eius

eius scilicet pondus, quae singulis minutis secundis eleuatur, per totam altitudinem eleuationis multiplicetur, similique modo pro omnibus omnino casibus momentum effectus assignari poterit.

6. *Momentum impulsus simili modo reperitur, si vis machinam actu impellens multiplicetur per spatium, quod ab ea dato tempore conficitur: vbi iterum pro hoc dato tempore minutum secundum assumetur.*

Duae ergo res requiruntur ad momentum impulsus constituendum; primo scilicet ipsa vis impellens, cuius quantitatem pondere metiri licet, deinde spatium, quod ea agendo singulis minutis secundis absoluit: harumque duarum quantitatum multiplicatione momentum impulsus oritur, quod ergo homogeneum erit cum momento effectus. Circa aestimationem ipsius vis impellentis plerumque ad celeritatem, qua in machinam agit, est respiciendum; nisi enim haec vis a grauitate ponderis descendentis petatur, quod, dummodo aequabiliter descendat, perpetuo aequali vi vrget, aucta celeritate, qua in machinam agit, simul eius quantitas diminui solet, idque diuersimode pro varia virium sollicitantium natura. Ita si machina operis hominum animaliumue impellatur, eorum vis actu exerta maxime ab actionis celeritate pendet: cum enim animal vi indigeat ad se ipsum mouendum, atque omni, quo pollet, nisu adhibito se vltra certum celeritatis gradum mouere nequeat, quo propius eius actio ad hunc gradum accesserit, eo minorem vim exerere valebit, quippe quae cum illum gradum attigerit, penitus euanescet. Quare si vim impellentem aestimare velimus, minime magnitudinem conatus, quo machinam quiescentem sollicitat, tanquam eius mensuram accipere debemus, sed ad hoc iam ipsam celeritatem, qua machina mouetur, spectari oportet, vnde pro natura vis agentis eius vera quantitas definiri queat: atque hanc demum vim per viam minuto secundo percursam multiplicando obtinebimus verum momentum impulsus. Istud vis agentis decrementum a motu iam acquisito ortum clarissime perspicitur in machinis a vi illabentis aquae impulsis: quo celerius enim rota aquaria gyratur, eo minorem vim ab aqua sustinet; dum contra vis aquae in rotam quietam est maxima. Probe igitur cuiusque generis virium, quae ad machinas mouendas adhibentur, natura est exploranda, vt pro quolibet celeritatis gradu vera vis agentis quantitas assignari possit.

7. *Si machina frictione careat, eiusque motus fuerit vniformis, momentum effectus praecise aequale erit momento impulsus; ideoque ex cognito momento impulsus verus effectus eiusue momentum poterit determinari.*

Assumo hic primum, machinam frictione carere, tum vero eius motum esse vniformem, vt conseruatio motus machinae nullam vim requirat, totaque vis impellentis actio in onus promouendum impendatur. Ita enim fiet, vt superatio vis reluctantis maiorem vim non exigat, quam quae aequilibrio continendo sufficeret, propterea quod solum onus motui machinae resistentiam opponit. Cum igitur productum ex vi resistente in suam celeritatem aequale sit vi impellenti per

per ſuam celeritatem multiplicatae, haeque celeritates ſint vt ſpatia eodem tempore confecta, ſi earum loco ſpatia vno minuto ſecundo abſoluta ſubſtituamus, illa producta abeunt in momenta impulſus et effectus, prouti ea modo definiuimus, quae igitur inter ſe aequalia eſſe oportet. Hinc ſi cognita fuerit quantitas vis impellentis vna cum celeritate, qua agit, inde ſimul momentum effectus innoteſcit; ita ſi vis impellens ſit $= P$, ſpatiumque, quod ab ea ſingulis minutis ſecundis conficitur, $= p$, exprimet Pp momentum impulſus; cui cum aequale ſit momentum effectus, ſi Q deſignet reſiſtentiam oneris, et q ſpatium, per quod vno minuto ſecundo promoueatur, erit $Qq = Pp$, hincque $q = \frac{Pp}{Q}$. In hac formula nota illa aequalitas inter cauſam et effectum continetur, quatenus ea quidem rite ad actionem machinarum accommodatur; eique actioni machinarum certus terminus praefigitur, quem nunquam transgredi valeant. Pendet igitur quantitas effectus non ſolum a quantitate vis impellentis, ſed etiam a celeritate, qua agere poteſt, et quoniam vidimus, pleraſque vires, quae ad machinas agitandas adhiberi ſolent, ita eſſe comparatas, vt aucta celeritate ipſae minuantur, de quantitate effectus nihil certi definire licet, niſi exploratum ſit, qua lege quantitas vis impellentis pro ſingulis celeritatis augmentis diminuatur. Atque hinc euenire poteſt, vt manente eadem vi ſollicitante, effectus machinae plurimum variari poſſit, prout ſcilicet ea vis alia atque alia celeritate fuerit praedita, quod tamen neutiquam aequalitatem inter cauſam et effectum euertit, propterea quod in iuſta cauſae aeſtimatione ſimul celeritatis ratio haberi debet.

8.

8. *Frictio vero, quam partes machinae, dum inter se commouentur exerunt, non admodum iudicium machinarum turbat; quoniam enim motui machinae reluctatur, resistentiam oneris tantum augere est censenda, ex quo momentum effectus data quadam quantitate augeri debet, antequam momento impulsus aequale statuatur.*

Hic ex experientia assumitur frictionis quantitatem eandem manere, quantacunque celeritate machina moueatur: vnde machinae cuiusuis propositae frictio explorari potest, si remota oneris resistentia inuestigetur, quanta vi opus sit, ad machinam, dum est in quiete, vel tantillum commouendam; tanta enim vis deinceps quoque in motu, vtcunque fuerit rapidus, perpetuo ad frictionem superandam requiretur. Perinde igitur erit, ac si resistentia oneris certa quadam quantitate sit aucta, sicque commode frictio cum ipso onere coniungetur, ita vt ob frictionem resistentia oneris maior sit aestimanda, quam re vera est. Quoniam enim resistentia oneris perpetuo eadem manet, quacunque celeritate moueatur, frictio congrue ad oneris resistentiam adiicitur. Dum minus congrue propter eam vis impellens quapiam quantitate imminui conciperetur, quia haec cum celeritate motus variatur, etiamsi ratione recte instituta res eodem redeat. Atque hinc frictionis nulla ratione seorsim habita resistentia oneris ob eam aucta statim per experientiam cognosci poterit: quaecunque enim machina cum adiuncta oneris resistentia fuerit proposita, quaeratur vis, quae illi vel tantillum commouendae par sit, atque ex regulis staticis statim colligetur, quanta sit tota vis resistentiae, quae tam ex onere

onere ipſo, quam ex frictione reſultat. Quae ſi fuerit cognita, ac ponatur $= Q$, ea in momentum effectus introduci debet, cui deinceps momentum impulſus erit coaequandum, dummodo motus fuerit vniformis, prorſus vt ante eſt praeceptum. Totum ergo negotium huc redit, vt in computo ob frictionem reſiſtentia oneris data quapiam quantitate augeatur, ac momentum effectus ex hac reſiſtentia aucta determinetur, cui aeque ac ante momentum impulſus aequale ſtatui debebit.

9. *Propoſita machina cum reſiſtentia ſuperanda ante omnia indagari debet quantitas vis impellentis, quae ad eam in motu vniformi conſeruandam requiritur. Haecque inueſtigatio commodiſſime per experimenta inſtituitur, vt ſimul frictio in effectu comprehendatur.*

In hunc finem bina machinae loca praecipue ſunt notanda, vbi tam vis impellens, quam reſiſtentia oneris, applicatur, atque ex ſtructura machinae patebit, quaenam ratio, dum mouetur, inter celeritatem vis impellentis et celeritatem oneris intercedat. Quare ſi quantitas oneris, ſeu vis motui machinae reluctantis, fuerit $= Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem vis reluctantis ſit vt m ad n, quantitas vis impellentis foret $= \frac{Qn}{m}$, ſi motus machinae ob frictionem non impediretur. Quando ergo frictio adeſt, quae inſuper vinci debet, maior vis impellens requiritur, ad quam inueniendam, cum frictio difficulter a priori definiri queat, commodiſſime ad experimenta confugietur. Machina ſcilicet in quiete conſtituta ei in loco, vbi vis impellens est applicanda, vis adhibeatur, quae primo aequilibrio conseruando par sit, deinde ea sensim augeatur, quoad machinae vel minimum motum imprimere valeat; hocque modo habebitur ea ipsa vis, quae motui machinae quantumuis celeri, dummodo fuerit vniformis, conseruando sufficiet. Ob frictionem autem haec vis maior prodibit, quam $\frac{Qn}{m}$, eoque magis hanc quantitatem excedet, quo maior fuerit frictio; seu posita hac vi per experimentum inuenta $= P$, erit $P > \frac{Qn}{m}$, ideoque $P = \frac{Qn}{m} + F$, existente F eius augmento ad frictionem superandam requisito. Vel si ponatur $F = \frac{Gn}{m}$, ob $P = \frac{n}{m}(Q + G)$, frictio eundem praestabit effectum, ac si loco resistentiae Q maior resistentia $Q + G$ superari deberet. Neque vero opus est, vt in hoc experimento vis explorans P in eo ipso loco, vbi deinceps vis impellens applicari debet, applicetur; si enim in alio loco applicetur, cuius celeritas ad celeritatem in loco vis impellentis sit vt μ ad ν, eaque vis reperiatur $= \Pi$, hinc facile concludetur vera vis impellentis P quantitas, quippe quae erit $P = \Pi \frac{\mu}{\nu}$: quemadmodum ex principiis staticis est manifestum. Hoc ergo modo plura experimenta institui poterunt, quo certiores de vera quantitate vis P reddamur.

10. *Quantacunque fuerit resistentia superanda, machina semper ita instrui potest, vt data vis impellens, quae simul data celeritate agat, ei vniformiter mouendae sufficiat; vnde itaque momentum effectus sponte innotescet.*

Ex-

Exprimat Q resistentiam superandam, quae simul frictionem rite aestimatam et ad locum resistentiae reductam complectatur: deinde sit P vis impellens, quae singulis minutis secundis spatium p absoluat; quoniam enim vires, quibus machinae agitari solent, ita sunt comparatae, vt aucta actionis celeritate minuantur, de earum quantitate absolute nihil certi pronunciare licet, nisi celeritas, qua agant, simul definiatur. His positis, ex vulgaribus Mechanicae elementis constat, quemadmodum partes machinae instrui ac disponi debeant, vt vis P resistentiam Q in aequilibrio continere valeat. Efficiendum scilicet est, vt dum machina tantillum mouetur, spatia tam a vi impellente P, quam a resistentia Q percursa ipsis viribus sint reciproce proportionalia. Machina igitur ita instructa, motus quicunque vniformis maiorem vim impellentem quam P non requiret; et quia vis impellentis quantitas eatenus est $=P$, quatenus ea praescripta celeritate agit, hoc est singulis minutis secundis spatium $=p$ conficit, etiam in motu machinae vniformi haec celeritas vi impellenti conueniet. Cum igitur momentum impulsus sit $=Pp$, eidem momentum effectus erit aequale, ita si q denotet spatium, per quod resistentia Q singulis minutis secundis promouetur, quia est $Qq=Pp$, erit $q=\frac{Pp}{Q}$, sicque verus machinae effectus innotescit, siquidem motus vniformis sit capax. Quoniam vero in resistentia superanda Q frictionem sumus complexi, euidens est, quo maior fuerit frictio, eo minorem esse futurum verum machinae effectum. Hinc si frictio aequiualeat vi G in loco resistentiae applicatae, atque iam Q denotet ipſam reſiſtentiam ſuperandam, erit $Pp = (Q + G)q$, ideoque verum momentum effectus $Qq = Pp - Gq$, ſeu ob $q = \frac{Pp}{Q+G}$ erit id $Qq = \frac{PQ}{Q+G}p = \frac{Q}{Q+G} \cdot Pp$; ſcilicet in ratione $Q + G$ ad Q minus erit, quam momentum impulſus Pp.

11. *Niſi vis impellens ſit pondus deſcendens, eius quantitas a celeritate, qua agit, pendet, ita vt pro celeritate nulla ſit maxima, tum vero aucta celeritate decreſcat, donec, cum celeritas datum gradum attigerit, penitus euaneſcat; neque vnquam hunc gradum ſuperare queat.*

Iſta vis impellentis diminutio ratione auctae celeritatis clariſſime in impulſu aquae contra obicem mobilem perſpicitur. Ponamus enim obicem eſſe planum, et aquam in eum directe celeritate altitudini c debita illidere, obicisque ſuperficiem eſſe $= aa$, erit vis aquae aequalis ponderi maſſae aquae, cuius volumen eſt $= aac$, quae ſtatuatur $= A$. Iam ſi obex habeat motum, quo impulſui aquae directe cedat, eiusque celeritas debita ſit altitudini v, perinde erit, ac ſi aqua tantum celeritate $\sqrt{c} - \sqrt{v}$ illidat, cum ante celeritate $\sqrt{c}$ incurriſſet, vnde nunc vis impulſus aequabitur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= aa(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$, quae ergo ob $aac = A$ erit $= A(1 - \sqrt{\frac{v}{c}})^2$. Cum igitur haec vis euaneſcat, ſi fiat $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, eademque ſit $= A$, dum adhuc in quiete verſatur, generalius actionem huiusmodi virium ita deſcribere poterimus, vt dicamus, ſi quantitas talis vis, dum quieſcit, ſit $= A$, dum autem ſingulis minutis ſecundis ſpatium $= f$ percurrit,

percurrit, euanescat, tum si ita moueatur, vt singulis minutis secundis spatium p, existente $p<f$, absoluat, eius quantitatem fore $=A(1-\frac{p}{f})^2$. Quae etsi ex natura impulsus aquae sunt desumta, tamen latius patere, atque adeo in actione hominum animaliumque locum habere videntur; de quo eo minus dubitare licet, cum huiusmodi vires nonnisi propemodum ad calculum revocari queant. De hominibus ergo atque animalibus, quorum ope machinae agitari solent, statuemus, si hominis animalisue, dum quiescit, vis fuerit $=A$, ea vero, quando singulis minutis secundis spatium $=f$ percurrit, euanescat, tum eiusdem vim, dum ita movetur, vt singulis minutis secundis spatium $=p$ absolvat, fore $=A(1-\frac{p}{f})^2$. Quodsi ergo talis vis, dum singulis minutis secundis per spatium $=p$ fertur, ponatur $=P$, erit $P=A(1-\frac{p}{f})^2$, ac si insuper constet vis A, quam eadem vis in quiete exerit, hinc vicissim concludemus maximam eius celeritatem f, qua nullam amplius vim exeret: erit enim $1-\frac{p}{f}=\sqrt{\frac{P}{A}}$, hincque $f=\frac{p\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{P}}$, vnde natura huiusmodi virium distincte intelligitur.

12. *Si huiusmodi vis ad machinam mouendam adhibeatur, quae in quiete maior sit, quam resistentiae aequilibrium requirit, tum machina mox ad motum vniformem perducetur, quo deinceps perpetuo agitabitur, siquidem ipsa machina motus vniformis fuerit capax.*

Sit igitur haec vis impellens ita comparata, vt in quiete eius quantitas sit $=A$; dum autem singulis minutis secundis spatium $=f$ absoluit, in nihilum abeat: eiusdem ergo vis impellentis quantitas erit $=A(1-\frac{p}{f})^2$, dum minuto secundo spatium $=p$ conficiet. Sit porro tota resistentia superanda $=Q$, qua simul frictio comprehendatur, ipsaque Machina ita instructa, vt status aequilibrii vim $=\frac{n}{m}Q$ requirat. His positis, quia assumo esse $A>\frac{n}{m}Q$, statim ab initio motus machinae accelerabitur, et quoniam aucto motu vis impellens continuo imminuitur, acceleratio tamdiu durabit, quoad vis impellens quantitatem $\frac{n}{m}Q$ attigerit. Re vera quidem hoc demum tempore elapso infinito eueniet, verum plerumque mox ab initio machinae talis motus imprimetur, qui ab isto vniformitatis gradu vix parte centesima differat, qui igitur in praxi iam pro vniformi haberi poterit. Quod si euenerit, motusque iam pro vniformi haberi possit, necesse est, vt sit $A(1-\frac{p}{f})^2=\frac{n}{m}Q$ ideoque $1-\frac{p}{f}=\sqrt{\frac{nQ}{mA}}$ et $p=\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$, quae formula spatium exprimit, quod tum a vi impellente singulis secundis absoluetur; visque resistens ergo eodem tempore per spatium $=\frac{n}{m}p=\frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$ promovebitur. Vnde momentum effectus habebitur $=\frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.fQ=\frac{n}{m}(1-\sqrt{\frac{nQ}{mA}})fQ$, quo simul momentum impulsus definitur. Patet ergo, quo maioris celeritatis vis impellens fuerit capax, antequam actionem amittat, eo maiorem ab ea produci effectum; his autem casibus machina tardius ad motus vniformitatem perducetur. Ac si adeo spatium f fuerit infinitum, quo casu vis impellens constanter eandem quantitatem A retineret,

retineret, tum quidem tandem effectum in infinitum excreſcere poſſe, verum mox tam debilia incrementa acciperet, vt a leuiſſima reſiſtentia vlterior acceleratio impediri poſſet. Semper tamen caeteris paribus effectus eo maior obtinebitur, quo maius fuerit ſpatium f, etiamſi is non in eadem ratione augeri ſit cenſendus.

13. *Etiamſi igitur eadem impulſione ad eandem reſiſtentiam ſuperandam vtamur, effectus tamen plurimum a machinae indole pendebit, ſeu a ratione* m : n, *quae inter celeritates vis impellentis et reſiſtentis ſtatuitur. Haecque adeo ita temperari poterit, vt maximus effectus conſequatur.*

Quoniam pro poſitionibus modo in genere traditis inuenimus momentum effectus $= \frac{n}{m}(1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}}) f Q$, patet eius quantitatem manentibus A, f et Q plurimum a ratione $m:n$, quam ſtructura machinae praebet, pendere; ſi enim fuerit vel $\frac{n}{m} = 0$, vel $\frac{nQ}{mA} = 1$, ſeu $\frac{n}{m} = \frac{A}{Q}$ vtroque caſu effectus penitus euaneſcit. Vnde inter limites o et $\frac{A}{Q}$ dabitur valor quidam medius pro fractione $\frac{n}{m}$ capiendus, qui cum maximo effectu futurus ſit coniunctus; quem ergo potiſſimum operae pretium erit cognouiſſe. Ponamus in hunc finem $\frac{n}{m} = zz$, et huic formulae $zz - z^3 \sqrt{\frac{Q}{A}}$ maximum valorem conciliari oportebit; reperietur autem $2z - 3zz\sqrt{\frac{Q}{A}} = 0$, ideoque $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{A}{Q}}$, quare habebitur $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$; ſeu machina ita inſtrui debet, vt ſit celeritas vis impellentis ad celeritatem vis reſiſtentis vt $9Q$ ad $4A$. Quodſi ergo iſte valor

valor $\frac{4A}{9Q}$ pro fractione $\frac{n}{m}$ ſubſtituatur, fiet $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$ et $1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{1}{3}$; hincque maximum momentum effectus obtinebitur

$$\frac{4A}{9Q} \cdot \frac{1}{3} \cdot fQ = \frac{4}{27} Af.$$

Hinc igitur luculenter perſpicimus, quantopere effectus ab idonea machinae diſpoſitione pendeat, cum vnico modo iſte effectus maximus obtineri queat, ſcilicet efficiendo, vt ſit $m:n = 9Q:4A$, a qua proportione ſi machina receſſerit, ſemper minorem effectum producet, etiamſi tam vis impellens, quam vis reſiſtens, cum frictione maneant eaedem, quam ſi haec iuſta ratio obſeruetur. Interim ſi vel tantillum ab ea aberretur, detrimentum in effectu vix erit ſenſibile, quoniam maxima et minima aliquam latitudinem admittunt, id quod commode euenit, quia in praxi hanc rationem ſummo rigore vix obſeruare licet. In eo tamen erit elaborandum, vt machina, quam fieri poteſt exactiſſime, ad hanc rationem accommodetur.

14 *Si vis impellens ita ſit comparata, vt celeritate* f *omnem actionem amittat, machina ſemper maximum praeſtabit effectum, ſi ita inſtruatur, vt vis impellentis celeritas fiat pars tertia ipſius* f.

Sumo hic, vt et in ſequentibus, ſpatium vno minuto ſecundo percurſum pro menſura celeritatis; ac huiusmodi vim impellentem contemplor, cuius dum eſt in quiete quantitas ſit $= A$, quae autem celeritate f lata omni actione deſtituatur. Huius igitur vis, dum celeritate $= p$ procedit, quantitas erit $= (1 - \frac{p}{f})^2$. Quodſi

Quodsi iam resistentia ope machinae superanda sit $=Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem resistentiae ponatur $=m:n$, quae ratio a structura machinae pendet, vidimus, vt effectus maximus obtineatur, statui oportere $\frac{n}{m}=\frac{4A}{9Q}$. Tum vero pro celeritate vis impellentis nanciscimur $p=\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}f=(1-\sqrt{\frac{nQ}{mA}})f$: erit itaque ob $\sqrt{\frac{nQ}{mA}}=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}f$. Hoc autem immediate ex actione vis impellentis colligi poterit, quippe cuius momentum impulsus maximum reddi debet, vt maximum momentum effectus obtineatur. Verum si vis impellens celeritate p agere assumatur, quia tum eius quantitas est $=A(1-\frac{p}{f})^2$, erit momentum impulsus $=Ap(1-\frac{p}{f})^2$, quod maximum factum praebet $A(1-\frac{p}{f})^2=\frac{2Ap}{f}(1-\frac{p}{f})$, seu

$$1-\frac{p}{f}=\frac{2p}{f}, \text{ hincque } 3p=f \text{ et } p=\frac{1}{3}f.$$

Effectus igitur maximus produci nequit, nisi vis impellens ita agat, vt eius celeritas p sit pars tertia celeritatis f, qua omni actione priuatur. Posito autem $p=\frac{1}{3}f$, erit quantitas vis impellentis $=A(1-\frac{1}{3})^2$ $=\frac{4}{9}A$; vnde pro data vi resistente machina ita attemperari debet, vt vis $\frac{4}{9}A$ in aequilibrio consistat cum vi resistente frictione simul complexa, seu vt vis $\frac{4}{9}A$ tantum non motum machinae imprimere valeat. Scilicet si tota vis resistens sit $=Q$, celeritas vis impellentis ad celeritatem resistentis statui debet, vt $9Q$ ad $4A$, quo facto momentum effectus, ideoque et momentum impulsus erit $=\frac{4}{27}Af$, quod nullo modo maius effici po-

poterit seu fieri omnino nequit, vt ab eadem vi impellente maior effectus obtineatur.

15. *Cum ratione celeritatis, qua vis impellens agit, machina ad maximum effectum producendum fuerit instructa, frictio quoque spectari debet, quae primo, quantum fieri potest, erit diminuenda, tum vero eius effectus eo minor reddetur, quo longius vis impellens ab axe, circa quem machinam vrget, remouetur.*

Assumo ergo frictionem iam eo vsque esse minutam, vt minor fieri nequeat, et vim impellentem rotae esse applicatam, cuius radius sit $= r$, in eadem autem distantia vi opus esse F ad frictionem superandam. Iam sit Mf momentum impulsus, idque maximum, cuius vis impellens est capax; quae agat celeritate $= p$, et quia vis ad frictionem superandam requisita F, vtpote in eodem loco applicata, eadem celeritate agit, erit eius momentum $= Fp$, ideoque verum momentum effectus detracta frictione erit $= Mf - Fp$, ex quo quantitas effectus ob frictionem minutus aestimari debet. Ponamus iam, rotae illius primariae radium augeri in ratione $1 : \lambda$, ita vt vis impellens eadem nunc applicetur in distantia λr ab eius axe, et in hoc loco vi tantum opus erit $\frac{1}{\lambda}F$ ad frictionem superandam: machina autem paucis mutandis denuo ita instruatur, vt pro motu vniformi vis impellens celeritate p, cui maximum momentum impulsus respondeat, incedat, et cum frictio nunc tantum huius momenti partem $\frac{1}{\lambda}Fp$ postulet, verum momentum effectus hoc casu

casu erit $= Mf - \frac{1}{\lambda} Fp$, ideoque eo maius; quam casu praecedente, quo maior fuerit numerus λ. Hinc igitur patet fieri posse, vt ab eadem vi impellente, frictione non imminuta, multo maior effectus impetrari possit: hic autem suppono, aucto illius rotae diametro frictionem non augeri, vnde haec regula ita debet limitari, vt quatenus augenda rota hac principali frictio vel non augetur, vel saltem in minore ratione augetur, quam diameter rotae, eatenus semper conueniat hanc rotam maximam fieri. Antequam autem ad hanc regulam confugiamus, maxime interest, vt nostis artificiis frictionem, quantum quidem fieri potest, diminuere conemur; tum vero obseruatio huius regulae nihilominus maximam afferet vtilitatem, propterea quod, etiamsi frictio sit minima, ob eam momentum effectus adhuc notabiliter diminui posset, si scilicet λ denotaret fractionem valde paruam.

16. *Denique plurimum ad machinarum perfectionem confert motus vniformitas, ad quam ideo imprimis machinas instrui oportet; si enim motus non fuerit vniformis, sed per interualla modo intendatur, modo remittatur, tum effectus semper erit minor eo, qui secundum regulas praecedentes obtineri posset.*

In motus difformitate enim non solum portio vis impellentis in superanda inertia consumitur, sed etiam nonnisi maxima celeritas aequalis est ei; quam machina esset habitura, si motus foret vniformis. Namque dum motus acceleratur, vis impellens maior

 est

eſt vi ad aequilibrium requiſita, eiusque idcirco celeritas minor, quam ea, quae motui vniformi conueniret; etſi autem interdum machinae motus celerior ineſſe queat, quia tamen hoc euenit, quando machina non in totum onus agit, inde nihil omnino in augmentum effectus redundat: vtroque ergo caſu ſemper non parum de vi impellente perit, quando motus non erit vniformis. Quare in hoc potiſſimum eſt incumbendum, vt machinae, quantum fieri poteſt, motus vniformis concilietur. Hunc in finem igitur, primo rotae, quae ſe mutuo mouent, ita ſunt fabricandae, vt dum vna vniformiter mouetur, etiam reliquarum motus prodeat vniformis, id quod dentibus rotarum debita figura inducenda efficietur, quod argumentum antehac pertractaui. Deinde defectus vniformitatis imprimis eſt pertimeſcendus, quando machina piſtillis alternatim attollendis ac demittendis, vel deprimendis, deſtinatur, propterea quod corpori, quod eſt in quiete, non ſubito motus imprimi poteſt. His ergo caſibus machina ad piſtilla ita eſt applicanda, vt motus machinae non ſequatur motum piſtillorum, ſeu vt ille vniformis manere poſſit, etiamſi hic a ſtatu quietis acceleretur iterumque retardetur, qui effectus commodiſſime per brachia incuruata impetrari ſolet; dum enim huiusmodi brachium piſtillum eleuandum primum arripit, motum ſuum continuare poteſt, etiamſi piſtillum parum attollatur; id quod etiam vſu venit, quando piſtillum ad maximam altitudinem fuerit eleuatum. Quoniam autem hoc pacto piſtilla motui machinae non ſemper pari

vi

vi reluctantur, ea, ſi plura fuerint, ita diſponi oportet, vt machina quouis momento in piſtilla plura, quorum alia ſint in loco imo, alia in ſummo, aliaque in medio ſtatu verſentur, agat, ſic enim reluctantia aequabilis reddetur. Idem obſeruandum eſt in omnibus machinis, quibus motus reciproci produci ſolent; ac perpetuo, quando his tribus regulis erit ſatisfactum, certi eſſe poſſumus, machinas ad ſummum perfectionis gradum, cuius ſunt capaces, eſſe euectas.